Christian Wittmann, Erich

Mathematiklernen zwischen Skylla und Charybdis

Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung 7 (1989) 2, S. 227-239

MATHEMATIKLERNEN ZWISCHEN SKYLLA UND CHARYBDIS

Erich Christian Wittmann, Dortmund

Die "Hilfen", die der Lehrer dem Schüler beim Erwerb von Wissen und beim Aufbau von Verständnis im Mathematikunterricht geben kann, sind prinzipiell zweischneidig, weil sie das Verstehen auch behindern, wenn nicht gar verhindern können. Der mathematische Formalismus einerseits, mit dem Anspruch, durch begriffliche und formale Präzision Verständnis zu gewährleisten, sowie der methodische Formalismus andererseits, mit dem Anspruch, durch unterrichtliche Massnahmen die Schüler verstehen zu lehren, stellen Bedrohungen des Verstehens dar; denn weder kann man mathematisches Wissen "vermitteln", noch "Verstehen" lehren. Im Mathematikunterricht geht es deshalb darum, Hilfe zur Selbsthilfe zu geben: Wissen kann vom Schüler innerhalb eines vorgegebenen Zielrahmens nur selbst erworben werden, indem der Schüler lernt, Verantwortung für sein eigenes Lernen und Verstehen zu übernehmen (Red.).

Die Wertlosigkeit von Büchern

Die Welt drückt ihre Wertschätzung des SINNS dadurch aus, daß sie Bücher wertschätzt. Doch Bücher enthalten nur Worte. Es gibt aber etwas, wodurch die Bücher wertvoll werden. Was die Bücher wertvoll macht, sind die Gedanken. Es gibt etwas, wonach sich die Gedanken richten; das aber, wonach sich die Gedanken richten, läßt sich nicht durch Worte überliefern. Die Welt aber überliefert um der für wertvoll gehaltenen Worte die Bücher. Obwohl die Welt sie wertschätzt, sind sie in Wirklichkeit der Wertschätzung nicht wert, weil Worte nicht wertvoll sind. Ach, daß die Weltmenschen Form und Farbe, Name und Schall für ausreichend erachten, das Ding an sich zu erkennen! Form und Farbe, Name und Schall sind wirklich nicht ausreichend, um das Ding an sich zu erkennen.

DSCHUANG DSI, Das wahre Buch vom südlichen Blütenland, Buch XIII, 10

Geoff GILES stellte 1973 in einem Vortrag die Frage *"Ist Lehren ein Hindernis für Lernen?"* . André REVUZ ging 1980 noch einen Schritt weiter, als er ein Buch mit dem Titel schrieb *"Ist es unmöglich, Mathematik zu unterrichten?"*. Beide Autoren kommen zu dem Schluß, daß ihre Fragen im wesentlichen mit "ja" zu beantworten sind. Damit bestätigen sie nicht etwa nur die alltägliche Erfahrung, daß das Lehren seine Grenzen hat und daß in vielen Fällen selbst die höchste Lehrkunst nichts zu bewirken vermag, sondern sie behaupten, daß didaktische Interventionen schädlich sein können und es in einem Ausmaß auch sind, von dem man sich gewöhnlich keine Vorstellung macht. Die Idee, daß der Lehrer, auch der sogenannte "gute" Lehrer, seine Schüler behindern kann, während er glaubt, ihnen zu helfen, ist wie jede tiefe didaktische Idee keineswegs neu. Sie ist aber von den Didaktikern solange nicht beachtet und diskutiert worden, wie ein ungebrochener Optimismus über die prinzipiellen Möglichkeiten der Didaktik vorgeherrscht hat. Erst in den beiden letzten Jahrzehnten haben sich diejenigen verstärkt zu Wort gemeldet, die die Rolle des Lehrers im Unterricht und im Lernprozeß der Schüler kritischer sehen. Zu ihnen gehört Hans FREUDENTHAL. Er hat vor 20 Jahren einen Vortrag *"Geometry between the Devil and the Deep Sea"* gehalten (FREUDENTHAL 1971), der nicht nur mein eigenes Denken sehr stark beeinflußt, sondern auch den Titel des vorliegenden Beitrags inspiriert hat.

Ich beginne mit einem Beispiel aus meinem eigenen Hochschulunterricht, an dem man die Problematik von Lehren und Lernen gut studieren kann. Vor einigen Jahren habe ich eine Vorlesung "Raumgeometrie" für Primarstufenstudenten abgehalten, in der ich mich bemüht habe, den mathematischen Formalismus auf ein Minimum zu reduzieren und statt dessen inhaltlich-anschaulichen, aber gleichwohl stichhaltigen Überlegungen zu folgen. Der erste Satz, den ich zu beweisen hatte, war der Eulersche Polyedersatz, eingeschränkt auf konvexe Polyeder. Ich führte zu diesem Zweck den Begriff des Schlegeldiagramms eines konvexen Polyeders ein und veranschaulichte ihn mit Hilfe einer Gummihaut an einigen Polyedermodellen (Abb. 1, vgl. WITTMANN 1987).

Anschließend wurde die Beziehung $E + F - K = 2$ (wobei E, F, K die Anzahlen der Ecken, der Flächen und der Kanten eines Polyeders sind) am Schlegel-Diagramm operativ bewiesen, indem das Diagramm, ausgehend von einem Punkt, Kante für Kante rekonstruiert wurde.
Nach Beendigung der Beweisführung meldete sich eine Studentin zu Wort und fragte, ob das wirklich ein Beweis gewesen sei. Ich war ziemlich irritiert, weil diese Frage gewöhnlich gestellt wird, wenn ein Beweis nicht formal genug ist und ich bei dieser Studentengruppe ein Interesse an *nichtformalen* Beweisen erwartet hatte. Auf meine Rückfrage "Warum denn nicht?" kam aber dann die überraschende und m.E. didaktisch außerordentlich lehrreiche Antwort: "Weil ich es verstanden habe."

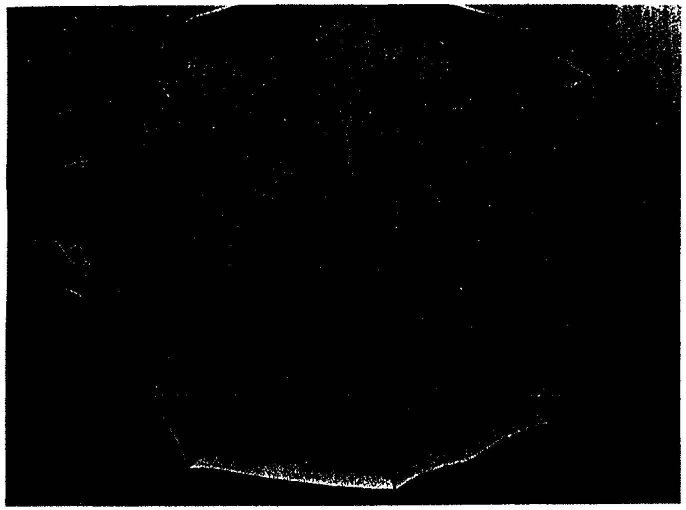

Abb. 1: Schlegeldiagramm des Würfels

Für meinen Kollegen Gerhard Müller und mich war diese Episode der Anlaß, das Bild genauer zu studieren, das sich unsere Lehrerstudenten von der Mathematik machen. Wir sind dabei zu dem Schluß gekommen, daß dieses Bild von formalistischen Vorstellungen überwuchert ist und daß diese das Verständnis für Mathematik stark behindern (WITTMANN & MÜLLER 1988). Die gut gemeinten Versuche, mathematisches Verständnis durch begriffliche und formale Präzision zu gewährleisten, bewirken bei der großen Mehrheit der Schüler also gerade das Gegenteil, nämlich Unverständnis. Darauf werde ich später noch zurückkommen.

An der oben skizzierten Episode sehe ich folgende Thesen bestätigt:

1. **Mathematisches Wissen kann man nicht vermitteln, Verstehen kann man nicht lehren.**
2. **Wissen kann nur vom Schüler selbst erworben und Verständnis nur von ihm selbst aufgebaut werden.**
3. **Bei dem Erwerb von Wissen und dem Aufbau von Verständnis kann der Lehrer Hilfestellung leisten. "Hilfen" sind aber prinzipiell zweischneidig. Auch in der besten Absicht gegebene Hilfen können das Verständnis behindern, wenn nicht sogar verhindern.**

Den Thesen 1 und 2 liegt eine bestimmte Sicht des Lehr-Lern-Prozesses zugrunde, die ich zunächst kurz beschreiben möchte. Anschließend möchte ich These 3 für den Mathematikunterricht konkretisieren.
In der Linguistik unterscheidet man zwischen der Oberflächen- und der Tiefenstruktur der Sprache. Diese Unterscheidung kann man auf die Kommunikation ganz allgemein übertragen. Jede Kommunikation bedarf *äußerer* Hilfsmittel, nämlich Systemen von Zeichen, Bildern und Handlungen. Diese sind aber nicht mit der *Bedeutung*, dem *inneren* Gehalt, dem *Sinn* der Mitteilung identisch. H. VON FOERSTER, der große Altmeister der Biokybernetik und Systemtheorie, hat dies in einem Vortrag auf seine unnachahmliche Weise ausgedrückt:

> *"Die ursprünglichsten und zutiefst persönlichen Prozesse in jedem Menschen und in der Tat in jedem Organismus, nämlich "Information" und "Erkenntnis" werden gegenwärtig durchwegs als Dinge bzw. Waren aufgefaßt, also als materielle Güter. In Wirklichkeit ist Information der Prozeß, durch den wir Erkenntnisse gewinnen, und Erkenntnisse sind Prozesse, die vergangene und gegenwärtige Erfahrungen integrieren, um neue Tätigkeiten auszubilden, entweder als Nerventätigkeit, die wir innerlich als Denken und Wollen wahrnehmen können, oder aber als äußerlich wahrnehmbare Sprache und Bewegung. Keiner dieser Prozesse kann "weitergegeben" werden, wie man uns immer wieder sagt, z.B. mit Sätzen wie "... Universitäten sind Horte des Wissens, das von Generation zu Generation weitergegeben wird ..." usw., denn Ihre Nerventätigkeit ist Ihre Nerventätigkeit und - leider! - nicht* ***meine****.*
> *Es ist kein Wunder, daß ein Bildungssystem, welches den Prozeß der Erzeugung neuer Prozesse mit der Verteilung von Waren, genannt "Wissen", verwechselt, in den dafür bestimmten Empfängern große Enttäuschung hervorrufen muß, denn die Waren kommen nie an: es gibt sie nicht! Die Konfusion, die Wissen als materielles Gut auffaßt, geht historisch auf ein Flugblatt zurück, das im 16. Jahrhundert in Nürnberg gedruckt wurde. Es zeigt einen sitzenden Schüler mit einem Loch im Kopf, in das ein Trichter gesteckt ist. Daneben steht ein Lehrer, der einen Kübel "Wissen" in den Trichter gießt: Buchstaben des Alphabets, Zahlen und einfache Gleichungen. Was die Erfindung des Rades für die ganze Menschheit gebracht hat, brachte der Nürnberger Trichter für die Bildung: es kann nun noch schneller abwärts gehen.*
> *Gibt es ein Heilmittel? Natürlich gibt es eines! Wir müssen Vorträge, Bücher, Diapositive, Filme usw. nicht als* ***Information****, sondern als* ***Träger*** *potentieller Information ansehen."* (VON FOERSTER 1985, 4 - 5)

Obwohl auch die Unterscheidung zwischen der Oberflächen- und der Tiefenstrukur sehr alt ist (vgl. das Eingangszitat über die "Wertlosigkeit von Büchern"), ist diese Erkenntnis in der Didaktik nahezu ignoriert worden. Im Gegenteil: Die Geschichte der Didaktik, und namentlich die der Mathematikdidaktik, ist geprägt von planmäßigen Versuchen, Bedeutung, Sinn, Verstehen *von außen*, von der Oberfläche her, in den Griff zu bekommen. Diese Versuche stellen Musterbeispiele für gut gemeinte Hilfen dar, die das genaue Gegenteil von dem bewirken können, was man bewirken will, und dies oft genug tun.

Es ist eine außerordentlich bedeutsame Tatsache, daß die Doktrin des mathematischen Formalismus, die in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts ihren Höhepunkt erreichte, nicht nur durch die mathematische Grundlagenforschung gestützt wurde, sondern ganz entscheidend auch von Bemühungen der Mathematiker getragen war, die Mathematik lehr- und verstehbar zu machen. Diese Bemühungen wurden durch den Glauben genährt, eine mathematische Theorie ließe sich ausgehend von Grundbegriffen und Axiomen durch eine logische Kette von Definitionen und abgeleiteten Sätzen genau und vollständig darlegen. Das erste in dieser Richtung groß angelegte System war wohl der Wissenschaftskanon von Christian WOLFF im 18. Jahrhundert, der den universitären Stil der Vorlesungen und Lehrbücher für die folgenden Jahrhunderte wesentlich prägte. Wolff selbst beschrieb seine "Lehr-Art" folgendermaßen (WOLFF 1726/1973, 52 - 54):

In meinem Vortrage der Sachen habe ich hauptsächlich auf dreyerley gesehen, 1. daß ich kein Wort brauchte, welches ich nicht erkläret hätte, wo durch den Gebrauch des Wortes sonst eine Zweydeutigkeit entstehen könte, oder es an einem Grunde des Beweises fehlte: 2. daß ich keinen Satz einräumete, und im folgenden als einen Förder-Satz in Schlüssen zum Beweise anderer brauchte, den ich nicht vorher erwiesen hätte: 3. daß ich die folgende Erklärungen und Sätze mit einander beständig verknüpffte und in einer steten Verknüpffung aus einander herleitete. Jedermann weiß, daß dieses die Regeln sind, nach welchen man sich in der Mathematick richtet. Und demnach kan ich mit einem Worte sagen, ich habe mich beflissen nach der mathematischen Lehr-Art meine Sachen vorzutragen. Von der mathematischen Lehr-Art habe ich einen Unterricht meinen sowohl deutschen, als lateinischen Anfangs-Gründen der gesammten mathematischen Wissenschafften vorgesezet. Was ich darinnen von dieser Lehr-Art angeführet, darauf habe ich in meinem Vortrage beständig gesehen. Und ich getraue mir auch mein Verfahren jederzeit daraus zu rechtfertigen, und werde bald eine und die andere Probe davon ablegen. Wer nun aber die mathematische Lehr-Art, wie sie daselbst von mir beschrieben worden, mit meiner Logick vergleichet, die ich den vernünfftigen Gedanken von den Kräfften des Verstandes abgehandelt; der wird finden, daß die mathematische Lehr-Art in einer sorgfältigen Ausübung der Vernunfft-Lehre bestehe. Und demnach ist es gleich viel, ob man nach der mathematischen Lehr-Art etwas ausführet, oder nach den Regeln der Vernunfft-Lehre, wenn nur diese ihre Richtigkeit haben. Ja da ich erwiesen, daß man in der Mathematick die natürliche Art zu gedenken behält und daß die Vernunfft-Lehre nichts anders ist als eine deutliche Erklärung derselben; so kan ich auch sagen, ich habe mir angelegen seyn lassen alles so vorzutragen, wie es sich auf eine natürliche Art gedenken lässet."

Der Versuch, Verständnis auf dem Weg formaler Begriffsklärung zu erreichen, führte im 20. Jahrhundert zu dem Lehrbuchwerk "Eléments de mathématique", das von einer französischen Mathematikergruppe unter dem Pseudonym N. BOURBAKI veröffentlicht wurde. Dieses Mammutunternehmen ist bezeichnender Weise aus einer Diskussion von A. WEIL und J. DELSARTE über die Frage hervorgegangen, wie Analysis am besten zu lehren sei. J. Dieudonné, einer der

führenden Köpfe der Gruppe beschreibt die zugrundeliegende "Lehrtheorie" folgendermaßen (DIEUDONNE 1974, 404):

"Die Kommunikation unter den Mathematikern mit Hilfe einer gemeinsamen Sprache muß aufrecht erhalten bleiben ..., und die Übermittlung von Erkenntnissen kann nicht nur den Genies überlassen werden. In den meisten Fällen wird man sie Professoren anvertrauen, die ... entsprechend ausgebildet und vorbereitet sind, um die Beweisführungen zu verstehen. Da der größte Teil von ihnen wohl kaum die außerordentliche Gabe der "Intuition" der Schöpfer besitzt, kann ein hinreichend gutes Verständnis der Mathematik und ihre Fähigkeit, diese an ihre Studenten weiterzugeben, nur dadurch erreicht werden, daß der Lehrstoff sorgfältig dargeboten wird: Definitionen, Voraussetzungen und Beweise müssen so präzise sein, daß Mißverständnisse vermieden werden können, und auf mögliche Trugschlüsse und Irrtümer ist erforderlichenfalls hinzuweisen."

Der Glaube, man könne mathematisches Verständnis durch eine logisch lückenlose Beschreibung des Stoffes mit Hilfe einer "hinreichend präzisen" mathematischen Sprache erzwingen, hat weitreichende didaktische Konsequenzen: *Die logischen Analysen der Mathematiker bilden die natürliche, voll ausreichende Grundlage für die Lehre. Didaktik und Logik werden sozusagen identifiziert.* Diese Auffassung hat sich im Zeitalter der "Neuen Mathematik" auch im Schulunterricht weit verbreitet und ist für den Formalismus verantwortlich, den man dort noch vielfach vorfindet (vgl. ANDELFINGER & VOIGT 1988). Unmittelbare Konsequenz dieser Sichtweise ist übrigens, daß Didaktik in der Lehrerbildung eigentlich überflüssig ist. Die Unfähigkeit vieler Mathematiker, den Sinn von Didaktik und von didaktischen Lehrstühlen einzusehen, beruht somit keineswegs auf Böswilligkeit, wie man manchmal meinen könnte. sondern auf der ideologischen Befangenheit in einer impliziten Lehr-Lern-Theorie, die in der Mathematik eine lange Tradition hat.

Angesichts des sehr starken Einflusses der Universitätsmathematik auf die Lehrerausbildung und den Schulunterricht ist es ein ermutigendes Zeichen, daß sich die Mathematiker gegenwärtig weltweit der überragenden Bedeutung der nicht formalisierbaren Aspekte ihrer Tätigkeit und der Gefahren des Formalismus bewußt werden (vgl. hierzu OSSERMANN 1983, DAVIS & HERSH 1983, WITTMANN & MÜLLER 1988, Abschnitt 2). Z.B. hat R. THOM in einem Hauptvortrag anläßlich des 2. Internationalen Kongresses für Mathematikunterricht Exeter 1972 die "moderne" Mathematik einer grundsätzlichen Kritik unterzogen (THOM 1973) und die "Sinngebung, die 'Existenz' mathematischer Objekte", nicht die formale Strenge als das wirkliche Problem des Mathematikunterrichts bezeichnet. Auch bei den Bourbakisten selbst haben sich die Auffassungen über die Notwendigkeit der formalen Präzision für das Verständnis zu wandeln begonnen:

> *"Der Lehrer bereitet in vollem Bewußtsein einen schönen Kurs vor, streng und kristallklar wie das Wasser einer Quelle, und bei der Prüfung sieht er zu seiner Verwunderung, daß sich dieses klare Wasser in eine trübe Brühe verwandelt hat. Man kommt also nicht daran vorbei, daß die formale Schönheit der unterrichteten Materie und die Klarheit der Darstellung für das Verständnis nicht ausreichen und vielleicht nicht einmal notwendig sind."*
> (G. CHOQUET, zitiert nach BOUVIER 1981, 134)

Es besteht die Hoffnung, daß dieser Umdenkungsprozeß der Mathematiker langfristig dazu verhelfen wird, auch in der Lehrerbildung und im Unterricht der Skylla des Formalismus zu entrinnen, und daß didaktische Ansätze Boden gewinnen werden, die auf eine umfassendere Berücksichtigung der epistemologischen Struktur mathematischen Wissens ausgerichtet sind (STEINBRING 1988).

Während der mathematische Formalismus mit der Entwicklung der Fachwissenschaft Mathematik eng verbunden war und dementsprechend in der Gymnasiallehrerbildung den größten Einfluß ausgeübt hat, geht eine zweite Bedrohung des Verstehens, der *methodische Formalismus*, mit bestimmten Entwicklungen der Psychologie und der allgemeinen Didaktik einher und ist am stärksten in der Volksschullehrerbildung wirksam gewesen, wo er zu einer ungeheuren Überschätzung der didaktischen Möglichkeiten, ja sogar zu einer "Überdidaktisierung", geführt hat.
Der methodische Formalismus wurde entscheidend durch die Philosophie und die Psychologie des Empirismus geprägt, welche die Erkenntnisgewinnung bzw. die Entstehung von Wissen im Lernenden durch die sozusagen "mechanische" Wirkung *äußerer* Ursachen erklärt haben: In das anfangs "leere Kabinett" des Geistes (J. Locke) strömen von außen (d.h. von der natürlichen und sozialen Umwelt und dem

Lehrer) kommende Sinneseindrücke, prägen sich durch Wiederholung ein und schlagen sich in geordneten Vorstellungen und Verhaltensweisen nieder. In der lapidaren Sprache des Behaviorismus ist Lernen nichts anderes als ein relativ stabiler Zuwachs im Verhaltensrepertoire, der das Ergebnis von Übung und dabei erfolgender Verhaltenskontrolle ist. Der Lernende setzt nur seine Sinne ein, öffnet Augen und Ohren und versucht nachzuahmen, was ihm vorgemacht wird, bleibt aber ansonsten passiv. Er läßt sich gewissermaßen wie ein Schiff beladen.
Dem Lehrer kommt in dieser Sichtweise die Aufgabe zu, den Wissensvermittlungsprozeß im Detail zu steuern und zu überwachen: durch Zerlegung des Stoffes in einzelne "Lernelemente", durch "methodisch gestufte" Lernsequenzen vom "Einfachen" zum "Schwierigen", durch Erklärung von Begriffen und Regeln anhand von Beispielen und Musteraufgaben, durch "aufbauende" Serien von Übungs- und Anwendungsaufgaben, durch den ständigen Vergleich des Ist-Zustandes mit dem Soll-Zustand usw. Die Didaktik als Berufswissenschaft des Lehrers hat entsprechende theoretische Rahmen, Lehrbuchwerke und Materialien zur Verfügung zu stellen, die dem Lehrer die Steuerung und die Kontrolle des Unterrichts ermöglichen und erleichtern. Die Geschichte der allgemeinen Didaktik weist bis heute eine Fülle instruktionsorientierter didaktischer Modelle auf, von denen die Herbart-Zillerschen Formalstufen, der fragend-entwickelnde Unterricht, die Aufgabendidaktik, die Operationalisierung von Lernzielen, der programmierte Unterricht und die Galperinsche Methode der etappenweisen Ausbildung geistiger Operationen die wohl bekanntesten sind. Bei allen Unterschieden verfolgt jedes dieser Modelle das Ziel, den Lernprozeß des Schülers durch die didaktische "Kleinarbeitung des Stoffes" (B. Andelfinger) und die kleinschrittige Unterrichtsführung möglichst weitgehend in den Griff zu bekommen. Als Beispiel zitiere ich GALPERIN:

> *"Objektiv, also im Hinblick auf die Organisation des Prozesses schaffen wir Bedingungen, unter denen sich die Handlungen des Schülers geradezu vollständig determinieren lassen."*

Während die heutige Unterrichtspraxis noch vielfach von den Prinzipien der "kleinen und kleinsten Schritte", der "methodischen Stufung" und der "Isolierung der Schwierigkeiten" beherrscht wird, häufen sich in der didaktischen Forschung eindeutige Befunde über die oberflächlichen, verständnishemmenden Wirkungen eines kleinschrittigen, von äußerlichen Unterrichtsroutinen geprägten Unterrichts

(BAUERSFELD 1980, VOIGT 1984, BOUVIER 1984, STEIN 1987), und alternative Ansätze zu einer Befreiung des Unterrichts von der Charybdis des methodischen Formalismus gewinnen an Boden.

Die bisherigen Überlegungen erlauben uns, die obige These 3 als *"didaktisches Dilemma"* zu konkretisieren (vgl. BROUSSEAU 1984, MASON & DAVIS 1988):

> **Der Lehrer kann dem Schüler zum Erwerb von Wissen und dem Aufbau von Verständnis nur dadurch Hilfestellung leisten, daß er sich äußerer Hilfsmittel bedient. Je expliziter er aber damit den Lernstoff beschreibt und je enger und kleinschrittiger er den Unterricht auf die angestrebten Lernziele ausrichtet, desto mehr wird der Schüler dazu verleitet, eigene Anstrengungen zum Aufbau von Verständnis einzustellen und nur oberflächlich zu lernen.**

Ich möchte die aufgeworfene Problematik nun von der erst in jüngster Zeit eröffneten *systemischen* Sicht aus betrachten, die nicht nur tiefere Gründe aufzeigt, warum das didaktische Dilemma besteht, sondern auch einen Weg weist, wie man sich aus ihm befreien kann. Ansatzpunkt dieser Sichtweise ist die Feststellung, daß sowohl der einzelne Mensch für sich genommen als auch Sozialverbände von Menschen, z.B. eine Schulklasse, *lebendige Systeme* sind, und als solche eine prinzipiell unüberschaubare und im Detail unübersehbare Vielfalt an internen Abläufen und externen Austauschprozessen mit der jeweiligen Umwelt aufweisen. Weiter sind "Wissensstrukturen" als Ergebnis und Voraussetzung individueller und kollektiver Kommunikations-, Erkenntnis- und Anwendungsprozesse hochkomplexe Gebilde. Auch das elementarste mathematische Wissen wie Zählen, Rechnen, Ordnen, Klassifizieren usw. ist nur scheinbar einfach und zeigt bei genauerem Studium eine sehr komplexe kognitive Struktur.

Für hochgradig komplexe Systeme gilt ein systemtheoretisches Gesetz, das ich als "Hauptsatz der *Komplexitätsbeherrschung*" bezeichnet habe (WITTMANN 1988, 1989):[1]

> **Es ist unmöglich, ein System, das einer komplexen Umgebung gegenübersteht und selbst eine komplexe Struktur aufweist, von außen durch vollständige detaillierte Kontrolle zur Erreichung vorgegebener Ziele zu zwingen. Die Komplexität läßt sich nur von innen heraus beherrschen, indem Verhaltensstrukturen zur Geltung gebracht werden, die im System selbst spontan entstehen. Der größte Zuwachs an interner Organisation tritt in der Symbiose teilweise autonomer, sich selbst steuernder Untersysteme ein.**
> **Je komplexer die angestrebten Verhaltensweisen sind, desto mehr bedarf es zu ihrer Ausbildung der spontanen Kräfte im System. Je mehr die Kontrolle von außen verstärkt wird und je mehr die spontanen Kräfte übergangen oder gar unterdrückt werden, desto ärmere Verhaltensstrukturen bilden sich heraus.**

Wenn wir diesen Hauptsatz auf die komplexen Systeme "Schüler" und "Mathematikunterricht" anwenden, sehen wir, daß den Möglichkeiten des Lehrers, Wissen und Fertigkeiten *vermitteln* zu wollen, prinzipielle Grenzen gesetzt sind. Aus Komplexitätsgründen ist es völlig aussichtslos, verständnisvolles mathematisches Lernen durch eine bis ins Detail getriebene Formalisierung oder eine kleinschrittige, genau kontrollierte Folge von Lernanweisungen zu erfassen. Die Durchsetzung eines solchen Unterrichts wird notwendig mit einer starken Reduktion der Komplexität erkauft und führt zu einer Vermittlung oberflächlicher, mechanischer Rezepte.
Ins Positive gewendet, begründet der Hauptsatz die prinzipielle Überlegenheit aktiv-entdeckender Lehr-Lernformen, die ein grundsätzlich anderes Rollenverständnis von Lehrer und Schüler beinhalten: In dieser Auffassung liefert der Lehrer den Schülern einen Orientierungs- und Zielrahmen und versetzt sie von vorneherein in *komplexere Lernsituationen*, mit denen sie sich länger beschäftigen können. Er zieht sich vom direkten Eingriff in den Unterricht möglichst zurück und verlegt sich mehr auf die *indirekte* Lenkung der Schüleraktivitäten. Insgesamt leistet der

[1]Dieser systemische Hintergrund ist von Managementwissenschaftlern an der Hochschule St. Gallen sehr schön herausgearbeitet worden. Vgl. hierzu F. MALIK, Strategie des Managements komplexer Systeme. Bern/Stuttgart: Haupt 1986[2].

Lehrer damit *Hilfe zur Selbsthilfe*. Die Schüler lernen, ihre Selbstorganisationskräfte zu entwickeln, ihren Verstand zu gebrauchen und Verantwortung für ihr Lernen zu übernehmen - Lernfaktoren, ohne die es prinzipiell nicht geht.

Wie die lange Auseinandersetzung zwischen der "passivistischen" und "aktivistischen" Position des Lehrens und Lernens zeigt, werden solche Beschreibungen des aktiv-entdeckenden Unterrichts von "realistisch" eingestellten Lehrern und Didaktikern gerne als "idealistisch" empfunden und nicht ernst genommen. M.E. ist das eine Verkehrung der Tatsachen. Die wahren Realisten sind vielmehr die Anhänger des aktiv-entdeckenden Lernens und die wahren Idealisten sind diejenigen, die das Boot "Mathematiklernen" so über das Meer des Unterrichts steuern, als ob die Skylla des mathematischen Formalismus und die Charybdis des methodischen Formalismus nicht existierten.

Literatur:

ANDELFINGER,B. & VOIGT,J.(1986) Vorführstunden und alltäglicher Mathematikunterricht - Zur Ausbildung von Referendaren im Fach Mathematik (S I/S II. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 86/1,2-9. / BAUERSFELD,H.(1980) Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics,11,23-41. / BROUSSEAU,G.(1984) The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In: STEINER,H.G.(1984) Theory of mathematics education. Occasional Paper Nr. 54. Bielefeld: IDM,110-119. / BOUVIER,A.(1981) La mystification mathématique. Paris: Hermann. / BOUVIER,A.(1987) The Right to make mistakes. For the Learning of Mathematics,7,17-25. / DAVIS,PH. & HERSH,R.(1983) Erfahrung Mathematik. Basel/Stuttgart: Birkhäuser. / DIEUDONNE,J.(1974) Sollen wir "moderne" Mathematik lehren? In: OTTE,M. (Hrsg)(1974) Mathematiker über Mathematik. Berlin/Heidelberg/New York: Springer,403-418. / VON FOERSTER,H.(1985) Sicht und Einsicht. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg. / FREUDENTHAL,H.(1971) Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in mathematics,3,413-435. / GILES,G.(1987) Ist Lehren ein Hindernis für Lernen? Mathematik lehren,21,6-10, (Übersetzung des englischen Originals: Does teaching inhibit learning? Mathematics Teaching,65(1973),33-38). / MASON,J.H. & DAVIS,J.(1988) The importance of Weltanschauung in Teaching, In-service and Appraisal. Manuscript. Open University, Milton Keynes U.K. / OSSERMAN,R.(1983) Structure vs. Substance: The Fall and Rise of Geometry. In: ZWENG,M. et. al.(1983) Proceedings of ICME 4. Boston: Birkhäuser. / REVUZ,A.(1980) Est-il impossible d'enseigner les mathématiques? Paris: PUF. / STEIN,K.S.(1987) Gresham's Law: Algorithm Drives out Thought. For the learning of Mathematics,7,2-4. / STEINBERG,H.(1988) Nature du savoir mathématique dans la pratique de l'enseignement. In: LABORDE,C.(ed.) Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. Grenoble: La Pensée Sauvage,307-316. / THOM,R.(1973) Modern Mathematics - Does ist exist? In: HOWSON,A.G.(ed.)(1973) Developments in Mathematical Education. Cambridge: CUP,194-212. / VOIGT,J.(1984) Der kurz-

taktige, fragend-entwickelnde Mathematikunterricht. Szenen und Analysen. mathematica didactica,161-186. / WITTMANN,E.CH.(1987) Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg. / WITTMANN,E.CH. & MÜLLER,G.(1988) Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: BENDER,P.(1988) Mathematikdidaktik - Theorie und Praxis. Festschrift für H. Winter, Berlin: CVK,237-257. / WITTMANN,E.CH.(1988) Das Prinzip des aktiven Lernens und das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte in systematischer Sicht. Beiträge zum Mathematikunterricht,1988, Bad Salzdetfurth,339-342. / WITTMANN,E.CH.(1989) Wider die Flut der "bunten Hunde" und der "grauen Päckchen". Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: WITTMANN,E.CH. & MÜLLER,G.(1989) Handbuch produktiver Rechenübungen,Bd. 1, Stuttgart: Klett. / WOLFF,CHR.(1973) Ausführliche Nachricht von seinen eigenen Schriften. Kap. 3: Von der Lehrart des Autoris,52-124. Ges. Werke, I. Abt. Deutsche Schriften,Band 9, Hildesheim/NewYork:Olms.

SCHWERPUNKT "VERSTEHEN LEHREN"