Viet, Ursula; Schmidt, Veit Georg; Sommer, Norbert; Grommelt, Ulrich

Veränderungen des kognitiven Entwicklungsstandes von Schülern der Orientierungsstufe im Mathematikunterricht. Bericht über ein fachdidaktisches Projekt

Zeitschrift für Pädagogik 28 (1982) 3, S. 365-380

Quellenangabe/ Reference:
Viet, Ursula; Schmidt, Veit Georg; Sommer, Norbert; Grommelt, Ulrich: Veränderungen des kognitiven Entwicklungsstandes von Schülern der Orientierungsstufe im Mathematikunterricht. Bericht über ein fachdidaktisches Projekt - In: Zeitschrift für Pädagogik 28 (1982) 3, S. 365-380 - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-142106 - DOI: 10.25656/01:14210

https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-142106
https://doi.org/10.25656/01:14210

in Kooperation mit / in cooperation with:

BELTZ JUVENTA

http://www.juventa.de

Zeitschrift für Pädagogik

Jahrgang 28 – Heft 3 – Juni 1982

IV. Besprechungen

V. Dokumentation

Zeitschrift für Pädagogik

Beltz Verlag Weinheim und Basel

Anschriften der Redaktion: Prof. Dr. Dietrich Benner, Goethestr. 17, 4401 Altenberge; Prof. Dr. Herwig Blankertz, Potstiege 48, 4400 Münster.

Manuskripte in doppelter Ausfertigung an die Schriftleitung erbeten. Hinweise zur äußeren Form der Manuskripte finden sich am Schluß von Heft 1/1981, S. 165f., und können bei der Schriftleitung angefordert werden. Besprechungsexemplare bitte an die Anschriften der Redaktion senden. Die „Zeitschrift für Pädagogik" erscheint zweimonatlich (zusätzlich jährlich 1 Beiheft) im Verlag Julius Beltz GmbH & Co. KG, Weinheim und Verlag Beltz & Co. Basel. Bibliographische Abkürzung: Z. f. Päd. Bezugsgebühren für das Jahresabonnement DM 84,– + DM 4,– Versandkosten. Lieferungen ins Ausland zuzüglich Mehrporto. Ermäßigter Preis für Studenten DM 65,– + DM 4,– Versandkosten. Preis des Einzelheftes DM 18,–, bei Bezug durch den Verlag zuzüglich Versandkosten. Zahlungen bitte erst nach Erhalt der Rechnung. Das Beiheft wird außerhalb des Abonnements zu einem ermäßigten Preis für die Abonnenten geliefert. Die Lieferung erfolgt als Drucksache und nicht im Rahmen des Postzeitungsdienstes. Abbestellungen spätestens 8 Wochen vor Ablauf eines Abonnements. Gesamtherstellung: Beltz Offsetdruck, 6944 Hemsbach über Weinheim. Anzeigenverwaltung: Heidi Steinhaus, Ludwigstraße 4, 6940 Weinheim. Bestellungen nehmen die Buchhandlungen und der Beltz Verlag entgegen: Verlag Julius Beltz GmbH & Co. KG, Am Hauptbahnhof 10, 6940 Weinheim; für die Schweiz und das gesamte Ausland: Verlag Beltz & Co. Basel, Postfach 2346, CH-4002 Basel.

ISSN 0044-3247

Ursula Viet/Veit Georg Schmidt/Norbert Sommer/Ulrich Grommelt

Veränderungen des kognitiven Entwicklungsstandes von Schülern der Orientierungsstufe im Mathematikunterricht

Bericht über ein fachdidaktisches Projekt

1. Empirische Untersuchungen in der Mathematikdidaktik

Mathematikdidaktiker sehen ihre Wissenschaft angesiedelt „zwischen der Fachwissenschaft auf der einen Seite und den Erziehungswissenschaften, der Psychologie, Soziologie und Philosophie auf der anderen Seite" (Bigalke 1974, S. 112). Entsprechend verwenden sie Methoden aus beiden Wissenschaftsbereichen zur Bearbeitung von Fragen des Lernens und Lehrens von Mathematik. Bei der Untersuchung von Lernprozessen zeigt sich das einerseits in der Analyse der zu lernenden Strukturen aus mathematischer Sicht, andererseits wird der Aufbau dieser Strukturen beim Lernenden auf der Grundlage von Theorien der genannten Sozialwissenschaften untersucht. Die Anwendung empirischer Methoden in der Mathematikdidaktik – allseits als Desiderat gesehen – beschränkt sich zur Zeit im wesentlichen auf mehr oder weniger zufällige Beobachtungen im Unterricht, auf Fallstudien und auf Vortest-Nachtest-Designs, in denen der Lernzuwachs in einer unter bestimmten Bedingungen realisierten Unterrichtseinheit durch den Vergleich von Gruppenmittelwerten bestimmt wird. Nur wenige von Mathematikdidaktikern veranstaltete Projekte haben bisher versucht, Lernprozesse statt Lernergebnisse systematisch zu beoachten. Das hat seinen Grund in den zumeist sehr komplexen Fragestellungen der Fachdidaktik, die sich gewöhnlich auf eine längere Lernzeit beziehen und sich nicht auf eine Laborsituation übertragen lassen.

Das im folgenden beschriebene Projekt hat sich mit seinem Untersuchungsgegenstand und seinen Methoden zwischen alle Stühle gesetzt: Aus der Sicht der Fachdidaktik betreffen die bisherigen und die noch zu erwartenden Ergebnisse nur einen sehr kleinen Ausschnitt des Schulcurriculum. Zwar wurden als Nebeneffekte auch globalere didaktische Fragen untersucht, aber das Schwergewicht der bisherigen Arbeit lag nicht in der Evaluation von Lehrgängen sondern in der Erprobung von Beobachtungs- und Interpretationsmethoden. Aus der Sicht der experimentell arbeitenden Psychologie und Pädagogik ist das Design vermutlich immer noch zu komplex und sind die Variablen zu wenig eingeschränkt, um mögliche Störeffekte kontrollieren zu können.

Das Projekt stützt sich auf psychologische Modelle, die von algorithmischen Beschreibungen des Denkens bis hin zu Netzwerktheorien reichen. Es ist besonders an Begriffsbildungsvorgängen interessiert; dabei wird nicht von vornherein ein bestimmtes Modell zur Beschreibung von Lernvorgängen ins Auge gefaßt.

2. Ziele des Projekts

Ausgehend von der „Leistungsdimensionshypothese" (Treumann 1974) will das Osnabrücker Projekt Lernprozesse in zwei Unterrichtseinheiten des 5. Schuljahrs untersuchen und vergleichen, die unterschiedlichen Leistungsdimensionen zugeordnet werden können. Vorarbeiten mit verschiedenen strukturanalytischen Verfahren (Faktorenanalyse, Clusteranalyse) ergaben zwischen Inhalten der Geometrie (Würfel und Quader; Achsensymmetrie) und der Arithmetik (schriftliche Rechenverfahren) die größten Leistungsdistanzen unter den Unterrichtsinhalten des 5. und 6. Schuljahres (Viet/Sommer 1979). Diesen Gebieten lassen sich durch Vergleich mit Intelligenztestaufgaben bestimmte „gesicherte Primärfaktoren der Intelligenz" (Pawlik 1971) zuordnen.

Die Untersuchung der Auswirkung von Leistungsfaktoren innerhalb des Mathematikunterrichts spielt eine wichtige Rolle bei der Frage der Leistungsdifferenzierung in der Orientierungs- oder Förderstufe (5. und 6. Schuljahr), weil bisher in der Schulpraxis fast immer von einer einheitlichen Leistung „Mathematik" ausgegangen wurde. Darum verfehlen auch Förderprogramme für schwache Schüler häufig den Ansatzpunkt.

Die detaillierte Analyse und der Vergleich des Denk- und Lernverhaltens von Schülern bei arithmetischen und geometrischen Inhalten erfordern vor allem in der ersten Projektphase die Entwicklung angemessener Untersuchungs- und Auswertungsmethoden. Daneben sollen didaktisch interessante Fragen im Zusammenhang mit konkret ausgewählten Inhalten des Mathematikunterrichts untersucht werden.

3. *Zur Auswahl der Inhalte*

Als Inhalte wurden ausgewählt:
- Zählen und Rechnen in nichtdezimalen Stellenwertsystemen, Erarbeitung der strukturellen Eigenschaften verschiedener Stellenwertsysteme und die Übertragung auf vorher nicht behandelte Stellenwertsysteme;
- Achsensymmetrie: Erarbeitung der Abbildungsvorschriften und ihre Anwendung auf Konstruktionsaufgaben.

In beiden Gebieten steht das Erlernen mathematischer Begriffe bzw. Begriffskomplexe im Mittelpunkt. Es soll die Aneignung dieser aus Teilbegriffen und einem System von Regeln gebildeten Strukturen und ihre Anwendung auf neue, noch nicht behandelte Aufgaben untersucht werden. Dabei interessieren sowohl inhaltsspezifische als auch bereichsübergreifende kognitive Verhaltensweisen der Schüler.

3.1. Zum Inhalt „Nichtdezimale Stellenwertsysteme"

Das für den arithmetischen Teilbereich ausgewählte Thema „Nichtdezimale Stellenwertsysteme" findet sich zwar in nahezu allen Richtlinien der Grundschule und des 5. und 6. Schuljahres, es ist aber in der Fachdidaktik nicht unumstritten. Das eigentliche Ziel des Unterrichts ist nicht das Rechnen im 3er-, 4er- oder 12er-System, sondern die Erhöhung des Verständnisses des Dezimalsystems und der Rechenfähigkeit. In empirischen Untersuchungen konnte dieser Transfereffekt auf das Dezimalsystem bisher nicht eindeutig nachgewiesen werden. Auch die einzige uns bekannte deutsche Untersuchung kommt zu einem eher negativen Resultat: Es nützt nichts, aber es schadet auch nichts (Hennes/Schmidt/Weiser 1979). Diese Untersuchung ist als ex-post-facto Erhebung angelegt, bei der weder der Unterricht noch der Lernerfolg in der Einheit „Stellenwertsysteme" kontrolliert wurde. Die Anlage unseres Designs soll ermöglichen, die Transferfrage unter Berücksichtigung des Lernerfolgs in der Einheit neu zu untersuchen.

Didaktiker haben sich im wesentlichen um die oben angezeigte Transfer-Richtung bemüht. Umgekehrt ist auch die Frage interessant, auf welche Weise Schüler ihre Kenntnisse aus dem Dezimalsystem in den Unterricht über nichtdezimale Systeme einbringen. Für diese Transfer-Richtung haben sich vor allem Psychologen interessiert (vgl. BARTEL/HYLLA/SÜLLWOLD 1962; MAYER 1977; RUBINSTEIN 1977). Die Bedeutung inhaltsspezifischen Vorwissens wird in den meisten Lehr-Lern-Theorien berücksichtigt. DAVIS u.a. (1979, S. 114) beschreiben den Zusammenhang folgendermaßen: „We interpret learning as a rearranging and modification of the student's ideas, not as a new beginning. Hence there is a considerable interest in understanding the student's ideas even at the beginning of a program of instruction." In diesem Sinne haben wir einen Vortest über nichtdezimale Systeme eingesetzt, bevor unser Unterricht begann.

Der unterrichtliche Zugang zu nichtdezimalen Zahldarstellungen bzw. zum Konzept des Stellenwertsystems kann sich auf zwei Grundmodelle stützen. In Schulbüchern wird ausschließlich der von DIENES (1965) dargestellte Zugang über das Bündeln gewählt. LEIFHELM/SORGER (1978) stellen eine Einführung über das Zählen vor. Ein Vergleich dieser beiden Konzepte ist auf dem Hintergrund der neuen Diskussion zur Zahlbegriffsentwicklung zu sehen, in der die ordinale Kompetenz des Kindes stärker betont wird, als es in Anlehnung an PIAGETS Ergebnisse zur Entwicklung der kardinalen Invarianz geschah (vgl. GINSBURG 1977).

3.2. Zum Inhalt „Achsensymmetrie"

Auf die besondere Bedeutung des Symmetriebegriffs in der Mathematik, hier in der Gestalt der Geradenspiegelung in der Ebene, soll nicht eingegangen werden. Als Unterrichtsgegenstand klingt er in der Grundschule an und wird im 5. bis 8. Schuljahr weitergeführt. Dafür wurden in der Didaktik verschiedene Handlungsmodelle entwickelt, von denen zwei (Spiegeln, Falten) in unseren Untersuchungsplan aufgenommen wurden. Im Gegensatz zur Unterrichtseinheit „Stellenwertsysteme" stammt der größte Teil des zu Beginn des 5. Schuljahres vorhandenen Vorwissens im Bereich Geometrie nicht aus dem Grundschulunterricht, sondern aus der Umwelterfahrung der Kinder. Das hat zur Folge, daß die Schüler geometrische Fachbegriffe noch mit den Bedeutungen der Umgangssprache belegen. So verstehen beispielsweise über 90 Prozent der von uns untersuchten Schüler unter dem Wort „senkrecht" eine vertikale Linie, die „von oben nach unten geht". Im Laufe des Lernprozesses kann der Übergang vom Alltagsbegriff zum Fachbegriff beobachtet werden.

Für die Untersuchung der Ausbildung geometrischer Begriffe eignet sich der Inhalt Achsensymmetrie aus mehreren Gründen besonders gut:
- Wie oben angedeutet, gibt es verschiedene didaktische Modelle.
- Die einschlägigen Aufgaben lassen eine genügend breite Variation der Merkmale zu (Lage der Achse, Art und Lage der abzubildenden Figuren u. a. m.).
- Für die Bearbeitung der Aufgaben reichen einige wenige mathematische Gesetzmäßigkeiten, die in kurzer Zeit erarbeitet werden können.
- Im Geometrie-Unterricht lernen die Schüler, in vorgegebene Linien zusätzliche hineinzudenken, um geometrische Beziehungen zu beschreiben. Um dieses Hineindenken zu erleichtern, können derartige Linien auch in die Figur eingezeichnet werden. In achsensymmetrische Bilder können beispielsweise Achse und Ordner als zusätzliche Linien eingezeichnet werden.

In unserer Untersuchung wollen wir feststellen, wie Kinder im aktiven Umgang mit dem Inhalt die darin miteinander verbundenen Teile erkennen und in Beziehung setzen (vgl. die Auffassung über Begriffsbildung bei AEBLI 1981, S. 91 und S. 97ff.).

Hierzu wollen wir eine kurze Erläuterung geben, da später nur die Auswertungsmethode des Arithmetik-Projektteils beschrieben wird. Wir nehmen an, daß Schüler bei der Begriffsbildung im Unterricht Teile des Lehrstoffs miteinander in Beziehung setzen, daß sie Hypothesen darüber aufstellen (vgl. z.B. AEBLI 1981, S. 50 und 54ff.; PIPPIG 1980, S. 142) und daß sie schließlich diejenigen davon annehmen, die in ihr Begriffsbild passen. Jeder Schüler fügt dann jeweils die von ihm angenommenen Beziehungen des Inhalts zu einer ganzheitlichen Sicht, zu seinem Begriff von der Sache, zusammen. Untersucher müssen deshalb die Wechselwirkungen zwischen dem Schüler, der den Begriff bildet, und dem Denkobjekt, über dessen bestehende Beziehungen der Begriff gebildet wird, berücksichtigen. Mathematische, besonders geometrische Begriffe sind für eine Untersuchung der Begriffsbildung gut geeignet. Sie sind in ihrer abstrakten Natur für alle Individuen, die sie verstehen, gleich festgelegt. Die inhaltlichen Beziehungen, die in ihnen bestehen, müssen dabei in einer idealisierten Form, losgelöst von der Anschauung, gedacht werden. Den Übergang vom anschaulichen zum abstrakten Begriff, der beim Aufbau der idealisierten Form stattfindet, nennen wir Mathematisierung. Dabei müssen die wahrgenommenen Inhalte so modifiziert werden, daß es zu einer „Idealisierung" und damit zu einer Trennung von der Wahrnehmung kommt (vgl. Körner 1968, S. 207).

Schüler haben mit dieser Modifizierung ihre Schwierigkeiten. Sie vermischen allgemeingültige inhaltliche Beziehungen mit besonderen, nur im Einzelfall geltenden und nehmen diese „nebeneinander" in ihren Begriff von der Sache auf (vgl. Wygotski 1981, S. 262ff.). Wir sprechen deshalb von den „subjektiven Begriffen" der Kinder und untersuchen, welche Eigenarten beim Begriffsaufbau durch Unterricht dabei vorkommen und wie diese sich auf die weitere Begriffsbildung auswirken.

Um die Begriffsbildung zu untersuchen, haben wir folgende Methode gewählt: An einem elektronischen Lehrsystem werden unsere Schüler mehrere Stunden einzeln unterrichtet (s. u.). Dabei werden sie von einem Lehrer betreut. Sie haben die Aufgabe, zu jedem einzelnen Lehrschritt des Programms dem Lehrer ihre Gedanken darzustellen und geometrische Konstruktionen, die sie auf Arbeitsblättern durchführen, mit ihren Worten zu erklären. Die Äußerungen jedes einzelnen Schülers zu den systematisch aufgebauten Lehrgangsschritten werden in der Auswertung aufeinander bezogen und geben uns so einen Einblick in den Ablauf der individuellen Begriffsbildung.

Im zweiten Schritt der Auswertung werden dann alle Schüler miteinander verglichen. Dabei beziehen wir das vor dem Unterricht ermittelte Vorwissen der einzelnen Schüler in die Beschreibung ihrer Begriffsbildung ein. So können wir ermitteln, welche Auswirkungen das Vorwissen eines Schülers im Vergleich zu andersartigem Vorwissen der Mitschüler auf die Ausbildung des Begriffs haben kann, ob er z. B. leichter von den besonderen zu den allgemeinen inhaltlichen Beziehungen gelangt oder ob er sich z. B. leichter von den besonderen Bedingungen einzelner Repräsentationen des Inhalts ablenken läßt.

Weiterhin versuchen wir, die Wirkung einzelner Lehrinformationen auf die Begriffsbildung zu beurteilen, z. B. im Hinblick darauf, wann sich Schüler zum ersten Mal über bestimmte inhaltliche Beziehungen äußern. Einige Ergebnisse dieser Untersuchung sind im 2. Arbeitsbericht der Projektgruppe ausgeführt.

4. Die Durchführung der Untersuchung

Das Projekt befindet sich z. Z. im 2. Arbeitsjahr. Im bisherigen Verlauf wurden die Instrumente entwickelt und erprobt und eine erste Untersuchung durchgeführt.

Nach zahlreichen Voruntersuchungen im Klassenverband, in Kleingruppen und im Einzelunterricht entschieden wir uns, aus dem komplexen Bedingungsgeflecht von Lehr-Lernprozessen im Unterricht zunächst den Bedingungsfaktor der sozialen Beziehungen im Klassenunterricht auszuklammern und uns auf die individuellen kognitiven Strukturen und Prozesse zu konzentrieren. Diese vorläufige Ausklammerung sozialer Prozesse aus der Untersuchung erschien uns gerechtfertigt, weil auch im Klassenunterricht die Schüler eigenständig Informationen aufnehmen und verarbeiten müssen. In einer späteren Phase des Projekts sollen die Ergebnisse der ersten Untersuchungen im normalen Klassenunterricht überprüft werden. Die affektiven, insbesondere motivationalen Bedingungen für Schulleistungen wurden im Projekt bisher ebenfalls nicht untersucht. Aspekte der Motivierung wurden aber bei der Wahl der Medien und der Entwicklung der Unterrichtslehrgänge beachtet (z. B. Erzeugung kognitiver Konflikte). Eine dritte Einschränkung der Bedingungsvielfalt betrifft die Auswahl der Unterrichtsinhalte für die Untersuchungen.

Der Unterricht fand in programmierter Form statt, teils im Klassenverband, zu einem wesentlichen Teil aber als Einzelunterricht. Durch die Programmierung sollten äußerlich gleiche Lehrbedingungen für alle Schüler geschaffen werden. Im Einzelunterricht ist es im Gegensatz zur Klassenunterrichtssituation möglich, die Schüler intensiv nach ihren Lösungswegen beim Bearbeiten von Aufgaben zu fragen.

Die Arbeit mit Buchprogrammen ist im 5. Schuljahr wegen der häufig anzutreffenden Leseschwäche und der oft noch mangelhaften Arbeitshaltung problematisch. Außerdem sind Buchprogramme zum Studium von Lernprozessen zwar dem Direktunterricht überlegen, weil die Reaktionen jedes Schülers auf jede Frage und Aufgabe festgehalten werden, sie gestatten aber andererseits häufig keine Interpretation der Denkvorgänge. Aus diesen Gründen wurde das Geometrieprogramm und ein Teil der Programme über Stellenwertsysteme für das elektronische Lehrsystem STA TM 150 aufbereitet und im Individualunterricht eingesetzt. Die STA TM 150 ist eine „Lehrmaschine", die den Unterrichtsinhalt sowohl über einen Bildschirm als auch über Ton vermittelt.

Die Lehrmaschine bietet folgende Bedienungsmöglichkeiten:
- Eingeben einer Zahl als Aufgabenlösung;
- Eingeben einer codierten Auswahlantwort (pro Lehrschritt sind bis zu 5 Verzweigungen möglich);
- Wiederholung von Lehrschritten.

In unserer Untersuchung reagiert der Schüler außerdem durch
- Zeichnen oder Schreiben auf Arbeitsblättern,
- mündliche Äußerungen (Dialog mit einem Lehrer), die auf einem Tonband aufgenommen werden.

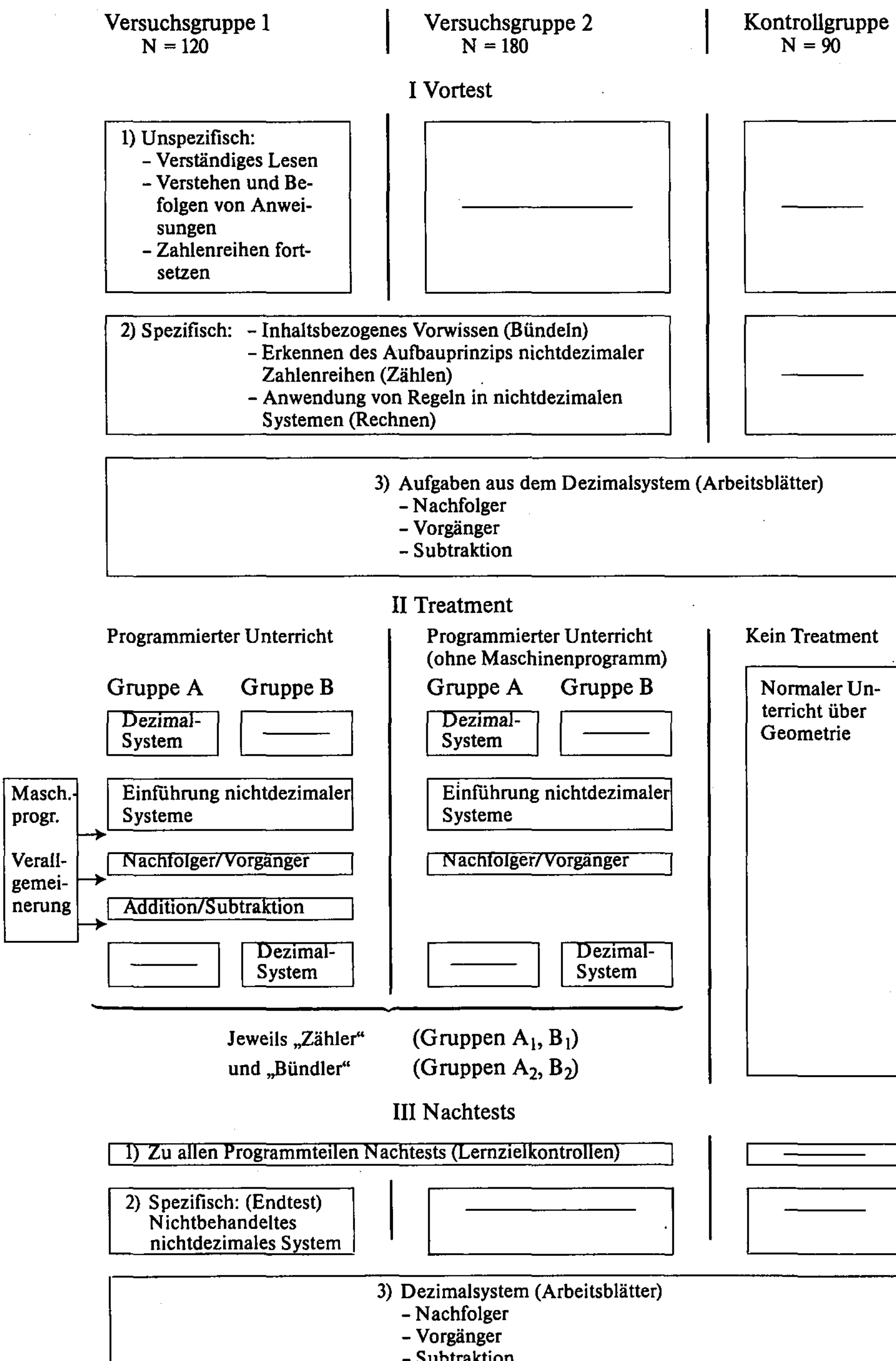
Der Individualunterricht spielte sich teilstandardisiert ab. Die Verzweigungen wurden für abgestufte Lösungshilfen eingesetzt; außerdem hatte aber der neben jedem Schüler sitzende Lehrer die Möglichkeit, weitere Hilfen zu geben, Fragen zu stellen, Ermutigungen auszusprechen, Erklärungen zu verlangen oder die Bearbeitung einer bestimmten Aufgabe abzubrechen. Das erleichtert die Interpretation, steuert aber den Schüler auch häufig in eine bestimmte Richtung. Eine sehr gründliche Tutorenschulung erwies sich als notwendig.

Für die erste Hauptuntersuchung wurden beide Unterrichtseinheiten an verschiedenen Schülergruppen nach den folgenden Designs durchgeführt. Diese Untersuchung diente der Erprobung sehr umfangreichen Lernmaterials, der Entwicklung von Auswertungsmethoden sowie der Beantwortung speziell mit den Unterrichtsinhalten zusammenhängender didaktischer Fragen, soweit es die Qualität der Unterrichtsmaterialien zuließ.

5. Weitere geplante Untersuchungen

Aus den Erfahrungen der ersten Hauptuntersuchung wird das Material für die zweite Hauptuntersuchung gewonnen, in der die beiden Unterrichtseinheiten in der gleichen Schülergruppe eingesetzt werden. Damit soll die eingangs genannte Leistungsdimensionshypothese bezüglich der ausgewählten Inhalte angegangen werden, indem nicht, wie bisher üblich, Leistungsresultate sondern die Lernprozesse in beiden Gebieten verglichen werden.

Design Stellenwertsysteme



Design Achsensymmetrie

Versuchsgruppe N = 66	Kontrollgruppe N = 185
I Vortests	
1) Schriftlicher Test zum Vorwissen bzgl. Geometrie, speziell Achsensymmetrie (einstündig)	1) Schriftlicher Test zum Vorwissen bzgl. Geometrie, speziell Achsensymmetrie (einstündig)
2) Maschinengesteuertes lehrerunterstütztes Programm zur Erfassung des Vorwissens bzgl. Geometrie, speziell Achsensymmetrie, und zur Erfassung technischer Fertigkeiten (genaues Messen und Zeichnen) (einstündig)	—
II Treatment	
Maschinengesteuertes lehrerunterstütztes Programm zur Erfassung und Ausbildung der Fähigkeit, achsensymmetrische Figuren zu konstruieren (zwei je einstündige Teile) in zwei Versionen: Spiegeln (N = 33); Falten (N = 33)	—
III Nachtest	
Wie erster Vortest	Wie erster Vortest

Es ergeben sich folgende Komponenten der geplanten Untersuchung:
- Spezifizierung der Lehrstoffanalyse aufbauend auf den Ergebnissen der ersten Projektphase;
- Erhebung des Vorwissens der Schüler bezüglich beider Stoffgebiete;
- einführender Unterricht in beide Gebiete;
- Erhebung des Schülerwissens während und nach diesem Unterricht;
- Aufzeichnung von Lösungsstrategien und Lernprozessen während eines in Einzelsitzungen durchgeführten Diagnoseprogramms mit Problemaufgaben aus beiden Gebieten.

Die Lösungsstrategien und Lernprozesse in beiden Gebieten werden analysiert und verglichen unter Berücksichtigung des erhobenen Vorwissens und des Lernerfolgs im einführenden Unterricht.

Der einführende Unterricht soll in Gruppen von ca. 8 Schülern mit Lehrerbetreuung in möglichst standardisierter Form durchgeführt werden, um Schülern verschiedener Gruppen annähernd gleiche Informationen zu vermitteln. Die Form des Kleingruppenunterrichts wird aufgrund von Erfahrungen aus der ersten Projektphase gewählt. Bei der Bearbeitung von Buchprogrammen zu nichtdezimalen

Stellenwertsystemen im Klassenverband hatten nicht alle Schüler den zur Arbeit an der Lehrmaschine erforderlichen Mindestkenntnisstand erreicht. In kleineren Gruppen können auch schwächeren Schülern die notwendigen Grundkenntnisse und Verfahrenstechniken vermittelt werden. Zum Abschluß des einführenden Unterrichts werden Lernzielkontrollen durchgeführt.

Nach den Lernzielkontrollen beginnt die intensive Diagnosephase, in der Aufgabenbearbeitungsprozesse von Schülern im einzelnen beobachtet und aufgezeichnet werden. Dafür werden Problemaufgaben aus beiden Stoffgebieten für das bereits in der ersten Projektphase benutzte elektronische Lehrsystem STA TM 150 programmiert. Die letzte Projektphase soll der Validierung eines Teils der Ergebnisse im Klassenunterricht dienen.

6. *Auswertungsmethoden*

Neben der klassischen Testanalyse und dem Vergleich von Gruppenmittelwerten kommen im Projekt zwei weitere Auswertungsmethoden zur Anwendung: Die Analyse von Gesprächsprotokollen und von Schülerfehlern in Tests. Nur auf das letztere Verfahren gehen wir näher ein.

Die Entwicklung der Fehleranalyse als Forschungsmethode stellt einen Schwerpunkt der ersten Phase im arithmetischen Teilbereich des Projekts dar. Die Fehleranalyse hat in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition, und sie gewinnt erneut zunehmend an Bedeutung, weil, wie Radatz (1980, S. 24) zusammenfaßt:
- die Aufnahme neuer Inhalte im Rahmen der Reform des Mathematikunterrichts zu neuen Lernschwierigkeiten und Fehlern führte;
- Leistungstests und lernzielorientierte Tests die Erwartungen nicht erfüllt haben;
- die Anforderungen an Individualisierung und Differenzierung im Unterricht handhabbare und spezifische Diagnosekriterien und -hilfen für den Lehrer erfordern;
- nach der Kritik an empirisch-statistischer Forschung Methoden wie clinical research, case studies, didaktische Phänomenologie u. a. verstärkt angewandt werden;
- die kognitionspsychologische Wende neue Deutungsmöglichkeiten für Fehler eröffnet.

Die Mathematikdidaktik hat nach Shulmans Ansicht die Möglichkeiten der Fehleranalyse bisher nicht ausgeschöpft: „it has generally been focused on the specification of remediation strategies rather than, as would a strategic research site, the understanding of the underlying cognitive processes and structures which account for these errors" (Shulman 1978, S. 9). Daß die Fehleranalyse für die Analyse von Denk- und Lernprozessen herangezogen werden kann, zeigt sich u. a. an dem Interesse, das Psychologen der Fehleranalyse entgegenbringen (Birkhan 1979). Hinsichtlich ihres psychometrisch orientierten Einsatzes stellen die Arbeiten von Glück (1971), Cox (1975), Davis u. a. (1979) und der *Cognitive and Instructional Science Group* am Palo Alto Research Center (u. a. Brown/Burton 1978; Brown/van Lehn 1980) Weiterentwicklungen der sich im übrigen meistens in Fehlerklassifizierungen und Häufigkeitslisten erschöpfenden Fehleranalyse dar.

Glück legt seinen eigenen Angaben zufolge erstmals Werte für die Reliabilität und Validität von Fehlerklassen vor. Er kommt zu einer negativen Beurteilung der Diagnosequalität von Fehlern. Aufgrund der Heterogenität des Tests und der Orientierung der Klassifizierung von Fehlern an ihrem äußeren Erscheinungsbild anstatt an den Entstehungsprozessen kann Glück jedoch u. E. die Möglichkeiten der Fehleranalyse nicht ausschöpfen.

In vielen Arbeiten wird ein Fehler dann als aufgeklärt betrachtet, wenn eine an der Sachstruktur oder am Lösungsprozeß orientierte Deutung der Abweichung gelingt. Cox interpretiert dagegen Fehler nur dann als systematisch, wenn ein Schüler mehrere Aufgaben auf dieselbe Weise falsch löst. Wir betrachten diese Vorgehensweise als großen Gewinn für die Fehlermethodik, weil es dadurch möglich wird, Fehler aufgrund von Kompetenzmängeln von Unaufmerksamkeitsfehlern zu unterscheiden. Cox beschreibt jedoch viele Probleme nicht, die eine Weiterentwicklung des Verfahrens notwendig machen:

- Die Aussagefähigkeit des Verfahrens hängt davon ab, ob die gebildeten Aufgabengruppen alle möglichen Aufgabentypen umfassen und ob sie homogen sind. Die Homogenität muß nicht nur hinsichtlich der tatsächlichen relevanten Aufgabenmerkmale bestehen, sondern hinsichtlich aller fehlerbeeinflussenden Merkmale.
- Anhand einer Aufgabengruppe sind manchmal mehrere Fehlerdeutungen möglich. Erst durch Heranziehen „fehlerkritischer" Gruppen ist eine eindeutige Diagnose möglich.

Davis u. a. bedienen sich der Fehleranalyse als Forschungsmethode und überprüfen aus Schematheorien abgeleitete Hypothesen über Denkweisen von Schülern beim Bearbeiten für sie neuer Aufgaben. Uns interessieren hier weniger die Ergebnisse als die Methoden. Auf die bei Davis u. a. dargestellte Weise lassen sich Testinformationen besser ausschöpfen als aufgrund von Rohwertsummen und 0/1-Listen. Durch diese Art der Testauswertung wird ein Teil der Kritik entkräftet, wie sie z. B. Aebli (1980, S. 33) hinsichtlich der Brauchbarkeit von Tests in der Kognitionspsychologie übt.

Brown, Burton und van Lehn diskutieren das Problem der Fehlerdiagnose am tiefgehendsten. Sie unterlegen ihrem Ansatz ein kognitionspsychologisches Modell, jedoch nicht das *Schema* wie Davis u. a., sondern sie betrachten Fehler in Lösungsalgorithmen, d. h. prozeduralen Repräsentationen der Operation. In einer früheren Analyse diskutieren Brown/Burton (1978) ein einfaches Zuordnungsprogramm, das Schüler mit systematischem Fehlverhalten diagnostiziert. Bereits hier werden eine Reihe von Problemen der Fehleranalyse deutlicher als in den Handauswertungen. Eine Weiterentwicklung stellt die „repair theory" dar, die ebenfalls als Rechnerprogramm installiert ist und automatisch mögliche Fehler generiert, die bei einer Prozedur vorkommen können (vgl. Brown/van Lehn 1980). Sie besteht aus einem Algorithmus des korrekten Lösungsweges, Regeln zum Streichen von Elementaroperationen dieses Algorithmus, so daß fehlerhafte Lösungsprozesse entstehen, und sogenannten „repair heuristics", mit denen die Schüler Sackgassen zu überwinden versuchen, in die das simulierte inkorrekte Vorgehen führt.

Wir haben die Fehleranalyse in unserer Arbeit zur Lösung folgender Probleme genutzt:

- Im Rahmen der Materialevaluation bilden die häufigsten Fehler eine Informationsquelle für die Beurteilung von Planungsentscheidungen und die Revision des Lehrgangs.
- In den Fehlerhäufigkeiten bilden sich differentielle Effekte von Unterricht präziser ab als in durchschnittlichen Rohwertsummen und Itemschwierigkeitsgraden.

Voraussetzung des Einsatzes der Fehleranalysen ist die Identifizierung von Fehlertypen oder -strategien. Mit Hilfe von Clusteranalysen haben wir unsere Fehlerstrategien überprüft. Um diese Möglichkeiten nutzen zu können, wurde ein Auswertungsprogramm entwickelt, das die Fehlerstrategien von Schülern automatisch diagnostiziert.

In drei Beispielen wollen wir die Einsatzmöglichkeiten der Fehleranalyse demonstrieren und zugleich auch auf ihre Probleme hinweisen. Das erste Beispiel ist dem Aufgabenbereich „Lehrgangsevaluation" zuzuweisen, das zweite Beispiel betrifft die Frage nach den didaktischen Möglichkeiten und negativen Nebenwirkungen zweier unterschiedlicher Grundveranschaulichungen für den Unterrichtsinhalt. Das dritte Beispiel stellt den Versuch dar, das Verfahren der Fehleranalyse zu systematisieren und die Fehlerauswertung durch Rechner vorzunehmen. Die Darstellung ist nicht möglich, ohne daß wir uns auf konkrete Aufgaben des Lehrgangs einlassen.

Beispiel 1

In den meisten Schulbüchern werden für nichtdezimale Zahldarstellungen dieselben arabischen Ziffern verwandt, die wir im Dezimalsystem verwenden. Zur Unterscheidung wird die nichtdezimale Darstellung mit einem Index versehen: $101_{(3)}$ ist eine Zahldarstellung im Dreiersystem. Wenn man mehrere verschiedene Systeme im Unterricht erarbeitet, würde die Wahl entsprechend vieler neuer Ziffersymbolsysteme den Zugang vermutlich unnötig erschweren. Zu Beginn des Unterrichts könnte es jedoch ratsam erscheinen, für das erste System neue Ziffernsymbole einzuführen, um den Schülern die Abhebung vom Zehnersystem zu erleichtern. Außerdem stellt die Wahl der Ziffernsymbole hinsichtlich des allgemeinen Begriffs *Stellenwertsystem* eine Variable bzw. ein irrelevantes Begriffsmerkmal dar. Auch unter diesem Aspekt ist die Einführung neuer Symbole angezeigt. Wir haben daher für den Ziffernvorrat des Vierersystems folgende Symbole eingeführt: □, ⚀, ⚁, ⚂. Die Werthierarchie ist unmittelbar zu erkennen und der Symboltyp erinnert an Spielwürfelflächen. Zahlen aus dem Fünfersystem werden dagegen mit arabischen Ziffern geschrieben und erhalten den Index $\ldots_{(\text{Fü})}$.

Wir wollen die Auswirkungen der Symbolwahl anhand zweier Aufgaben zur Vorgängerbildung überprüfen. Die Schüler sollen die Zahl angeben, die in der Zahlenreihe vor ⚀⚁□ bzw. vor $3220_{(\text{Fü})}$ steht. Beide Aufgaben verlangen einen Übertrag. Zunächst sei in einer Korrelationsvierfeldertafel angegeben, wie viele Schüler die beiden Aufgaben richtig bzw. falsch lösen.

Tab. 1

		Fünfersystem		
		R	F	
Vierersystem	R	68	52	120
	F	20	148	168
		88	200	288

Der χ^2-Wert für abhängige Stichproben nach McNemar (vgl. Siegel 1956) übersteigt mit 6,13 das 5%-Signifikanzniveau. Die Aufgabe aus dem Vierersystem wird von mehr Schülern gelöst als die aus dem Fünfersystem. Wir können daraus jedoch nicht unmittelbar auf den Vorzug der Symbolwahl schließen; daneben sind mindestens drei weitere Ursachen denkbar:

- das Vierersystem wird vor dem Fünfersystem eingeführt, die Schüler haben damit längere Erfahrungen;
- die Basiszahlen unterscheiden sich, evtl. sind Aufgaben aus dem Vierersystem leichter zu veranschaulichen;
- die Zahl aus dem Fünfersystem hat eine Stelle mehr.

Unserer Meinung nach lassen sich durch eine Differenzierung der falschen Antworten Informationen gewinnen, die zur Sicherung der Ursacheninterpretation beitragen. Das setzt allerdings voraus, daß die Fehler analysiert und Fehler mit identischen Ursachen für beide Aufgaben identifiziert werden. Folgende Tabelle zeigt die feiner differenzierte Antwortverteilung:

Tab. 2

Antworttyp \ Stellenwertsystem	Vierersystem $120_{(4)}$*	Fünfersystem $3220_{(5)}$
1) Richtige Antwort $113_{(4)}/3214_{(5)}$	120	88
2) Auslassung	37	45
3) $110_{(4)}/3210_{(5)}$	77	17
4) $119_{(4)}/3219_{(5)}$	1	62
5) $121_{(4)}/3221_{(5)}$	8	11
6) $112_{(4)}$, $114_{(4)}/3213_{(5)}$, $3215_{(5)}$	3	13
7) $123_{(4)}/3224_{(5)}$	5	3
8) $13_{(4)}/2114_{(5)}$	5	1
9) Sonstige Fehler ($f < 4$)	32	48

*) Wir benutzen hier aus schreibtechnischen Gründen die arabischen Ziffern für die Zahldarstellung im Vierersystem.

Die Tabelle zeigt, wie häufig bestimmte Antworten im Vierer- und Fünfersystem von den Schülern angegeben werden. Aufgrund der verschiedenen Ausgangszahlen und Systembasen sind die Ergebniszahlen beider Aufgaben verschieden. Wir haben in den einzelnen Zeilen die Antworten zusammengefaßt, die auf vergleichbaren Fehlertechniken beruhen. In Zeile 3 setzen die Schüler beispielsweise die erste Ziffer von links, die ungleich Null ist, um eins herab. Bei der Zahl, die im Vierersystem dargestellt ist, kommt dieser Fehler 77mal, bei der aus dem Fünfersystem 17mal vor. Unter „Sonstige Fehler" sind die Reaktionen zusammengefaßt, die bei den 288 Schülern weniger als viermal auftreten. Bei der Aufgabe aus dem Vierersystem handelt es sich um 17 verschiedene Fehler, im Fünfersystem sind es 30 verschiedene Antworten.

Wir haben die Häufigkeiten der einzelnen Zeilen wiederum auf der Grundlage von Korrelationsvierfeldertafeln überprüft. Signifikante Unterschiede bestehen außer für Zeile 1 für die Fehlertypen der Zeilen 3, 4 und 6[1]. Die fehlerhafte Vorgehensweise in Zeile 3 ist auch bei Aufgaben aus dem

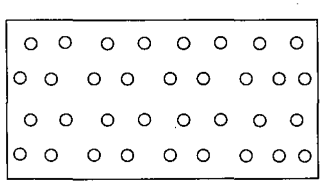
1 Aufgrund der Abhängigkeiten der in Tabelle 2 und 4 berechneten 8 bzw. 7 Signifikanztests berücksichtigen wir nur diejenigen Ergebnisse, die isoliert betrachtet mindestens auf dem 1% Niveau gesichert sind. Im ungünstigen Fall $\alpha = 1$ % beträgt die Zufallswahrscheinlichkeit 8% bzw. 7%.

Zehnersystem zu beobachten. Wir haben den Fehler oben beschrieben. Bei dem Fehler in Zeile 4 beachtet der Schüler nicht, daß es sich um Zahldarstellungen in nichtdezimalen Systemen handelt. Elf weitere Schüler, die in der Gruppe „Sonstige Fehler" zusammengefaßt sind, geben ebenfalls eine Antwort mit der Endziffer 9, begehen aber zusätzliche Fehler. Wir sehen in der Antwort einen eindeutigen Beleg dafür, daß die Symbolwahl – evtl. zusätzlich mit anderen unterschiedlichen Aspekten der beiden Aufgaben – einen Einfluß auf das Lösungsverhalten ausübt. Ferner ließ sich für die Zeile 6 nachweisen, daß die betreffenden Fehler in den verschiedenen Systemen unterschiedlich häufig auftreten. Die höchste Ziffer des jeweiligen Systems wird nicht korrekt beachtet.

Im Lichte von Theorien des semantischen Gedächtnisses lassen sich die Ergebnisse u. E. folgendermaßen deuten: Die arabischen Ziffern des Fünfersystems aktivieren das Dezimalsystemschema. Das führt einerseits im Fünfersystem zu einer erheblich häufigeren Anwendung der korrekten Lösungsprozedur als im Vierersystem: Die Fehler der Zeilen 4 und 6 sind vom Lösungsalgorithmus her korrekt, „nur" die Nebenbedingung des Fünfersystems wird nicht beachtet. Für den Fehler in Zeile 4 bieten sich zwei Erklärungen an. Da die Zahlzeichen im Zehner- und im Fünfersystem die gleichen sind, gelingt es dem Schüler entweder bereits im Aneignungsprozeß nicht, das Zehner- und das Fünfersystem zu unterscheiden; oder dieser Fehler wird im Sinne von „slips" (Norman 1981) aufgrund des hohen Aktivierungsgrades des Dezimalsystemrahmens unabsichtlich ausgelöst. Der Fehler in Zeile 6 weist auf Unterschiede im Aneignungsprozeß hin. Die Symbole des Vierersystems □, ⚀, ⚁, ⚂ werden als Sonderwissen neu gelernt, und es kommt nur selten zu Unsicherheiten über die höchste Ziffer. Beim Fünfersystem ist dagegen die Unterscheidung zum Ziffernvorrat des Zehnersystems zu speichern. Die Erinnerung der Symbole gibt selbst keinen Hinweis. Der Fehler in Zeile 3 zeigt, daß aber auch die Wahl neuer Symbole didaktische Schwierigkeiten zur Folge hat. Der Begriff des Vorgängers mit der Lösungsprozedur wird weniger leicht aktiviert. Die Ziffer □ erscheint evtl. als untere Grenze.

Beispiel 2:
Für die Untersuchung des Einflusses der Grundmodelle *Bündeln* und *Zählen* zur Einführung in nichtdezimale Zahldarstellungen gehen wir wie oben beschrieben vor. Anhand einer Aufgabe wird zunächst die Aussagekraft eines reinen Schwierigkeitsvergleichs untersucht. Anschließend werden die Fehler differenzierter aufgeschlüsselt, um Aussagen über die mit beiden Modellen verbundenen Probleme zu gewinnen. Während oben dieselben Schüler beide Aufgaben lösten, handelt es sich hier um eine Aufteilung der Stichprobe nach der verwendeten Programmversion. Beide Gruppen bearbeiten folgende Aufgabe:

Abb. 3
Streiche die Kreise durch: ⚁ ⚂ Kreise.



Ein Beispiel mit einer Zahl aus dem Dezimalsystem war vorgegeben. Die Schüler, die den Zugang über das Bündeln gelernt haben, könnten zwei Viererbündel und den Rest 3 markieren. Sie könnten auch vorher die Dezimalsystemdarstellung 11 als $2 \cdot 4 + 3$ ermitteln. Der letztgenannte abstrakt-algebraische Zugang steht auch den *„Zählern"* offen, da auch sie im Lehrgang die Stellenwerte der behandelten nichtdezimalen Systeme erarbeitet haben. Entsprechend dem zuerst benutzten Verfahren könnten sie aber auch bis ⚁ ⚂ zählen und dabei die gezählten Kreise abhaken. Die Verfahren weisen, sowohl was die Möglichkeiten der Anknüpfung an das Vorwissen betrifft als auch hinsichtlich der notwendigen Konzentration und der Sicherheit des Ablaufs, eine Reihe von Unterschieden auf. Wir können darauf hier nicht eingehen. Auf einige Aspekte weisen wir bei der Ergebnisdiskussion hin.

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung der richtig/falsch Lösungen:

Tab. 3

	Zähler	Bündler	
R	63	55	118
F	92	78	170
	155	133	288

Der errechnete χ^2-Wert ist nahe Null, d. h. in dieser Aufgabe läßt sich anhand der Lösungshäufigkeiten kein Unterschied zwischen den Grundveranschaulichungen nachweisen. Eine Aufschlüsselung der Kategorie „Falsch" nach den häufigsten Fehlern ergibt folgendes Bild:

Tab. 4

Untersuchungsgruppen / Antworten	Zähler	Bündler	
1) Richtige Antwort 11 Kreise	63	55	118
2) Auslassung	20	5	25
3) 10 oder 12 Kreise	20	9	29
4) 5 Kreise	10	13	23
5) 23 Kreise	3	14	17
6) 8 Kreise	8	2	10
7) 7 Kreise	1	6	7
8) Sonstige Fehler	30	29	59
	155	133	288

Der errechnete χ^2-Wert für mehrere qualitative Beobachtungen ist mit 26,89 auf dem 5%-Niveau signifikant, d. h. bei Einbeziehung der Fehlertypen ergibt sich zwischen den Gruppen, die nach dem Zählmodell bzw. nach dem Bündelansatz unterrichtet wurden, ein bedeutsamer Unterschied. Mit dem Fisher-Yates-Test haben wir die Antworten der einzelnen Zeilen auf signifikante Differenzen untersucht, wobei jeweils alle anderen Antworthäufigkeiten zusammengefaßt wurden. In den Zeilen 2, 5 lassen sich die Häufigkeitsdifferenzen sichern.

Wir interpretieren die häufigeren Auslassungen und den Fehlertyp in Zeile 3 dahingehend, daß es den „Zählern" schwerer fällt, ein korrektes Ergebnis zu erzielen, da der Zählvorgang fehleranfälliger ist als das Verfahren des schrittweisen Bündelns und Entbündelns. Viele Schüler, die nach dem Bündelkonzept unterrichtet wurden, haben dagegen Schwierigkeiten, überhaupt die Bedeutung nichtdezimaler Zahldarstellungen zu erkennen. Die unangemessenen Antworten der Zeilen 4 und 5 weisen darauf hin, und wir vermuten aufgrund der Fehler bei anderen Aufgaben, daß bei den „Bündlern" die Strategie des Halbierens häufiger als bei den „Zählern" vertreten ist.

Wir sind uns bewußt, daß die Interpretationen teilweise gewagt sind und weitere Analysen und Untersuchungen folgen müssen. Der Aufbau unserer Lernzielkontrollen mit wenigen Items zu den verschiedenen Lernzielen ließ aber eine Erweiterung der Fehleranalysemethode nicht zu. Die erweiterten Möglichkeiten der Fehleranalyse bei einem entsprechend konstruierten Test zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 3:

Das wichtigste Argument für die Einführung des Rechnens in nichtdezimalen Stellenwertsystemen ist die Hypothese, daß hiervon ein Transfer auf das Rechnen im Dezimalsystem ausgeht (vgl. Hennes/Schmidt/Weiser 1979). Zur Überprüfung solcher Effekte haben wir als Vor- und Nachtest mehrere Arbeitsblätter mit jeweils 10–20 Aufgaben aus dem Dezimalsystem eingesetzt. Am Beispiel eines Arbeitsblattes zur Vorgängerbildung soll demonstriert werden, wie wir versucht haben, das Verfahren der Fehleranalyse zu systematisieren. Der Test besteht aus 20 Aufgaben, die die 6 wichtigsten Aufgabentypen zur Vorgängerbildung umfassen. Diese Klasseneinteilung beruht auf Annahmen über das Lösungsverhalten der Schüler. Wir haben uns an Scanduras (1971) deterministischer Theorie menschlichen Verhaltens orientiert.

Das Datenmaterial unserer Analyse besteht aus den Einzelfehlern, die aus ca. 700 Testexemplaren ermittelt wurden. Bei den 20 Aufgaben kamen 202 verschiedene Fehler mehr als dreimal vor; nur diese wurden in die Verrechnung einbezogen. Die häufigsten Fehler traten bei ca. 10% der Schüler auf. Das erste Ziel war die Herausfilterung von sogenannten Fehlerstrategien. Sie bezeichnen systematische Fehler aufgrund eines Defekts im Lösungsalgorithmus eines Schülers (vgl. Brown/van Lehn 1980). Für die Unterrichtsforschung sind nicht die Einzelfehler, sondern die Fehlerstrategien interessant, weil sie einerseits Rückschlüsse auf den vorangegangenen Unterricht zulassen und andererseits eine Therapie ermöglichen. Es gelang zunächst theoretisch, mit 16 Strategien 188 der 202 Fehler zu erklären.

Die Untersuchung von Fehlerstrategien stößt auf verschiedene Schwierigkeiten:

(1) Eine Fehlerstrategie kann bei manchen Aufgaben trotz des defekten Lösungsalgorithmus zu einer richtigen Antwort führen. Aus der Schülerantwort läßt sich dann nicht ablesen, ob der Schüler richtig oder falsch gerechnet hat.
Beispiel: Die Strategie „Kommt in einer Aufgabe als erste von Null verschiedene Zahl eine 1 vor, so setze alle Endnullen gleich 9 und lasse die Stelle der 1 aus" führt zu
a) 2100 $\rightarrow$ 299 (falsch) b) 100000 $\rightarrow$ 99999 (richtig).

(2) Fehlerstrategien überlappen sich zum Teil, d. h. ein bestimmter Fehler läßt sich durch verschiedene Strategien erklären.

Beispiel: In der Aufgabe, den Vorgänger von 54000 zu bestimmen (53999) wird der Fehler 53000 gemacht. Dafür kommen zwei verschiedene Strategien in Frage:
1. Strategie: Der Vorgänger des Tausenderteils wird gebildet, ohne die 3 Endnullen zu beachten.
2. Strategie: Die jeweils 1. Ziffer von rechts $\neq 0$ wird herabgesetzt.
Erst eine diagnostisch sensiblere Aufgabe differenziert zwischen den beiden Strategien: Der Vorgänger von 410000 ist zu bestimmen: Die 1. Strategie ergibt 409000, die 2. Strategie ergibt 400000.

(3) Manche Fehlerstrategien hängen von bestimmten Aufgabenmerkmalen ab, die nicht in jeder Aufgabe vorkommen.
Beispiel: In Aufgaben, die die Ziffer 1 nicht enthalten, kann eine Strategie „1 auslassen" (Beispiel zu (1)) nicht angewendet werden.

Um zu untersuchen, ob Schüler während des Tests an bestimmten Fehlerstrategien festhalten, haben wir die Fehler mit Hilfe einer Clusteranalyse verarbeitet. Die unter einer Strategie zusammengefaßten Fehler fallen in ein Cluster, wenn sie von denselben Schülern gemacht werden. Wir sind uns bewußt, daß die Anwendung der Clusteranalyse bei dem vorliegenden Datensatz aus methodischer Sicht nicht unproblematisch ist. Als Ergebnis zeigt sich, daß von den zuvor theoretisch bestimmten 16 Strategien nur 2 nicht bestätigt werden und 4 neue hinzukommen. Wir werten dieses Ergebnis der Clusteranalyse als Indiz für die Existenz von Fehlerstrategien, die aufgabentypenübergreifend von Schülern angewendet werden.

Ohne eine ausreichende Reliabilität kommt den Fehlerstrategien keine diagnostische Validität zu (GLÜCK 1971). Wir haben die Reliabilität nach der split-half-Methode bestimmt, indem wir die Aufgaben zu Paaren ähnlicher Aufgaben desselben Typs gliederten. Alle berechneten Koeffizienten sind sehr signifikant, die meisten ausreichend hoch.

Die generierten Fehlerstrategien bilden das Fehlersieb, um Schüler mit systematisch falschen Lösungswegen herauszufiltern. Ziel des dazu entwickelten Rechnerprogramms ist es, Schülern Werte für den Anteil ihrer von einer oder mehreren Strategien erfaßten Antworten zuzuschreiben. Man erhält so für jeden Schüler eine Aufgaben-Strategie-Matrix. Aufgrund dieser Matrix werden die Gewichte berechnet, mit denen die verschiedenen Strategien zur Aufklärung des Schülerverhaltens beitragen. Im allgemeinen gelingt eine Reduzierung der Strategien auf einige wenige. Darauf kann später eine Therapie gezielt angesetzt werden. Aufgrund der Aufgabe-Strategie-Matrix lassen sich geeignete Aufgaben auswählen, über die u. U. ein weiteres Diagnosegespräch mit dem Schüler geführt werden muß.

Literatur

AEBLI, H.: Denken: Das Ordnen des Tuns. Band I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie. Stuttgart 1980.

AEBLI, H.: Denken: Das Ordnen des Tuns. Band II: Denkprozesse. Stuttgart 1981.

BARTEL, H./HYLLA, E./SÜLLWOLD, F.: Mathematische Denkaufgaben. Weinheim 1962.

BIGALKE, H.-G.: Sinn und Bedeutung der Mathematikdidaktik. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 6 (1974), S. 109–115.

BIRKHAN, G.: Analyse von Denkfehlern in der Mathematikdidaktik als kognitionspsychologisches Untersuchungsinstrument. In: UECKERT, H./RHENIUS, D. (Hrsg.): Komplexe menschliche Informationsverarbeitung – Beiträge zur Tagung „Kognitive Psychologie" in Hamburg 1978. Bern 1978, S. 495–502.

BROWN, J. S./BURTON, R. B.: Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. In: Cognitive Science 2 (1978), S. 155–192.

BROWN, J. S./VAN LEHN, K.: Repair theory: a generative theory of bugs in procedural skills. In: Cognitive Science 4 (1980), S. 379–426.

COX, L. S.: Diagnosing and remediating systematic errors in addition and subtraction computations. In: The Arithmetic Teacher 22 (1975), S. 151–157.

DAVIS, R. B./MCKNIGHT, C./PARKER, PH./ELRICK, D.: Analysis of student answers to signed number arithmetic problems. In: The Journal of Children's Mathematical Behavior Vol. 2, No. 2 (1979), S. 114–130.
DIENES, Z. P.: Aufbau der Mathematik. Freiburg 1965 (engl. 1960).
ECHTERHOFF, D./SCHMIDT, V. G.: Eine Fallstudie. (Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe P Preprints, Heft 25) Osnabrück 1981.
GINSBURG, H.: Children's arithmetic: the learning process. New York 1977.
GLÜCK, G.: Rechenleistung und Rechenfehler. Untersuchungen am 2. Grundschuljahr. Dissertation Universität Tübingen 1971.
HENNES, C./SCHMIDT, S./WEISER, W.: Effekte der Behandlung nichtdezimaler Stellenwertsysteme im Mathematikunterricht der Grundschule – eine empirische Untersuchung. In: Didaktik der Mathematik 7 (1979), S. 318–328.
KÖRNER, S.: Philosophie der Mathematik. München 1968.
LIEFHELM, P. H./SORGER, P.: Operatoren auf Ordinalzahlen – ein Zugang zur schriftlichen Addition und Subtraktion. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1978. Hannover 1978, S. 168–170.
MAYER, R. E.: Different rule systems for counting behavior in meaningful and rote contexts of learning. In: Journal of Educational Psychology 69 (1977), S. 537–546.
NORMAN, D. A.: Categorization of action slips. Psychological Review 88 (1981), S. 1–15.
PAWLIK, K.: Dimensionen des Verhaltens. Bern: Huber ^{2}1971.
PIPPIG, G.: Beziehungen zwischen Kenntniserwerb und Entwicklung geistiger Fähigkeiten, Berlin 1980.
RADATZ, H.: Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig 1980.
RUBINSTEIN, S. L.: Das Denken und die Wege seiner Erforschung. Berlin ^{6}1977.
SCANDURA, J. M.: Deterministic theorizing in structural learning: three levels of empiricism. In: Journal of Structural Learning 3 (1971), S. 21–53.
SHULMAN, L. S.: Strategic sites for research on teaching. Paper presented at AERA annual meeting 1978, Toronto.
SIEGEL, S.: Nonparametric statistics for the behavioral sciences. New York 1956.
TREUMANN, K.: Leistungsdimensionen im Mathematikunterricht. In: ROEDER, P. M./TREUMANN, K.: Dimensionen der Schulleistung, Teil 2. (Deutscher Bildungsrat. Gutachten und Studien der Bildungskommission, Bd. 21/2) Stuttgart 1974, S. 143–367.
VIET, U./SCHMIDT, V. G./SOMMER, N./GROMMELT, U.: 1. Arbeitsbericht zum Projekt „Veränderungen des kognitiven Entwicklungsstandes von Schülern der Orientierungsstufe im Mathematikunterricht". Unveröffentlichtes Manuskript. Osnabrück 1981. (a)
VIET, U./SCHMIDT, V. G./SOMMER, N./GROMMELT, U.: 2. Arbeitsbericht zum Projekt „Veränderungen des kognitiven Entwicklungsstandes von Schülern der Orientierungsstufe im Mathematikunterricht". (Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe D Mathematisch-Didaktische Manuskripte. Band 2) Osnabrück 1981. (b)
VIET, U./SOMMER, N.: Analyse der Grobstruktur von Schülerleistungen im Mathematikunterricht mit Hilfe verschiedener multivariater Verfahren. (Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe P Preprints, Heft 12) Osnabrück 1979.
WYGOTSKI, L. S.: Denken und Sprechen. Frankfurt/Main 1981 (Russische Erstausgabe 1934).

Anschriften der Autoren:
Prof. Ursula Viet, Lürmannstraße 4, 4500 Osnabrück
Veit Georg Schmidt, Dipl.-Päd., Breslauer Straße 13, 4557 Fürstenau
Norbert Sommer, Dipl.-Päd., Breslauer Straße 32, 4507 Hasbergen
Ulrich Grommelt, Dipl.-Psych., August-Hölscher-Straße 23, 4500 Osnabrück