Reiss, Kristina; Hellmich, Frank; Thomas, Joachim

Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht

Prenzel, Manfred [Hrsg.]; Doll, Jörg [Hrsg.]: Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen. Weinheim : Beltz 2002, S. 51-64. - (Zeitschrift für Pädagogik, Beiheft; 45)

urn:nbn:de:0111-opus-39386

Zeitschrift für Pädagogik · 45. Beiheft

Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen

Herausgegeben von Manfred Prenzel und Jörg Doll

Beltz Verlag · Weinheim und Basel

Herstellung: Klaus Kaltenberg
Druck: Druckhaus »Thomas Müntzer«, Bad Langensalza
Printed in Germany
ISSN 0514-2717

Bestell-Nr. 41146

Inhaltsverzeichnis

Teil II:
Lehrerexpertise und Unterrichtsmuster in Mathematik und Physik

Teil III:
Entwicklung und Evaluation von Unterrichtsmodulen und Trainingsprogrammen

Teil V:
Einstellungen und Werte als förderliche oder hinderliche Bedingungen schulischer Leistungsfähigkeit

Teil VI:
Schulforschung

Kristina Reiss/Frank Hellmich/Joachim Thomas

Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht[1]

1. Theoretischer Hintergrund

1.1 Beweisen und Begründen in der mathematikdidaktischen Diskussion

Die Frage, welches Verständnis Schülerinnen und Schüler von mathematischem Begründen und Beweisen haben, wird in der mathematikdidaktischen Forschung vielfach diskutiert. Korrektes Beweisen und die Fähigkeit zu einem logisch begründeten Vorgehen bei Problemlösungen werden als wichtige Ziele des Mathematikunterrichts angesehen. Diese Fähigkeiten bilden das Fundament der Fortentwicklung der Mathematik, sie zählen darüber hinaus zu den Basisqualifikationen, die für eine mathematische Grundbildung unerlässlich sind.

Es würde allerdings zu kurz greifen, die Fähigkeit zum Begründen, also zum logisch konsistenten Argumentieren, nur unter mathematischen Aspekten zu sehen. Vielmehr handelt es sich dabei um eine Fähigkeit, die auch fachübergreifend bedeutsam ist. Begründen, Beweisen und sachangemessen logisch Argumentieren sind zentrale Aspekte wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens. Darüber hinaus verbergen sich hinter diesen Begriffen aber auch prototypische Lernziele für einen diskursiven Unterricht. Ein solcher Unterricht betont einen rational argumentativen Dialog zwischen allen Beteiligten, also zwischen den Schülern und dem Lehrer sowie zwischen Schülern untereinander. Argumentationen und Beweise werden damit als Aspekt des Mathematikunterrichts betrachtet, der nicht nur in einzelnen, isolierten Unterrichtseinheiten thematisiert werden darf, sondern in allen Klassenstufen gepflegt werden sollte.

Die mathematikdidaktische Forschung hat in den letzten Jahren unterschiedliche Fragestellungen zu diesem Themenbereich untersucht. So gibt es Arbeiten über die Fähigkeit zum logischen Begründen bei mathematikbezogenen Problemstellungen (Healy/ Hoyles 1998; Reiss/Klieme/Heinze 2001) oder über individuelle Schemata (Harel/ Sowder 1998). Darüber hinaus werden Aspekte des Beweisens auch in Untersuchungen über mathematikbezogene Beliefs einbezogen (Törner 1998; Pehkonen/Törner 1999).

In der Bundesrepublik rückte die Frage nach dem Beweis- und Begründungsverständnis durch die TIMS-Studie in die Diskussion. Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass das durchschnittliche Leistungsniveau von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen 7 und 8 in der Bundesrepublik nur knapp unter dem Fähigkeitsniveau liegt,

1 Das Projekt wird von der DFG gefördert im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms »Bildungsqualität von Schule« (Geschäftszeichen: RE 1247/4-1).

das hinreichend für ein sicheres Verständnis von mathematischen Konzepten und Verfahren ist, wobei allerdings eine große Streuung in den Leistungen zu beobachten ist (Baumert u.a. 1997). Im Rahmen der PISA-Studie wurden diese Ergebnisse erst kürzlich bestätigt (Klieme u.a. 2001). Das hier geforderte mathematische Wissen erschöpft sich gerade nicht in abfragbaren Algorithmen, sondern beinhaltet wesentlich Prozesse des Modellierens, des Argumentierens und des Begründens (Neubrand u.a. 2001). Deutsche Schüler haben demnach Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Items, die argumentative Fähigkeiten erfordern.

Aber auch in Ländern wie z.B. Großbritannien (das im Rahmen von PISA dem oberen Leistungsbereich zugeordnet werden konnte) zeigte sich, dass Schüler Defizite im mathematikbezogenen deduktiven Schließen haben. Dies bestätigt eine Untersuchung von Healy/Hoyles (1998) mit mehr als 2400 Probanden. Die Autorinnen kommen zu dem Ergebnis, dass das Beweisverständnis bei Schülern der zehnten Klasse gering ist. Es zeigte sich, dass sie kaum in der Lage waren, einen Beweis zu führen oder in ihrer Argumentation deduktive Folgerungen zu verwenden. Stattdessen wurden häufig empirische Begründungen benutzt. Bei der eigenen Beweisführung bevorzugten sie eher einen narrativen als einen formalen Stil. Formal geführte Beweise unterscheiden sich dabei von narrativen Beweisen insbesondere durch eine verstärkte Verwendung der mathematischen Symbolsprache.

1.2 Beliefs von Schülern und Lehrern über Mathematik

Im Bereich der Mathematikdidaktik hat sich ein Forschungszweig entwickelt, der unter dem Stichwort *Beliefs* beschrieben werden kann (Törner 1998). Ergebnisse dieser Forschung zeigen einen weiteren möglichen Begründungszusammenhang für ein schwaches Abschneiden bei mathematischen Aufgabenstellungen auf. So hängen danach Erfolge beim Problemlösen nicht ausschließlich vom mathematischen Wissen und Können ab, sondern die Vorstellung von Mathematik („Belief“) muss als erklärender Faktor mit einbezogen werden.

Wenn die mathematischen Beliefs der Schüler einen zentralen Kontext für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten darstellen, so ergibt sich daraus die grundlegende Fragestellung, ob Schülervorstellungen durch Lehrer bzw. durch Unterrichtsverfahren gefördert oder sogar vermittelt werden. Erste Ergebnisse, dass die Vorstellungen von Lehrern zur Mathematik den Unterricht maßgeblich prägen, findet man bei Jacobs u.a. (1997), die den amerikanischen und japanischen Unterricht miteinander vergleichen. Darüber hinaus zeigen die Untersuchungen zu Vorstellungen über Mathematik bei Mathematiklehrern in Deutschland von Grigutsch/Raatz/Törner (1998), dass für Lehrer die Entwicklung mathematischen Wissens in einem aufgabenbezogenen Verstehens- und Erkenntnisprozess ein wesentliches Merkmal ist. Dennoch ist die dahinter liegende Mathematik ein eher statisch gesehenes Objekt, das in geeigneter Weise aufbereitet werden muss. Somit ist das Produkt zentrales Anliegen, der Prozess spielt nur als adäquater Lernprozess eine Rolle. Mathematikbezogene Beliefs sind also einerseits eine Determinante, die die konkrete Unterrichtsgestaltung beeinflusst. Sie sind darüber hinaus ein individueller Bedingungsfaktor, der in Beziehung zur mathematischen Kompetenz gesehen werden muss.

1.3 Ein Phasenmodell mathematischen Beweisens

Es besteht die Vermutung, dass mathematikbezogene Beliefs auch das Begründungsverständnis und das Führen von Beweisen beeinflussen. Dabei könnte ein möglicher Zusammenhang zwischen den Schwierigkeiten, die Schüler bei Beweisaufgaben haben, und ihren Vorstellungen über den Charakter des Beweisens in einem inadäquaten mentalen Modell des Beweisführungsprozesses liegen. Es liegt daher nahe, Problemlöseprozesse von Schülern mit denen mathematischer Experten zu vergleichen.

Ein Modell, das den Beweisprozess von Experten zusammenfasst, beschreibt Boero (1999). Er unterscheidet sechs Phasen der Beweisführung: (1) Exploration der Problemstellung, Entwicklung einer Hypothese, Identifikation möglicher Argumente; (2) Formulierung dieser Hypothese gemäß den Konventionen; (3) Exploration der Hypothese und möglichen Argumentverknüpfungen; (4) Auswahl von Argumenten und Verknüpfung in einer Kette von Deduktionsschlüssen; (5) Organisation der Argumente in einen Beweis, der den mathematischen (Publikations-)Standards entspricht; (6) Annäherung an einen formalen Beweis.

Dieser Prozess, insbesondere die explorativen Schritte, bleiben für manchen Mathematiklehrer und dementsprechend auch für Schüler weitgehend intransparent. Der Schüler sieht nur das (im Schulbuch gegebene) Endergebnis im Sinne einer eindeutigen Schlussfolgerungskette mit definiertem Anfangs- und Endzustand. Ein Einblick in das Problemlöseverhalten des Experten mit seinen explorativen Komponenten und Irrwegen bleibt ihm hingegen versagt. So gelangt der Schüler und oft schon der Lehrer zu einem idealisierten mentalen Modell der Beweisführung, das letztendlich die Entwicklung geeigneter Problemlöseheuristiken verhindert.

1.4 Mathematisches Arbeiten und das wissenschaftliche Grundverständnis

Es lassen sich hinsichtlich mathematischer Problemlöseprozesse verschiedene Parallelen zur Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens aufzeigen. Beispielsweise konnten entsprechende Forschungen zeigen, dass Fehler bei der Entwicklung und beim Prüfen von Hypothesen auf ein inadäquates metawissenschaftliches Verständnis zurückgeführt werden können. Induktionsschlüsse aus empirisch gewonnenen Daten werden danach im Sinne eines deduktiven wissenschaftlichen Modells überinterpretiert (Thomas 1997).

Betrachtet man Beweisen als Problemlöseprozess (Koedinger 1998), so findet man auch im Expertenverhalten Induktionsschlüsse. Die Sichtweise von Schülern zeigt aber die Besonderheit, dass diese induktiv gewonnenen Erkenntnisse nicht mehr durch ein deduktives Vorgehen im Sinne einer hypothetisch-deduktiven Strategie abgesichert werden (Reiss/Thomas 2000). In mehreren Studien zum wissenschaftlichen Denken im Jugendalter wurde der Einfluss inhaltlicher und formaler Plausibilität auf die Leistungen bei der Konstruktion von Hypothesen und ihrer Prüfung untersucht (Thomas/ Schillig 1996; Thomas 1997). Schüler, die sich in ihren Schlussfolgerungen auf inhaltliche Plausibilität stützten, suchten im Rahmen der Hypothesenprüfung ausschließlich Information, die ihre Hypothesen scheinbar bestätigte, auch wenn diese Information redundant war. Schüler, die in ihren Schlussfolgerungen von Inhalten abstrahierten, suchten hingegen gezielt Information, die ihre Hypothesen falsifizieren konnte. Nicht untersucht ist bisher der Zusammenhang zwischen mathematischen Kompetenzen und Aspekten des wissenschaftlichen Denkens. Es ist zu vermuten, dass beide Kompetenzbereiche nicht unabhängig voneinander sind.

1.5 Forschungsfragen und Ziele der Studie

Die bisherige Forschung zur Genese des Beweisens und Begründens im Mathematikunterricht zeigt die Bedeutung der Einbettung diesbezüglicher Ergebnisse in einen allgemeineren Kontext unterrichtlicher Bedingungen. Da die aktuelle Forschung zu Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen von der multiplen Interaktion individueller und schulischer Bedingungsfaktoren sowie von einer Multikriterialität der Effekte ausgeht, ergibt sich die Notwendigkeit einer integrativen Sichtweise der verschiedenen Einflussfaktoren.

Auf dieser Grundlage sind die Ziele der Studie eine Beschreibung wesentlicher individueller kognitiver und nicht-kognitiver Determinanten der Lösungskompetenz bei Beweisaufgaben, eine Erfassung von Unterrichtsvariablen, die für die Entwicklung des Beweisverständnisses von zentraler Bedeutung sind, und die Prüfung der Interdependenzen zwischen Unterrichtsvariablen und individuellen Variablen. Damit verbunden sind die folgenden Forschungsfragen:

- Über welche argumentativen Kompetenzen und über welches deklarative Wissen verfügen Schülerinnen und Schüler?
- Welche Rolle spielt die Kompetenz zur Beurteilung von Beweisen?
- Welche Rolle spielt das wissenschaftliche Grundverständnis für die argumentative Kompetenz?
- Haben die mathematikbezogenen Beliefs von Schülern und Lehrern einen Einfluss auf die Entwicklung des Beweisverständnisses?

2. Beschreibung der Untersuchung

2.1 Stichprobe

An der Untersuchung nahmen 358 Schülerinnen und 301 Schüler der siebten bzw. achten Jahrgangsstufe an Gymnasien aus 27 Schulklassen teil. Die Lehrerinnen und Lehrer der Klassen waren in die Untersuchung einbezogen.

2.2 Untersuchungsmethode

Die Schülerinnen und Schüler nahmen am Ende der siebten Jahrgangsstufe an einem Vortest teil. Dabei wurden Items zur Geometrie, zur Methodenkompetenz, zum wissenschaftstheoretischen Grundverständnis und zu den mathematikbezogenen Beliefs vorgegeben. Der Leistungstest für die siebte Klasse enthielt sechs Aufgaben zu Basisqualifikationen im Bereich der Geometrie, die vornehmlich elementares Begriffswissen und einfache Anwendungen abfragten. Es handelte sich insbesondere um Aufgaben zur Kongruenz und zu Winkelbeziehungen. Außerdem waren in diesem Test sieben Aufgaben zum Argumentieren und Begründen enthalten, die von der Konstruktion eines Begründungsschrittes bis hin zu der Notation mehrerer Argumentationsschritte sowie einer adäquaten Verknüpfung reichten. Die einzelnen Items wurden in Anlehnung an den gängigen Kanon der Rahmenrichtlinien und Schulbücher auf der Grundlage des Beweismodells von Boero (1999) konzipiert.

Die Aufgaben zur Erhebung der Methodenkompetenz im Hinblick auf das Begründen und Beweisen wurden bereits in einer Pilotstudie zu dieser Untersuchung verwendet. Die Idee dazu stammte aus einer Untersuchung von Healy/Hoyles (1998). Die Aufgaben wurden auf die Belange der vorliegenden Studie zugeschnitten und dem gültigen Curriculum angepasst. In diesem Test werden die Schüler aufgefordert, vier verschiedene Lösungen zu einer Beweisaufgabe (Winkelsumme im Dreieck) zu beurteilen. Eine der Aufgaben beruht auf einem empirischen Argument (Nachmessen) und ist kein mathematischer Beweis. Ebenfalls nicht korrekt ist eine Lösung, die einen Zirkelschluss enthält. Zwei andere Lösungen sind hingegen korrekt, wovon eine in eher narrativer Form und die andere in eher formaler Form aufgeschrieben ist.

Zur Bewertung von Kompetenzen im Bereich des wissenschaftlichen Denkens wurden insgesamt acht Aufgaben zum hypothetisch-deduktiven Denken konzipiert. Die Aufgaben bestanden jeweils aus zwei Teilen. Im ersten Teil der Aufgaben wurden die Schüler dazu aufgefordert, aus einer vorgegebenen Information Schlussfolgerungen bezüglich der Reduktion eines gegebenen Problemraums zu ziehen (Klahr/Dunbar 1993). Im zweiten Teil sollten sie eine Informationsanordnung auswählen, die zu einer weiteren Reduktion des Suchraums führen kann.

Zur Erfassung der Beliefs über Mathematik von Schülerinnen und Schülern wurde ein Fragebogen mit 24 Items konzipiert, der sich ganz wesentlich an die von Grigutsch u.a. (1998) entwickelten und von Klieme/Ramseier (2001) verfeinerten Instrumente anlehnt. Dabei fanden im Wesentlichen die von Grigutsch u.a. (1998) identifizierten Kategorien *Anwendung*, *Prozess*, *Schema* und *Formalismus* im Fragebogen Berücksichtigung.

Auch die Lehrer wurden zu ihren mathematikbezogenen Beliefs befragt. Dabei fand im Wesentlichen der gleiche Fragebogen Verwendung, der auch der Schülerbefragung zugrunde lag. Zusätzlich wurde nach dem bevorzugten Unterrichtsstil gefragt. Eingesetzt wurde dabei ein auf die spezifischen Belange der Untersuchung zugeschnittener Fragebogen zum Lehren und Lernen von Mathematik (Peterson u.a. 1989; Stern/Staub 2000). Der Fragebogen beinhaltete Aussagen über die Grundkonzeption von Unterricht. Die Lehrerinnen und Lehrer sollten Einschätzungen hinsichtlich ihrer Einstellung und ihres Wissens über Instruktion (fragend-entwickelnd bzw. diskursiv) sowie über das Lernen abgeben.

3. Ergebnisse

3.1 Individuelle Bedingungen und Leistungsvariablen in Klasse 7/8

Basiskompetenzen, Beweisverständnis und argumentative Kompetenz
Im Leistungstest Geometrie lösen die Schüler im Mittel Aufgaben zu Basiskompetenzen (M = 7,4; s = 2,5; maximal 12 Punkte) deutlich besser als Aufgaben zu Kompetenzen im Bereich des Argumentierens und Begründens (M = 5,2; s = 3,7; maximal 14 Punkte). Bei den Aufgaben, die eher Argumentieren bzw. Beweisen verlangen, können noch einmal zwei Typen entsprechend der Schwierigkeit der Aufgabenstellung unterschieden werden. So werden Aufgaben, bei denen die Argumentation eine einfache Identifizierung und Anwendung gelernter Begriffe verlangt (z.B. des Begriffs „Scheitelwinkel" und einer Rechnung damit), noch relativ gut gelöst. Ein eigenständiges Zusammenfügen verschiedener Fakten in eine Argumentationskette wird hingegen eher nicht geleistet.

In Anlehnung an die Stufen mathematischer Kompetenz, die Klieme (2000) bei der Bearbeitung von TIMSS-Items in der Sekundarstufe II herausstellen konnte, lassen sich hinsichtlich der beiden Subtests zu geometrischen Qualifikationen in unserer Untersuchung drei Kompetenzstufen identifizieren. Es zeigt sich, dass die theoretische Einordnung der Items in die oben beschriebenen Kompetenzstufen (Basiswissen, einfache anwendungsbezogene Argumentationen, komplexere Argumentationsketten) durch die empirischen Daten gestützt wird. Dabei erfolgte die Einordnung der Items in die Kategorien aufgrund mathematikdidaktischer Kriterien. In Bezug auf die Mittelwerte erhält man die in Tabelle 1 dargestellte Einteilung. Die Zahlen bedeuten jeweils die Lösungswahrscheinlichkeiten über alle Items der entsprechenden Stufe.

Tab. 1: ***Kompetenzstufenmodell***

	Kompetenzstufe I Einfaches Anwenden von Regeln und elementares Schlussfolgern M = 0,69	Kompetenzstufe II Argumentieren und Begründen (einschrittig) M = 0,56	Kompetenzstufe III Argumentieren und Begründen (mehrschrittig) M = 0,24
unteres Leistungsdrittel N = 238	0,51	0,22	0,00
mittleres Leistungsdrittel N = 215	0,72	0,61	0,18
oberes Leistungsdrittel N = 206	0,85	0,89	0,50

In der ersten Kompetenzstufe werden keinerlei formale Argumentationen gefordert. Vielmehr steht das Anwenden von Begriffen und Regeln im Vordergrund. Diese Stufe zeigt in allen Leistungsgruppen einen gewissen Anteil korrekter Lösungen, insbesondere stellen die Aufgaben auch für Schüler im unteren Leistungsdrittel keine Überforderung dar. Es wird bei Aufgaben der Kompetenzstufe I einfaches Basiswissen im Bereich der Geometrie vorausgesetzt, zum Teil müssen elementare arithmetische Operationen angewendet werden.

Die Aufgaben der zweiten Kompetenzstufe werden insbesondere im unteren Leistungsdrittel von deutlich weniger Schülern gelöst. Die erfolgreiche Bearbeitung dieser Items setzt bereits Begriffs- und Faktenwissen im Bereich der Mittelstufengeometrie voraus, das darüber hinaus auf Problemsituationen angewendet und passend notiert werden muss. Auch hier zeigt das obere Leistungsdrittel eine deutliche Sicherheit im Umgang mit den Anforderungen.

Die Aufgaben der dritten Kompetenzstufe werden fast ausschließlich von Schülern im oberen Leistungsdrittel angemessen bearbeitet. Neben der adäquaten Notation von Argumenten und Begründungen zu einem Beweisschritt, ist diese Teilstichprobe in der Lage, Argumente sinnvoll zu verknüpfen. Auf dieser Stufe wird eigenständiges, zum Teil auch kreatives Problemlösen und Argumentieren verlangt.

Ein wesentliches Ergebnis in Bezug auf den Leistungstest sind die erheblichen Unterschiede zwischen einzelnen Klassen. Bei einer Punktzahl von insgesamt 26 Punkten (je zwei maximal erreichbare Punkte pro Aufgabe) liegen die Mittelwerte der Klassenergebnisse zwischen $M_{min} = 5{,}67$ und $M_{max} = 17{,}60$ Punkten. Insgesamt liegt der Mittelwert über alle 27 Klassen bei $M = 12{,}42$ ($s = 3{,}07$). In den drei schwächsten Klassen wurden (mit Ausnahme nur einer Person) von den Schülerinnen und Schülern jeweils weniger als die Hälfte der möglichen Punkte erreicht. Es gibt in diesen Klassen somit keine vergleichsweise starken Schüler ($M = 6{,}13$; $s = 3{,}02$; Minimum = 1; Maximum = 14), wohingegen in den drei leistungsstärksten Klassen eine breite Fächerung der Leistungen gegeben ist ($M = 16{,}66$; $s = 4{,}25$; Minimum = 5,5; Maximum = 24,5). Die einfacheren Aufgaben werden von den stärkeren Klassen gut bis sehr gut, von den schwächeren Klassen immer noch zufriedenstellend gelöst. Unterschiede ergeben sich aber bei Aufgaben, deren Lösung Argumentationen erfordert. Dies entspricht den Aufgaben der Kompetenzstufen II und III. Hier gibt es bei den Schülern der schwächeren Klassen kaum noch korrekte Lösungen. Hochsignifikante Unterschiede im argumentativen und begründenden Verhalten liegen zwischen leistungsschwächeren und leistungsstärkeren Klassen vor ($t = 13{,}81$; $df = 436$; $p < 0{,}001$). Die Art der Antworten zeigt, dass die Inhalte des Tests allen Schülern vertraut sind, die Inhalte also in allen Klassen im Unterricht behandelt worden waren.

Unterschiede zwischen leistungsstärkeren und leistungsschwächeren Klassen konnten weiterhin im argumentativen Verhalten in Bezug auf einfache Rechenaufgaben festgestellt werden. Bei prinzipiell korrekt gelösten Aufgaben, in denen der Aufgabentext nur nach einem Ergebnis, nicht aber nach einer Herleitung verlangte, begründeten Schüler aus leistungsstärkeren Klassen ihre Rechnungen signifikant häufiger als Schüler aus leistungsschwächeren Klassen ($t = 10{,}02$; $df = 408$; $p < 0{,}001$). Schüler, die auch einfache Rechnungen begründeten, lösten andererseits die schwierigeren Aufgaben signifikant besser als Schüler, die nur ein (korrektes) Ergebnis nannten ($t = 48{,}52$; $df = 254$; $p < 0{,}001$). Die Ergebnisse deuten an, dass ein Klassenklima, in dem argumentative Prozesse gefördert werden, zu besseren Leistungen führt.

Methodenkompetenz im Bereich des Beweisens

Bei den Lösungen der Aufgaben zur Methodenkompetenz zeigt sich, dass es den Schülern insbesondere schwer fällt, nicht korrekte bzw. nicht allgemein gültige Argumentationen als (im Sinne eines mathematischen Beweises) nicht korrekt zu identifizieren. Während korrekte Beweise mit einer Lösungswahrscheinlichkeit von $w_k = 0{,}67$ als korrekt identifiziert werden, werden nicht korrekte Argumentationen nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $w_f = 0{,}35$ als fehlerhaft bzw. empirisch erkannt.

Darüber hinaus wird allein aus den Unterschieden in den Mittelwerten deutlich, dass die Beurteilung von Beweisen wesentlich einfacher als eigenständiges Formulieren von Beweisen ist. In Bezug auf normierte Werte ergibt sich für die Methodenkompetenz ein Mittelwert von $M = 0{,}51$ mit $s = 0{,}21$. Für die Kompetenz im Bereich des Argumentierens und Begründens (betrachtet als Lösungswahrscheinlichkeit für Aufgaben der dritten Kompetenzstufe) war der entsprechende Mittelwert $M = 0{,}24$ mit $s = 0{,}26$. Selbst wenn man die Lösungswahrscheinlichkeiten der Aufgaben in der zweiten und dritten Kompetenzstufe zusammenfasst, zeigt sich bei einem Mittelwert von $M = 0{,}37$ mit $s = 0{,}26$ ein klarer Unterschied zu den Aufgaben zur Methodenkompetenz. Es können damit sowohl Ergebnisse von Healy/Hoyles (1998; 10. Schuljahr) als auch eigene Ergebnisse (Reiss/Klieme/Heinze 2001; 13. Schuljahr) für die 7. Jahrgangsstufe repliziert werden.

Kompetenzen im wissenschaftlichen Denken

Wie bereits in anderen Studien gezeigt wurde, lassen sich Schüler bei der Lösung von Aufgaben zum wissenschaftlichen Denken häufig von plausiblen Argumenten leiten, die nicht logisch und zwingend aus der Aufgabenstellung geschlossen werden können (Thomas 1997). Dies wurde in der vorliegenden Untersuchung bestätigt. So konnten die Schüler vor allem Aufgaben richtig lösen, bei denen die korrekte Lösung auch inhaltlich plausibel war. Ein großer Teil der Schülerinnen und Schüler versagte bei Aufgaben, bei denen die inhaltliche Plausibilität keine Lösungshilfe darstellte. Es gab kaum Schüler, die Aufgaben mit verfremdeten Inhalten lösen konnten, aber bei Aufgaben versagten, die plausible Inhalte aufwiesen ($\chi^2 = 144{,}94$; $p < 0{,}01$). Tabelle 2 zeigt die Prozentanteile in Bezug auf die Verteilung der Lösungen bei Aufgaben mit verfremdeten und plausiblen Inhalten. Danach werden die verfremdeten Aufgaben nur von einem Viertel der Schüler vollständig korrekt gelöst, während mehr als die Hälfte mit diesen Aufgaben nichts anfangen kann. Nur ein geringer Teil löst verfremdete Aufgaben korrekt und macht gleichzeitig Fehler bei den plausiblen Aufgabenstellungen.

Tab. 2: **Verteilung der Lösungen bei Aufgaben mit verfremdeten und plausiblen Inhalten (in %)**

	verfremdete Aufgaben nicht gelöst	verfremdete Aufgaben teilweise gelöst	verfremdete Aufgaben vollständig gelöst
plausible Aufgaben nicht gelöst	24,7	3,3	1,7
plausible Aufgaben teilweise gelöst	16,8	8,2	6,5
plausible Aufgaben gelöst	12,1	8,5	18,1

Ein weiterer Aspekt der Untersuchung war die Betrachtung des Zusammenhangs der Fähigkeiten zum wissenschaftlichen Denken auf die Leistungen der Schüler beim Begründen und Beweisen. Wie Tabelle 3 zeigt, sind Schüler, die über formale Strategien im wissenschaftlichen Denken verfügen, den Schülern, die sich im Wesentlichen von inhaltlichen Plausibilitätserwägungen leiten lassen, auf allen Kompetenzstufen überlegen. Besonders deutlich wird dieser Unterschied bei Aufgaben der Kompetenzstufe III. Die Leistungsunterschiede sind moderat, aber stabil.

Tab. 3: **Lösungsraten der einzelnen Kompetenzstufen des Geometrieleistungstests in Abhängigkeit von der Verfügbarkeit formaler Lösungsstrategien bei den Aufgaben zum wissenschaftlichen Denken**

	Kompetenzstufe I Einfaches Anwenden von Regeln und elementares Schlussfolgern M = 0,69	Kompetenzstufe II Argumentieren und Begründen (einschrittig) M = 0,56	Kompetenzstufe III Argumentieren und Begründen (mehrschrittig) M = 0,24
keine formale Strategie verfügbar N = 354	0,67	0,54	0,20
formale Strategie in Ansätzen verfügbar N = 132	0,66	0,55	0,21
formale Strategie vollständig verfügbar N = 173	0,74	0,60	0,33

Schülerbeliefs über Mathematik

In der Auswertung des Fragebogens per Faktorenanalyse ergaben sich fünf Faktoren. Die Klassifikation der Items repliziert im Wesentlichen die von Klieme/Ramseier (2001) sowie die von Grigutsch/Raatz/Törner (1998) gefundene Struktur. Als Hauptfaktoren werden die mathematikbezogenen Beliefs Anwendung, Exaktheit und Prozess identifiziert.

Ein signifikanter Zusammenhang zwischen Schülerleistungen und Schülerbeliefs lässt sich für die Aspekte Anwendungs- und Prozessorientierung nachweisen, er ist allerdings eher gering ($r_\tau = 0{,}055$; $p < 0{,}05$). Dieses Ergebnis korrespondiert mit den Ergebnissen der TIMS-Studie, die sich auf Schüler der Abschlussklassen beziehen (Köller u.a. 2000). Die Ergebnisse von TIMSS legen nahe, dass die Beliefs nicht direkt, sondern vor allem über Mediatorvariablen wie Interesse und Motivation auf den Unterricht wirken.

Insgesamt sind die Beliefs zum Mathematikunterricht positiv geprägt. Dominierend ist dabei die Auffassung, dass Mathematik wesentlich durch Exaktheit bzw. Formalismus geprägt ist. Weniger bestimmend ist die Meinung, dass Mathematik durch ihre Anwendungen geprägt ist, noch weniger wird das Prozesshafte in der Mathematik von den Schülerinnen und Schülern gesehen. Diese Auffassungen finden sich in ganz ähnlicher Ausprägung durchgängig in allen untersuchten Klassen. Sie sind unabhängig von Ergebnissen des Leistungstests, d.h. stärkere und schwächere Klassen unterscheiden sich in dieser Beziehung wenig.

Ordnet man den jeweiligen, faktorenanalytisch identifizierten Beliefs Werte zwischen –1 (völlige Ablehnung) und 1 (völlige Zustimmung) zu, dann ergeben sich für die Aspekte Anwendungsbezug (A), Exaktheit (E) und Prozessorientierung (P) im Durchschnitt die Werte A = 0,34, E = 0,55 und P = 0,25. Für Schüler aus Klassen im unteren Leistungsdrittel sind die Werte A = 0,33, E = 0,57 und P = 0,25, für Schüler aus Klassen im mittleren Leistungsdrittel bekommt man A = 0,33, E = 0,57 und P = 0,27 und für Schüler aus Klassen im oberen Leistungsdrittel ergibt sich A = 0,35, E = 0,53 und P = 0,21. Damit besteht sowohl bei den stärkeren als auch bei den schwächeren Klassen ein recht einheitliches Bild von Mathematik, das wesentlich durch Formalismus und Exaktheit geprägt ist.

3.2 Unterrichtsbezogene Bedingungsfaktoren in Klasse 7/8

Lehrerbeliefs über Mathematik

Im Wesentlichen wurde für die Befragung der Lehrerinnen und Lehrer der gleiche (jedoch an diese Population angepasste) Fragebogen verwendet, wie er auch der Schülerbefragung zugrunde lag. Bei Betrachtung der mathematikbezogenen Beliefs der Lehrer der 7./8. Klassen ergeben sich deutliche Unterschiede zu den Schülerbeliefs, dies betrifft insbesondere die Aspekte Formalismus ($t = 4{,}77$; $df = 679$; $p < 0{,}001$) sowie den Prozesscharakter von Mathematik ($t = 3{,}03$; $df = 679$; $p < 0{,}01$). Lehrer, die im oberen Drittel, also in den leistungsstärkeren Klassen unterrichten, zeigen relativ ähnliche Werte in den drei Bereichen Anwendungsbezug, Exaktheit und Prozessorientierung, nämlich A = 0,37, E = 0,29 und P = 0,38. Für Lehrer des mittleren Leistungsdrittels ergeben sich die Werte A = 0,41, E = 0,26 und P = 0,52, und für Lehrer des unteren Leistungsdrittels ergeben sich A = 0,63, E = 0,18 und P = 0,68. Abbildung 1 zeigt die Unterschiede.

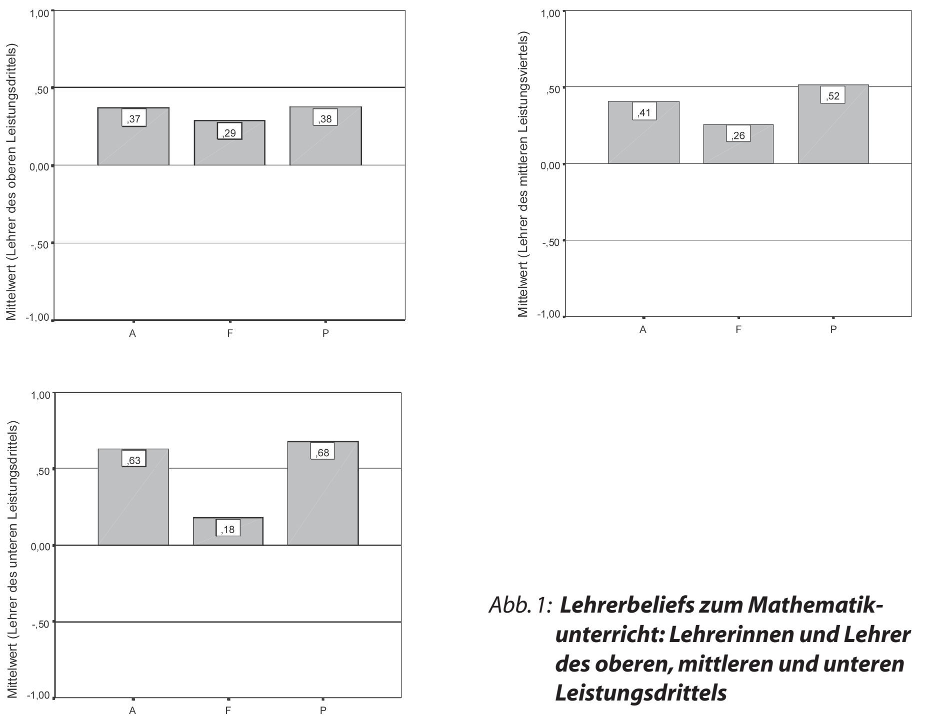

Abb. 1: ***Lehrerbeliefs zum Mathematikunterricht: Lehrerinnen und Lehrer des oberen, mittleren und unteren Leistungsdrittels***

Lehrer der Klassen im mittleren und unteren Leistungsdrittel sehen in stärkerem Maße die Anwendungsorientierung und den Prozessaspekt der Mathematik, wohingegen die Exaktheit von Mathematik eher in den Hintergrund tritt. Demgegenüber vertreten die Lehrer der leistungsstärkeren Klassen ein relativ ausgewogenes Bild von Mathematik, bei dem alle drei Aspekte als bedeutsam gesehen werden. Diese deutlichen Unterschiede zwischen den Gruppen sind wegen der geringen Zahl der beteiligten Lehrer nicht signifikant. Lehrer des unteren Drittels und Lehrer des oberen Drittels unterscheiden sich allerdings auf einem Niveau von $p < 0{,}05$ hinsichtlich ihrer Meinung zu der Prozesshaftigkeit von Mathematik voneinander ($t = 2{,}89$; $df = 12$; $p = 0{,}014$).

Unterrichtsstil

Die Ergebnisse zeigen eine deutliche Tendenz zu einem problemlöseorientierten Unterricht ($M = 0{,}61$; auf einer Skala, bei der 1 Zustimmung und –1 Ablehnung bedeutet), fragend-entwickelnde Verfahren werden von den meisten Lehrern abgelehnt ($M = –0{,}25$). Der Unterschied zwischen diesen beiden Positionen ist deutlich zu erkennen. Auch in diesem Zusammenhang wurden die Lehrer, die in den verschiedenen Leistungsgruppen unterrichten, getrennt betrachtet. Die Ergebnisse zeigen keine Unterschiede zwischen den Gruppen. Auch diese Ergebnisse werden zur Zeit durch Unterrichtsbeobachtungen validiert. Erste Auswertungen zeigen allerdings, dass problemlöseorientierter Unterricht eher die Ausnahme ist. Vielmehr werden lehrerzentrierte Unterrichtsformen angewendet, bei denen häufig das fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch das Geschehen im Klassenzimmer dominiert.

4. Diskussion

Die Studie zeigt, dass argumentative Kompetenzen bei den Schülerinnen und Schülern der siebten Klasse wenig ausgeprägt sind. Obwohl im Unterricht dieser Klasse die Thematik des Beweisens und Begründens behandelt wird, ist die Lösung entsprechender Aufgaben mit großen Schwierigkeiten verbunden. Weit besser sind zu diesem Zeitpunkt die notwendigen Basisfähigkeiten im Bereich der Geometrie erworben. Einfache mathematische Begriffe und Konzepte werden von einem großen Teil korrekt angewendet, mathematische Fakten können abgerufen werden. Diese Befunde bestätigen bisherige Forschungsergebnisse in verschiedener Hinsicht. So passen sie sich für den Bereich mathematischen Argumentierens in die Ergebnisse der PISA-Studie ein (Klieme/Neubrand/Lüdtke 2001). Dabei konnte insbesondere auch das im Rahmen von TIMSS (Klieme 2000) aufgestellte und im Rahmen von PISA (Klieme u.a. 2001) weiter ausgearbeitete Kompetenzstufenmodell auf diesen Anforderungsbereich übertragen werden. Mathematische Kompetenz im Begründen und Beweisen baut damit zunächst auf einem sicheren Umgang mit (deklarativem) Basiswissen auf, das durch Kenntnisse in der Verwendung geeigneter Arbeitsmethoden ergänzt wird. Andererseits konnten Ergebnisse von Healy und Hoyles (1998) und Reiss u.a. (2001) auf die relativ junge Population von Schülern der siebten Jahrgangsstufe übertragen werden.

In Bezug auf die Methodenkompetenz konnte gezeigt werden, dass es für Schüler der Sekundarstufe I schwieriger ist, nicht korrekte gegenüber korrekt geführten Beweisen zu identifizieren. Diese Ergebnisse ergänzen andere Befunde. Sie replizieren Befunde mit Schülern der Sekundarstufe II (Reiss/Klieme/ Heinze 2001) sowie auch solche von Healy/Hoyles (1998) mit Schülern am Ende der Sekundarstufe I. Unklar bleibt, warum korrekte und nicht-korrekte Beweise unterschiedlich beurteilt werden. Hier ist zu vermuten, dass der Charakter mathematischer Beweise im Unterricht nicht deutlich geworden ist. Darüber hinaus kann vermutet werden, dass Beweisen in der Schule vom Lehrer präsentiert und als fehlerfreier Prozess dargestellt wird. Erste Auswertungen der Unterrichtsbeobachtungen machen eine solche Interpretation jedenfalls wahrscheinlich. Entsprechend ist zu vermuten, dass die bei Boero (1999) geschilderten und für den Beweisprozess des Experten unabdingbaren explorativen Phasen im Mathematikunterricht keine wesentliche Rolle spielen.

Das wissenschaftliche Denken ist auch in dieser Altersgruppe eng mit der Plausibilität von Aussagen verknüpft. Hypothetisches Denken und deduktives Schließen auf der Basis von Hypothesen wird nur von wenigen Schülerinnen und Schülern geleistet. Für die mathematische Kompetenz scheinen diese Fähigkeiten eine Rolle zu spielen, die Effekte sind allerdings moderat. Mathematische Kompetenz scheint durch ein Faktorenbündel bestimmt zu sein, dessen Zusammenwirken wenig geklärt ist.

Die Rolle der mathematikbezogenen Beliefs kann aus den Daten der vorliegenden Studie nur teilweise diskutiert werden. Auffällig ist, dass die Schüler unabhängig von ihrer persönlichen Kompetenz ein Bild von Mathematik haben, dass durch Exaktheit und Formalismus bestimmt ist. Ganz anders sehen die Lehrer dieser Klassen Mathematik. Auch wenn die kleine Zahl der beteiligten Lehrer der Interpretation enge Grenzen setzt, erstaunt doch der systematische Unterschied zwischen den Gruppen. Er würde nahe legen, dass eine ausgewogene Berücksichtigung der verschiedenen Aspekte mathematischen Arbeitens mit dem Unterrichtserfolg zusammen hängt. Es stellt sich allerdings die Frage, ob die geäußerten Beurteilungen der Mathematik den konkreten Unterricht der Lehrkräfte beeinflussen.

Diese Frage gewinnt auch vor dem Hintergrund der Widersprüche zwischen den konkreten Unterrichtsbeobachtungen, die im Wesentlichen einen lehrerzentrierten, fragend-entwickelnd geführten Unterricht zeigen, und der von den Lehrern geäußerten eindeutigen Bevorzugung eines problem-lösenden Unterrichts vor dem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch an Bedeutung. Das Ergebnis muss wohl zunächst dahingehend interpretiert werden, dass den Lehrern sehr wohl bewusst ist, welcher Unterrichtsstil in der mathematikdidaktischen Diskussion präferiert wird. Unklar ist, ob ihnen die Diskrepanz zwischen der eigenen Unterrichtsgestaltung und diesem gewünschten Ideal deutlich ist.

Die bedeutende Rolle des Lehrers und seines Unterrichtsstils scheint allerdings auch aus den Ergebnissen dieser Untersuchung ableitbar zu sein. Dafür sprechen nicht nur die deutlichen Leistungsunterschiede zwischen einzelnen Klassen. Dafür spricht auch, dass in den besseren Klassen ganz allgemein das Argumentieren und Begründen eine wichtige Rolle zu spielen scheint. Man kann vermuten, dass es so etwas wie ein diskursiv orientiertes Klassenklima gibt, das einen positiven Einfluss auf die mathematische Leistung hat. Weitere Unterrichtsbeobachtungen und ihre Auswertung im Rahmen der hier vorgestellten Studie sollen zur Klärung dieser Vermutung beitragen.

Literatur

Baumert, J./Lehmann, R. u.a. (Hrsg.) (1997): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske + Budrich.

Boero, P. (1999): Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. In: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, S. 7–8.

Grigutsch, S./Raatz, U./Törner,G. (1998): Mathematische Weltbilder bei Mathematiklehrern. In: Journal für Mathematikdidaktik 19, S. 3–45.

Harel, G./Sowder, L. (1998): Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In: Schoenfeld, A.H./Kaput, J./Dubinsky, E. (Hrsg.): Research in Collegiate Mathematics Education. Providence, RI: American Mathematical Society, S. 234–283.

Healy, L./Hoyles, C. (1998): Justifying and proving in school mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey. Mathematical Science. London: Institute of Education, University of London.

Jacobs, J.K./Yoshida, M./Stigler, J.W./Fernandez, C. (1997): Japanese and American teachers' evaluations of mathematics lessons: a new technique for exploring beliefs. In: The Journal of Mathematical Behaviour 16, H. 1, S. 7–24.

Klieme, E. (2000): Fachleistungen im voruniversitären Mathematik- und Physikunterricht: Theoretische Konzepte, Kompetenzstufen und Unterrichtsschwerpunkte. In: Baumert, J./Bos, W./Lehmann, R. (Hrsg.): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Sekundarstufe II. Opladen: Leske & Budrich, S. 57–128.

Klieme, E./Ramseier, E. (2001): The impact of school context, student background, and instructional practice. Vortrag auf der Tagung der EARLI, Fribourg, Schweiz.

Klieme, E./Neubrand, M./Lüdtke, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich, S. 139–190.

Klahr, D./Dunbar, K. (1988): Dual space search during scientific reasoning. In: Cognitive Science 12, S. 1–55.

Koedinger, K.R. (1998): Conjecturing and argumentation in high-school geometry students. In: Lehrer, R./Chazan, D. (Hrsg.): Designing learning environment for developing understanding of geometry and space. Mahwah, NJ: Earlbaum, S. 319–347.

Köller, O./Baumert, J./Neubrand,J. (2000): Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik- und Physikunterricht. In: Baumert, J./Bos, W./Lehmann, R. (Hrsg.): TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe. Opladen: Leske + Budrich, S. 229–269.

Neubrand, M./Biehler, R./Blum, W./Cohors-Fresenborg, E./Flade, L./Knoche, N./Lind, D./Löding, W./Müller, G./Wynands, A. (2001): Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 33, H. 2, S. 45–59.

Pehkonen, E./Törner, G. (1999): Mathematical Beliefs and their Impact on teaching and Learning of Mathematics. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik. Duisburg: Universität.

Peterson, P.L./Fennema, E./Carpenter, T.P./Loef, M. (1989): Teachers` pedagogical content beliefs in mathematics. In: Cognition and Instruction 6, H. 1, S. 1–40.

Reiss, K./Thomas, J. (2000): Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe. In: Mathematica didactica 23, S. 96–112.

Reiss, K./Klieme, E./Heinze, A. (2001): Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In: Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Hrsg.): Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4. Utrecht: Utrecht University, S. 97–104.

Stern, E./Staub, F. (2000): Mathematik lernen und verstehen: Anforderungen an den Unterricht. In: Kahlert, J./Inckermann, E./Speck-Hamdan, A. (Hrsg.): Beiträge zur Schulentwicklung: Grundschule: Sich Lernen leisten. Theorie und Praxis. Neuwied/Kriftel: Luchterhand, S. 90–100.

Thomas, J./Schillig, S. (1996): Die Entwicklung hypothetisch-deduktiven Denkens im Jugendalter. In: Schumann-Hengsteler, R./Trautner, M. (Hrsg.): Entwicklung im Jugendalter. Göttingen: Hogrefe.

Thomas, J. (1997): Wissenschaftliches Denken im Jugendalter. Habilitationsschrift. Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

Törner, G. (Hrsg.) (1998): Current State of Research on Mathematical Beliefs VI. Proceedings of the MAVI Workshop. Duisburg: Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik der Universität.

Anschrift der Autoren:

Prof. Dr. Kristina Reiss, Universität Augsburg, Lehrstuhl Didaktik der Mathematik, 86135 Augsburg.

Frank Hellmich, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Fachbereich Mathematik, Postfach 2503, 26111 Oldenburg.

Prof. Dr. Joachim Thomas, Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt, Lehrstuhl Psychologic V, Ostenstr., Waisenhaus, 85072 Eichstätt.