Rosch, Jens

Eine Fallstudie zum Lernen von Algebra im Schulunterricht

Pädagogische Korrespondenz (2011) 44, S. 83-103

urn:nbn:de:0111-opus-88333

INSTITUT FÜR PÄDAGOGIK UND GESELLSCHAFT

PÄDAGOGISCHE KORRESPONDENZ

HEFT 44 HERBST 2011

Zeitschrift für Kritische Zeitdiagnostik in Pädagogik und Gesellschaft

BUDRICH UNIPRESS OPLADEN & FARMINGTON HILLS, MI

Die Zeitschrift wird herausgegeben vom
Institut für Pädagogik und Gesellschaft e.V. Münster,
im Verlag Budrich UniPress, Leverkusen

Redaktionsadresse ist:
Institut für Pädagogik und Gesellschaft e.V.
Windmühlstraße 5, 60329 Frankfurt am Main, Tel. 069/5973596

Manuskripte werden als word-Dateien an den geschäftsführenden Herausgeber erbeten (a.gruschka@em.uni-frankfurt.de) und durchlaufen ein Begutachtungsverfahren.

Abonnements und Einzelbestellungen:
Institut für Pädagogik und Gesellschaft e.V.
Windmühlstraße 5, 60329 Frankfurt am Main, Tel. 069/5973596
Der Jahresbezugspreis der *Pädagogischen Korrespondenz*
beträgt im Inland für zwei Ausgaben 23,– EURO zzgl. 4,– EURO Versand.
Das Einzelheft kostet im Inland 12,50 EURO zzgl. 2,50 EURO Versand.
Bezugspreise Ausland jeweils zzgl. gewünschtem Versandweg.
Kündigungsfrist: schriftlich, drei Monate zum Jahresende.

ISSN 0933-6389

Buchhandelsvertrieb:
Institut für Pädagogik und Gesellschaft e.V.

Satz & Layout: Susanne Albrecht-Rosenkranz, Leverkusen
Anzeigen und Gesamtherstellung:
Verlag Budrich UniPress Ltd., Stauffenbergstr. 7, D-51379 Leverkusen
ph +49 (0)2171 344694 • fx +49 (0)2171 344693
www.budrich-unipress.de

Jens Rosch

Eine Fallstudie zum Lernen von Algebra im Schulunterricht

I

Wahrscheinlich gibt es niemanden, der in der Schule nicht wenigstens hin und wieder den besonderen Augenblick erlebt hätte, da man scheinbar nichts mehr versteht. Viele Schüler dürften solche Momente öfter erleben. Für manche ist es gar ein Dauerzustand beim Lernen.

Ganz sicher gibt es Gegenstände von Erschließung, in deren Zusammenhang entsprechende Erlebnisse öfter stattfinden als es der Zufall wollen könnte. Vermutlich ist das im Mathematikunterricht insgesamt der Fall. Und wahrscheinlich gibt es auch innerhalb der Schulmathematik Gebiete und Themen, bei deren Erwähnung entsprechende Assoziationen nahe liegen.

Schule ist eine gesellschaftliche Institution mit öffentlichem Auftrag. Heranwachsende sollen in ihrem Kontext bis zum Eintritt der Volljährigkeit eine Bildung erlangen, die es ihnen ermöglicht, ihre zukünftige Lebenspraxis selbständig zu gestalten, sich für einen Beruf gemäß eigener Neigung und Befähigung zu entscheiden sowie in Berührung mit jenen inneren oder äußeren Instanzen zu gelangen, welche wir in einem übergreifenden Sinne als Themen oder Probleme der Menschheit zu denken gewohnt sind. Und ganz sicher hat in solchem Zusammenhang auch Mathematik ihren Platz.

Hält man sich jedoch den potentiellen Alltagsbezug einiger ihrer Pflichtthemen vor Augen, dann wird bereits auf den ersten Blick deutlich, dass ihre Thematisierung in der Schule offenkundig einer anderen Logik folgt, als es die Ziele der Lebensbewältigung im Alltag unmittelbar fordern würden. So liegt die Frage nach deren Wirklichkeit in einem Kontext von Lehre, Lernen und Bildung immer wieder nahe, und es könnte gefragt werden, ob nicht ihre Erschließung im Schulunterricht selbst Züge von Virtualität trägt, so wie etwa weltweit verfügbare Nachschlagewerke wie wikipedia auf Möglichkeiten und Grenzen der Repräsentation von Wissen in seiner ganzen Allgemeinheit verweisen.

II

In dieser Hinsicht wird Schulunterricht traditionell auf fest repräsentiertes Wissen bezogen gedacht. Vor allem im 19. Jahrhundert gab es Perioden, in denen das Gelingen von Lehre und Lernen nur nach der Güte von Lehrbüchern und deren obligatorischer sukzessiver Durcharbeitung bemessen wurde: eine Praxis von Bildungsplanung, die gegen Ende des Jahrhunderts so stark in die Kritik geriet, dass seitdem sogenanntes Buchwissen a priori als tot vorgestellt wird.

Das ganze 20. Jahrhundert bestand pädagogisch gesehen – weltweit wohlgemerkt – in dem fortgesetzt präzisierten Versuch, irgendeine Methode der Verlebendigung von wissenschaftlich generiertem Wissen so zu kultivieren, dass mittels ihrer Anwendung bei der Planung, Vorbereitung und Realisierung von Unterricht bei Heranwachsenden jene Ich-Welt-Beziehung entsteht, die emphatisch als gelingende Bildung bezeichnet werden kann. Das war die Zeit der Entstehung wissenschaftlicher Didaktik.

Doch es kamen auch immer wieder Zweifel an der Realität so gefasster Wirklichkeit auf. Und an der Wende vom 20. zum 21. Jahrhundert offenbarte sich mit den Ergebnissen internationaler Schulleistungsstudien, dass zumindest in Deutschland das in Bildungsplänen festgeschriebene mathematische Wissen und Können einer ganzen Schülergeneration so ganz und gar nicht den Vorstellungen der Planer von seiner pädagogischen Realisierung entspricht.

Ich möchte das im Folgenden zum Anlass nehmen, einige Details einer qualitativ-empirischen Untersuchung zum Lernen von Mathematik im heutigen Schulunterricht, genauer eines Gegenstands aus der Algebra, darzustellen. Die Studie entstammt dem Frankfurter Projektzusammenhang PAERDU, in dessen Kontext unter der Leitung von Andreas Gruschka etwa 500 Unterrichtsstunden im gesamten Fächerspektrum des 8. Schuljahrs in verschiedenen Schulformen aufgezeichnet, transkribiert und bezüglich ihrer pädagogischen Spezifik analysiert wurden.

III

Es geht hier wohlgemerkt zunächst um eine einzige Unterrichtsstunde. Aus großem Abstand betrachtet, handelt diese Stunde von der (ersten oder zweiten) binomischen Formel und einem Problem, das im Zusammenhang mit der von Mathematikern so genannten quadratischen Ergänzung von einigen Schülern aufgeworfen wird.

Die Stunde beginnt wie so oft mit dem Vergleichen der Hausaufgaben, als ein Schüler scheinbar unvermittelt öffentlich bekennt: *Ähm, können Sie das vielleicht noch mal erklären, weil ich hab' das so ganz und gar nicht verstanden, was man da machen sollte.* Ich demonstriere kurz, wie wir im Projektzusammenhang an die Analyse solcher Sätze herangehen:

Bestimmung der pragmatischen Bedeutung:
(Zerlegung in Propositionen) *können Sie das erklären / weil ich hab' das nicht verstanden // was man machen sollte*
(Grundinterpretation) Bitte an einen Lehrer, einen Sachzusammenhang zu erklären + Begründung der Bitte

(Mehrdeutigkeit) *Ich habe das nicht verstanden vs. Ich habe nicht verstanden, was man machen sollte*

1. Ergebnis – Der Schüler artikuliert sein subjektives Nichtverstehen in doppelter Hinsicht – zum einen bezogen auf einen Sachzusammenhang (*das*) und zum anderen bezogen auf eine allgemeine Handlungsvorstellung (*was man machen sollte*).

Ausschärfung des Bedeutungszusammenhanges:
(Vollständige Interpretation auf modifizierte Grundbedeutung hin) *Ähm* [Verlegenheit / Nachdenken],
können Sie das vielleicht noch mal erklären [Bitte um a) Wiederholung des Erklärens (*noch mal*) sowie b) Einschränkung der Gelingenserwartung des Sprechakts (*vielleicht*)],
weil ich hab' das so ganz und gar nicht verstanden [Begründung der Bitte c) mit misslingender Verständigung (*ich hab' das nicht verstanden*) unter Ausdruck d) doppelter Steigerung des Misslingens (*ganz und gar*) sowie e) zusätzlicher Subjektivierung im Sinne von Betonung des Ausnahmecharakters der Situation (*so*)],
was man da machen sollte [indirekte Formulierung einer Erwartung an die erbetene Erklärung durch zusätzliche Bestimmung des eigenen Nichtverstehens (*verstehen, was man machen sollte*) sowie zusätzliche Distanzierung davon (*da*)].

Interpretation im Kontext pädagogischer Gelingenserwartung:
2. Ergebnis – Der Schüler ersucht seinen Lehrer um Hilfe, indem er sich an ihn mit einer Bitte um professionelle Begleitung der eigenen Verstehensbemühungen wendet; zugleich konstatiert er das vollständige Scheitern seiner bisherigen Bemühung, was einem aktuellen Eingeständnis der eigenen Hilflosigkeit gleichkommt.

Ein auf solche Weise angesprochener Pädagoge kommt nicht umhin, diese Interpretation aktuell zu konkretisieren: Entweder steckt der Schüler in einer tiefen Krise, dann wäre sein weiterer Lernprozess akut bedroht. Oder aber er artikuliert eine eigene Beziehung zu solcherart Gegenständen bzw. Aufgaben, wie der Lehrer sie zuvor in den Unterricht eingebracht hat. In solchem Fall würde er nicht so sehr an sich selbst zweifeln, wie am Sinn der vom Lehrer vermittelten Sache. Seine Beziehung zum Lehrer als Lehrer wäre dann akut gestört. Bildung aber bestünde für ihn eher in einer Virtualisierung mathematischen Wissens als in tiefgründiger Erschließung.

IV

Nach einer solchen kontextfreien Interpretation erfolgt in nächsten Schritt eine Konfrontation der Ergebnisse mit dem konkreten Kontext der Äußerung im empirischen Material:

Sw8: Kann ich mit den Hausaufgaben anfangen.

Lm: Ja, bitte.

Sw8: Also ähm

{2 sec. Unruhe}

ähm Enn hoch zwei plus acht Enn plus sechzehn gleich ähm in Klammern Enn plus vier hoch zwei.

Lm: [Genau]

Sm?: [falsch]

Sm1: Ähm Herr Lm.

Lm: Bitte.

Sm1: Ähm, können Sie das vielleicht noch mal erklären, weil ich hab' das so ganz und gar nicht verstanden, was man da machen sollte. (.) Ich hab das auch nicht gemacht.=

S?: = Ich auch nicht.

{1-2 sec. Pause}

Eine Schülerin hatte sich gemeldet, um der Klasse ihre Lösung der Hausaufgaben zu präsentieren. Bereits in der unmittelbaren Wahrnehmung des Ergebnisses offenbaren sich Differenzen. Während der Lehrer die genannte Lösung bestätigt, äußert ein Schüler spontan mit einem zeitgleich artikulierten Kommentar, die Lösung sei falsch. An diese momentane Verwirrung schließt nun die Bitte des Schülers Sm1 unmittelbar an.

Zugleich wird über die Fortsetzung seiner Äußerung deutlich: Der als Bitte artikulierte Sprechakt ist eigentlich eine Entschuldigung für nicht gemachte Hausaufgaben. Damit wird die Angelegenheit nun pädagogisch brisant. Der Schüler formuliert eine Legitimitätsaussage von folgendem Inhalt: *Ich kann Hausaufgaben nur erledigen, wenn ich die entsprechende Sache verstanden habe.* Und in diesem Zusammenhang erhellt sich nun plötzlich auch die seltsame Mehrdeutigkeit in der Begründung seiner Bitte: *Wenn ich nicht einmal verstanden habe, was man tun sollte, bin ich auch nicht in der Lage, eine Lösung zu versuchen*. Und zur Verstärkung dieses Anliegens bestätigt ein zweiter Schüler, dass es ihm ähnlich ergangen sei.

Klar ist hier zu erkennen, dass sich das Unterrichten bereits am Stundenbeginn in einer Krise befindet. Der Lehrer muss sich in seiner Reaktion spontan entscheiden: Entweder er weist das Ansinnen erzieherisch ab, dann würde er quasi die Verstehensverantwortung an den Schüler zurückspiegeln und ihm signalisieren, er habe sich nicht richtig angestrengt bzw. in der vorigen Stunde nicht gut zugehört. Oder aber er akzeptiert die Entschuldigung und damit auch den Anspruch, die fragliche Sache noch einmal erschließend zu klären.

V

Um welche Sache geht es hier eigentlich? Alle naheliegenden Antworten wie etwa quadratische Ergänzung, binomische Formel oder auch Algebra sind aus der Sicht der fragenden Instanz selbst bestimmungsbedürftig. Versuchen wir, vom Allgemeinen ausgehend eine genauere Bestimmung vorzunehmen, um möglicherweise auf diesem Weg ein Stück weit zu verstehen, ob es für das Verhalten des Schülers tiefer liegende Gründe gibt, als es eine vorschnelle Vermutung von Desinteresse oder gar Faulheit konstatieren würde. Was ist Algebra?

Entstanden vor über einem Jahrtausend, handelt es sich heute um ein ganzes Teilgebiet der Mathematik. Im Unterschied zur vorher entwickelten Arithmetik und Geometrie ist ihre Entstehung eng an eine Neuheit geknüpft: die Verwendung der Null nicht nur als eines Zeichens beim Rechnen, sondern auch die semantische Akzeptanz von nichts als etwas. Das Wort selbst geht zurück auf ein im Jahre 825 von al-Chwarizmi in Bagdad verfasstes Rechenbuch mit dem Titel „Das kurz gefasste Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen". In diesem Buch geht es, in heutige Sprache gefasst, um das Auflösen von linearen und quadratischen Gleichungen. Um Gegenstände also, die als spezieller Teil mathematischer Curricula weltweit die Aufmerksamkeit von Dreizehn- bis Sechzehnjährigen beanspruchen. So gesehen ist Algebra eine Kunstlehre zum Auffinden von Problemlösungen.

Für jemanden, der diese Kunst beherrscht, handelt es sich dabei um ebenso einfache Operationen, wie es das Zählen und Messen für Jugendliche in der Regel sind. Der Titel von al-Chwarizmis Buch deutet jedoch an, dass dies immanent gedacht keineswegs so sein dürfte: Zwar ist von Rechenverfahren die Rede, was aber genau da berechnet werden kann oder soll, bleibt unausgedrückt. Man darf als potentieller Leser eines solchen Buches hoffen, dass der Autor einem die diesbezüglichen Ziele und Kontexte mitteilen werde. Was Heranwachsenden so gesehen Schwierigkeiten bei der Erschließung von Algebra bereiten könnte, wäre die Abwesenheit immanenter Motivierung bzw. eine gedanklich unausgedrückte Präsenz entsprechender Repräsentationen.

Doch ist nicht der Gegenstand selbst stark voraussetzungshaltig? Ist nicht Algebra so beschaffen wie Höflichkeitsregeln und Angeln, bei denen die Ziele als vorab feststehend gedacht werden, will man überhaupt eine Chance auf Erreichung der Ziele haben, oder doch eher wie die Konstitution einer pragmatischen Bedeutung, deren Vorhandensein nicht unabhängig vom Vorhandensein der Regel gedacht werden kann?

Versucht man sich unter dieser Perspektive in die Geschichte der Mathematik hineinzudenken, so fällt einem zumindest auf, dass im Unterschied zu Geometrie und Arithmetik, deren Bezeichnungen auf ihren griechischen Ursprung und eine problemkonstitutive Spannung von Maß und Zahl bzw. Zählen und Messen verweisen, allein der Name Algebra mit einer historisch späteren Epoche auf eine neue Art des Denkens hinweist: Das Wort stammt aus dem Arabischen (al-gabr bzw. al-dschabr) und bedeutet soviel wie „Wiederherstellung“, „Ergänzung“. Vermutlich steht es sprachlich für Vorstellungen der „Wiedereinrichtung eines Ganzen“. Deutlich sind dabei zwei Momente unterscheidbar: Etwas ehemals Intaktes soll durch ein entsprechend kunstfertiges Vorgehen wieder verwendungsfähig gemacht werden; und die Art dieses Vorgehens wird als Ergänzen von etwas Fehlendem aufgefasst. Vergleicht man allein diese Bedeutungskomplexion mit den vertrauten Vorstellungen vom Zählen und Messen, dann lässt sich die spezielle Art der Komplikation erahnen, welcher Lernende im Zusammenhang mit Algebra begegnen – eine weitgehende Unbestimmtheit des Kontexts nämlich, in welchem etwas ehemals Intaktes wiederhergestellt und zu diesem Zweck etwas Fehlendes ergänzt werden soll.

VI

Schauen wir uns einmal die zu Anfang von einer Schülerin genannte Lösung an, ohne die Aufgabe zu kennen, und fragen uns, auf welche Art Frage das denn eine gelingende Antwort wäre: *Enn hoch zwei plus acht Enn plus sechzehn gleich ähm in Klammern Enn plus vier hoch zwei.* Wahrscheinlich verwendet die Schülerin bereits die viel effektivere Sprache der Algebra, um ihre Aussage zu verschriftlichen. Wörtlich: n^2+8n+16=( ) n+4 ^2, vermutlich aber aufgeschrieben als: $n^2+8n+16=(n+4)^2$.

Wenn hier im wörtlichen Sinne von Algebra etwas zu ergänzen oder wiederherzustellen war, dann ist erstens fraglich, wie der unvollständige Teil der genannten Gleichung vor der Ergänzungsoperation aussah. Zweitens wäre zu klären, auf der Basis welcher Sachvorstellungen die Problem- bzw. Aufgabenstellung formuliert war. Für letztere Fraglichkeit sind folgende drei Aufgabentypen denkbar:

a) Wandle die folgende Summe in ein Produkt um: $n^2+8n+16$.
b) Schreibe den folgenden Ausdruck als binomische Formel: $n^2+8n+16=?$
c) Welche Zahl ist in dem folgenden Rechenausdruck hinzuzufügen, damit ein vollständiges Quadrat entsteht: n^2+8n ?

Bei Variante A handelt es sich um einen Aufgabentypus, der als sinnvoll erst seit dem 15. Jahrhundert antizipierbar ist. Im Unterschied zu den Kunstgriffen al-Chwarizmis und seiner Nachfolger begann John Napier, ganze Ausdrücke gleich Null zu setzen und zu fragen, für welche eingesetzten Zahlen das denn stimmen werde. Für den Ausdruck $n^2+8n+15$ etwa findet man durch Probieren die beiden Möglichkeiten $(-3)*(-3)+8*(-3)+15=9-24+15=0$ und $(-5)*(-5)+8*(-5)+15=25-40+15=0$. Eine Systematisierung solchen Probierens stellt dann der Gedanke dar, einen Rechenausdruck der Art $n^2+8n+15$ in der Form $(n+a)*(n+b)$ zu schreiben, im vorliegenden Fall $(n+3)*(n+5)$. Dann kommen die Denkgesetze des Rechnens mit der Null zum Einsatz: Null mal irgendeine Zahl ergibt notwendigerweise wieder Null. Und umgekehrt kann das Ergebnis einer Multiplikation nur dann Null sein, wenn mindestens eine der multiplizierten Zahlen bereits Null ist. Bezogen auf die Summe $n^2+8n+16$

wären gemäß solcher Problemlogik zwei Zahlen a und b zu suchen, für welche $(n+a)(n+b)= n^2+8n+16$ für alle Zahlen n richtig ist. Durch „Ausmultiplizieren der beiden Klammerausdrücke" (eine Schülerformulierung für das sogenannte Distributivgesetz) ergibt sich aber $n^2+an+nb+ab= n^2+8n+16$ und weiter durch Vergleich beider Seiten bezüglich einer Möglichkeit des Gleichwerdens für *alle* n die doppelte Beziehung $a+b=8$ und $ab=16$. Gemäß solcher Logik sind bei dieser Aufgabe also zwei Zahlen gesucht, die addiert acht und multipliziert sechzehn ergeben. Diese Zahlen sind die einzigen realen Möglichkeiten für n in der Gleichung $n^2+8n+16=0$ (realisiert als -a und -b).

Während es sich bei Variante A also um ein zwar etwas rätselhaft ausgedrücktes, aber im Kern unmittelbar verständliches Problem handelt, die Auflösung einer speziellen quadratischen Gleichung, wirkt die Formulierung bei Variante B zunächst dadurch kryptisch, dass von einer „binomischen Formel" die Rede ist, deren Kenntnis somit als Voraussetzung für ein Sinnverstehen des evozierten Aufgabenzusammenhangs erscheint. Es genügt hier also nicht, von Algebra als einer Kunst des Rechnens mit unbekannten Zahlen oder Größen „durch Ausgleichen, Ergänzen und Ausmultiplizieren" zu wissen und diese ein Stück weit zu beherrschen. Zusätzlich ist nämlich von Formeln die Rede, genauer von der binomischen Formel. Was für ein Gegenstand ist das? Als allgemeine Form etwa der ersten binomischen Formel findet man in den meisten Büchern seit zweihundert Jahren $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. In dieser Gestalt wurde sie wohl seitdem von Generationen Heranwachsender memoriert, ähnlich dem Satz des Pythagoras in der Gestalt $a^2+b^2=c^2$. Im Unterschied zu letzterem handelt es sich hier aber nicht um eine eigenständige mathematische Tatsache, sondern lediglich um die Fixierung des Ergebnisses einer algebraischen Umformung, wie in Variante A. Interpretiert man nämlich $(a+b)^2$ als gewöhnliches Produkt zweier unbekannter Zahlen, also in der Gestalt $(a+b)(a+b)$, so gelangt man durch „Ausmultiplizieren" (mathematisch ausgedrückt: durch Anwenden des Distributivgesetzes) zur Gestalt der Summe $a^2+ba+ab+b^2$. Diese Summe ist unmittelbar als Langform des auf der rechten Seite der binomischen Formel stehenden Ausdrucks erkennbar, wenn man nur die Reihenfolge der Zahlen bei Ausführung von Multiplikationen als unwesentlich für die Bestimmung des Ergebnisses zu sehen gelernt hat. Warum braucht es dafür eine eigene Formel? Und worin besteht nun die Spezifik der Aufgabe in Variante B?

Schaut man sich den angegebenen Rechenausdruck $n^2+8n+16$ unter der Frage an, ob er nicht einen Bezug zur binomischen Formel aufweist, dann könnten zwei Unterschiede ins Auge fallen. Zum einen enthält der Ausdruck eine Mischung von Zahlen mit der einen Unbekannten n, während in der binomischen Formel bis auf die syntaktisch zu interpretierenden Potenzzeichen nur die beiden Unbekannten a und b vorkommen, zumindest in der Langform. Zum anderen entspricht der Rechenausdruck $n^2+8n+16$ strukturell nicht der linken, sondern der rechten Seite der binomischen Formel. Damit liegt der Schluss nahe, die Aufgabe aus Variante B solle lediglich testen, ob ihr Adressat in der Lage ist, aus einem allgemeinen Ausdruck nach Art der binomischen Formel den speziellen Ausdruck $n^2+8n+16$ abzuleiten, indem er nämlich erstens beide Seiten jener Gleichung, welche der Formel zugrunde liegt, gedanklich vertauscht und zweitens die beiden Unbekannten a und b durch die andere Unbekannte n und die Zahl 4 ersetzt. Hier soll also lediglich die Beherrschung syntaktischer Operationen im Umgang mit Zahlen und sogenannten Variablen geübt werden. Ein mathematisches Problem liegt hier eigentlich gar nicht vor; es handelt sich um eine bloße Trainingsaufgabe.

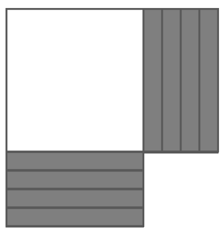
Variante C dagegen wirkt bereits in ihrer Formulierung inhaltlich bestimmungsbedüftig: Wie nämlich aus einem Rechenausdruck ein vollständiges Quadrat entstehen kann, muss für einen naiven Leser zunächst als Rätsel erscheinen. Denn die geometrische Figur ist als solche ja entweder ein Quadrat, oder sie ist keins. Was also ist hier das Unvollständige, welches nur durch eine Ergänzung überhaupt wiederherzustellen wäre? Etwa ein Quadratrest? Wie aber sieht dieser aus? Im Unterschied zu den Varianten A und B ist die Formulierung von Variante C hochgradig visuell aufgeladen. Hier scheint es nicht allein um Algebra zu gehen, sondern um einen übergreifenden Kontext, in welchem Geometrie und Algebra sich gedanklich vereinen lassen.

VII

Es zeigt sich im weiteren Verlauf der Interaktionen, dass es genau eine solche Variante ist, die der Lehrer zur Grundlage seiner didaktischen Modellierung und damit auch der aufgabenförmigen Unterrichtsplanung gemacht hat. Dieser Unterricht kann somit als didaktisch avanciert gelten: Den Schülern wird ein allgemeinem Verständnis nach schwieriger Teil der Mathematik quasi „direkt gezeigt". Dabei mag die Hoffnung leitend gewesen sein, auf diese Weise sei es möglich, die sehr häufig auftretenden Probleme beim Verstehen und Gebrauch der mathematischen Formelsprache durch Anschaulichkeit zu umgehen. Zugleich zeigt es sich, dass der Lehrer dem Schüler keine Nachlässigkeit unterstellt, sondern den zuvor behandelten Lösungsweg noch einmal erklären lässt. Er hofft auf die Selbstexplikationskraft der Sache.

Visualisierung: gelehrte Variante

Einem Quadrat der Seitenlänge n werden insgesamt 8 Streifen der Länge n und der Breite 1 hinzugefügt: 4 auf der rechten Seite und 4 an der unteren Seite.



Füllt man „die Lücke“ rechts unten mittels eines „kleinen Quadrats“ (von der Seitenlänge 4) auf, so entsteht ein großes Quadrat.

Das Vorgehen ist eine Visualisierung der „quadratischen Ergänzung“
$n^2+8n+4*4 = (n+4)^2$

Diese Lösung beinhaltet tatsächlich eine Kontextualisierung, die Geometrie und Algebra sinnvoll aufeinander bezogen auffasst: Die abschließende geometrische Operation, das Ergänzen des 4x4-Quadrats in der rechten unteren Ecke lässt sich direkt in eine Antwort der mit Variante C gestellten Frage übersetzen – 16. Zudem liefert diese Visualisierung nun eine geometrisch realisierte Evidenz für die von der Schülerin Sw8 zu Anfang genannte Formelgleichung auf der Grundlage einer Vorstellung direkter Entsprechung zwischen dem Quadrat eines Rechenausdrucks und der namensgleichen geometrischen Figur. Doch der Schüler Sm1 behält seine Zweifel an dieser eleganten Art Problemlösung:

Lm: Vier mal vier, das sind insgesamt sechzehn einzelne (3 sec.) und dann hab' ich wieder 'n ganzes Quadrat. (1-2 sec.) Sm1, beantwortet das deine Frage?

Sm1: >{sehr schnell} Ja, also noch nicht so richtig, weil man könnt das doch jetzt auch anders noch machen. Man könnt' doch jetzt auch einfach diese ganzen Streifen, das Quadrat und halt alle Streifen in eine Reihe und da unten ganz viele von diesen Einsern, also wieder ganz andre.< (2 sec.) Also das sind ja genau so viele.

Interessant ist dabei die Formulierung des Zweifels. Einerseits hat sich der Schüler auf die Grundidee der Analogisierung des algebraischen Problems mit einer geometrischen Darstellung eingelassen, andererseits macht er einen Gegenvorschlag für deren konkrete Realisierung: Er will *diese ganzen Streifen* alle *in einer Reihe* anordnen. Er sucht also intuitiv nach einer Vereinfachung des geometrischen Vorgehens.

Plausibel erscheint ihm dabei, dass auf diesem Wege die Figur eines Quadrats entstehen wird. Man brauche nur den Raum unter dem zuvor bereits durch Zusammensetzung realisierten Rechteck mit *ganz vielen von diesen Einsern* aufzufüllen, um im Ergebnis dieser „quadratischen Ergänzung" analog zur Musterlösung ein großes Quadrat zu erhalten.

Um die Frage einer möglichen Übersetzung dieses Vorgehens in die Formelsprache der Algebra kümmert er sich dabei nicht. Stattdessen vermutet er: *Also das sind ja genau so viele*. Der Schwerpunkt seines Zweifels liegt also auf der Eindeutigkeit des zuvor gezeigten Lösungsverfahrens und ist somit methodisch motiviert. Indem der Schüler nach einer möglichst eleganten Problemlösung sucht, bekundet er ein genuines Erkenntnisinteresse.

VIII

Auf was für ein mathematisches Problem zielt die Frage des Schülers, und wie würden Sie als Lehrer darauf reagieren? Genau genommen sind für die Schülerreaktion zunächst zwei Lesarten denkbar:

a) Der Schüler Sm1 versteht nicht, wie die Schülerin Sw8 zu ihrer Lösung gekommen ist.

b) Er versteht nicht, warum diese Lösung in ihrer konkreten Form notwendig ist.

Beide Lesarten beziehen sich bis zu dem Punkt auf ein und dieselbe soziale Wirklichkeit, an welchem für den Schüler ein direktes Weitervoranschreiten im Unterricht aktuell nicht als sinnvoll erscheint. Er äußert einen pragmatisch geerdeten Verstehensanspruch: Die Vermittlung im Unterricht soll nachvollziehbar sein. Grundlage dieser Vorstellung sind für ihn Regeln des Argumentierens und logischen Schließens. Die Gründe für diese Sicht sind jedoch in beiden Fällen jeweils andere.

Im ersten Fall bestünde das Problem von Sm1 im konkreten Nachvollzug, sprich Verstehen, des Unterrichtsstoffs. Er will wissen, wie und warum die Schülerin genau so vorgegangen ist. Sein Problem wäre auf Lernen im Sinne einer Sicherung der langfristigen Stabilität des erworbenen Wissens bezogen.

Im zweiten Fall dagegen ginge es ihm um eine ausdeutende Problematisierung des Unterrichtsgegenstandes. Dann hätte er sich die Aufgabe in einem tieferen Sinne als Problem zugeeignet, die bloße Kenntnis von Vorgehensweise und Ergebnis wären dann für ihn nicht zufriedenstellend. Sein Problem wäre demgemäß auf die Realisierung eines Bildungsprozesses auf dem Gebiet der Mathematik bezogen. Die implizit in Anspruch genommenen Maßstäbe für Verstehen bzw. Nichtverstehen wären somit selbst mathematische.

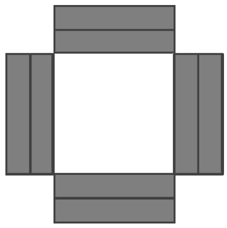
Wie bereits angedeutet, enthält die Schüleräußerung entscheidende Momente, die das Vorliegen letzterer Lesart plausibel erscheinen lassen. Dennoch ist es erst der weitere Verlauf der Interaktionen im empirischen Material, der über die Verwirklichung entsprechender Möglichkeit Auskunft gibt.

IX

Die unmittelbare Reaktion des Lehrers erweist, dass für ihn die vom Schüler eingebrachte Frage nach Mehrdeutigkeiten bei der geometrischen Visualisierung der Aufgabe eine Frage der Eindeutigkeit des Ergebnisses ist. Obwohl er damit die Bildungsaspiration des Schülers zunächst in den Hintergrund rückt, ist an dieser Stelle noch nicht ausgeschlossen, dass der Schüler in der Folge sein spezifisches Interesse wird befriedigen können. Da der Lehrer streng bei der Sache bleibt, kehrt sich lediglich die Beweislast um: Lm würde sich für die alternative Lösung interessieren, wenn sie zu einem anderen Ergebnis der Aufgabe führte.

Lm: Kommt da was anderes bei raus? {Lm zeichnet rechts neben das bestehende Quadrat das Folgende:

Visualisierung: vom Lehrer für den Schüler unterstellte Variante



Zugleich versucht er den Schülervorschlag einer „anderen Geometrisierung" in den Unterrichtsprozess aufzunehmen, missversteht dabei aber das vom Schüler Artikulierte. Er deutet also die vorangegangene Schüleräußerung eher gemäß erster Lesart. Statt ein Bildungsproblem zu sehen, vermutet er bei Sm1 lediglich oberflächliche Verstehensschwierigkeiten. Da der Schüler in der Folge aber seine Sicht sehr konsequent verteidigt, erledigt sich das Problem auch nicht durch eine alternative Erklärung des Lehrers. Es kommt zu einer Zuspitzung der Diskussion, in die sich schließlich eine Schülerin einschaltet, die den Vorschlag von Sm1 reformuliert.

Sw?: Oah er meint einfach, dass man alle Streifen in eine Richtung anlegt.

Lm: Ja, aber dann gibt es kein Quadrat.

Sm1: Ja [aber da gibt´s] doch auch kein Quadrat

Sw?: [Ja eben.]

Sm1: und da [muss man doch erstmal]

Lm: [Hier hast du doch wieder 'n Quadrat stehen.]

Sm1: auch erst diese Dinger dazu machen, diese kleinen

Sw?: Jaja, die gehören ja auch dazu. (.) Die sollst du ja dazu machen.

Lm: Und jetzt, jetzt kannst du aber (..)

Sw?: Oah, die Aufgabe ist [doch rauszukriegen wie viele Kästchen man von den einzelnen Dingern] braucht, damit´s wieder zum Quadrat wird.

Lm: [pshht, (..) Sm14 (..) Sm12]

Sm1: Ja aber das kann man doch auf mehrere Arten machen (..) Wenn [man das]

Lm: [Sm1]

Sm1: jetzt anders anlegt, dann mach-, kann man das doch schon wieder anders machen (..) dann brauch man doch schon wieder andere Kästchen (2 sec.)

Bei dieser relativ kurzen Interaktionsfolge handelt es sich um ein komplexes Stück spontan konstituierter Öffentlichkeit. Deutlich sind mehrere Meinungspole zu unterscheiden. Eine weibliche Schülerin interessiert sich für Sm1s Position. Der Lehrer aber argumentiert dagegen, indem er einen geometrischen Formunterschied ins Spiel bringt, welcher von Sm1 zwar als solcher, aber nicht als Argument in der Sache akzeptiert wird. Eine weitere Schülerin verteidigt verbal die Lehrerposition und damit wohl die mühsam errungene eigene Einsicht in den Handlungszusammenhang, in *wie man's macht*. Damit stehen sich zwei Sichtweisen auf den Gegenstand der Aufgabe gegenüber. Einem Teil der Schüler genügt zu wissen, was das richtige Ergebnis der Hausaufgabe ist und wie man zu ihm gelangt, ein anderer Teil dagegen insistiert auf der Geltung von getroffenen Aussagen im Zusammenhang mit einer echten Fraglichkeit in der Sache. In diesem Sinne hat sich also Lesart zwei durchgesetzt.

Es geht nun nicht mehr nur um einen Aufgabenbearbeitungsprozess und sein Ergebnis, sondern um die Gültigkeit von Argumenten. Untermauert wird der diesbezügliche Erkenntnisanspruch durch ein neues Argument des Schülers: Wenn man bei der geometrischen Darstellung des ursprünglichen Rechenausdrucks auch auf andere Art vorgehen kann, *dann brauch man doch schon wieder andere Kästchen*. Was im Kern so viel bedeutet wie: Dann erhält man doch eine andere Zahl als das zu ergänzende Ergebnis.

Letztlich hat Sm1 nun eine eigene, geometrische Sicht auf die Aufgabe entwickelt: Es gibt hier ein Quadrat, eine bestimmte Anzahl von Streifen sowie eine noch unbestimmte Anzahl kleiner, aber gleich großer *anderer Kästchen*, die er zuvor als *ganz viele von diesen Einsern* bezeichnet hatte. Aus diesen drei Sorten von Bestandteilen soll ein großes Quadrat entstehen, und die Anzahl dieser Kästchen ist das bei dieser Aufgabe eigentlich Interessierende. Indem sich also der Schüler auf die zuvor vom Lehrer geäußerten Tatsachen bezieht, entwickelt er hier ein neues Argument in der Sache. So wird seine vorherige bloße Äußerung von Zweifel nun zu einer konsistenten Problematisierung – „Woher kann man wissen, dass es (nur) die Zahl 16 ist, welche addiert werden muss? Wenn es schon verschiedene Lösungsfiguren gibt, warum dann nicht auch verschiedene Zahlen als Lösung?"

X

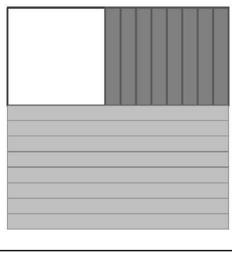
In dieser Unterrichtsstunde vollzieht sich empirisch unstrittig etwas, wovon Bildungstheoretiker bisher oft nur träumten. Aus einer gewöhnlichen Frage beim Vergleichen von Hausaufgaben wird im Zuge der Ausschärfung einer Fraglichkeit die vertiefte Bestimmung eines Unterrichtsgegenstands. Nicht nur erhält die binomische Formel ihre aus sich heraus verständliche Visualisierung, auch die tiefer liegende Frage nach den Bedingungen der Möglichkeit solcher Art Vergegenständlichung wird von Schülern erarbeitet. Es handelt sich um die Realisierung eines Anspruchs, wie ihn Martin Wagenschein allen seinen Bemühungen um tiefgründige Erschließung von Gegenständen des Mathematik- und Physikunterrichts zugrunde gelegt hat.

Eine solche Episode ist hochgradig wirksam gerade in erzieherischer Hinsicht. Die anwesenden Schüler können hier erleben, was es heißt, echte Fragen zu stellen und der Welt so in einer Haltung wissenschaftlicher Neugier gegenüber zu treten. Vorbild dafür ist im vorliegenden Fall der zunächst scheinbar unverständige Schüler Sm1. Indem er das Vorgehen einer Mitschülerin hinterfragt, stößt er auf das Erkenntnisproblem, warum die quadratische Ergänzung eines binomischen Rechenausdrucks nur eindeutig, auf wohlbestimmte Weise möglich ist.

Bedingung einer solchen Wirksamkeit wäre aber, dass die bisher lediglich implizit formulierten Gedanken auch zur sprachlichen Explikation gelangten. Die vom Schüler eingebrachte Perspektive wäre dazu klassenöffentlich zu machen. Es ist nun Sache des Lehrers, diese Problematisierung offiziell zum Thema des Unterrichts zu erheben. Deshalb steht und fällt nicht nur in diesem Fall die Möglichkeit allgemeiner Bildung im Rahmen von Schulunterricht mit der Fähigkeit des Lehrers, entsprechende Problematisierungen zu erkennen, zu bestärken und das Sachproblem, zumindest auf längere Sicht bzw. in seinen konstitutiven Teilen, aufzulösen.

Was wäre nun sachlich auf den Vorschlag des Schülers Sm1 zu entgegnen? Zunächst einmal ist zu konzedieren, dass er im Rahmen seiner geometrischen Interpretation der Aufgabe, die ja auch der didaktisch aufgebauten Sicht auf das algebraische Problem entspricht, recht hat: Nicht nur führt seine Art der Ergänzung auf ein Zielquadrat, sondern dieses unterscheidet sich auch tatsächlich von dem der Musterlösung.

Gelingende Variante aus Schülersicht



Legt man alle 8 Streifen auf einer Seite an, könnte man dieses Rechteck durch weitere 8 Streifen zum Quadrat vervollständigen.

So entsteht ein Quadrat mit der Seitenlänge

n + 8 (nicht: n+4)

Worin sich aber seine Lösung von der Musterlösung außerdem noch unterscheidet, wird erst nach vollständiger Realisierung des Vorschlags in einer eigenen Darstellung sichtbar: Während es in der anderen Lösungsvariante ein Quadrat ist, welches hinzugefügt wird, handelt es sich hier um ein Rechteck. Übersetzt man nun das Ergebnis dieser rein geometrischen Ergänzung zurück in die Sprache der Algebra, wird man feststellen, dass auf diesem Wege nicht die ursprüngliche Aufgabe gelöst wurde, sondern eine „neue Variante" erzeugt wird. Es ist nämlich $(n+8)^2$ ausmultipliziert gleich $n^2+16n+64$.

Sachlich entspricht dieser Tatsache der Umstand, dass man vom ursprünglichen Rechenausdruck n^2+8n auf das vollständige Quadrat $(n+8)^2$

nicht durch alleiniges Hinzufügen einer Zahl gelangt, wie es in der Aufgabe erfragt war, sondern de facto den gemischten Rechenausdruck 8n+64 hinzunimmt. Dem entspricht in Gestalt einer umgeformten Variante dieses Ausdrucks, 8*(n+8), in der geometrischen Darstellung eben jenes Rechteck mit den Seitenlängen 8 in vertikaler und n+8 in horizontaler Richtung.

Und es wird nun erst die eigentliche Bedeutung der Rede von einer „quadratischen Ergänzung“ erhellt: Diese Art Algebra, sprich Ergänzung, heißt nicht deshalb eine quadratische, weil hier ein Quadrat wiederhergestellt wird. Das ist ja auch in der Schülervariante der Fall. Sondern sie ist deswegen eine „echt quadratische", weil aus einem unbestimmten (!) Quadrat und einem zu ihm passenden, teilweise bestimmten (!!) Rechteck durch Hinzufügung eines wohlbestimmten (!!!) anderen Quadrats ein größeres Quadrat gebildet werden kann.

Auch ohne die Geschichte der Mathematik im Detail studiert zu haben, ahnt man hier etwas von der inneren Notwendigkeit mathematischer Begriffsbildung und Verfahrensweise. Das Problem der interessierenden Rechenausdrücke ist also eines der Abstufung von Unbestimmtheit. Was für al-Chwarizmi noch eine geheimnisvolle Kunstlehre war, entwickelte sich mit den Begriffen der Unbestimmten, des Rechenausdrucks und der abstrakten Gleichung (im Sinne von Gleichsetzung) zu einem eigenen Zusammenhang konsistenter Problematisierung: der Sprache der Gleichungslehre und Algebra. Auch wenn der Schüler mit seinem alternativen Lösungsvorschlag nicht auf eine sachliche Alternative zur mathematischen Problemlösung kommt, könnte er auf dem Wege genau dieser Erkenntnis zu einer wirklichen Einsicht in das Sachproblem der Aufgabe gelangen.

XI

Wie sieht nun die Wirklichkeit des Unterrichts im vorliegenden Fall aus? Zunächst ist zu konstatieren, dass sich der Lehrer von seinem Schüler tatsächlich in ein problematisierendes Gespräch verwickeln lässt, in dessen Verlauf er verbal den Schülervorschlag aufgreift: freilich ohne dabei eine weitere Zeichnung anzufertigen. Offenkundig erscheint ihm der Vorschlag sachlich so absurd, dass er dieses nicht für der Mühe wert erachtet. Er nimmt also die Problematisierung nicht wirklich ernst. Die beiden Einwände von Sm1 *Ja, aber was (spricht dagegen)* und wenig später *das is doch auch 'ne Lösung, oder? Woher weiß man denn jetzt, dass das so am einfachsten geht?* schiebt er in rhetorischer Manier einfach beiseite, indem er nochmals detailliert die Musterlösung erklärt. Er lässt sich in der Sache nicht auf die Frage des Schülers ein. Offenkundig gibt es für ihn selbst keinen Zweifel an der Musterlösung. Er hängt gedanklich derart in Lesart eins fest, dass er den Bildungsanspruch des Schülers schlichtwegs nicht wahrnimmt.

Lm: Du hast hier ein Enn Quadrat, (haste) acht (1-2 sec.) Enn, in der Summenform wieder aufgeschrieben (1 sec.) und das hier musst du (.) ergänzen, damit es tatsächlich en Quadrat ist.

(1-2 sec.)

Sm1: Ja aber man könnt doch jetzt auch einfach [da unten en Streifen]

Sw?: [>{lachend} Oh Sm1!<]

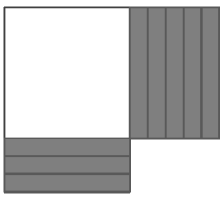
Sm1: (.) wegmachen und da oben einen dranmachen oder?

Sm?: Possible is nothing, Sm1.

Lm: Du kannst es meinetwegen auch so bauen {Unruhe in der Klasse} (s- es) es ist unpraktisch, nach vier Seiten zu erweitern, weil dann (.) funktioniert das Modell nicht mehr, um sich klar zu machen, (.) was wir hier eigentlich rechnerisch machen wollen.

Doch der Schüler lässt sich auch vom didaktischen Pauschal-Argument, dass es sich hier lediglich um ein Denkmodell handele, nicht überzeugen. Er will es wirklich wissen: Warum so und nicht anders? Und warum nur 16? Geht es nicht einfacher? Da er sehr genau registriert, dass die Erklärungen des Lehrers nicht die Logik der Sache treffen, bleibt er bei seiner Grundüberzeugung, variiert jedoch die Art seines Arguments.

Präzisierter (zweiter) Schülervorschlag



Da der Schüler nicht durch Argumente überzeugt wurde, hält er mit einem neuen Vorschlag an seiner Grundidee fest.

Dabei denkt er nicht algebraisch, sondern rein geometrisch.

Offenbar bezieht er sich nun wieder auf die Ausgangsfigur, die der Lösung von Sw8 zugrunde lag. Wahrscheinlich hat er registriert, dass der Lehrer auf etwas anderes hinaus will als die Problematisierung von Sm1. Wenn der Lehrer aber nicht den ersten alternativen Lösungsvorschlag des Schülers akzeptiert, dann soll er zumindest im Rahmen seines eigenen gedanklichen Zusammenhangs die Notwendigkeit des Ergebnisses der Aufgabe explizieren. Oder im Klartext: Wenn er schon weiß, was richtig ist, dann muss er aber auch die Falschheit des Falschen explizieren – nur so scheint Erkenntnis vernünftigerweise überhaupt diskursiv möglich zu sein.

Kaum kann man sich auf Schülerseite einen höheren Grad an Souveränität vorstellen. Hier ist ein wissenschaftlicher Typus problematisierenden Denkens am Werk.

Inhaltlich geht es im Folgenden um eine veränderte Problemvariante, die die Grundstruktur des ersten Vorschlags auf subtilste Weise appliziert: Was als Verstehenshilfe gedacht war, kippt in Unvermitteltheit um.

Spätestens an dieser Stelle wird sich das Unterrichten und mit ihm das Lernen strukturell entscheiden müssen, ob in diesem Unterricht eine tiefgreifende Problematisierung der Sache überhaupt vorgesehen ist. Dem Schüler dürfte auf der Grundlage der zuvor im Gespräch von ihm selbst entwickelten Fraglichkeit und der Unvermitteltheit der Lehrerreaktionen nun bald hinreichend klar sein, dass in der Sache nichts erschlossen wird und stattdessen ein didaktischer Budenzauber am Werk ist, der Geltung lediglich qua äußerlicher Autorität beansprucht. Seine Intuition aber, dass es hier wirklich etwas zu verstehen gibt, täuscht ihn nicht.

Da er das Problem nicht selbst zu explizieren in der Lage ist, dürfte dieses unbewusste Wissen auf längere Sicht jedoch kaum stabil werden. Was er stattdessen verinnerlichen könnte, wären Ressentiments gegen Schule, Unterricht und die von Bildungstheoretikern wie Martin Wagenschein immer wieder behauptete geistige Realität der Unterrichtsgegenstände. Reziprok dazu wird wahrscheinlich der Lehrer als Pädagoge hier, falls er mehr im Sinn hat als die bloße Reproduktion von Wissens-Macht-Strukturen, langfristig auf sein schlechtes Gewissen treffen.

Im konkreten Unterrichtsverlauf jedoch scheint alles nach Plan zu laufen:

Fazit: Was als Verstehenshilfe gedacht war, kippt in Unvermitteltheit um

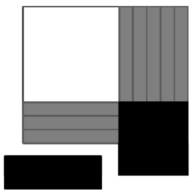


BILD $(n+5)^2 = n^2 + 8n + 2n + 25$ versus FORMEL: $(n+5)^2 = n^2 + 10n + 25$

Lm: Es kommt nichts anderes raus, wie viele Kästchen brauchst du denn hier?

Sm1: Ja auch 16, aber ich mein [was] anderes.

Lm: [Ja.]

Sm1: Wenn man jetzt da unten einen Streifen wegnimmt, also >{sehr schnell} dass man an einer Ecke nur drei und an der anderen fünf macht< (..)

Sw?: Och Sm1.

Sm?: ( ) lass ihn doch. (..)

Lm: Du kannst das Ganze immer (.) unheimlich vergrößern jetzt, aber dann machst du nicht das (.) nächstliegende Quadrat (..) aus dem Ganzen=(Das/S´) nützt dir nichts mehr.

(1 sec.)

Sm1?: Also man soll dann immer [( )]

Lm: [Du sollst] (.) entweder (.) hier drüben anbauen (..) auf der rechten Seite (.) oder nach unten (.) und dann kommt automatisch (.) im im Zeichnen dieselbe Lösung raus, die du rechnerisch hier rauskriegen kannst (3 sec.) Sw7.

Der Schüler lässt schließlich die Renitenz seiner Gegenposition hinter sich. Indem er nun dem Lehrer die Deutungsmacht in der Sache zugesteht, verzichtet er auf eine weitere Ausformung seiner bildungsbezogenen Problematisierung von Mathematik. Möglicherweise will er sowohl den Lehrer als auch einen Teil seiner Mitschüler schonen. Der Preis dieser Art von Einlenken dürfte jedoch sein, dass er mit seinem Verstehensanspruch zugleich auf die Emphase möglicher Ich-Welt-Beziehung verzichtet, sofern sie sich situativ konkret an die wissenschaftliche oder auch kulturelle Realität mathematischen Denkens knüpfen lassen würde.

Sowohl in bildungstheoretischer Hinsicht als auch bezüglich der Realisierung vernünftiger (Selbst-)Erziehung hat sich hier wohl eine kleine Katastrophe ereignet. Nicht nur bleibt der Lehrer spontan hinter den Möglichkeiten der von ihm selbst gewählten didaktischen Modellierung zurück, auch in erzieherischer Hinsicht hat sich eine Vorstellung vom Gelingen durchgesetzt, die über historische Parallelen verfügt: Eine utilitätsbezogene Begründung pädagogischer Interventionen. Genau dagegen war wohl vor über zweihundert Jahren in Deutschland die neuhumanistische Reform der Niethammer und Humboldt angetreten.

XII

Bezüglich der eingangs gestellten Frage nach sich im Schulunterricht manifestierenden Zügen von Virtualität lassen sich nun zwei Problemkomplexe unterscheiden:

a) Was besagt dieser Einzelfall einer (gymnasialen) Mathematikstunde in Bezug auf die aktuellen sozialisatorischen Bedingungen des Heranwachsens bzw. Erwachsenwerdens Jugendlicher? Handelt es sich nicht um eine zufällig angetroffene Ausnahme? und
b) Und besteht nicht in jedem einzelnen Bildungsprozess ein spezifisches Verhältnis von Virtualität und Realität? Anders ausgedrückt: Ist es überhaupt denkbar, dass die im Zuge der Analyse sukzessive aktualisierte Vorstellung vom Gelingen des Heranwachsens sich auch realisieren lässt?

Die erste Frage zielt auf das methodische Selbstverständnis qualitativ-empirischer Sozialforschung. Da sie oftmals von quantitativ vorgehenden Forschern gestellt wird, muss in ihrer Beantwortung zwischen einem allgemeinen Argument und spezifischen, eher fachlichen Geltungsfragen differenziert werden.

In allgemeiner Bestimmung des Verhältnisses von Realität und Irrealität handelt es sich um wirklichen Schulunterricht, und alle konstitutiven Bedingungen für einen solchen Typus sozialer Wirklichkeit sind somit impliziter Bestandteil des zu Analysierenden. In dieser Hinsicht war die Fallrekonstruktion nicht allein auf das Besondere an der Ausprägung dieser Art Realität bezogen, sondern gewissermaßen auch auf die Allgemeinheit konstituierender Bestandteile. Letzteres zielt auf die Möglichkeit einer pädagogischen Unterrichtstheorie.

Mittlerweile liegen im Rahmen des Forschungsprojekts PAERDU dazu erste Ergebnisse vor. Und es lässt sich hier zumindest konstatieren, dass die Bemühungen um immanente Erschließung der konkreten Logik des Unterrichtens (und darauf bezogenen Lernens) mittels Sequenzanalyse immer wieder an einen Punkt geführt haben, wo zwecks Erschließung des je Einzelnen auf die allgemeinen pädagogischen Kategorien der Bildung, Erziehung und Didaktik zurückzugreifen das konkrete Problem zu erhellen vermochte. Freilich ist das nur möglich, wenn man die Grundbegriffe semantisch konkretisiert und im jeweiligen Kontext eine pragmatische Modellierung des Sinngehalts entsprechender sozialer Wirklichkeit in Form einer Explikation der jeweils vertretenen Ansprüche leistet. Obige Darstellung ist dafür nur ein Beispiel.

Bezüglich der eher spezifischen Frage, was denn ein Einzelfall über die Gesamtheit möglicher Wirklichkeitsausprägungen zu zeigen in der Lage ist, kann dann aber die Gegenfrage nach den theoretischen Vorstellungen der auf Zählbarkeit von Wirklichkeitsaspekten bezogenen impliziten Modellierungen quantitativ-empirischer Sozialforschung gestellt werden. Im Unterschied zur dynamischen Konstitution der Atome und Elementarteilchen als materieller Grundlage primär stochastischer Beziehungen handelt es sich bei diesen Wirklichkeitsaspekten selbst um Beobachtungsperspektiven und somit Bestandteile der sinnstrukturierten Welt. Die Konsistenz von Datenmengen als Hinweis auf das Vorliegen einer sozialen Bedeutsamkeit zu interpretieren wird deshalb von vornherein auf die Explikation entsprechender Bedeutungen in einem Theoriezusammenhang, hier: eine Unterrichtstheorie, verwiesen sein.

Bezüglich einer solchen sind natürlich immer unterschiedliche Erkenntnisinteressen denkbar. Wenn etwa Baumert in einem aktuellen Lehrbuch der Psychologie mit einem Beitrag als Spezialist für die erforschende Abbildung des Erfolgs von Lernprozessen in Schulklassen vertreten ist, in seiner Forschung aber prinzipiell auf die gleichen Methoden verwiesen ist, mit denen die Struktur und Konsistenz von Aufmerksamkeit, Wahrnehmung und Gedächtnis modelliert wird (testtheoretisch abgesicherte Faktorenanalyse), wird fraglich, wie weit eine damit implizit unterstellte Analogie von menschlichem Nervensystem und sozialer Wirklichkeit denn überhaupt reichen kann. In dieser Hinsicht kann von vorliegendem Einzelfall guten Gewissens behauptet werden, dass die Forschungsmethode auf Sozialität und darüber hinaus auf das Erfassen von Besonderheiten einer typologisch vorab als pädagogisch bestimmten Praxis bezogen gedacht ist. Aber die Diskussion nach konkreter Entsprechung von erforschter Wirklichkeit und verwendeter Objektsprache (inkl. methodischer Entscheidungen) ist wohl eine ewige, und inwiefern Psychologie mittlerweile auch kulturwissenschaftlich wertvolle Ergebnisse zu liefern in der Lage ist, möchte ich hier nicht weiter verfolgen.

Näher liegend scheint da schon die Frage zu sein, welchen Realitätsstatus die in obiger Analyse rekonstruierten Akteursperspektiven jeweils haben bzw. beanspruchen können. In der sozialkonstitutiven Pragmatik des Kontexts sind da zunächst einmal Schüler- und Lehrerperspektiven prinzipiell zu unterscheiden.

Schülerperspektiven sind im Rahmen der generationenübergreifend aufeinander bezogenen gesellschaftlichen Verhältnisse in der Regel viel stärker mit jener Naturwüchsigkeit konstituiert, die unseren Alltag als spontan zu gestalten und damit auch hochgradig anfällig für verschiedene Formen des Misslingens ausweist. Jugendliche insbesondere hatten bereits genug Gelegenheit, den Alltag selbst als konkrete Gestalt so zu erfahren, dass die Entscheidung über Sinn oder Unsinn dieser oder jener Bedeutungsoption zum Bestandteil eigener Lebenserwartungen zu werden vermag. Andererseits sind es jene Perspektiven, die in aller Unbestimmtheit ihrer Thematisierungsmöglichkeiten in der Regel noch offen für alles Bessere sind. Es ist ein exklusives Vorrecht der Jugend, sich für die Zukunft der Menschheit zu halten.

Deshalb wäre im Ergebnis vorliegender Fallstudie v.a. der Befund ernst zu nehmen, dass es sich bei der Auseinandersetzung um das Bildungsthema in Zusammenhang mit Mathematik kurzzeitig um eine echte Kontroverse gehandelt hat. Und an dieser Stelle ist nun das potentielle Entstehen von Virtualität im Zusammenhang mit deren Auflösung interpretationsbedürftig.

Es hat vor gut hundert Jahren in Deutschland schon einmal eine Situation gegeben, da die im Bildungswesen tradierte Praxis aus kultureller und gesellschaftlicher Perspektive stark unter Druck geriet. In dieser Hinsicht wäre Virtualität nur ein anderer Name für Gegenentwürfe, die ihre Selbstbestimmung (inkl. Legitimitätsfragen) noch suchen. Ob aus Gegenentwürfen aber tatsächlich ein Veränderungspotential erwächst, hängt auch von der Fähigkeit zur öffentlichen Vermittlung, letztlich wohl Objektivierung der zur Debatte stehenden Streitfragen ab. Und die Art des Fragens ist hier nicht ganz unwichtig.

Als Ergebnis eines solchen Prozesses kann die Herausbildung der Pädagogik als eines autonomen Wissenszusammenhangs gelten, der mittlerweile gestaltend stark in Prozesse sozialer Institutionalisierung eingebunden ist. Was dabei aber unauflösbar und deshalb in gewisser Weise immer wieder übrig bleibt, sind die Grundfragen nach dem von allen Generationen meist intuitiv wahrgenommenen Gelingen oder Misslingen von Bildungsprozessen. Da Bildung als Thema sowohl allgemein im Sinne eigener Erfahrung, inkl. eines möglichen Auseinanderklaffens von Anspruch und Wirklichkeit, als auch spezifisch als immer wieder individuell zu konkretisierende Wirklichkeit verfasst ist, führt bei der Objektivierung entsprechender Fragen kein Weg an der auf vernünftige Urteile bezogenen Reflexion entsprechender Intuitionen vorbei. Will man nicht Schulunterricht insgesamt als gigantische Simulation von im Zuge gesellschaftlicher Arbeitsteilung strukturell immer wieder erzwungenem Abbruch von Bildungsprozessen auffassen, dann muss zumindest der Anspruch, wo er denn konkret in Bezug auf ihrer Erschließung harrender Gegenstände artikuliert wird, so ernst genommen werden, wie es sowohl die Sache als Teil historischer Konstellationen als auch das gesellschaftlich zur Selbsterziehung in der Form von Bildungsanstrengungen verpflichtete Subjekt verdienen.

Ich komme zum letzten Punkt: Erklärungsbedürftig im analysierten Fall ist nicht so sehr der Abbruch selbst (er mag auf performative Besonderheiten oder Zufälle bezogen sein), sondern die „übergroße Nähe“ von realer Gelingensmöglichkeit und letztlichem Scheitern. Seiner fallspezifischen Realität steht damit als pädagogisch wünschenswerte Virtualität ein gedanklich-emotionaler Zusammenhang gegenüber, der auf die naiv zu stellende Frage verweist: Warum kann ein Unterricht, der auf so hoch elaborierte Weise Sachprobleme in einer didaktischen Modellierung (hier: einer Aufgabe und ihres Lösungskontexts) zur Sprache macht, die offenbar auf das sichere Gelingen von Vermittlung und Lernen bezogen sind, überhaupt scheitern?

Eine Antwort liegt nahe, wenn man versucht, die hier zugrunde liegenden Vorstellungen von Vermittlungssicherheit („teacher-proofed-concepts“) und langfristiger Erfolgsgarantie mit ihrem pessimistischen Gegenbild, der in konstruktivistischen Theorien des Lehrens und Lernens oft unterstellten Zufallsbedingtheit der Ergebnisse („als Ausdruck von Freiheit“ oder sogar „demokratisierter Lehre“) zu kontrastieren und zu vermitteln. Objektiv gesehen kann Bildung nur subjektiv realisiert gelingen. Jede Vermittlung von Lehre und Lernen ist sozial konstituiert und kann somit gelingen oder scheitern. Insofern gibt es neben sachlichen („didaktischen“, etwa aufgabenlogischen) immer noch soziale Gelingensbedingungen. Im analysierten Fall war das bereits in der Tiefenstruktur der ersten Äußerung des Schülers Sm1 zu erkennen: Für ihn ging es von vornherein nicht nur um Mathematik, sondern um Fragen der Legitimität, letztlich Maßstäbe vernünftigen Denkens und Handelns.

Umgekehrt gesehen ist Subjektivität selbst konstitutiv für objektives Gelingen von Bildungsprozessen. Die Spezifik dieser Art von Konstitution aber unterscheidet Bildungs- von Lernprozessen. So wie an entscheidender Stelle die Bedeutung des aktuellen sozialen Geschehens ambivalent, pragmatisch mehrdeutig wurde, entscheidet die Art des Anschlusses daran über Aufrechterhaltung der Möglichkeit bzw. Realisierung eines Ausschlusses von tiefgreifender Problematisierung einer Sache und somit letztlich auch von Bildungsprozessen. Damit liegt als vorläufig letzte Antwort nahe, die spezifische Art des Nichtverstehens, welche den wiederholten Reaktionen des Lehrers auf die sich konkretisierenden Schülervorschläge und -fragen eigen war, als tiefere Ursache des Scheiterns einer möglichen Bildungsepisode zu bezeichnen.

Einerseits schien es, als könne sich der Lehrer gar nicht vorstellen, dass die von ihm zu lehrende Sache auch falsch, also zumindest ganz anders sein könne, als er sie sich vor Augen geführt hat. Das verwiese auf das Fehlen eines methodischen Habitus, wie er für Wissenschaftler (und wohl in spezifischer Form auch Künstler) typisch ist. Andererseits aber könnte er auch schlichtweg Angst vor einem Scheitern gehabt haben. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es sich hier um einen Fall der Virtualisierung mathematischer Bildung handelt.

Literatur

Gruschka, Andreas: Auf dem Weg zu einer Theorie des Unterrichtens. Die widersprüchliche Einheit von Erziehung, Didaktik und Bildung in der allgemeinbildenden Schule, Frankfurt/M. 2005.

Gruschka, Andreas: Erkenntnis in und durch Unterricht. Empirische Studien zur Bedeutung der Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie für die Didaktik. Wetzlar 2009.

Kaplan, Robert: Die Geschichte der Null, Frankfurt/M, New York 2000.

Kvasz, Ladislav: Patterns of Change. Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics, Basel/Boston/Berlin 2008.

Malle, Günther: Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Braunschweig/Wiesbaden 1993.

Rosch, Jens: Das Problem des Verstehens im Unterricht, Frankfurt/M. 2010.