

Wollring, Bernd

## Mathematikdidaktisches Labor: Beispiele zu realen und virtuellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule

Zentrum für Lehrerbildung <Kassel> [Hrsg.]: *Selbständiges Lernen mit Neuen Medien. Workshop der Studienwerkstätten für Lehrerbildung an der Universität Kassel am 21. Februar 2002. Kassel : Kassel Univ. Press 2002, S. 47-62. - (Reihe Studium und Forschung; 3)*



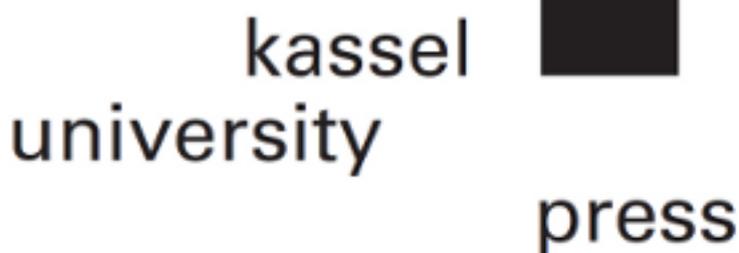
Quellenangabe/ Reference:

Wollring, Bernd: Mathematikdidaktisches Labor: Beispiele zu realen und virtuellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule - In: Zentrum für Lehrerbildung <Kassel> [Hrsg.]: *Selbständiges Lernen mit Neuen Medien. Workshop der Studienwerkstätten für Lehrerbildung an der Universität Kassel am 21. Februar 2002. Kassel : Kassel Univ. Press 2002, S. 47-62 - URN: urn:nbn:de:0111-opus-37102 - DOI: 10.25656/01:3710*

<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-opus-37102>

<https://doi.org/10.25656/01:3710>

in Kooperation mit / in cooperation with:



<http://kup.uni-kassel.de>

### Nutzungsbedingungen

Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

### Terms of use

We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document.

This document is solely intended for your personal, non-commercial use. Use of this document does not include any transfer of property rights and it is conditional to the following limitations: All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.

### Kontakt / Contact:

peDOCS  
DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation  
Informationszentrum (IZ) Bildung  
E-Mail: [pedocs@dipf.de](mailto:pedocs@dipf.de)  
Internet: [www.pedocs.de](http://www.pedocs.de)

Mitglied der

  
Leibniz-Gemeinschaft

# **Selbständiges Lernen mit Neuen Medien**

Workshop der Studienwerkstätten für  
Lehrerbildung an der Universität Kassel  
am 21. Februar 2002

Kassel 2002

Reihe Studium und Forschung, Heft 3  
Herausgeber: Zentrum für Lehrerbildung der Universität Kassel

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek  
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen  
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<http://dnb.ddb.de> abrufbar

ISBN 3-89958-007-9

© 2002, kassel university press GmbH, Kassel  
[www.upress.uni-kassel.de](http://www.upress.uni-kassel.de)

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsschutzgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Druck und Verarbeitung: Unidruckerei der Universität Kassel  
Printed in Germany

---

## INHALTSÜBERSICHT

Vorwort	5
Bernd Wollring <b>Notizen zum Einsatz von Rechnern und Software in der Schule</b>	7
Herbert Hagstedt, Christian Hartmann, Eva Valach <b>Grundschulwerkstatt: Neue Medien auf dem Prüfstand</b>	13
Frauke Stübig, Sascha Burgstedt <b>Arbeitsstelle Gymnasiale Oberstufe (ARGOS) und Sekundarschulwerkstatt: Selbstständiges Lernen im Umgang mit Lernsoftware am Beispiel "Globalisierung"</b>	21
Gerhard Gerdsmeier, Heino Kirchhof, Werner Kühnel, Uli Neustock <b>Berufsschulwerkstatt: Simulationsprogramme für den kaufmännischen Unterricht</b>	25
Claudia Finkbeiner, Markus Knierim, Sylvia Fehling <b>Lernwerkstatt Englisch: Computer Assisted Language Learning (CALL)</b>	34
Inez De Florio-Hansen <b>Lernwerkstatt Romanistik: Lehrwerke und ihre Alternativen</b>	38
Joachim Neß <b>Lernwerkstatt Technik / Kurs 1: RoboLab® – Roboterbau und -steuerung in der Grundschule und Sek I</b>	40
Monika Zolg <b>Lernwerkstatt Technik / Kurs 2: "Fahrradwelt – Virtuelle Lernumgebungen für die Verkehrserziehung von radfahrenden Kindern zwischen 8-12 Jahren"</b>	43
Bernd Wollring <b>Mathematikdidaktisches Labor: Beispiele zu realen und virtuellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule</b>	47
Rita Wodzinski <b>Lernwerkstatt Physik: Physikalische Experimente im Internet</b>	63
Verzeichnis der Studienwerkstätten	69
Verzeichnis der Workshop-TeilnehmerInnen	70

Bernd Wollring

## **Mathematikdidaktisches Labor: Beispiele zu realen und virtuellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule**

Im vorliegenden Text bezeichnet "Grundschule" stets die Form, welche die Jahrgangsstufen 1 bis 6 umfasst.

### **1 Modellbilden und Lernumgebungen im Mathematikunterricht**

Beim Konzipieren konkreter Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule, die das Bilden von Modellen erfordern, kann man ebenso virtuell dargestellte Modelle zum Lösen realer Probleme heranziehen wie reale materielle Modelle zum Lösen virtuell dargestellter Probleme nutzen. Beides tritt im Mathematikunterricht der Grundschule auf: Bei Sachaufgaben etwa kann es um das Modellieren realer Problemsituationen unter anderem mit virtuellen Werkzeugen gehen, in der Arithmetik etwa kann es um das Bearbeiten von Problemen, die im weitesten Sinne virtuell artikuliert sind, auf der Basis konkreter Handlungserfahrungen gehen.

Wir unterscheiden virtuelle Lernumgebungen, die auf Rechnern artikuliert werden, nach Spielen, Informationsumgebungen, Werkzeugumgebungen und Lehr-Lern-Umgebungen. Spiele und Lehr-Lern-Umgebungen diskutieren wir in diesem Text nicht, es erforderte eine kritische Auseinandersetzung mit einem derzeit nicht durchgehend optimalen Angebot und lässt im hier gegebenen Rahmen zu wenig Raum zur Diskussion positiver Aspekte von Informationsumgebungen und Werkzeugumgebungen.

Virtuelle Informationsumgebungen nehmen in ihrer Bedeutung auch für die Grundschule rasant zu. Sieht man das Sachrechnen und den Sachunterricht als "Erschließen der Umwelt" mit formalen und strukturierenden Modellen, so ist es sinnvoll, die den Komplex Umwelt zu differenzieren in die Lebenswelt des Kindes als erste Umwelt, die dem Kind zugängliche Erwachsenenwelt als zweite Umwelt und ferne Welten als dritte Umwelt. Alle drei Umwelten sind für Kinder gleichermaßen bedeutsam, allerdings ermöglicht fast nur die erste Umwelt das Überprüfen eigener Modellierungen durch direkte reale Erfahrungen. Die Information über die zweite und insbesondere über die dritte Umwelt ist nahezu ganz auf vermittelnde oder virtuelle Quellen angewiesen. In diesem Zusammenhang weist Wittmann (mdl. Mitteilung 2001) darauf hin, dass es zunehmend schwerer wird, eine sich schnell wandelnde Umwelt etwa in Schulbüchern für Kinder zutreffend zu beschreiben. Virtuelle Informationsquellen sind in diesem Zusammenhang nahezu das einzige Mittel, den Informationsanschluss zu sich schnell wandelnden Phänomenen zu halten. Eine Konsequenz besteht etwa darin, in Schulbuchwerken neben dem gedruckten Text direkt auf Quellen im Internet zu verweisen, mit denen Kinder aktuelle Information zu den betrachteten Sachgebieten finden. Ein altbekanntes zentrales Problem dabei gewinnt angesichts der Informationsoptionen aus dem Internet rapide an Bedeutung, das Problem der Bewertung der Quellen hinsichtlich der Kompetenz, Authentizität und Neutralität.

## 2 Virtuelle Werkzeugumgebungen

Im Gegensatz zu virtuellen Lehr-Lern-Umgebungen stellen die virtuellen Umgebungen, die wir "*Werkzeugumgebungen*" nennen, keine gegebenen Inhalte bereit, sondern unterstützen das Gestalten von Inhalten, die Lernende selbst einbringen, mit spezifischen Werkzeugen. Sie stellen ein Repertoire von Bausteinen für virtuelle Objekte bereit, die Abstraktionen realer Objekte sein können oder virtuelle Objekte eigener Art. Die Besonderheit besteht darin, dass sie diese Objekte auf bestimmte Art und Weise verfügbar machen, die in der Regel weit über die Verfügbarkeiten hinausgeht, die an entsprechenden realen Objekten bestehen. Grundlegende Verfügbarkeiten vieler virtueller Lernumgebungen sind das Bewegen und das Kopieren, speziell bei geometrischen Objekten das Verformen und das Ändern der Größe.

## 3 Ausbalanciertheit von realen und virtuellen Lernerfahrungen

Im sich abzeichnenden Wandel zu einer Informationsgesellschaft ist nicht alternativ zu entscheiden, ob der Mathematikunterricht in der Grundschule primär auf realitätsbezogene Kompetenz der Lernenden zielt, wie etwa das Bauen realer Objekte, oder primär auf virtuelle Kompetenz, etwa zum Erstellen virtueller Produkte wie Informationen, Plannungen oder programmähnlicher Konzepte.

Angesichts dieser Zielambivalenz und aus der eigenen didaktischen Position heraus vertreten wir die Auffassung, dass auch das Erlernen des Umgangs mit virtuellen Werkzeugumgebungen realitätsbezogene Erfahrungen erfordert und durch sie unterstützt wird. Ferner vertreten wir die Auffassung, dass die Grundzüge virtueller Werkzeugumgebungen nicht notwendig nur in virtuellen Lernumgebungen zu erwerben sind, sondern dass dies auch in realen Lernumgebungen geschehen kann, die entsprechende Organisationselemente aufweisen und zudem Handlungserfahrungen an konkretem Material ermöglichen. Als eine entscheidende Forderung an die Gesamtheit der Lernumgebungen im Mathematikunterricht der Grundschule stellen wir daher die nach der

*Ausbalanciertheit von realen und virtuellen Lernerfahrungen im Mathematikunterricht.*

Dies ist durch ein entsprechendes Angebot im Unterricht zu erreichen, Beispiele dazu geeignet erscheinender Lernumgebungen stellen wir im folgenden vor.

Für den Mathematikunterricht und den Sachunterricht an Grundschulen erscheint uns daher eine Gesamtheit von Lernumgebungen bedeutsam, die

- sowohl reale als auch virtuelle Handlungserfahrungen ermöglichen, die aufeinander bezogen sind,
- deren reale Handlungserfahrungen möglicherweise aus den eigenen Spielerfahrungen unterstützt werden und

- die in realen Kontexten Strukturen aufweisen, die wesentlichen charakteristischen Eigenschaften von virtuellen Lernumgebungen entsprechen.

Lernumgebungen, welche die letzte der drei Bedingungen erfüllen, nennen wir *computerbezogene Lernumgebungen*. Umgebungen, bei denen die realen und die virtuellen Objekte eng und deutlich wahrnehmbar aufeinander bezogen sind, nennen wir *real-virtuelle Lernumgebungen*.

Wir beschränken uns folgend auf Beispiele zum Geometrieunterricht in der Grundschule, da diese Unterscheidungen an solchen Umgebungen besonders günstig darzustellen sind.

#### **4 Beispiel einer computerbezogenen Lernumgebung zur Geometrie für die Grundschule: "Der Tangram-Zauberer"**

Fächerverbindendes Arbeiten in der Grundschule integriert die Anliegen von Fächern und arbeitet Gemeinsames heraus anstatt das Fachliche im Übergreifenden verloren gehen zu lassen. Wir entwerfen eine fächerverbindende Lernumgebung zur Geometrie für die Grundschule, deren mathematische Bezugspunkte Konzepte zur Kongruenz und Ähnlichkeit bilden und die computerbezogen konzipiert ist. Ausgangsmaterial bilden spezifisch strukturierte und von Grundschulkindern selbst aus Papier gefaltete Tangrams. Die fächerverbindende Aufgabenstellung fordert das Erzählen und Illustrieren von Szenen oder Bildgeschichten, in deren Figuren und Themen Konzepte der Kongruenz und Ähnlichkeit implementiert sind. Als computerbezogene Lernumgebung umfasst sie Bereiche, die dem Bildschirm bzw. Arbeitsspeicher eines Rechners einerseits und der Festplatte bzw. Diskette andererseits entsprechen. Wir beschreiben die Lernumgebung und diskutieren Eigenproduktionen von Grundschulkindern. Die folgenden Konzeptionselemente greifen ineinander, sind aber notwendigerweise aufeinanderfolgend dargestellt, was keine Reihung der Bedeutung meint. Verdeutlicht wird eine zentrale Aufgabe der Mathematikdidaktik für die Grundschule, zu mathematischen Begriffen Lernumgebungen zu konstruieren, die aktiv entdeckendes und soziales Lernen unterstützen, und diese auszuwerten.

##### **4.1 Lernumgebung zur Kongruenz und Ähnlichkeit**

Kongruenz ebener Figuren ist definiert über Bewegungen, das sind Kompositionen von Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen, Ähnlichkeit ebener Figuren über zentrische Streckungen oder deren Komposition mit Bewegungen. Diesen ursprünglich definierenden Aspekt soll die Lernumgebung für die Grundschule vorrangig erschließen: Kongruente und ähnliche Figuren sollen gewonnen werden durch Bewegen, Vergrößern, Verkleinern und durch Zusammensetzen aus kongruenten oder ähnlichen Teilfiguren. Dabei sollen die jeweils kongruenten oder ähnlichen Figuren simultan zu sehen und zu beeinflussen sein. Dies unterstützen die Optionen des Bewegens und Kopierens, wie Arbeitsumgebungen am Computer sie und entsprechend eine computerbezogene Lernumgebung anbieten.

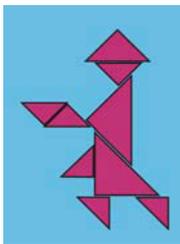
## 4.2 Computerbezogene Lernumgebung

So nennen wir wie oben charakterisiert eine Lernumgebung für die Grundschule, die einen Computer nicht materiell einbeziehen muss, die aber der Arbeitssituation am Computer in wesentlichen Teilen entspricht und so auf das Arbeiten am Computer vorbereitet oder dieses begleitend unterstützt. Wie erwähnt unterscheiden wir am Computer Spielumgebungen, Informationsumgebungen, Lehr-Lern-Umgebungen und *Werkzeugumgebungen*. Die letzteren sehen wir als die bedeutsamsten, sie sollten bereits in der Grundschule vorkommen. Kennzeichnend für sie ist, dass sie das Darstellen und Ausarbeiten vom Nutzer selbst eingebrachter Gegenstände oder Ideen durch ein Repertoire von "Tools" unterstützen, nicht aber den Nutzer durch vorgegebene Inhalte führen. Werkzeugumgebungen am Rechner sind im Zusammenhang mit materieller Peripherie das Produktionswerkzeug der Informations-Industrie-Gesellschaft schlechthin; Text-, Zeichen- und CAD-Programme sind typische Beispiele. Jede Werkzeugumgebung umfasst zwei typische *Regionen*: Die eine entspricht dem Arbeitsspeicher bzw. dem Bildschirm, dort sind die bearbeiteten Gegenstände hochgradig flüchtig, dafür aber hochgradig mit den Tools verfügbar dargestellt. Die andere entspricht der Diskette bzw. der Festplatte, dort sind die bearbeiteten Gegenstände nicht flüchtig, sondern gesichert abgelegt, dafür aber nicht mehr mit den Tools verfügbar. Der Austausch zwischen diesen Regionen erfolgt durch Speichern bzw. Laden. Wir kennzeichnen eine *computerbezogene Lernumgebung* nun allgemein dadurch, dass sie eine Arbeitsregion umfasst, die dem Arbeitsspeicher mit seiner hohen Verfügbarkeit und Flüchtigkeit der Gegenstände entspricht und eine, die der Diskette entspricht mit der geringeren Flüchtigkeit und Verfügbarkeit der Gegenstände. Für eine Arbeitsumgebung, in der einerseits kongruente und ähnliche Figuren hergestellt und flexibel geändert, andererseits zur gemeinsamen Diskussion verfügbar bewahrt werden sollen, bietet sich eine computerbezogene Lernumgebung an.

## 4.3 Tangramstücke als elementare Bausteine

Wie in einer virtuellen Umgebung entsprechend setzen wir in der geplanten computerbezogenen Lernumgebung die Objekte aus elementaren Bausteinen zusammen. Als vorstrukturiertes Material wählen wir zunächst das Tangram, ein in sieben Teile zerlegtes Quadrat. Es umfasst ein großes, ein mittleres und zwei kleinere gleichschenkelig rechtwinklige Dreiecke, die in absteigender Reihenfolge jeweils den halben Flächeninhalt aufweisen, dazu ein Parallelogramm und ein Quadrat, beide flächengleich dem mittleren Dreieck. Ein solches Tangram nennen wir *C-Tangram* in Anlehnung an seinen chinesischen Ursprung. Seine Dreiecke sind einander ähnlich. (Ein gespiegeltes Bild des Parallelogramms lässt sich nicht durch Verschieben und Drehen auf das Urbild zurück bewegen, eine Schwierigkeit bei vielen Legerätseln, da die Lage des Parallelogramms unklar ist.)

#### 4.4 Fächerverbindendes Aufgabenformat: "Der Tangram-Zauberer"



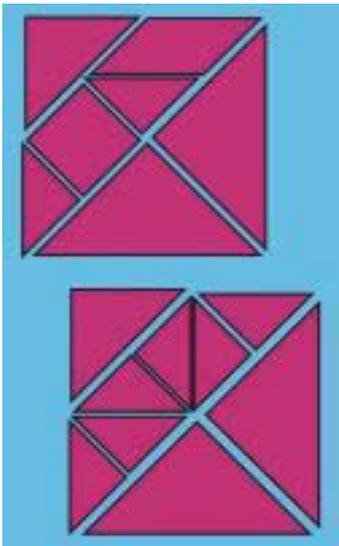
"The Tangram Magician" von Campbell-Ernst & Ernst (1990) stellt wie viele Bücher zum Tangram eine Serie klassischer Metamorphoseaufgaben: Gegebene Gestalten sind jeweils mit dem kompletten C-Tangram auszulegen, das Lösen wird durch Unterteilen der Gestalten in die Tangramstücke stark unterstützt. Herausragende Besonderheit ist die inhaltliche Rahmung: Protagonist ist ein *Tangram-Zauberer*, der sich träumend in verschiedene Gestalten verwandelt, die laufen, fliegen oder schwimmen. Jede Buchseite zeigt eine solche Figur mit einer Textzeile, die Seiten fügen sich zu einer Bildgeschichte. Unsere daran angelehnte erweiterte Aufgabe fordert von Grundschulern, solche Motive eines Tangram-Zauberers, der sich im Traum ständig verwandelt, durch selbst erstellte Bilder mit einem Kurztext zu gestalten. Die Aufgabe ist arbeitsteilig kooperativ, die Motive einer Gruppe fügen sich zu einer Bildgeschichte.

Die computerbezogene Lernumgebung dazu umfasst für jedes Kind eine Arbeitsunterlage aus schwarzem Karton im Format DIN A 3 als *Bildschirm*, auf dem die Figuren aus Tangramstücken durch loses Auflegen komponiert werden und leicht zu variieren sind, einen *Lösungsbogen* DIN A 3 als *Speicher*, auf den die gelegte Figur mit spezifischen Unterstützungen gezeichnet übertragen wird, und einem *Rätselbogen* DIN A 3, auf den nur der Umriss der gelegten Figur gezeichnet übertragen wird. Die auf dem Bildschirm gelegten Figuren sind flüchtige Zwischenprodukte. Bleibend vorgesehen ist für jedes Kind die Zusammenstellung aller Rätselbögen aus der Gruppe als Traumgeschichte und als *Rätselheft* für Auslegeversuche, bei Bedarf auch die Zusammenstellung aller Lösungsbögen als *Lösungsheft*. Dies ist der *Werksinn* der Aufgabe (Wollring, 1999).

Diese Lernumgebung integriert Ziele des Grundschulunterrichts aus den Fächern Mathematik, Sprache und Kunst. Sie schließt Elemente einer Schreibwerkstatt ein und stellt im Komponieren der Gestalten ästhetische Anforderungen. Ihre eigentliche *Kraft zum Erzeugen mathematischen Sinns* aber entfaltet sie, wenn man dem Zauberer in der Geschichte spezifische zauberhafte Fähigkeiten zuschreibt. Wir teilen die Verwandlungsgeschichte in drei Abschnitte: Der erste hat das Leitmotiv *"Es war einmal ein junger Zauberer, der träumte von fernen Welten . In seinen Träumen verwandelte er sich in verschiedene Wesen..."* Er bildet sowohl arbeitstechnisch als auch dramaturgisch die Exposition. Der zweite zielt auf Kompositionen zur Kongruenz mit Leitmotiven wie: *"Der Zauberer sieht sich im Spiegel."*, *"Er sieht sich in einem See."*, *"Er kann sich neben sich selber stellen."*, *"Er kann sich in Zwillinge verwandeln, oder in Drillinge."*, *"Er verwandelt sich in zwei Vögel."* Diese Anregungen nehmen die Kinder gerne an und erweitern sie durch eigene fantastische Motive. Der dritte Abschnitt zielt auf Kompositionen zur Ähnlichkeit: *"Nach langem Üben beherrscht der Zauberer nun einen weiteren schwierigen Trick: Er kann sich vergrößern oder verkleinern, ganz wie es ihm gefällt."*, *"Der Zauberer kann sich in seine drei Zwergfreunde verwandeln."*, *"Der Zauberer verwandelt sich in einen großen und einen kleinen Vogel"*. Damit ist die substantielle mathematische Aufgabe in die Ausgestaltung einer fantastischen Erzählung integriert.

Wesentliches unterstützendes Tool zum Komponieren bei den Aufgaben zur Kongruenz sind mehrere gleich große Tangrams für jedes Kind, bei den Aufgaben zur Ähnlichkeit mehrere verschieden große Tangrams. Das zeichnende Übertragen der Motive auf die Lösungsbögen und Rätselbögen unterstützen spezielle gegebene Zeichenschablonen.

#### 4.5 Kleineres Repertoire der Bausteine: D-Tangram und C-Tangram



Um das Komponieren ähnlicher Figuren, das zeichnende Übertragen der Motive und das eigene Herstellen der Tangrams für die Kinder zu erleichtern, benutzen wir in unserer Lernumgebung *D-Tangrams*, die nur aus Dreiecken bestehen. Viele D-Tangrams sind denkbar. Unseres entsteht aus einem C-Tangram, indem man das Quadrat diagonal in zwei Dreiecke zerlegt und das Parallelogramm in ebensolche Dreiecke.

Es hat somit zwei große, ein mittleres und sechs kleine Dreiecke. Damit lassen sich mehr Figuren komponieren als mit dem C-Tangram. Da D-Tangrams nur symmetrische Dreiecke aufwiesen, wird das Legen symmetrischer Motive durch sie stärker unterstützt. Dass jedes D-Tangram aus einer Serie ähnlicher Dreiecke besteht, unterstützt den Zugang zur Ähnlichkeit.

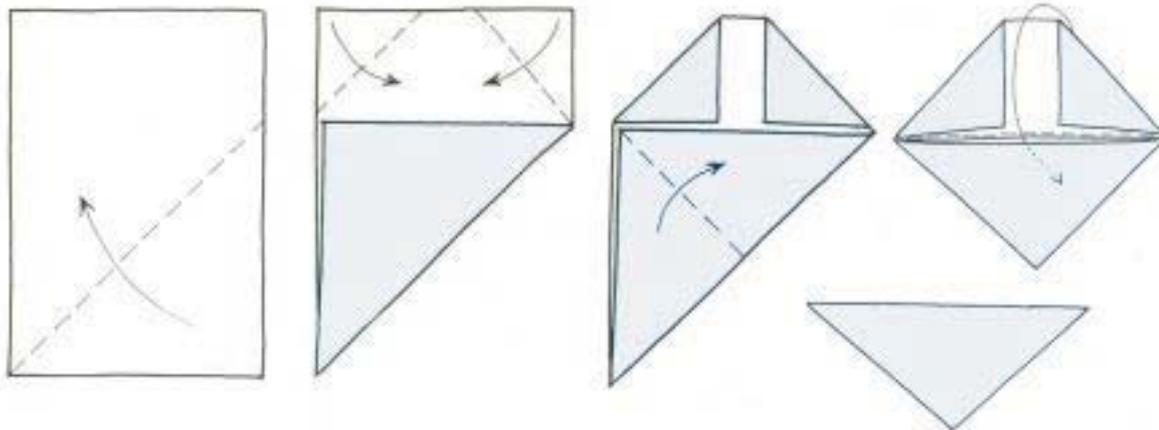
#### 4.6 Potentiell unendlich kopierbare Ressource: Gefaltete Tangrams aus rechteckigem Papier

In einer virtuellen Arbeitsumgebung lassen sich elementare Bausteine in beliebiger Auflage durch Kopieren vervielfachen. Dies hat in einer realen Umgebung Grenzen. In der hier geplanten Umgebung allerdings sind diese Grenzen durch einen Kunstgriff nahezu aufgehoben.

Denn eine geniale Option, Tangrams in passenden standardisierten Größen und in hinreichenden Mengen von Grundschulkindern selbst anfertigen zu lassen und dieses Herstellen auch noch kreativ und informativ zu gestalten, zeigen Macchi und Scaburri (1997) in ihrem Buch *"Nuovo Origami"*: Sie beschreiben dort das Falten eines C-Tangrams mit etwa 10 cm Seitenlänge aus einem einzigen geeignet zerlegten Papierbogen im Format DIN A 4. Dabei entstehen die Stücke als handliche mehrschichtige Papierkissen. Entscheidender mathematischer Hintergrund dieses Verfahrens ist, dass die Ähnlichkeit der Papierformate DIN A beim Falten in die Ähnlichkeit der Teile des Tangrams abgebildet wird.

Das Bild zeigt die von Macchi vorgeschlagene Faltung des Dreiecks. Manche Kinder kennen sie vielleicht als Motiv einer Kappe. Ein D-Tangram erfordert nur diesen einen Faltvorgang. Die verschieden großen Dreiecke entstehen aus verschiedenen großen Papierrechtecken durch jeweils die gleiche Faltung, die beiden großen Dreiecke aus Bögen DIN A6, das mittlere aus einem Bogen DIN A7, die sechs kleinen Dreiecke aus

Bögen DIN A8. Alle diese Bögen gewinnt man durch passendes Zerteilen eines einzigen Bogens DIN A4.



Dieser Punkt ist von wesentlicher Bedeutung. Er zeigt eine grundsätzliche Option, mit der das Phänomen der Ähnlichkeit geometrischer Figuren im Rahmen der Papierfaltgeometrie greifbar ist: Verschieden große ähnliche rechteckige Papierbögen werden durch das Falten abgebildet in entsprechende verschieden große ähnliche Faltoobjekte. Hier kann man den günstigen Umstand nutzen, dass der Faktor  $1/\sqrt{2}$ , mit dem sich die aufeinander folgenden Dreiecke des Tangrams verkleinern, identisch ist zu dem, mit dem sich die Größen aufeinander folgender DIN-Papiere verkleinern. Dies ermöglicht eine Querverbindung zum Themenkreis Papier im Format DIN A als Gegenstand einer sachstrukturierten Übung (Müller & Wittmann 1994).

Aus Papier gefaltete Tangrams bieten Vorteile gegenüber konfektioniertem Material: Eigene Tangrams, die sie behalten dürfen, falten die Kinder zuerst, dann erst die für den Unterricht. D-Tangrams und Ersatzteile sind leicht herzustellen, und die leicht erreichbaren großen Stückzahlen erlauben, mehrere Figuren zu komponieren oder die Tangrams durch Aufkleben auf den Bildschirmbogen zu verbrauchen.

#### 4.7 Arbeitsablauf in der Lernumgebung

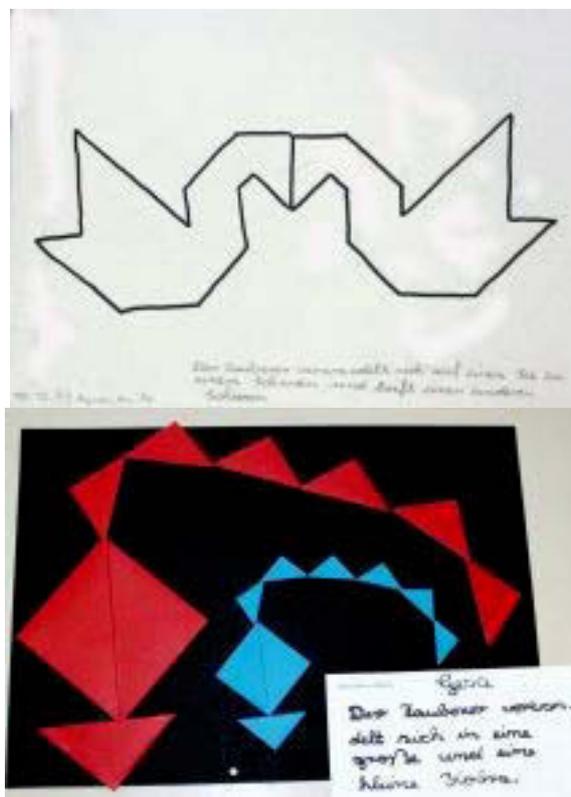
Zu Beginn stellt jeder zunächst zwei bis drei D-Tangrams aus farbigem Papier selbst her. Auf dem schwarzen Bildschirm entsteht die aktuelle Gestalt des Zauberers durch Legen. Sie kann dort leicht geändert oder als Ganzes verschoben oder gedreht werden und ist durch Wegnehmen der Teile zu löschen. Ein versehentliches Anstoßen, Anheben oder Kippen dieses Kartons entspricht recht genau dem Absturz eines Computers, der Inhalt des Bildschirms geht verloren. Auf den Lösungsbogen als wird eine aktuell gelegte Figur, die bewahrt werden soll, mit Hilfe einer Maskenschablone zeichnend übertragen und damit gespeichert. Es entsteht ein Bild, das auch die Zusammensetzung aus den Teilen des Tangrams wiedergibt. Man kann es mit den Teilen des Tangrams auslegen, das gibt ihm den Namen "Lösungsbogen". Der zu diesem Lösungsbogen entstehende "Rätselbogen" zeigt die Figur nur mit ihrem Umriss, die Zusammensetzung aus den Stücken des Tangrams ist nicht mehr dargestellt. Beim Durchpausen vom Lösungsbogen auf den Rätselbogen kann die Figur verschoben,

gedreht oder gespiegelt werden. Auf den Rätselbögen und den Lösungsbögen ist die Figur somit fixiert und nicht mehr für Veränderungen verfügbar. Sowohl die Rätselseiten als auch die Lösungsseiten erhalten jeweils die zu dem Motiv gehörenden Textzeilen und lassen sich damit zu einem Heft bündeln, das eine kleine Geschichte darstellt. Materielles Ziel der Unterrichtsreihe ist ein Rätselheft und ein Lösungsheft für jedes Kind. Am Ende der Unterrichtseinheit kann man die schönsten Zauberergestalten durch Aufkleben der Teile der Tangrams auf den Bildschirmkartons fixieren ("screen shot") und erhält als Arbeitsergebnis der gesamten Gruppe eine attraktive Plakatserie für eine Ausstellung oder ein Plakatbuch.

#### 4.8 Eigenproduktionen von Grundschulkindern

Unsere Erfahrungsbasis sind zwei sechsstündige Arbeitseinheiten mit insgesamt 50 Schülern in einer vierten Grundschulklasse und einer "Uni für Kinder" mit Hochbegabten (Leitung: A. Peter-Koop). Die Arbeitsverläufe glichen sich im wesentlichen, nur die Kurztexte der zweiten Gruppe sind deutlich anspruchsvoller.

Das Falten der Dreiecke bewältigen Kinder ab dem ersten Schuljahr, sie teilen sich die Faltarbeit teilweise in Selbstdifferenzierung. Kleinere Ungenauigkeiten der gefalteten Teile stören bei den folgenden Verwendungen nicht. Die Kinder entwerfen viele phantasievolle Gestalten, dabei entfalten sie ganz unterschiedliche Vorstellungswelten und Erfahrungsbereiche. Die Gestalten zeigen eine Entwicklungstendenz von Kompositionen aus frei gelegten Einzelteilen hin zu zusammenhängenden Figuren, deren Umriss nichttrivial auszulegen sind. Das zeichnende Übertragen mit den Schablonen gelingt problemlos, auch hier stören kleinere Ungenauigkeiten nicht.



Der Zauberer verwandelt sich auf einem See in einen Schwan und trifft einen anderen Schwan. (Agnes und Annika, 9 Jahre) Der Zauberer verwandelt sich in eine große und eine kleine Kobra (Gesa, 9 Jahre)

Ausgehend von den Märchenmotiven entwickeln die Kinder intuitiv Serien kongruenter Figuren, vorwiegend parallel verschobene Serien, aber auch gespiegelte. Auch gelingen ihnen mit Paaren ähnlicher Tangrams ähnliche Gestalten. Teilweise sind die Paare ähnlicher Gestalten so dargestellt, dass man die Strahlen der zugehörigen zentrischen Streckung einzeichnen könnte. Ein Highlight: Unter den ähnlichen Gestalten fanden sich auch solche, die eine korrekte Intuition zur Ähnlichkeit von Kurven indizieren, etwa ein Paar aus einer großen und einer kleinen Schlange.

Deutlich wird, dass die Intuitionen zur Symmetrie und zur Ähnlichkeit zu systematischen Handlungskonzepten führen. Einige Bilder belegen sowohl als Produkte als auch durch ihr Zustandekommen systematische Konstruktionsprozesse. Das reflektierende Beschreiben der Bilder belegt dies zusätzlich.

Bemerkenswert sind Figurenpaare, bei denen durch das Spiegeln einer bereits achsensymmetrischen Figur eine Gesamtfigur mit zwei Symmetrieachsen entsteht. Insgesamt ist in unseren Versuchen zu beobachten, dass die besonders begabten Kinder eher im Bereich des Legens bereits symmetrische Figuren komponieren und nicht erst beim zeichnenden Übertragen in das Lösungsheft bzw. das Rätselheft symmetrische Figuren herstellen.



Der ... junge Zauberer träumte, dass er ein Adler wurde. Er flog über viele Länder. Am Abend wurde er müde und setzte sich auf einen Baum an einem See und baute sich ein Nest. Von da oben konnte er sein Spiegelbild sehen. Am nächsten Tag flog er weiter. (Sonja, 7 Jahre)

Beim Herstellen ähnlicher Figuren finden wir in beiden Gruppen Motive, bei denen die Figur um eine Stufe verkleinert neu erscheint, und solche, bei denen sie vergrößert ist.

Dies ist bemerkenswert, weil Bögen im Format DIN A 3 nicht verfügbar waren und die Kinder sich das Herstellungskonzept der vergrößerten Dreiecke gezielt überlegen mussten. Besonders erfreulich sind Motivpaare, bei denen eine Vergrößerungs- bzw. Verkleinerungsstufe übersprungen wurde. Insgesamt ist festzuhalten, dass eine Arbeitsumgebung zur Ähnlichkeit, die nicht ein kontinuierliches sondern ein gestuftes Vergrößern oder Verkleinern unterstützt uns für die Grundschule angemessen erscheint, da die Änderungen leichter durch einzelne Gestalten zu beschreiben sind.

Bei den Paaren kongruenter Figuren geht es einigen Kindern um die Kongruenz der gesamten gelegten Figur einschließlich ihrer inneren Linien, anderen Kindern dagegen nur um die Kongruenz der Figuren, soweit sie allein durch den Umriss beschrieben sind. Kleinere metrische Abweichungen sind nach unserer Auffassung kein Hinweis auf ein gestörtes Verständnis von Kongruenz.



Der Zauberer träumte, dass er auf einem Schiff im Nordmeer ist und sich in einen Wikingen verwandelt. Der talentierte junge Zauberer konnte sich auch in größere oder kleinere Wikingen verwandeln, weil es ja nicht nur gleichgroße Wikingen gab. (Robin T., 10 Jahre)

Während bei den Gestalten der gelegten Figuren, den Paaren kongruenter und den Paaren ähnlicher Figuren aufgrund des Produktes nicht zu unterscheiden ist, ob sie von begabten oder "normalen" Kindern hergestellt sind, ist dies den Erzähltexten deutlicher anzusehen. Die "normalen" Kinder produzieren, wenn sie nicht einen spezifischen Impuls erhalten, nach unserer Erfahrung eher eine Art Motivtitel, und die einzelnen Motive bildeten bei den von uns beobachteten Kindern auch keine Geschichten.

Eine Seriation der Bilder einer Klasse ist zwar, weil es sich ja um einen Zauberer handelt, noch als eine Geschichte deutbar, aber die Erzählqualität ist doch eher untergeordnet. Im Gegensatz dazu zeigen die Texte der begabten Kinder einen markanten literarischen Anspruch und eine bemerkenswerte ästhetische Qualität. Auch ist zu beobachten, dass ein und dasselbe Kind, wenn es mehrere Bilder erstellt, eine Art Erzählkontinuität in den Motiven darlegt. Die Bilder dieser Kinder mit ihren spezifischen

Erzähltexten lassen sich deswegen nur schwer zu einer von der Gruppe insgesamt komponierten Geschichte zusammenfassen. Die Individualität der einzelnen Motive ist zu deutlich. Auch wirft die hohe Qualität der Texte dieser Kinder die Frage auf, ob vom Textmotiv zum Bildmotiv hin gedacht wurde oder umgekehrt vom Bildmotiv zum Textmotiv, wie wir es aufgrund unserer Beobachtungen bei den "normalen" Kindern vermuten.

Es macht Sinn, diesen klassischen Weg zu beschreiten und Aufgaben zur Ähnlichkeit anzugehen, nachdem die zur Kongruenz bearbeitet wurden. Zunächst wird die Erfahrung unterstützt, dass aus ähnlichen rechteckigen Ausgangspapieren auch ähnliche gefaltete Dreiecke entstehen. Was die Gestalt betrifft, ist dies für die Kinder nicht so überraschend. Wohl aber ist die Erfahrung bemerkenswert, dass der Faktor der die Vergrößerung bzw. Verkleinerung der rechteckigen Ausgangspapier beschreibt, auch die Vergrößerung bzw. Verkleinerung der daraus gefalteten Dreiecke beschreibt. Dies ist ein sehr weitreichendes Handlungsprinzip, das nicht nur in dieser Arbeitsumgebung sinnvoll zu nutzen ist. Es ist wie unsere entsprechenden Experimente belegen auch hilfreich um komplexere gefaltete Objekte durch Wahl geeigneter Ausgangsformate des Papiers zu vergrößern und zu verkleinern.

Offen bleibt, ob der auf der zentrischen Streckung basierende Ähnlichkeitsbegriff in der Grundschule unterstützt werden sollte. Ein provisorischer Ähnlichkeitsbegriff, der auf den hier verwendeten speziellen Dreiecken und den damit erzeugten Figuren basiert, steht nicht im Widerspruch zu dem auf zentrischer Streckung basierenden und bereitet ihn angemessen vor. Dass der auf zentrischer Streckung basierende Ähnlichkeitsbegriff sogar intuitiv in diesem Handlungskonzept greifbar ist, sehen wir belegt durch verschiedene Motive aus unserer Lernumgebung, bei denen die ähnlichen Figuren so arrangiert sind, dass das Zentrum der zentrischen Streckung noch innerhalb des Bildes liegt, ferner dadurch, dass wir beobachten konnten, dass die Kinder beim Herstellen dieser Figurenpaare handelnd und sprechend belegten, dass ihnen der Zusammenhang entsprechender Dreiecke sehr wohl bewusst ist und sie diese Entsprechung als auch Handlungsprinzip beim Erstellen der Figuren nutzen.

#### **4.9 Vorläufiges Fazit zum "Tangram-Zauberer"**

Alle Kinder in unseren Gruppen zeigten eine hohe Akzeptanz für diese Lernumgebung und haben nicht nur in der Schule gerne an dieser Aufgabe gearbeitet.

Mit dieser fächerverbindenden Lernumgebung werden die Anliegen des Mathematikunterrichts auch dann in hohem Maße implizit berücksichtigt, wenn man sie im Sprach- oder im Kunstunterricht startet. Zudem unterstützt sie das handlungsorientierte entdeckende Lernen, das kooperative Arbeiten und das Arbeiten mit natürlicher Differenzierung. Eingearbeitet ist auch die Dokumentation der Produkte und der damit verbundenen Konstruktionen. Eine substanzielle Abrundung erfährt das Projekt, wenn man zusätzlich fordert, das Falten der Dreiecke des Tangrams auf einem *Faltplakat* (Wollring 1999) zu dokumentieren.

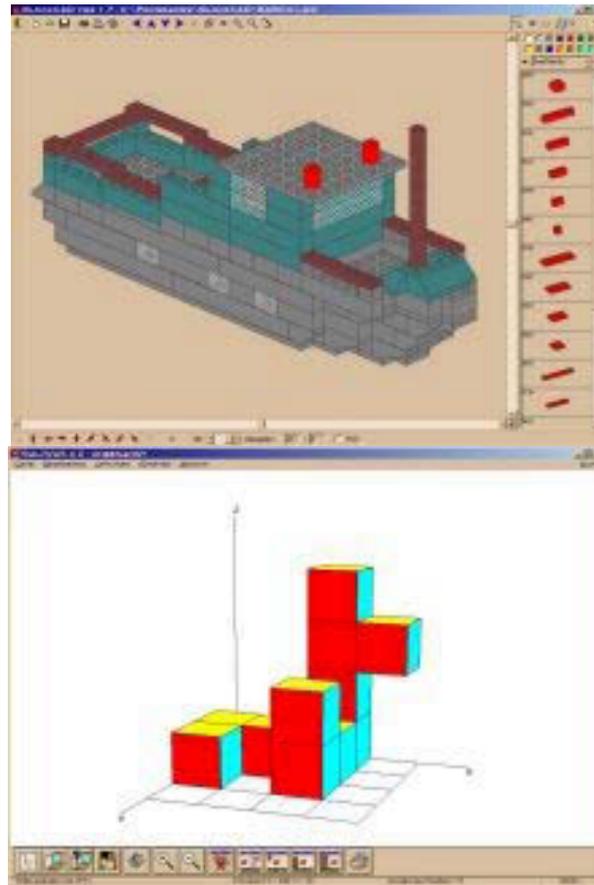
Noch kennt der Autor keine rahmende Geschichte, die in einer Lernumgebung mit der hier benannten mathematikdidaktischen Intention und materiellen Struktur auch nur annähernd die kompositorische Kreativität entfaltet wie die vom Tangram-Zauberer.

## **5 Drei Beispiele real-virtueller Lernumgebungen für die Grundschule: BlockCAD, BAUWAS und CyBones**

Während der "Tangram-Zauberer" eine computerorientierte Lernumgebung darstellt, die typische Eigenschaften von virtuellen Arbeitsumgebungen materiell darstellt, sollen folgend ganz knapp und cursorisch drei real-virtuelle Lernumgebungen zur räumlichen Geometrie für die Grundschule vorgestellt werden. Gemeinsam ist allen dreien, dass Grundschüler darin reales und virtuelles Konstruieren aufeinander bezogen durchführen können.

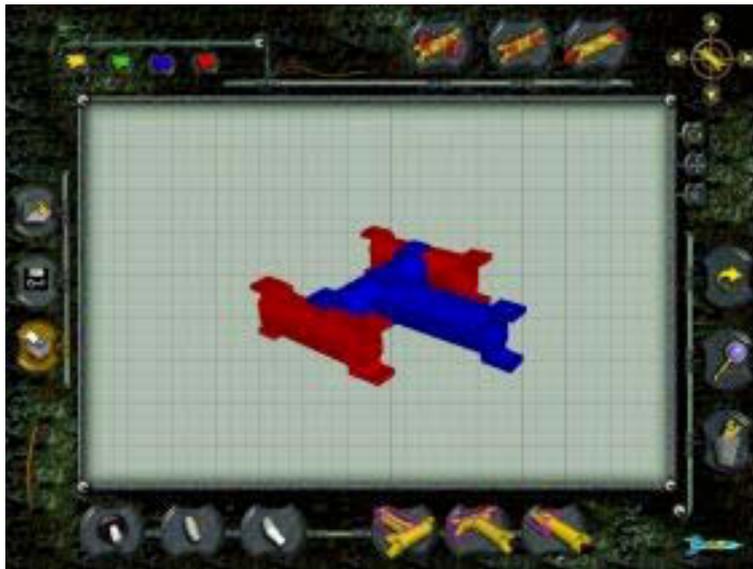
BlockCAD 1.7 ist ein Freeware-Programm zum virtuellen Bauen mit Elementen des Spielzeugsystems LEGO. Spielerfahrungen mit LEGO-Bausteinen sind hilfreich aber nicht notwendig. Es wurde von seinem Autor A. Isaksson für die eigenen Kinder konzipiert und ist kein von LEGO kommerziell vertriebenes Produkt. Das Repertoire der virtuell verfügbaren Bausteine umfasst eine umfangreiche Auswahl, die in erster Linie zum Erstellen von Gebäuden geeignet ist. Die Bausteine lassen sich setzen und löschen, das gesamte Bauwerk lässt sich mit einem eingeschränkten Zwei-Achsen-System bewegen. Die Bauwerke lassen sich laden und speichern, der Konstruktionsweg ist wiederholbar und Bilder der Bauwerke lassen sich in Texte einbinden. Insgesamt zeigt die Lernumgebung die wesentlichen Elemente einer professionellen CAD-Umgebung. Sie ist bereits für Grundschüler geeignet, A. Peter-Koop hat damit in einer von ihr geleiteten "Uni für Kinder" Architektenwettbewerb durchgeführt (Peter-Koop: mdl. Mitteilung).

BAUWAS 4.0 ist ein käufliches "Konstruktionsprogramm zur Entwicklung von Raumvorstellung". Es wurde von H. Meschenmoser zum Einsatz bei Fördermaßnahmen entwickelt. BAUWAS ermöglicht das virtuelle Konstruieren von Bauwerken aus Würfeln, die flächig aufeinander oder aneinander passen. Die Würfel lassen sich setzen und löschen, die Bauwerke sind mit zwei Pfeilpaaren in einem eingeschränkten Zwei-Achsen-System zu bewegen, sie lassen sich laden und speichern. Die virtuellen Würfelbauwerke haben im Gegensatz zu realen die Eigenschaft, dass sie beim Heraustrennen von Zwischenschichten nicht "zusammenfallen". Die Umgebung ist unkomplizierter als die von BlockCAD und für Grundschüler aller Jahrgangsstufen geeignet. Sie ist sogar zur Förderung von Kindern mit schwachen Mathematikleistungen geeignet.



Screen von BlockCAD 1.7 links, Screen von BAUWAS 4.0 rechts

"Cybones", bestehend aus CAD Software auf CD-ROM und Baumaterial, ist ein käufliches Produkt aus Israel. Das Paket umfasst ein Programm zum virtuellen Bauen mit spezifischen Bauteilen, dazu einen Kasten mit realen derartigen Bauteilen. Zentrales Bauteil ist der "Knochen", ein eckiges Rohrstück mit maulartigen Enden, das sich auf verschiedene Arten zu Verbänden zusammen clipsen lässt, dazu zwei Typen Verbinden und eine Sorte Räder.



Screen von Cybones beim Bau eines eigenen Modells



Screen von Cybones beim Nachbau eines Modells aus dem Repertoire

Die Verfügbarkeiten ähneln denen von BAUWAS und BlockCAD, allerdings ist das Design der Benutzeroberfläche nicht so professionell, sondern eher dem Trend des Zeitgeistes folgend gestaltet. Bemerkenswert sind die guten Tutorials und die genaue Entsprechung von virtuellem und realem Material und seiner Montageoptionen. Hier lassen sich virtuelle und reale Lernerfahrungen simultan und aufeinander bezogen aufbauen.

## 6 Quellen und Literatur

- Campbell-Ernst, L. & Ernst, L. (1990): The Tangram Magician. New York: Harry N. Abrams Inc. Publishers (vergriffen)
- Cybones : Maxi System : 2 CDROMs, 120 Bones, 20 Connectors, 4 Wheels, 1 Storage Case] <http://www.cybones.com>. Titan 3 Dimensional Technologies Ltd., 34 Kibbutz Galuyot St., Tel-Aviv 66550, Israel. <http://www.titan.com>
- Gallin, P. & Ruf, U. (1991): Sprache und Mathematik in der Schule. Zürich: LCH.
- Isaksson, A. (1999): BlockCAD 1.7.- [isaksson.etuna@ebox.tninet.se](mailto:isaksson.etuna@ebox.tninet.se); <http://user.tninet.se/~hbh828t/anders.htm>
- Macchi, P. & Scaburri, P. (1997): Nuovi Origami. Milano: Giovanni De Vecchi Editore.
- Maier, H. & Schweiger, F. (1999): Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht. In: Reichel, H. Ch. (Hrsg.): Mathematik für Schule und Praxis. Band 4, Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft.
- Meschenmoser, H. et al. (1999): BAUWAS 4.0 .- Copyright by MACH MIT e.V. c/o M. Handke, Trachenbergring 8, D 12249 Berlin
- Müller, G. & Wittmann, E. (1994): Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2, Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.
- Peter-Koop, A. (2001): Der Tangram-Zauberer. Mündlicher Bericht und Materialien aus der Kinderuniversität Münster in Anlehnung an Wollring
- Wollring, B. (1999): Beispiele und Arbeitsumgebungen zur Papierfaltgeometrie im mathematischen Anfangsunterricht. In: Meissner, H., Grassmann, M. & Müller-Philipp, S. (Hrsg.): Proceedings of the International Conference "Creativity in Mathematics Education". Münster, July, S. 229 – 234
- Wollring, B. (2001): "Der Tangram-Zauberer" Eine fächerverbindende computerbezogene Lernumgebung zur Geometrie in der Grundschule. In: Weiser, W. & Wollring, B.: Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt. Hamburg: Kovač.

## Der Workshop

Die Arbeitsgruppe im mathematikdidaktischen Labor war mit 6 Personen klein, aber dafür um so effizienter. Gearbeitet wurde in Paaren, und jedem konnte ein kompletter Arbeitsplatz mit Baumaterial und Rechner zur Verfügung gestellt werden. Alle Teilnehmenden haben durchgehend eigenaktiv in den Arbeitsumgebungen Studien durchgeführt. Da allen die vorgestellten Software-Programme unbekannt waren, bestand eine besondere Leistung darin, sich so weit in diese Programme einzuarbeiten, dass neben der Befähigung zum Nutzen der Programme auch eine erste Beurteilungskompetenz hinsichtlich der didaktischen Nutzbarkeit entstand. Alle Teilnehmenden haben eine Kopie der Software (free-ware) mitgenommen oder später per Post erhalten. Von sich aus haben die Teilnehmenden den Arbeitsumfang derart dicht organisiert, dass ein Besuch in anderen nahegelegenen Studienwerkstätten zeitlich nicht mehr zu realisieren war.

Neben dem unmittelbaren Informationsgewinn äußerten sich alle Teilnehmer positiv über den Kontaktgewinn, und es wurde vereinbart, im Rahmen der finanziellen und zeitlichen Möglichkeiten ähnliche Veranstaltungen an den Schulen durchzuführen, aus denen die Teilnehmenden kamen. In diesem Zusammenhang ist bemerkenswert, dass einige Teilnehmende im Dienst mit Kindern arbeiten, die Lernbehinderungen aufweisen. Sowohl in Regelschulen als auch in der Arbeit mit Lernbehinderten, so der gemeinsame Schlussbefund, sind die vorgestellten Arbeitsumgebungen effizient nutzbar.