András, Szilárd; Csapó, Hajnalka; Nagy, Örs; Szilágyi, Judit; Sipos, Kinga; Soós, Anna

Kivancsisagvezerelt matematika tanitas

Miercurea Ciuc, Romania : Status 2010, 256 S.

Primas

PROMOTING INQUIRY
IN MATHEMATICS AND SCIENCE
EDUCATION ACROSS EUROPE

A PRIMAS projekt alapvető célkitűzése a kíváncsiságvezérelt oktatás alapelveinek és módszereinek széles körű ismertetése és a tanítási gyakorlat átalakításának támogatása annak érdekében, hogy a kíváncsiságvezérelt oktatás alapelvei a gyakorlatban is megvalósuljanak.

Ez a kötet a Primas projekt romániai implementálása során kivitelezett tevékenységek egy részének leírását tartalmazza, természetesen a szerzők nézőpontja és tapasztalatai alapján, nem az Európai Bizottság vagy a projektpartnereink véleményét tükrözi, tehát a tartalmáért teljes mértékben a szerzők felelősek.

A bemutatott tananyagok és foglalkozások összeválogatása során fontosnak tartottuk, hogy ezek mélységben, nehézségben, terjedelemben, célcsoportban, didaktikai célokban különbözzenek. Így vannak olyan foglalkozások, amelyek egy óra alatt kivitelezhetők és vannak olyanok, amelyek egy egész fejezet felépítésére, oktatási stratégiájára vonatkoznak. Ugyanakkor vannak olyanok, amelyek során csak a problémaérzékenységet igyekszünk fejleszteni, vannak olyanok, amelyek során technikai eszközöket, módszereket, algoritmusokat próbálunk konstruálni és vannak olyanok, amelyekben fogalmak mély megértését célozzuk meg. Mindennek az egyértelmű célja annak a ténynek a kidomborítása, hogy a jelenlegi tantervekben előírt tananyag megtanítása is lehetséges kíváncsiságvezérelt szemléletmód alapján. Mindez különös fontosságot nyer azáltal, hogy az utóbbi néhány évben a tanterveinkhez kapcsolódó módszertani elvárások radikálisan megváltoztak, oktatásunknak a kompetenciafejlesztésre és nem az információátadásra kellene koncentrálnia.

A szerzők

Primas

Kíváncsiságvezérelt matematika tanítás

András Szilárd Csapó Hajnalka Nagy Örs
Sipos Kinga Szilágyi Judit Soós Anna

Kíváncsiságvezérelt matematika tanítás

Státus Kiadó
2010

ANDRÁS SZILÁRD, CSAPÓ HAJNALKA, NAGY ÖRS
SIPOS KINGA, SOÓS ANNA, SZILÁGYI JUDIT

KÍVÁNCSISÁGVEZÉRELT MATEMATIKA TANÍTÁS

STÁTUS KIADÓ
CSÍKSZEREDA, 2010

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ANDRÁS, SZILÁRD
Kíváncsiságvezérelt matematika tanítás / András Szilárd, Csapó Hajnalka, Nagy Örs, ... - Miercurea-Ciuc: Status, 2010
ISBN 978-606-8052-33-5
I. Csapó, Hajnalka
II. Nagy, Örs
371:51

Kiadja a Státus Könyvkiadó
Felelős kiadó Birtók József igazgató

Készült a Státus Nyomdában
http://www.status.com.ro
Email: office@status.com.ro

Didactica matematicii prin metode IBL

Editura Status, Miercurea-Ciuc
Tiparul executat sub comanda nr. 67/2010
la Status Printers - Siculeni

A könyv megírását és megjelenését az
Európai Bizottság által finanszírozott PRIMAS projekt
(Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education)
és a PRIMAS projekt Romániai partnere,
a Babeş-Bolyai Tudományegyetem
támogatta

SEVENTH FRAMEWORK PROGRAMME

PRIMAS
PROMOTING INQUIRY IN MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION ACROSS EUROPE

UNIVERSITAS NAPOCENSIS
TRADITIO NOSTRA UNACUM EUROPAE VIRTUTIBUS SPLENDET
1581
ROMÂNIA
BABEŞ–BOLYAI

A PRIMAS projekt hivatalos honlapjának címe:

http://www.primas-project.eu

A PRIMAS projekt partnerintézményei:

- Pädagogische Hochschule Freiburg, Németország
- Université de Genève, Svájc
- Universiteit Utrecht, Hollandia
- University of Nottingham, Egyesült Királyság
- Universidad de Jaén, Spanyolország
- Constantine the Philosopher University in Nitra, Szlovákia
- Szegedi Tudományegyetem, Magyarország
- Cyprus University of Technology, Ciprus
- University of Malta, Málta
- Roskilde University, Dánia
- University of Manchester, Egyesült Királyság
- Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Románia
- Sør-Trøndelag University, Norvégia
- University of Kiel, Németország

TARTALOMJEGYZÉK

Kiadványunk fejezeteinek szerzői:

1. Előhang – András Szilárd
2. Bevezetés – Szilágyi Judit
3. Biciklihiányban – András Szilárd
4. Töltögetési feladatoktól lineáris diofantoszi egyenletekig – Nagy Örs, András Szilárd
5. Gyufaszálak és négyzetek – András Szilárd, Sipos Kinga
6. Alapműveletek – András Szilárd
7. Számjegyek és mintázatok – András Szilárd
8. Keresztül a sivatagon – András Szilárd
9. Talpponti háromszögek – András Szilárd
10. Dobozok – Nagy Örs, András Szilárd
11. Kamatozási sémák és az exponenciális függvény – Csapó Hajnalka, András Szilárd
12. Lineáris algebra, probléma és kíváncsiság központú megközelítésben – Szilágyi Judit, András Szilárd
14. Kalandozás a valószínűség világában – Soós Anna
15. A Happy Cube puzzle elemzése – András Szilárd, Bartos Kocsis Andrea, Sipos Kinga, Soós Anna

Diákokkal tartott foglalkozásaink egy részét a SimpleX Egyesület által szervezett tehetséggondozó táborokban, illetve a Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége által a Teleki Oktatási Központban szervezett táborban, valamint a csíkszeredai Márton Áron Líceumban és a kolozsvári Báthory István Elméleti Líceumban tartottuk. A könyv minden fejezetét kipróbáltuk a Babeş-Bolyai Tudományegyetem hallgatóival és néhány témát az egyetem keretén belül tartott továbbképzőn is. Köszönettel tartozunk diákjainknak, akik részt vettek a foglalkozásainkon és kollégáinknak, akiknek támogatása nélkül foglalkozásaink egy része nem lett volna lehetséges. Külön köszönettel tartozunk Dávid Gézának és Tamási Csabának.

1. Előhang

Válságban az oktatás. Nemcsak amiatt, mert a világméretű pénzügyi válság hatással van az élet minden területére, tehát az oktatásra is. Nem is amiatt, mert az oktatási rendszer zavartalan működését biztosítani hivatott politikum kaotikus, gyakran önellentmondásos szabályozásai szétzillálják, elzüllesztik, szétbomlasztják a rendszert, lehetetlenné teszik a hosszútávú oktatási folyamatok működését. Nem is azért, mert az oktatásszervezés területén olyan közgazdasági modelleket probálnak alkalmazni, amelyek egyrészt az oktatás lényegi vonatkozásait nem tekintik optimalizálandó célnak, másrészt már a közgazdaság területén is látványosan megbuktak. Nem is azért, mert a minőségbiztosítás egy globalizálódott téveszme, hisz minduntalan csak egy minimális szintet biztosít és nem a minőséget, ami messze e fölött áll. Nem is azért, mert a nemzetközi trendekhez való alkalmazkodás lokálisan paradoxont szül. A probléma sokkal mélyebb, sokrétűbb, árnyaltabb és valójában nem is ott van, ahol észleljük. Mi csak a probléma következményeit látjuk, a problémának a rendszeren belüli megnyilvánulását. Súlyos hiba ezt összekeverni a tényleges problémával.

Az oktatás tartalmilag mindig is a múltra koncentrált, mindig megpróbálta újraértékelni és átmenteni a múltból azt a tapasztalati bölcsességet, ami az idők folyamán felhalmozódott. Így a tanároknak alapvető feladatuk a hagyományőrzés, hagyományápolás. Ugyanakkor az iskolának mindig ki kell elégítenie a társadalom aktuális igényeit is. Gondoljuk meg, hogy a Római Birodalom terjedése vezetett az intézményesített iskolarendszer nagyfokú terjedéséhez és a hagyományos iskolai rendszer ekkor alapozódott meg, egyértelműen a birodalom igényeinek megfelelően; később az egyházi iskolákban ez a hagyományos, klasszicista oktatás kiegészült a vallásos tanokkal, majd a nemzetállamok megjelenésével az oktatásban is helyet kaptak a nemzeti eszmék, eszmények. A felvilágosodás utáni társadalmakban a társadalmi igényrendszer és a hagyományból fakadó cél egyre jobban különvált. A modern társadalmakban e két irányelv teljesen elkülönült. Ennek következményeként egyre hevesebb vita folyik arról, hogy egyáltalán mit tanítsunk, illetve, hogy milyen módszerekkel tanítsunk. Sőt újabban a vita súlypontja annyira eltolódott, hogy arról vitázunk, milyen kompetenciákat kell fejleszteni az iskolában. Ez az irányelv már egyértelműen csak a társadalmi igények kielégítéséről szól, mert a kulcskompetenciák teljes egészében szociális motivációval rendelkeznek. A kulcskompetenciák közt sehol nem jelenik meg a mérlegelés, az elmélyült gondolkodás, a hagyomány értelmes átörökítésének, esetleg az átminősítésének a kompetenciája (mint ahogy az erkölcsi kompetencia, a felelősségvállalás kompetenciája és még sok más sem, de ez egy más kérdés). Úgy tűnik, hogy mindezekre a társadalomnak, vagy méginkább a piacgazdaságnak, nincs kifejezett igénye. Így elvileg az írás és olvasás készsége gyakorlatilag arra szükséges, hogy a piac reklámhadjáratában ne legyünk süketek és vakok, tudjunk alkalmazkodni a trendhez, képesek legyünk felfogni egy-egy írás üzenetét, ha másként nem, szociális cimkézés útján. Az már túl költséges lenne, esetleg túl költői, ha látók lennénk és vezérünk nem külső volna, hanem belsőnkből vezérelne. Egyszóval az igény az, hogy a külső vezérléshez szükséges alapfunkcióink működjenek. Mindezt jól tükrözi a nemzetközi szóhasználat, hisz a képzések megnevezésére legtöbb helyen az angol „to train" szó származékait használjuk, ami igazából, eredeti értelmét tekintve, közelebb áll az idomításhoz, mint az oktatáshoz vagy a neveléshez. És természetesen mindez tükröződik az iskolában, az oktatási rendszerben és a vele szemben támasztott igényekben. És mivel az iskola sem szolgálhat egyszerre két úrnak, különösen nem akkor, ha az egyik Buddha Manjushri és a másik Mara, a jelenlegi léthelyzet egyre rosszabb, mert a kibontakozó szellemi káosz és sötétség annyira elferdíti, hogy igazából a döntések nagy része sokkal inkább szól arról, hogy Lucifert vagy Beliált, esetleg Lucifert vagy Leviathánt szolgálja a rendszer. Ugyanakkor a mai felgyorsult, áthuzalozott, digitalizált világunkban egyre kisebb súlya van az egyéni tudásnak, az egyéni látásmódnak. Sokkal fontosabb a társadalom számára, és különösen a piac számára, hogy jó fogyasztóvá váljunk. Csakhogy a tudásalapú modern társadalomban senki sem lehet jó fogyasztó, ha nem rendelkezik kellő szintű műszaki, informatikai ismeretekkel. Így fontossá vált, hogy a matematika, az informatika és a természettudományok oktatását olyanná alakítsuk, hogy ennek a célnak is teljesen megfeleljen, vagyis magyarán fogyasztói és felhasználói szinten mindenki tudjon hatékonyan eligazodni. Ezt az igényt minden lehetséges érvvel és ürüggyel alá szokás támasztani, mint a legtöbb magyarázatra szoruló dolgot. Két, széles körben elfogadott motiváció, az Európai Bizottságnak készült jelentések/felmérések és a pszihológia kutatások. Ezek szerint a populációnak egyre kisebb része hajlandó vállalni az egzakt tudományok megértéséhez szükséges erőfeszítést, másrészt az absztrakt matematikai/tudományos tudás és annak alkalmazási készsége közt nincs automatikus transzfer. Így nincs más lehetőség, mint a matematikát és a természettudományokat alkalmazáscentrikusan tanítani. Ezt ajánlja ma a legtöbb szakmai fórum, ezt ajánlja az Európai Bizottság és ezt várja a diáksereg is. Mindezzel csak az a gond, hogy a motiváció sántít és pont emiatt előre látható, hogy az alkalmazáscentrikusság bevezetése által sem oldható meg a reális probléma. A matematika fejlődésében ugyanis az alkalmazások mindig is az egyik központi hajtóerő szerepét játszották. A másik hajtóerő viszont a matematika belső tisztaságigénye, öntörvényűsége. A legtöbb egzakt, formális matematikai fogalmat, elméletet messze megelőzték a felmerült problémák megoldására használt intuitív, heurisztikus gondolatmenetek. Így valójában a matematika működésének megértése magába foglalja a formalizálatlan vagy kevéssé formalizált, intuitív gondolatmenetek kristályosítását is. Ezt ugyanúgy taníthatjuk gyakorlatias, alkalmazáscentrikus feladatokon keresztül, mint teljesen absztrakt környezetben. Ugyanakkor a lényeges részletek ugyanúgy láthatatlanok maradhatnak alkalmazáscentrikus feladatok megoldása során is, mint absztrakt problémák tárgyalása közben.

Ebben a kötetben a Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe FP7-es úniós projekt keretén belül használt néhány tevékenységünket, tananyagunkat, oktatási ötletünket mutatjuk be. Ez a projekt (valamint több más európai projekt, amelyben résztvettünk) lehetőség számunkra, hogy a matematika oktatásáról alkotott formalizálatlan elképzeléseinket/tapasztalatainkat mások számára is hozzáférhetővé, esetleg használhatóvá alakítsuk. Célunk nem kevesebb, mint a matematikáról és annak oktatásáról valami olyat felmutatni, ami a projekteken, jelentéseken, ürügyeken és okokon túlmutatva a matematikáról, mint alapvető emberi tevékenységről szól.

1. Melléklet

2. Melléklet

2. Bevezetés

Az utóbbi évtizedben egy igen aggasztó jelenséggel kell szembenéznünk. A technika századában egyre kevesebb fiatal mutat érdeklődést a matematikai és természettudományos pályák iránt. Míg az egyetemet végzettek száma növekvőben van Európában és a mi országunkban is, addig a matematika és természettudományos szakokat választók száma csökken, sőt a bármilyen tudományos karriert befutni vágyók száma is csökkenőben van. Részletesen elemzi ezt a helyzetet több erre a célra kinevezett európai szakbizottság.

A 2004 áprilisában Brüsszelben bemutatott Gago-jelentés szerint ekkor az EU-ban $5,7$ kutató jutott 1000 főre, a tagságra váró országokban pedig átlagosan $2,6$ kutató. Ehhez képest a gazdasági és technológiai fejlődés fenntartása legalább egy 8 kutatós átlagot igényel, ami azt jelenti, hogy Európának félmillióval több kutatásban dolgozó emberre van szüksége. Különösen rossz a helyzet a természettudományok, ezek közt főként a fizika és a matematika terén. Ezeken a területeken bizonyos európai országokban nemcsak a kutatók de a tanítók száma sem elegendő. Más országokban még elegendő, de a közeljövőben már nem lesz az. A Gago-jelentésben megjelenő MAPS- (Mapping Physics Students in Europe) tanulmány szerint 1997 és 2002 közt 17 százalékkal csökkent Európában a fizikában diplomázottak száma. A jelentés számos okot vizsgál és javaslatokat tesz a helyzet javítása érdekében. A tanításról, mint a jelenséget befolyásoló egyik fontos tényezőről a következőket állapítja meg: Az iskolában zajló matematikai és természettudományos oktatás egy „saját világban" zajlik, amely nem tud a tudományos területeken zajló fejlődéssel lépést tartani. A diákok túl absztraktnak érzékelik, mert alapgondolatokat próbál átadni megfelelő kísérletező, megfigyelő, értelmező háttér nélkül. Abban az állapotban van, hogy túlnyomóan tényszerű, ezáltal nem eléggé figyelem- és érdeklődésfelkeltő. A diákok többsége irrelevánsnak és nehéznek tartja.

A 2007-es Rocard- jelentés: Science Education Now megerősíti az előző jelentés megállapításait, sőt a helyzet súlyosbodásáról beszél. Ebben a jelentésben az egyik legfontosabb javaslat a kíváncsiságvezérelt oktatás előtérbe helyezése. Kíváncsiságvezérelt tanuláson a jelentés szerzői azt a folyamatot értik, amely problémák feltárására, kísérletek elemzésére, alternatívák megtalálására, kis kutatások megtervezésére, sejtések megfogalmazására, információgyűjtésre, modellalkotásra, koherens érvek megfogalmazására irányul (Lim, Davis, Bell 2004). A matematikát tanítók közössége problémaközpontú tanításnak nevezi azt a módszert, amelyben a tanítás egy megoldandó problémával kezdődik és ennek megoldásához kell olyan tudásra szert tenni, amely lehetővé teszi annak megoldását. A kíváncsiságvezérelt oktatás problémaközpontú megközelítés, de több annál, méghozzá a kísérletezésnek tulajdonított fontosság által.

A román tanügyi rendszer állapotát tárgyaló 2007-es Miclea--jelentés is kitér számos a fenti jelentésekben említett problémára. Románia a tudományos publikációk lakossághoz viszonyított száma szerint 11-szer kisebb teljesítményt mutat az EU-s átlagnál, ötször kisebbet Magyarországhoz és kétszer kisebbet Bulgáriához képest. Románia innovációs együtthatója 2006-ban kétszer kisebb volt Bulgáriáénál, háromszor Magyarországénál és ötször az EU-s átlagnál és a legnagyobb csökkenő tendenciát mutatja az összes felmért ország közt. A Miclea-jelentés is ennek egyik okát a tanügyi rendszer jelenlegi állapotában látja és annak radikális átalakítását javasolja. Sok más fontos megoldandó probléma mellett kiemelt fontosságot tulajdonít a kompetencia-alapú oktatásnak. A jelentés szerint a jelenlegi curriculum túlterhelt és irreleváns a munkapiac szempontjából. Az információátadás teljesen előtérben van a problémamegoldást segítő kompetenciák fejlesztésével szemben. Nem lehet tudni, milyen tudást várunk el egy érettségizett fiataltól. Mindez látóhatár nélküli oktatáshoz és semmit nem mutató belső felméréshez vezetett. A diákok pedig egyre kevésbé értékelnek egy olyan iskolarendszert, amely elzárkózik a tudás termelésének és szállításának jelenlegi módozataitól. Mindez a különböző európai felmérésekből is látszik. A 2003-as Pisa-felméréseken és TIMSS-felméréseken Románia a vizsgált 42 ország közt a 34-edik helyet foglalta el, a nemzetközi átlagtól minden felmért kompetenciában lemaradt.

Mindez azt mutatja, hogy a matematika és természettudományos oktatás világszerte nem túl jó helyzete nálunk még rosszabb képet mutat. Ilyen körülmények közt valóban minden matematikát tanító tanárnak el kell gondolkodnia, hogy melyek azok a módozatok, amelyekkel ezt a tendenciát csökkenteni lehetne. Nagyon sok olyan tényező van, ami a társadalom és főként a politikum döntésein múlik. Természetesen valamilyen egységes, jól alátámasztott fellépéssel talán valamilyen mértékben ezt is lehet befolyásolni, de ehhez előbb pontosan és egységesen kellene tudni, hogy mit szeretnénk. Amit megtehetünk és meg is kell tenni, az tanítási gyakorlatunk átalakítása olyan módon, hogy valóban partnerei lehessünk tanítványainknak a tanulás folyamatában és megváltozott életkörülményeikből adódó gondjaikra valamilyen életképes megoldást próbáljunk találni. Olyan problémákkal szembesülünk a tanítás során, mint:

- az egyre erősödő hiányos szövegértés,
- az absztrakciós képesség egyre nagyobb hiánya,
- a nyelvezet elszegényedése és ezáltal az érzelmi és értelmi élet szegényedése,
- a sok forrásból jövő állandó ingerlésnek való kitettség miatt jóval magasabb ingerküszöb.

Ezeknek a gyerekeknek erősebb impulzusokra van szükségük, ahhoz, hogy érdeklődésüket felkeltve aktív résztvevőivé váljanak a tanulásnak. Ahhoz, hogy ezt elérjük változatossá kell tenni a módszereinket, és azokat a módszereket kell előtérbe helyezni, amelyek kötelezővé teszik a diák aktív részvételét a tanórán. El kell érnünk, hogy a diák cselekvő módon reagáljon az őt érő kihívásokra. Ez különben az utóbbi időben sokat hangoztatott kompetencia szó értelmezése is: az egyén belső késztetése, hogy cselekvéssel válaszoljon egy adott helyzet kihívására, tehát nem azonos sem a tudással, sem a képességgel, magában foglalja ezeket, de nem azonos velük (Blomhøj és Jensen, 2003).

A Rocard-jelentésben kiemelt kíváncsiságorientált oktatás olyan módszer, amelyet érdemes lenne rendszeresen használni a tanítási folyamatban. Ez nagymértékben fejlesztheti a kompetenciákat a puszta ismerettel szemben. Ennek gyökerei a problémaközpontú tanítással azonosak. Ha megvizsgáljuk Eric Wittmann elképzelését a problémamegoldás képességének fejlesztésére vonatkozóan, azt tapasztaljuk, hogy szinte teljes mértékben megegyezik a Rocard-jelentésben foglaltakkal. Erich Ch. Wittmann a problémamegoldási képességek fejlesztésének tíz feltételét tartja alapvetően fontosnak :

1. Ismeretszerzés felfedeztető tanítás és tanulás révén.

2. A tanulók ösztönzése a divergens gondolkodásra (többféle megfogalmazás; több irányból történő megközelítése ugyanannak a problémának; a matematika különböző területeinek összekapcsolása, a módszerek ötvözése; stb.).
3. Automatizált gondolatmenetek kizárólagos alkalmazásának háttérbe szorítása.
4. Nyitott problémák vizsgálata (nincs direkt kérdés, többféle kérdésfeltevés lehetséges, apró kutatási lehetőségek stb.).
5. Ösztönözni kell arra a tanulókat, hogy maguk is fogalmazzanak meg problémákat.
6. Egy olyan „nyelv" kialakítása, amely lehetővé teszi a tanulók számára, hogy gondolataikat ki tudják fejezni.
7. Intuitív indoklások, sejtések ösztönzése. (Egy kicsi, de önálló lépés többet ér, mint egy bemutatott gondolatmenet „lefényképezése".)
8. Heurisztikus stratégiák tanulása.
9. Konstruktív magatartás kialakítása a hibákkal szemben.
10. Diszkussziók, reflexiók, argumentációk ösztönzése.

Egyébként magának a problémának a mibenlétét is érdemes megvizsgálnunk. Pólya György szerint: „Problémánk van, tehát azt jelenti, hogy olyan megfelelő tennivalót keresünk tudatosan, amely alkalmas valamilyen világosan megfogalmazott, de közvetlenül meg nem közelíthető cél elérésére. Problémát megoldani a megfelelő tennivaló megtalálását jelenti ... a legjellemzőbb emberi tevékenység a problémamegoldás, a célratörő gondolkodás, eszközök keresése valamely kitűzött cél eléréséhez."

Alan H. Schoenfeld a probléma fogalmának értelmezésekor a „problémaság" kritériumát nem a feladat, a kérdés bonyolultságában keresi: „Az a nehézség a probléma fogalmának értelmezésében, hogy maga a problémamegoldás folyamata nagyon függ a problémamegoldó személyétől. Azok a feladatok, amelyek megoldása komoly erőfeszítést kíván bizonyos tanulóktól, mások számára lehetnek egyszerű rutinfeladatok, sőt egy matematikus számára ismeretei alapján trivialitások. Ennélfogva az, hogy egy feladat probléma-e, nem magának a feladatnak a lényegi sajátossága, sokkal inkább az egyén és a feladat közötti kapcsolat jellemzője."

A Pólya-féle értelmezés nagyon rávilágít arra, hogy a problémamegoldás képessége és a kompetenciák megléte teljesen egy tőről fakad, Schoenfeld értelmezése pedig rávilágít arra, hogy a problémaszituáció egyénenként különbözik. Biztos problémaszituációt jelentenek mindenki számára a tanítás során azok a helyzetek, amikor olyan feladatot kell ellátnunk, amely megoldására nem elegendőek a már meglevő eszközeink és újabbakat kell találnunk. Egy új fogalom vagy eszköz ilyenszerű bevezetése (ahol az lehetséges) biztosan élményszerűbb a tanuló számára, mint a puszta közlés.

A problémaközpontú matematikai oktatásban azonnal felmerül az alkalmazás és modellezés problémája. Az utóbbi másfél évszázad örökös kérdése volt, hogy tiszta matematikát tanítsanak-e vagy alkalmazáscentrikusat, s ha igen, milyen mértékben. A mérleg nyelve hol erre, hol arra dőlt el, amikor valamely irány túlsúlyba került. Az utóbbi évtizedekben kutatások is folytak, több európai országban is ilyen irányban (Dánia, Hollandia, Németország, Svédország) és egyre inkább szükségesnek tartják a modellezési tevékenységek jelenlétét a matematikatanításban. Ezt nyilvánvalóvá teszi annak szükségessége, hogy a matematikát is integráljuk az élet más területein kifejtett tevékenységekkel. Hogyan valósul ez meg az alkalmazás és modellezés által? Mindkettő a matematikának a külvilággal való kapcsolatát teremti meg. A modellezés a külvilág → matematika irányú kapcsolatot képviseli. Mikor modellezünk, a külvilágban állunk és a matematika birodalmában keresünk a: „Hol találhatok valamilyen matematikai eszközt, ami segíthet megoldani ezt a problémát?" kérdésre választ. Az alkalmazás a matematika → külvilág irányú kapcsolatot képviseli. Most a matematika birodalmában állunk és a külvilágban keressük a: „Hol használhatom a matematika világán kívül ezt az eszközt?" kérdésre a választ.

A matematikadidaktikusok körében elég nagy konszenzus alakult ki abban, hogy a modellezés nagyon fontos a matematikatanításban. Két felfogás is létezik, vannak akik magáért a tanításért tartják fontosnak, ebben a felfogásban a modellezés eszközként jelenik meg, amely megkönnyítheti és támogathatja a matematikának, mint tantárgynak a tanítását. A másik felfogás azt vallja, hogy a matematikát úgy kell tanítani, hogy olyan kompetenciákat fejlesszünk, amelyek a matematika alkalmazásában és a modellalkotásban segítenek.

Az általános iskolában ez a dualitás természetes, hiszen mindkét aspektus nagyon fontos, úgy kell egybeágyazni őket, hogy közben még csak ki sem ejtjük a modell szót. Meg kell teremteni a gyerek számára a matematika világa és a saját világa közti összeköttetést, meg kell tanítani használni a matematikát változatos kontextusokban és helyzetekben, rá kell ébreszteni, hogy mindenhol találkozik vele.

Az „alkalmazás és modellezés a matematika tanulásáért” elképzelés abból indul ki, hogy:

a) Bizonyítani kell a diáknak, hogy a matematikát az emberek sok okból és célból valóban használják, így egy gazdagabb képet alkotnak a matematika természetéről és szerepéről

b) Motivációt nyújt a diáknak, hogy matematikát tanuljon, mivel segít különböző attitűdök és elképzelések formába öntésében.

A másik elképzelés szerint:

a) A matematikai tanítás és tanulás egyik célja, hogy a diákokat felszerelje azzal a képességgel, hogy a matematikát önmaga határain túl alkalmazza.

b) A matematika önmaga határain túli alkalmazása mindig matematikai modellek és modellezésen keresztül történik.

Időről időre megjelenik különböző iskolarendszerekben (és nálunk még ma is él) az az elképzelés, hogy ha valaki helyes és hatékony módon tanult „tiszta matematikát”, akkor képes lesz alkalmazni a matematikát más területeken és más kontextusokban további erre irányuló tanítás nélkül. Ezzel szemben az utóbbi idők kutatásai azt mutatták ki, hogy nincs automatikus transzfer a tiszta matematikai tudás és azon képesség közt, hogy ezt az egyén alkalmazni tudja olyan helyzetekben, amelyek még nem teljesen matematizáltak. Ezért, ha szeretnénk, hogy diákjaink alkalmazási és modellezési kompetenciákkal rendelkezzenek, mint a matematikai műveltségük egyik kimenetele, az alkalmazás és modellezés expliciten kell szerepeljen a matematikatanítás programjában. Ennek megvalósításához viszont a tanárnak képesnek kell lennie változatos tanítási környezetek létrehozására, olyan helyzeteket és tevékenységeket kell kitalálnia, amelyek támogatják az alkalmazási és modellezési kompetenciák megjelenését különböző nevelési helyzetekben más matematikai kompetenciákkal párhuzamosan. Ebben a tanár azonban különböző problémákba ütközik: időbeosztási gondok (mennyit tanítsunk ezekből időben?), a tartalmak megtervezése (mit, milyen modelleket?), a tevékenységek és felhasznált anyagok kiválasztása, a megfelelő egyensúly megteremtése az alkalmazás és a többi, fontos elméleti és más típusú matematikai tevékenység között. Ahogy a diák nem képes bonyolultabb helyzetekben alkalmazni a matematikát, illetve megalkotni és kielemezni matematikai modelleket az elméleti matematikai ismereteinek automatikus következményeként, ugyanúgy a tanárt sem teszi képessé elméleti matematikusi vagy hagyományos matematikatanári képzése arra, hogy megfelelő környezeteket, helyzeteket, illetve tevékenységeket hozzon létre az alkalmazásra és modellezésre. Ezen tanári képességek fejlesztését be kell iktatni a tanári képzésbe és a továbbképzések fontos részévé kell válnia. Ugyanakkor fontos más országok már meglevő tapasztalatainak kielemzése és átvétele.

Természetesen a kompetenciaalapú, a kíváncsiságvezérelt tanításnak és tanulásnak is megvannak a maga korlátai, alkalmazhatósági határai, és ezek majd hosszasabb alkalmazás és vizsgálatok után derülnek ki (például a kompetenciák mérésének egyik problémája, hogy ugyanazok a kompetenciák különböző embereknél nem egyidőben alakulnak ki, de az, hogy nem alakult ki a felmérés időpontjára, nem azt jelenti feltétlenül, hogy később sem válik operacionálissá). Kérdés az is, hogy bizonyos dolgok, mint a heurisztikus eljárások, a heurisztikus problémamegoldó képesség, milyen mértékben taníthatóak. Például a heurisztika taníthatóságát illetően Kosztolányi József arra a következtetésre jut 2000-ben ebben a témában írt Phd-dolgozatában, hogy az csak bizonyos mértékben tanítható, de nagyon hasznos ezzel foglalkozni, mert bizonyos fejlődés elérhető megfelelő stratégiák jól feltett kérdésekkel irányított tanítása által. És természetesen az, hogy ez csak bizonyos mértékig tanítható nem ok arra, hogy ne tegyük azt.

Ami biztos, és szintén felmérések bizonyítják, a legfontosabb, hogy kik és hogyan alkalmazzák ezeket a módszereket, azaz a lelkes, úgy szakmai, mint didaktikai szempontból jól felkészült, jó képességű és empátiával rendelkező tanárt nem lehet semmivel helyettesíteni, és minden módszeren túl az ő személyes hozzáállása az, ami az egész tanítási folyamatot a legnagyobb mértékben meghatározza.

Ugyanakkor a legkreatívabb és jó felkészültséggel rendelkező nevelőnek, tanítónak is szüksége van segítségre és együttműködésre, az új(régi) irányzatok megismerésére, az alkalmazáshoz szükséges erőfeszítések megtermékenyítésére. Ezért válnak egyre szükségesebbé a jól átgondolt és jól kivitelezett továbbképzések, illetve különböző hazai vagy nemzetközi projektekben való részvételek és kooperációk.

Egy másik igen fontos probléma a tankönyvek, illetve segédanyagok kérdése. Ami a Romániában forgalomban levő tankönyveket illeti, az a gond velük, hogy még mindig nagyon hasonlítanak feladatanyaggal kiegészített egyetemi jegyzetekre; tétel, bizonyítás, példa stílusban való felvezetés jellemzi őket, s ha némely könyv el is tér valamennyire ettől a stílustól (amennyire ez egyáltalán lehetséges ahhoz, hogy megfeleljen az elbírálási kritériumoknak), mivel nincsenek tanári kézikönyvek, a máshoz szokott tanárok nem igazán tudják használni ezeket, így inkább választják az általuk megszokott tankönyveket. Egy más felfogásban szerkesztett, a kíváncsiságvezérelt oktatást támogató tankönyvkoncepcióra lenne szükség. Természetesen ehhez igen nagy többletmunkára van szükség a szerzők részéről és egy nagyobb stabilitásra a tanügyben, mondjuk minimálisan arra, hogy a tanterv nem változik évente vagy kétévente, mint azt az utóbbi időben már megszoktuk.

Egy tapasztalat margójára. 2007 és 2010 közt a kolozsvári BBTE és a Báthory István Líceum a DQME2 (Developing Quality in Mathematics Education) európai multikulturális projekt résztvevője volt. A projekt különösen a matematikai modellezéssel foglalkozott, és a három év alatt együttműködések alakultak ki bizonyos projektek egyidőben történő lefuttatására. Mi Svédországgal és Dániával együtt az Asthma-projekten dolgoztunk, ez a három év legkomplexebb matematikai és modellezési apparátusát igénylő projektnek bizonyult, a komolyabb modellezési háttérrel rendelkező Dánián és Svédországon kívül csak Románia és Magyarország vállalkozott a részvételre és a magyarországi résztvevők feladták egy adott ponton.

A modellezésre váró probléma a következő volt:

Az asztmában szenvedő emberek jelentős hányadát teofilinnel kezelik. A teofilin vagy más nevén a dimetilxantin a metilxantinok csoportjába tartozó alkaloid drog (akárcsak a koffein és a teobromin), amely előfordul például a zöld teában is. A teofilin több gyógyszer komponense (akár koffeinnel kombinálva is), a legtöbbet légzészavarok kezelésére ajánlják. Az adagolás leggyakoribb módja az, hogy T óránként (T rögzített) a beteg egy D mg-nyi dózist kap. Egy páciens vérébe 60 mg teofilint fecskendeztek be és ezután kétóránként mérték a teofilinnek a vérbeli koncentrációját. A kapott adatok alapján állították össze a következő táblázatot:

Idő (órákban)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Koncentráció (mg/l)	10,0	7,0	5,0	3,5	2,5	1,9	1,3	0,9	0,6	0,5

Feladatunk az volt, hogy szerkesszünk matematikai modellt a felszívódásra és a modell, valamint a mérési eredmények alapján válaszoljunk a következő kérdésekre:

1. Hogyan változik a teofilin koncentrációja az idő függvényében?

2. Hogyan kell rögzíteni a D és T értékeket, ha azt szeretnénk, hogy néhány injekció után a teofilin koncentrációja $5mg/l$ és $15mg/l$ közt legyen?

3. Hogyan kell rögzíteni a D és T értékeket ahhoz, hogy a teofilin koncentrációja már az adagolás kezdetétől $5mg/l$ és $15mg/l$ közt legyen, ha egy kezdeti S dózissal kezdünk és utána T óránként D dózist adagolunk?

4. Milyen más tényezőket kell figyelembe venni?

Alkossunk modelleket a következő esetekre:

I. időegységenként a vérben levő teofilin rögzített p_1 százalékát használja el a szervezet;

II. időegységenként a vér rögzített p_3 százaléka kerül a májba, a vérből, illetve a májból az ott lévő teofilin p_1 illetve p_2 százaléka szívódik fel és a májban levő teofilin p_4 százaléka kerül vissza a vérkeringésbe;

III. időegységenként a vérben levő teofilin rögzített p_1 százalékát használja el a szervezet, és az adagolás miatt időegységenként rögzített p mennyiségű teofilin érkezik a vérbe (pl. pasztilla vagy ragtapaszos adagolás esetén);

IV. időegységenként a vér rögzített p_3 százaléka kerül a májba, a vérből, illetve a májból az ott lévő teofilin p_1, illetve p_2 százaléka szívódik fel és a májban levő teofilin p_4 százaléka kerül vissza a vérkeringésbe, ugyanakkor az adagolás miatt időegységenként rögzített p mennyiségű teofilin érkezik a vérbe (pl. pasztilla vagy ragtapaszos adagolás esetén).

Ahhoz, hogy a feltett kérdésekre válaszoljanak, a diákoktól elvártuk, hogy az adott modelleket a megadott adatokhoz igazítsák regresszióanalízist használva, majd kifejlesszék (numerikus kísérletekkel és/vagy formális számításokkal) a kért gyógyszerezési sémákat. Mivel nagyon komplex problémával álltunk szemben nemcsak középiskolás diákokat, hanem elsőéves egyetemi hallgatókat is bevontunk a munkacsoportokba. Mielőtt a tulajdonképpeni modellezési probléma megoldására irányuló tevékenységeket elkezdtük, néhány olyan aktivitást kellett szerveznünk, amellyel a megfelelő hátteret biztosítottuk:

-a középiskolás diákok számára alapvető matematikai analízisbeli fogalmakat (deriváltak, differenciálegyenletek), regresszió analízist (paraméter esztimáció, görbeillesztés), ugyanakkor speciális szoftverek használatát (Excel, Matlab) tanítottuk.

-az egyetemi hallgatók számára csak regresszió analízisben és szoftverkezelésben tartottunk foglalkozásokat.

Ez 10 foglalkozást jelentett a középiskolás diákok számára és 4 foglalkozást az egyetemi hallgatók számára. Mindez hagyományos iskolai környezetben zajlott. A tulajdonképpeni modellezési tevékenység lebonyolítására négy csoportot hoztunk létre, mindegyik csoportnak az egyik megadott modellel kellett dolgoznia. A csoportok 3-4 egyetemi hallgatóból és 2-3 középiskolás diákból álltak. Minden csoportnak volt saját számítógépe, amelyen Excelben végezhette a számításokat. Az eredmények bemutatására egy videoprojektor állt a diákok rendelkezésére. Az előkészítő tevékenységek során minden diák megismerkedett a modellekkel (az azokat leíró differenciálegyenletekkel és azok megoldásaival), de nem ismerték a kérdéseket, amelyek a végén válaszolniuk kellett. A tevékenységet három órásra terveztük, de csak öt és fél óra alatt készültek el és zajlottak le a bemutatók. Ezalatt az idő alatt bármilyen precízen megfogalmazott technikai kérdést megválaszoltunk, de nem befolyásoltuk a csapatokat a számításaik megtervezésében és kivitelezésében (megpróbáltuk betartani a Tong által leírt szabályokat). A tevékenység azzal zárult, hogy minden csapat a saját Excel-táblázata alapján egy bemutatót tartott.

Nagyon tanulságos volt számunkra az egyes csapatok hozzáállása és az a mód, ahogyan a problémát kezelték.

Az első modellel dolgozók jól válaszolták meg az egyes kérdést (az Excel görbeillesztési programját használták a megoldáshoz). A gyógyszer adagolási sémájuk egy része is helyes volt, de helytelen sémákat is adtak. Az általuk megadott táblázat nem tartalmazta rögzített T esetén a maximális és minimális adagokat, de helyes T értékek esetén az általuk megadott gyógyszeradag a megfelelő minimális és maximális adagok közt helyezkedett el. A kiszámításra irányuló analitikus meghatározást egy ponton feladták és numerikus kísérletezéshez folyamodtak. Így sikerült adott T és D értékekre kiszámolni a koncentrációt a kT időpillanatban és több olyan értéket kaptak, amelyre az adagolás helyes volt, de nem vették észre a T megengedett felső értékét, így helytelen sémákat is alkottak. A csoport tagjai már félórás ötletgyűjtés után nekifogtak a számításoknak. A három órán át tartó munka alatt egyetlen kérdésük sem volt. A prezentációjuk teljesen világos volt, de sajnos nem tartalmazta a jelenség néhány kulcselemét(a hosszútávú viselkedés periodicitását, a kezdőadag szükséges voltát és annak hatását). A tevékenység során számukra a legnagyobb gondot az jelentette, hogy nem tudták a numerikus technikákat a formális kalkulussal ötvözni, így az eredményekhez csak numerikus módszerekkel próbáltak eljutni.

A második csoport feladata attól volt nehéz, hogy rá kellett volna jönniük, hogy a meglevő adatok nem elégségesek ahhoz, hogy helyes és ellenőrizhető választ adjanak a feltett kérdésekre. Nem jöttek rá arra, hogy a specifikációk és adatok alapján ez a modell nem működtethető. Az egyedüli támpont, amivel a megadott adagolást ellenőrizhették volna, az elméleti háttér egy mélyebb megértését igényelte. A csapat erre nem jött rá, túl furcsa és váratlan volt számukra az, hogy a specifikációkat (modellt) kell változtatni, ahhoz, hogy a kérdésekre helyes, ellenőrizhető válaszokat adhassanak, holott a matematikai modell mélyebb megértése ezt lehetővé tette volna. Mindez azt mutatja, hogy nem jutottak el e tevékenységük egy metakognitív szintjére.

A harmadik munkacsoport volt a legsikeresebb. Ők ötvözték a numerikus módszereket az analízis módszereivel. A legnagyobb lehetséges T értéket is megtalálták és numerikus kísérletekkel a minimális és maximális adagokat is. Ez a csoport több kérdést is feltett a tevékenység során. Ahányszor többértelműséggel találkoztak vagy bizonyos aspektusokban nem volt konszenzus a csoport tagjai közt, kérdéseket fogalmaztak meg az ötleteikkel, problémájukkal kapcsolatban és tanácsot kértek. Úgy gondolom sikerességük ebből a nagyon hatékony munka- és együttműködési stílusból származott.

A negyedik csoport úgy időben, mint a válaszok tekintetében a leggyengébbnek bizonyult, annak ellenére, hogy a megoldás koncepciója talán az ő esetükben volt a legjobb, de nem tudták azt kivitelezni és nem fordultak segítségért a hibáik egy részét is észrevették, de nem tudták azt kijavítani.

A tevékenységsorozat sok érdekes tanulsággal zárult számunkra:

1. Mivel diákjaink nem jártasak ilyen megközelítésekben (valós probléma+modellezés+statisztikai adatok+számítógéporientált megtervezés), gyakran képleteket próbáltak alkotni olyan esetekben is, amikor ez nem volt lehetséges. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy bizonyos matematikai fogalmakat (pl. függvény, inverz függvény, egyenlet, egy feladat eredménye) újra kell vizsgálnunk és esetleg úgy kiterjesztenünk, hogy ez használható és hasznos legyen ilyen helyzetekben. A számítógépek használata a matematikaórák egy részén szükséges és elkerülhetetlen. A romániai curriculumnak magába kellene foglalnia a modellezést és a számítógépes szimulációt is.

2. A csapatmunka sokat segített a résztvevőknek abban, hogy sok járhatatlan utat elkerüljenek a megoldás felfedezése közben. A diákok véleménye az volt, hogy biztosan nem mindegyikük tudta volna önállóan, egyedül ugyanazt az eredményt produkálni. Ez megerősíti McCartney (1990) a modellezésre szánt idő növelésének szükségességéről írt cikkének azt a megállapítását, hogy az ilyen tevékenységek nem hatékonyak a diákok felmérésében.

3. A modellezési tevékenység előkészítésekor rájöttünk, milyen nehéz olyan tanárokat találni, akik ilyen jellegű tevékenységekben hajlandóak együttműködni. Ez az élmény meggyőzött arról, hogy a tanárképzésben szükség van modellezési és számítógép által támogatott matematika előadásokra, és a tanártovábbképzésben is ezeknek a témáknak fontos szerephez kell jutniuk.

4. A legfontosabb tanulság az volt, hogy nagyon aggasztó az, hogy egy komplexebb modellezési tevékenység során sok helyzetben a diák vagy tanár nem rendelkezik olyan kritériumokkal, amelylyel validálhatná a modellt vagy a számításokat, ami igen komoly következményekkel járhat (képzeljünk el egy rossz gyógyszer adagolási sémát a valós életben). Éppen ezért ilyen modelekkel csak akkor szabad foglalkozni, ha van elegendő időnk a teljes letárgyalásukra és kijavításukra (mint pl. a kettes csoport feladata esetében), ellenkező esetben komoly félreértelmezésekhez vezethet. Mivel iskolai keretek közt az idő nagyon szűk (Nagy, 2007), nagyon jól meg kell gondolni milyen modellezési feladatokkal foglalkozunk, de mindenképp úgy kell csinálni, hogy az alkalmazási korlátokat a diák láthassa.

A feladat részletesebb megoldását az [**1**] könyvben vagy a [**4**], [**5**] cikkekben találhatjuk meg. A további fejezetekben olyan tananyagokat, tevékenységeket igyekszünk bemutatni, amelyek (valamilyen szinten) kivitelezhetők az iskolai keretek közt, különösebb előkészület nélkül. Ugyanakkor arra is igyekszünk rávilágítani, hogy az aktuális tanterv fejezetei teljes egészében átstrukturálhatók a kíváncsiságvezérelt matematikaoktatás elvei alapján.

I. FEJEZET

BICIKLIHIÁNYBAN

1. Az alapfeladat

1. Feladat. Két település közti távolság 40 km. Két gyereknek ezt a távolságot kellene megtennie a lehető legrövidebb idő alatt a következő feltételek mellett:

- Van egy biciklijük, de egyidőben nem ülhetnek mindketten a biciklin.
- Gyalogosan a sebességük $v_1 = 5$ km/h és biciklivel $v_2 = 20$ km/h.
- Egyszerre indulnak, ugyanarról a településről.

Legalább mennyi időre van szükségük ahhoz, hogy mindketten a másik településre érkezzenek?

Elképzelhetünk egy valósághűbb kontextust is. Két biciklis egy túrán vesz rész, amely abból áll, hogy az A helységig vonattal utaznak, onnan a B helységig bicikliznek, majd B-ből vonattal térnek haza. Az A és B közti szakaszon egy C pontban az egyikük biciklije használhatatlanná (és javíthatatlanná) válik, pl. becsúszik egy szakadékba. A C és B távolsága 40 km, az A és C távolsága 60 km és B-ből 5 és fél óra múlva lenne vonatjuk hazafele. Elérhetik-e mindketten ezt a vonatot, ha a megmaradt biciklin egyszerre ketten nem ülhetnek? A továbbiakban ezt a kontextust használjuk.

Világos, hogy a távolságot gyalogosan 8 óra alatt lehetne megtenni, tehát ha az egyik gyalogosan megy, akkor nem éri el a vonatot. Ahhoz, hogy mindketten 8 óránál kevesebb idő alatt megtegyék az adott távolságot, annak egy részét mindkettő biciklivel kellene megtegye. Tehát azt érdemes csinálni, hogy mindketten elindulnak, az egyik gyalogosan, a másik biciklin, és aki a biciklin indult, az valahol útközben otthagyja a biciklit a társának. Esetleg megtehetik, hogy több kisebb szakaszra osztják az utat és többször cserélnek. Így azt érdemes figyelni, hogy mennyi utat tesznek meg biciklin és mennyit gyalog. Ha valamelyikük olyankor hagyná el a biciklit, amikor a társa mögött van, akkor a célbajutás idejét csökkenthetnék, ha még egy kicsit megy a biciklivel (és nem hagyja ott). Emiatt világos, hogy ha a bicikli nem jut el B-be, akkor a menetidő nem lehet minimális. Így ha x-szel jelöljük az egyik biciklis által gyalogosan megtett út hosszát, akkor ő $40-x$ távolságot tesz meg biciklivel és a társa x távolságot tesz meg biciklivel és $40-x$ távolságot gyalog. Emiatt a teljes távolságot

$$t_1 = \frac{x}{5} + \frac{40-x}{20}, \text{ illetve } t_2 = \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5}$$

idő alatt teszik meg. Például ha $x = 10$, akkor $t_1 = 3,5$ és $t_2 = 6,5$, tehát $6,5$ óra alatt mindketten beérnek. Ezzel persze nem érik el a vonatot. Ha $x = 15$, akkor $t_1 = 4\frac{1}{4}$ és $t_2 = 5\frac{3}{4}$, tehát így sem érik el a vonatot. Ha viszont $x = 20$, akkor $t_1 = t_2 = 5$, és így elérhetik a vonatot. További kísérletezéssel belátható, hogy $x > 20$ esetén az átjutáshoz szintén több, mint 5 óra szükséges, sőt az is észrevehető, hogy x-re ugyanazt a teljes időt kapjuk, mint $40-x$-re ($x = 25$ esetén $t_2 = 4\frac{1}{4}$ és $t_1 = 5\frac{3}{4}$, míg $x = 30$ esetén $t_2 = 3,5$ és $t_1 = 6,5$). Ezzel a gyakorlati feladatot meg is oldottuk, de a matematikai probléma megoldása nem teljes. Igazolnunk kell, hogy valóban legalább 5 órára szükség van (ennél kevesebb idő alatt nem juthatnak el B-be). Jó volna általánosan is megoldani a feladatot, vagyis a távolság és a kétfajta sebesség függvényében megtalálni a szükséges idő minimumát. Ha $x < 20$, akkor

$$\frac{x}{20} < 1 \text{ és } \frac{40-x}{5} > 4,$$

tehát az összegről így nem tudjuk eldönteni, hogy 5-nél kisebb vagy nagyobb. Másrészt

$$t_2 = \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5} = 8 - x\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{20}\right) = 8 - \frac{3x}{20} > 5,$$

ha $x < 20$ és

$$t_1 = \frac{x}{5} + \frac{40-x}{20} = 2 + x\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{20}\right) = 2 + \frac{3x}{20} > 5,$$

ha $x > 20$. Ez mutatja, hogy ha valaki a távolság felénél többet tesz meg gyalog, akkor több, mint 5 óra alatt ér B-be, tehát legalább

5 óra szükséges ahhoz, hogy az adott feltételek mellett mindketten megtegyék a 40 km hosszú útszakaszt. Látható, hogy egy lehetséges megoldás az, hogy az egyik gyerek megy 20 km-t biciklivel, majd lerakja a biciklit és gyalog megy tovább. A társa elindul gyalog és 20 km után felül a biciklire, majd azzal megy tovább. Ez csak egy lehetséges megoldás, mert több váltással is kivitelezhető ugyanez. Ha az egyik gyerek csak 10 km-t megy biciklivel, otthagyja és 10 km-t megy gyalog, akkor $2,5$ óra után ér az út feléhez. Ez alatt a társa előbb megtesz 10 km-t gyalog, majd 10 km-t biciklivel, tehát ő is $2,5$ óra alatt éri el az út felét. Ha mindezt megismétlik az út másik felén, akkor is 5 óra alatt érnek célba. Látható, hogy végtelen sok módon lehetséges kivitelezni a cseréket úgy, hogy összesen 5 óra alatt jussanak B-be.

A fogalmak tisztázása érdekében írjuk le matematikai szimbólumokkal is, hogy mit jelent a szükséges idő minimuma. Ha t_1 és t_2 a két gyerek átjutási ideje, akkor ahhoz, hogy mindketten B-be érjenek $t = \max\{t_1, t_2\}$ idő szükséges. Tehát mindketten

$$t = \max\{t_1, t_2\} = \max\left\{\frac{x}{5} + \frac{40-x}{20}, \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5}\right\}$$

idő alatt érnek B-be. Így az átjutáshoz szükséges idő minimumának meghatározásához a

$$\min_{0\le x\le 40} \max\left\{\frac{x}{5} + \frac{40-x}{20}, \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5}\right\}$$

kifejezést kell kiszámítani. Az előbbi gondolatmenet segítségével tehát azt igazoltuk, hogy

$$\min_{0\le x\le 40} \max\left\{\frac{x}{5} + \frac{40-x}{20}, \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5}\right\} = 5.$$

Ismételjük meg az előbbi gondolatmenetet általánosabb esetben, amikor a sebességek v_1 és v_2 (nem ismerjük a számértéküket, de $v_1 < v_2$), illetve a távolság d. Ha x-szel jelöljük az egyik gyerek által gyalogosan megtett távolságot, akkor ő $d - x$ távolságot tesz meg biciklivel és a társa x távolságot biciklivel és $d - x$-et gyalog. Így az átjutási idejük rendre $t_1 = \frac{x}{v_1} + \frac{d-x}{v_2}$ és $t_2 = \frac{x}{v_2} + \frac{d-x}{v_1}$. Tehát mindkettőjük átjutásához szükséges idő

$$t = \max\{t_1, t_2\} = \max\left\{\frac{x}{v_1} + \frac{d-x}{v_2}, \frac{x}{v_2} + \frac{d-x}{v_1}\right\}$$

és ki kell számolni a

$$\min_{0 \le x \le d} \max\left\{\frac{x}{v_1} + \frac{d-x}{v_2}, \frac{x}{v_2} + \frac{d-x}{v_1}\right\}$$

kifejezés értékét. Ha $x \le \frac{d}{2}$, akkor

$$t_2 = \frac{d}{v_1} - x\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) \ge \frac{d}{v_1} - \frac{d}{2}\frac{v_2 - v_1}{v_1 \cdot v_2} = d\frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2}$$

és ha $x \ge \frac{d}{2}$, akkor

$$t_1 = \frac{d}{v_2} + x\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) \ge \frac{d}{v_2} + \frac{d}{2}\frac{v_2 - v_1}{v_1 \cdot v_2} = d\frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2}.$$

Ez alapján a t_1 és t_2 maximumának a legkisebb értéke pontosan $x = \frac{d}{2}$ esetén érhető el és ebben az esetben

$$t = d\frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2},$$

tehát a két gyerek átlagos sebessége a d távolságra számolva éppen

$$v_{\text{átlag}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2},$$

vagyis a v_1 és v_2 harmonikus középarányosa.

Megjegyzés. Az előbbi feladat megoldása mutatja, hogy a harmonikus középarányos valóban kifejezhet valamilyen átlagértéket. Érdemes megemlíteni más kontextust is, amelyben az átlagértéket a harmonikus középarányossal számítjuk ki. Például ha egy buszjárat egy nap kétszer teszi meg ugyanazt a d hosszúságú útvonalat és a két alkalommal kapott átlagsebessége v_1, illetve v_2, akkor összesen $2d$ távolságot tesz meg $\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$ idő alatt, tehát az átlagsebessége

$$\frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Fontos kihangsúlyozni, hogy mikor jelenik meg a harmonikus középarányos, mint átlagérték. Esetleg olyan példákat is érdemes mutatni, ahol valamilyen mennyiség átlagát más középarányossal (számtani, mértani, négyzetes) kell kiszámítani.

2. Egy lehetéges általánosítás és megoldása

Az alapfeladat megoldása után érdemes a diákoknak a következő problémát megfogalmazni:

2. Feladat. Általánosítsuk az 1. feladatot! Fogalmazzunk meg minél több hasonló jellegű problémát, próbáljuk rangsorolni őket a nehézségük szerint! Gyártsunk valamilyen stratégiát a bonyolultabb esetek vizsgálatára!

A diákok általában gyorsan megfogalmaznak valamilyen általánosításokat és gyakran meg is sejtik a megoldásaikat, esetleg valamilyen hibás elméletet is gyorsan felvázolnak. A jelenségek alapos megértése és a hibák kiküszöbölése érdekében ajánlott a megfogalmazott feladatok elemzése. A továbbiakban felsorolunk néhány lehetséges általánosítást és annak megoldását. A legegyszerűbbnek tűnő általánosítás, amikor több gyerek van és több bicikli. Általában n ember k biciklivel egy adott d távolságot legkevesebb mennyi idő alatt tud megtenni, ha a feltételek maradnak (vagyis egy biciklin egyszerre legfeljebb egy ember ülhet). Annak érdekében, hogy az általános eset megoldását megsejthessük, érdemes előbb sajátos eseteket vizsgálni (már csak azért is, hogy ne egy sajátos esetből fogalmazzuk meg az általános esetet). Előbb vizsgáljuk meg a következő eseteket:

3. Feladat. Egy d távolságot $n = 3$ gyereknek a lehető legkevesebb idő alatt kell megtennie. Gyalog v_1 és biciklin v_2 sebességgel haladhatnak, de csak egy biciklijük van és azon egyszerre legfeljebb egy gyerek ülhet. Legkevesebb mennyi idő alatt tehetik meg a d távolságot mind a hárman? Mekkora az átlagsebességük, ha a legkevesebb idő alatt teszik meg a távolságot?

4. Feladat. Egy d távolságot $n = 4$ gyereknek a lehető legkevesebb idő alatt kell megtennie. Gyalog v_1 és biciklin v_2 sebességgel haladhatnak, de csak egy biciklijük van és azon egyszerre legfeljebb egy gyerek ülhet. Legkevesebb mennyi idő alatt tehetik meg a d távolságot mind a négyen? Mekkora az átlagsebességük, ha a legkevesebb idő alatt teszik meg a távolságot?

5. Feladat. Egy d távolságot n gyereknek ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$) a lehető legkevesebb idő alatt kell megtennie. Gyalog v_1 és biciklin v_2 sebességgel haladhatnak, de csak egy biciklijük van és azon egyszerre legfeljebb egy gyerek ülhet. Legkevesebb mennyi idő alatt teheti meg a d távolságot mind az n gyerek? Mekkora az átlagsebességük, ha a legkevesebb idő alatt teszik meg a távolságot?

6. Feladat. Egy d távolságot $n = 3$ gyereknek a lehető legkevesebb idő alatt kell megtennie. Gyalog v_1 és biciklin v_2 sebességgel haladhatnak, de csak két biciklijük van és egy biciklin egyszerre legfeljebb egy gyerek ülhet. Legkevesebb mennyi idő alatt tehetik meg a d távolságot mind a hárman? Mekkora az átlagsebességük, ha a legkevesebb idő alatt teszik meg a távolságot?

7. Feladat. Egy d távolságot $n = 4$ gyereknek a lehető legkevesebb idő alatt kell megtennie. Gyalog v_1 és biciklin v_2 sebességgel haladhatnak, de csak két biciklijük van és egy biciklin egyszerre legfeljebb egy gyerek ülhet. Legkevesebb mennyi idő alatt tehetik meg a d távolságot mind a négyen? Mekkora az átlagsebességük, ha a legkevesebb idő alatt teszik meg a távolságot? Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor 2 bicikli és n gyerek van, ahol $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$.

8. Feladat. Oldjuk meg az előbbi feladatot $n = 5$ gyerek és $k = 3$ bicikli esetén!

9. Feladat. Oldjuk meg az előbbi feladatot tetszőleges $n \in \mathbb{N}^*$ és $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahol n a gyerekek száma és k a biciklik száma, valamint $n > k$.

Megjegyzés. Természetesen elégséges lenne megoldani az utolsó feladatot. A többit gyakorlatilag csak azért fogalmaztuk meg külön, hogy a sajátos esetekből való építkezést, az elméletalkotást aktiválhassuk a megoldásuk segítségével. A cél az utolsó feladat megoldása, de ha egyből csak azt nézzük, akkor nagy valószínűséggel a diákok nem jönnek rá a megoldás kulcslépéseire. Ezért fontos tudatosítani bennük, hogy „Kevés megfigyelés és sok okoskodás tévedésekhez vezet, sok megfigyelés és kevés okoskodás az igazsághoz." (Alexis Carrel).

Mielőtt a bonyolultabb eseteket megvizsgáljuk érdemes a már megoldott feladat megoldását úgy átírni, hogy a jelölésrendszer meg a gondolatmenet alkalmas legyen az általánosításra. Ennek érdekében vezessünk be szimmetrikus jelöléseket. Jelölje x_1 és x_2 a két gyerek által gyalogosan megtett út hosszát és y_1, y_2 a biciklin megtett út hosszát. Ezekkel a jelölésekkel $x_1+y_1 = d$ és $x_2+y_2 = d$, mivel mindkét gyerek megteszi a teljes távot. Ugyanakkor a bicikli is megteszi a teljes távot (beláttuk, hogy nem érdemes otthagyni menetközben) és nem érdemes a biciklivel visszafele sem menni (mert ez biztosan idővesztességet hoz létre), tehát $y_1 + y_2 = d$, így $x_1 + x_2 = d$. Ha t_1 és t_2 a két gyerek menetideje, akkor

$$t_1 = \frac{x_1}{v_1} + \frac{y_1}{v_2} \text{ és } t_2 = \frac{x_2}{v_1} + \frac{y_2}{v_2},$$

tehát ha $t = \max\{t_1, t_2\}$, akkor írhatjuk, hogy

$$t \geq \frac{x_1}{v_1} + \frac{y_1}{v_2} \text{ és } t \geq \frac{x_2}{v_1} + \frac{y_2}{v_2}.$$

Az előbbiek alapján

$$2t \geq \frac{x_1 + x_2}{v_1} + \frac{y_1 + y_2}{v_2},$$

vagyis

$$t \geq \frac{d}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{d}{2}$. Ez elérhető úgy, hogy a távolság feléig az egyik gyerek megy a biciklin, leteszi, majd gyalogosan megy tovább. Eközben a másik gyerek az út első felét megteszi gyalog, az út felénél elveszi a biciklit, majd azon megy tovább. Így a d távolság megtételéhez szükséges minimális idő

$$\frac{d}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right).$$

A megoldásnak ez a leírása azért előnyösebb, mert az optimális megoldás feltételeit és a végeredményt megkapjuk a számolásokból.

A 3. FELADAT MEGOLDÁSA. Jelölje x_1, x_2 és x_3 a három gyerek által gyalogosan megtett út hosszát és y_1, y_2, valamint y_3 a biciklin megtett út hosszát. Ezekkel a jelölésekkel $x_i + y_i = d$, ha $1 \leq i \leq 3$. Mivel a biciklit nem érdemes menetközben elhagyni és nem érdemes a biciklivel visszafele menni, írhatjuk, hogy $y_1 + y_2 + y_3 = d$, tehát $x_1 + x_2 + x_3 = 2d$. Ha t_1, t_2 és t_3 a gyerekek menetideje, akkor

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, 1 \leq i \leq 3,$$

tehát ha $t = \max\{t_1, t_2, t_3\}$, akkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} t \geq & \frac{x_1}{v_1} + \frac{y_1}{v_2} \\ t \geq & \frac{x_2}{v_1} + \frac{y_2}{v_2} \\ t \geq & \frac{x_3}{v_1} + \frac{y_3}{v_2} \end{aligned}$$

Az előbbiek alapján

$$3t \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{v_2},$$

vagyis

$$t \geq \frac{d}{3}\left(\frac{2}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right).$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2d}{3}$ és $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{d}{3}$. Ez elérhető úgy, hogy a távolság első egyharmadát az egyik gyerek teszi meg biciklivel, a második egyharmadát egy másik gyerek és az utolsó egyharmadát a harmadik gyerek. Az út többi részén mindhárman gyalogolnak. Ebben az esetben az átlagsebesség

$$v_{\text{átlag}} = \frac{3}{\frac{2}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

vagyis egy súlyozott harmonikus középarányos. □

A 4. FELADAT MEGOLDÁSA. Jelölje x_1, x_2, x_3 és x_4 a négy gyerek által gyalogosan megtett út hosszát és y_1, y_2, y_3, valamint y_4 a biciklin megtett út hosszát. Ezekkel a jelölésekkel $x_i + y_i = d$, ha $1 \le i \le 4$. Mivel a biciklit nem érdemes menetközben elhagyni és nem érdemes a biciklivel visszafele menni, írhatjuk, hogy $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = d$, tehát $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3d$. Ha t_1, t_2, t_3 és t_4 a gyerekek menetideje, akkor

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \text{ ha } 1 \le i \le 4,$$

tehát ha $t = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, akkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} t \ge& \frac{x_1}{v_1} + \frac{y_1}{v_2} \\ t \ge& \frac{x_2}{v_1} + \frac{y_2}{v_2} \\ t \ge& \frac{x_3}{v_1} + \frac{y_3}{v_2} \\ t \ge& \frac{x_4}{v_1} + \frac{y_4}{v_2} \end{aligned}$$

Az előbbiek alapján

$$4t \ge \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{v_2},$$

vagyis

$$t \ge \frac{d}{4}\left(\frac{3}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{3d}{4}$ és $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = \frac{d}{4}$. Látható, hogy azt is meg kell vizsgálni, hogy ezek a távolságok a gyakorlatban lehetségesek-e, vagy sem. Jelöljük a gyerekeket b_1, b_2, b_3 és b_4-gyel. A bicikli átadását pontosan meg kell szervezni. Az előbbi két feladathoz hasonlóan kivitelezhető az, hogy minden $1 \le i \le 4$ esetén b_i az út i-edik negyedét tegye meg biciklivel, és a többit gyalogosan. Ebben az esetben az átlagsebesség

$$v_{\text{átlag}} = \frac{4}{\frac{3}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

vagyis egy súlyozott harmonikus középarányos. □

Az 5. FELADAT MEGOLDÁSA. Jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az n gyerek által gyalogosan megtett út hosszát és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a biciklin megtett út hosszát. Világos, hogy $x_i+y_i = d$, ha $1 \leq i \leq n$ és $y_1+y_2+\ldots+y_n = d$, tehát $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (n-1)d$. Ha a gyerekeket jelöljük $b_1, b_2, \ldots, b_n$-nel és minden $1 \leq i \leq n$ esetén b_i menetideje t_i, akkor

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2},$$

tehát a $t = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, számra

$$t \geq \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Az előbbiek alapján

$$nt \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{v_2},$$

vagyis

$$t \geq \frac{d}{n}\left(\frac{n-1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{(n-1)d}{n}$ és $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{d}{n}$. Az előbbi két feladathoz hasonlóan kivitelezhető az, hogy minden $1 \leq i \leq n$ esetén b_i az út i-edik $\frac{d}{n}$ hosszúságú darabkáját tegye meg biciklivel és a többit gyalogosan. Ebben az esetben az átlagsebesség

$$v_{\text{átlag}} = \frac{n}{\frac{n-1}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

amely egy súlyozott harmonikus középarányos, a két súly pedig a bicikli nélküli gyerekek száma $(n-1)$ és a biciklik száma (1). $\square$

A 6. FELADAT MEGOLDÁSA. Jelölje x_1, x_2, x_3 a gyerekek által gyalogosan megtett út hosszát és y_1, y_2, y_3 a biciklin megtett út hosszát. Világos, hogy $x_i + y_i = d$, ha $1 \leq i \leq 3$ és $y_1 + y_2 + y_3 = 2d$, tehát $x_1 + x_2 + x_3 = d$. Ha a gyerekeket jelöljük b_1, b_2, és b_3-mal és minden $1 \leq i \leq 3$ esetén b_i menetideje t_i, akkor

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2},$$

tehát a $t = \max\{t_1, t_2, t_3\}$, számra

$$t \geq \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Összeadva az előbbi egyenlőtlenségek megfelelő oldalait

$$3t \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{v_2},$$

vagyis

$$t \geq \frac{d}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right).$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{d}{3}$ és $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{2d}{3}$. A biciklik cseréje ebben az esetben egy kicsit több odafigyelést igényel. A jobb követhetőség érdekében az utat felosztjuk harmadokra és egy táblázatban ábrázoljuk, hogy kinél melyik útszakaszon van bicikli. Ellenőrizhető, hogy a táblázatban

	$0 - \frac{d}{3}$	$\frac{d}{3} - \frac{2d}{3}$	$\frac{2d}{3} - d$
b_1	B	B	Gy
b_2	B	Gy	B
b_3	Gy	B	B

1. TÁBLÁZAT. Három ember két biciklivel

látható terv kivitelezhető, tehát a t-re adott alsó becslés valóban az átjutási idő minimuma. Az átlagsebesség ebben az esetben

$$v_{\text{átlag}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2}},$$

amely egy súlyozott harmonikus középarányos, a két súly pedig a bicikli nélküli gyerekek száma (1) és a biciklik száma (2). □

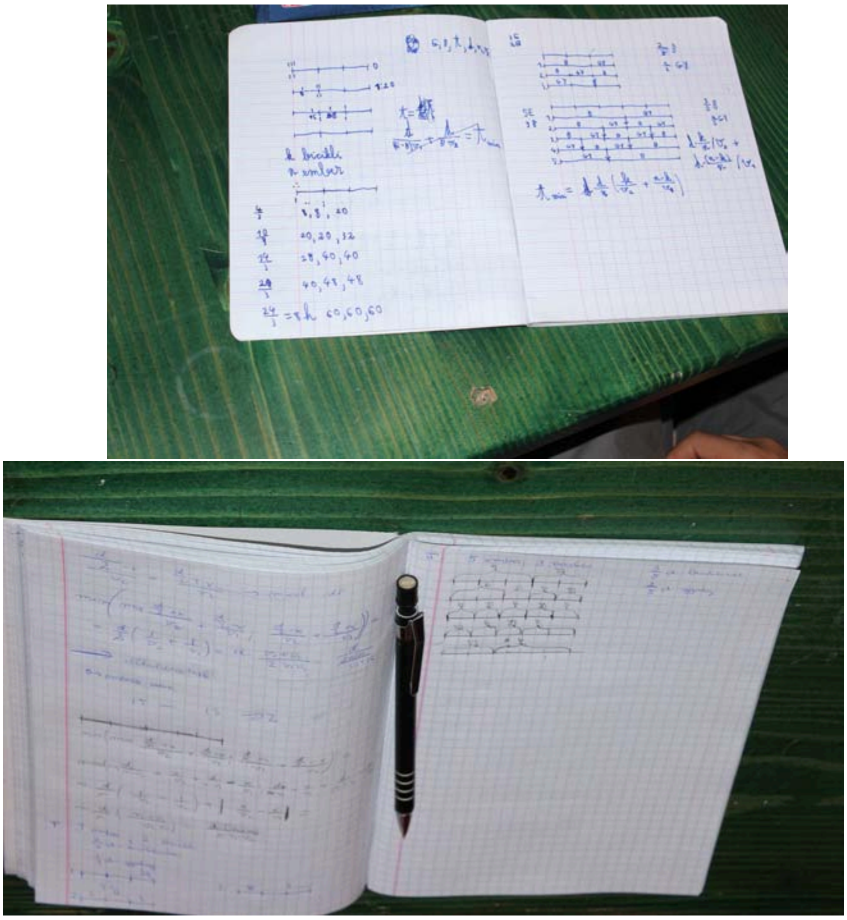
A 7. FELADAT MEGOLDÁSA. $n = 4$ esetén az előbbihez hasonló gondolatmenet alapján a

$$t \geq \frac{d}{4}\left(\frac{2}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right)$$

becslést kapjuk, tehát ha sikerül megszervezni a biciklik cseréjét úgy, hogy az előbbi egyenlőtlenségben egyenlőség teljesüljön, akkor kész van a megoldás. Egy ilyen lehetséges cseresorrendet mutat a 2. táblázat. Látható, hogy az általános eset megoldásához a biciklik

	$0-\frac{d}{4}$	$\frac{d}{4}-\frac{2d}{4}$	$\frac{2d}{4}-\frac{3d}{4}$	$\frac{3d}{4}-d$
b_1	B	B	Gy	Gy
b_2	B	Gy	B	Gy
b_3	Gy	B	Gy	B
b_4	Gy	Gy	B	B

2. Táblázat. Négy ember két biciklivel



1.1. Ábra. Sajátos esetek vizsgálata

seréjének a leírása szükséges. Ennek érdekében talán érdemes a 2. táblázat helyett a 3. vagy a 4. táblázatot elkészíteni.

	$0-\frac{d}{4}$	$\frac{d}{4}-\frac{2d}{4}$	$\frac{2d}{4}-\frac{3d}{4}$	$\frac{3d}{4}-d$
b_1	B	B	Gy	Gy
b_2	B	Gy	Gy	B
b_3	Gy	Gy	B	B
b_4	Gy	B	B	Gy

3. TÁBLÁZAT. Négy ember két biciklivel - II.

Az utóbbi két táblázat sorai a másodiktól kezdve az előtte levő sor alapján egyszerűen megszerkeszthetők (vagy az első elem kerül a végére és az egész előrecsúszik, vagy az utolsó elem kerül az elejére és minden hátracsúszik). Ezek a mintázatok az általános esetben is kivitelezhető cseréket jelentenek, tehát tetszőleges $n \geq 3$ esetén n gyerek két biciklivel legkevesebb

$$t = \frac{d}{n}\left(\frac{n-2}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right)$$

idő alatt teheti meg a d távolságot. Ez elérhető egy olyan biciklicsere sorozattal, amelyet a 5. táblázat ír le és ebben az esetben az átlagsebesség

$$v_{\text{átlag}} = \frac{n}{\frac{n-2}{v_1} + \frac{2}{v_2}}.$$

Ebben a táblázatban a főátlón és a közvetlenül fölötte levő átlón, valamint a bal alsó sarokban van B, a többi elem Gy, tehát úgy is felfogható, hogy a főátlón levő B-k az egyik bicikli kihasználását jelentik, a többi B pedig a másik biciklihez tartozik. □

	$0-\frac{d}{4}$	$\frac{d}{4}-\frac{2d}{4}$	$\frac{2d}{4}-\frac{3d}{4}$	$\frac{3d}{4}-d$
b_1	B	B	Gy	Gy
b_2	Gy	B	B	Gy
b_3	Gy	Gy	B	B
b_4	B	Gy	Gy	B

4. TÁBLÁZAT. Négy ember két biciklivel - III.

	$0 - \frac{d}{n}$	$\frac{d}{n} - \frac{2d}{n}$	$\frac{2d}{n} - \frac{3d}{n}$	$\dots$	$\frac{(n-1)d}{n} - d$
b_1	B	B	Gy	$\dots$	Gy
b_2	Gy	B	B	$\dots$	Gy
b_3	Gy	Gy	B	$\dots$	Gy
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
b_n	B	Gy	Gy	$\dots$	B

5. TÁBLÁZAT. n ember két biciklivel

A 8. FELADAT MEGOLDÁSA. $n = 5$ gyerek és $k = 3$ bicikli esetén jelölje x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5 a gyerekek által gyalogosan megtett út hosszát és y_1, y_2, y_3, y_4, illetve y_5 a biciklin megtett út hosszát. Világos, hogy $x_i + y_i = d$, ha $1 \leq i \leq 5$. Belátható, hogy ha valamelyik biciklin visszafele is megyünk, vagy valamelyik biciklit nem juttatjuk el a végpontba, akkor csökkenthető az átjutáshoz szükséges idő. Emiatt $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 3d$, tehát $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2d$. Ha a gyerekeket b_1, b_2, b_3, b_4, b_5-tel jelöljük és minden $1 \leq i \leq 5$ esetén b_i menetideje t_i, akkor

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2},$$

tehát a $t = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, számra

$$t \geq \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \quad 1 \leq i \leq 5.$$

Az előbbiek alapján

$$5t \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{v_2},$$

vagyis

$$t \geq \frac{d}{5}\left(\frac{2}{v_1} + \frac{3}{v_2}\right).$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{2d}{5}$ és $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = \frac{3d}{5}$. Ebben az esetben az átlagsebesség

$$v_{\text{átlag}} = \frac{5}{\frac{2}{v_1} + \frac{3}{v_2}}.$$

Ez egy súlyozott harmonikus középarányos, a két súly pedig a bicikli nélküli gyerekek száma (2) és a biciklik száma (3). Azt még be kell látni, hogy ez lehetséges is, tehát a biciklik megfelelő cserélgetésével elérhető az előbb számolt minimum. Egy lehetséges cseresorrendet

	$0 - \frac{d}{5}$	$\frac{d}{5} - \frac{2d}{5}$	$\frac{2d}{5} - \frac{3d}{5}$	$\frac{3d}{5} - \frac{4d}{5}$	$\frac{4d}{5} - d$
b_1	B	B	B	Gy	Gy
b_2	Gy	B	B	B	Gy
b_3	Gy	Gy	B	B	B
b_4	B	Gy	Gy	B	B
b_5	B	B	Gy	Gy	B

6. Táblázat. Öt ember három biciklivel

mutat a 6. táblázat. Ez a táblázat értelmezhető úgy is, hogy minden $1 \leq s \leq 3$ esetén, ha

$$j \equiv i + s - 1 \mod 5,$$

akkor az s-edik biciklin a b_i gyerek ül a teljes táv j-edik $\frac{d}{5}$ hosszúságú szakaszán. □

A 9. feladat megoldása. Jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az n gyerek által gyalogosan megtett út hosszát és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a biciklin megtett út hosszát. Világos, hogy $x_i + y_i = d$, ha $1 \leq i \leq n$. Belátható az is, hogy egyik biciklin sem érdemes visszafele menni és mindegyik biciklit érdemes a végpontig eljuttatni, tehát $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = kd$, és így $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (n-k)d$. Ha $b_1, b_2, \ldots, b_n$-nel jelöljük a gyerekeket és minden $1 \leq i \leq n$ esetén b_i menetideje t_i, akkor

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2},$$

tehát a $t = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, számra

$$t \geq \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Az előbbiek alapján

$$nt \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{v_2},$$

vagyis

$$t \geq \frac{d}{n}\left(\frac{n-k}{v_1} + \frac{k}{v_2}\right).$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{(n-k)d}{n}$ és $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{kd}{n}$. Ebben az esetben az átlagsebesség

$$v_{\text{átlag}} = \frac{n}{\frac{n-k}{v_1} + \frac{k}{v_2}},$$

vagyis a sebességeknek a biciklik és gyalogosok számával súlyozott harmonikus középarányosa. A teljességhez hozzátartozik annak az igazolása is, hogy az előbbi értékek elérhetők, tehát a biciklik cserélgetése megszervezhető úgy, teljesüljenek az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{(n-k)d}{n}$ és $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{kd}{n}$ egyenlőségek. Ezt a 7. táblázat alapján láthatjuk be. Ebben a táblázatban a főátlón és a közvetlenül fölötte

	I_1	I_2	$\ldots$	I_{k-1}	I_k	I_{k+1}	$\ldots$	I_{n-2}	I_{n-1}	I_n
b_1	B	B	$\ldots$	B	B	Gy	$\ldots$	Gy	Gy	Gy
b_2	Gy	B	$\ldots$	B	B	B	$\ldots$	Gy	Gy	Gy
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
b_{k-1}	Gy	Gy	$\ldots$	B	B	B	$\ldots$	Gy	Gy	Gy
b_k	Gy	Gy	$\ldots$	Gy	B	B	$\ldots$	Gy	Gy	Gy
b_{k+1}	Gy	Gy	$\ldots$	Gy	Gy	B	$\ldots$	Gy	Gy	Gy
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
b_{n-1}	B	B	$\ldots$	Gy	Gy	Gy	$\ldots$	Gy	B	B
b_n	B	B	$\ldots$	B	Gy	Gy	$\ldots$	Gy	Gy	B

7. TÁBLÁZAT. n ember k biciklivel

levő $(k-1)$ átlón csupa B áll, és a bal alsó sarokban további $(k-1)$ átlón szintén B-k állnak, a többi elem pedig mind Gy. Ez a táblázat értelmezhető úgy is, hogy minden $1 \leq s \leq k$ esetén, ha

$$j \equiv i + s - 1 \mod n,$$

akkor az s-edik biciklin a b_i gyerek ül a teljes táv j-edik $\frac{d}{n}$ hosszúságú szakaszán. □

3. További problémák

A következő természetes probléma lenne annak vizsgálata, hogy több típusú egyszemélyes jármű használata esetén legkevesebb menynyi idő alatt lehet megtenni egy d távolságot. Például mi történik, ha

3 gyerek van és rendelkezésükre áll egy bicikli meg egy robogó, amelyre egyszerre csak egy ember ülhet. Az előbbiek alapján általában az a sejtés fogalmazódik meg, hogy ebben az esetben mindhárom módon (gyalog, biciklivel és robogóval) egyaránt $\frac{d}{3}$ távot érdemes megtenni és így az átlagsebesség a három sebesség harmonikus közepe lesz. Ez viszont már nem ugyanolyan egyszerű, mint az eddig vizsgált esetekben, mert a bicikli és a robogó átadása nem szervezhető meg. Ha a harmadoknál maradunk, akkor a 8. táblázat első oszlopába egy R-nek, egy B-nek és egy Gy-nek kell kerülnie. Az R után nem jöhet B (hisz amikor a robogóról leszáll, akkor még nem lesz ott a bicikli), tehát az első sor kötelező módon R-Gy-B. A második és harmadik sort egyértelműen kitölthetjük, hisz a biciklinek is és a robogónak is meg kell tennie a második harmadot. Ez a kitöltés látható a 8. táblázatban. Így b_1 hamarabb teszi meg az út első $\frac{2}{3}$-át, mint b_3 (mert

	$0-\frac{d}{3}$	$\frac{d}{3}-\frac{2d}{3}$	$\frac{2d}{3}-d$
b_1	R	Gy	B
b_2	B	R	Gy
b_3	Gy	B	R

8. Táblázat. Három ember biciklivel és robogóval

robogón és gyalog megy, míg b_3 biciklin és gyalog), tehát várnia kell a biciklire. Ez mutatja, hogy ugyanaz az elképzelés nem vitelezhető ki ebben az esetben, mint amikor csak gyalogszerrel vagy biciklivel volt megengedett közlekedni. Ugyanakkor a gondolatmenet másik rész hasonlóan működne, ha x_i, y_i és z_i a gyalog, biciklivel, illetve robogóval b_i által megtett út hossza és a sebességek $v_1 < v_2 < v_3$, akkor az idők

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2} + \frac{z_i}{v_2}.$$

Ha a bicikli is és a robogó is megteszi a teljes távolságot, akkor $y_1 + y_2 + y_3 = d$ és $z_1 + z_2 + z_3 = d$, tehát $x_1 + x_2 + x_3 = d$ és így az átjutási idő teljesíti a

$$t \geq \frac{d}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)$$

egyenlőtlenséget. Ez viszont még nem elégséges, mert nincs kivitelezhető tervünk, tehát a probléma megoldása további elemzést kíván. Ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk. Hasonló módon általánosíthatjuk a feladatot, ha nem egy pontból indulnak és esetleg nem ugyanoda kell beérniük. Szintén általánosabb probléma, ha több különböző típusú jármű áll rendelkezésükre és a járművek nem egyszemélyesek (pl. van autó is, amelyben 5 személy is elfér). Ez természetesen nagyon elbonyolítja a helyzetet (előfordulhat, hogy az autóval érdemes többször megtenni az utat stb.), de néhány sajátos eset tanulmányozható. Ha a probléma teljesen általánosan jelenik meg (több jármű, mindegyiknek valamilyen kapacitása, nem azonos kiinduló pontok, nem azonos beérkezési pontok, esetleg szigorítások arra vonatkozóan, hogy ki kivel nem lehet együtt bizonyos körülmények közt, feltételek a járművek sebességére vonatkozóan stb.), akkor a problémára még egy megközelítően jó eredményt adó, reális időben futó algoritmus is igen jó eredményt jelent. Mindez azt mutatja, hogy az általánosítások sorozatával gyorsan eljutunk olyan problémákig, amelyeket nem tudunk megoldani. Ez a kíváncsiságvezérelt matematika tanítás egyik alapvető jellegzetessége. Ha valóban kíváncsiak vagyunk a problémahelyzetre, akkor hamar eljuthatunk meg nem oldható feladatokig is. Előre viszont nem tudhatjuk, hogy melyik általánosítás kezelhető és melyik nem. Tehát a problémák megfogalmazásában támogatni kell diákjainkat, és segítenünk kell őket a saját korlátaik felismerésében. Tudnunk kell és diákjainkban is tudatosítanunk kell, hogy az a természetes alaphelyzet, amikor sok megoldatlan problémával szembesülünk. Legtalálóbban talán Earl C. Kelley fogalmazta meg: „Nem sikerült megválaszolnunk az összes kérdésünket. Valójában néha úgy érezzük, hogy teljesen egyet sem válaszoltunk meg. A megtalált válaszok csak arra jók, hogy egy egész sorozat újabb kérdés felmerüljön. Talán tanácstalanabbak vagyunk, mint valaha, de úgy gondoljuk, hogy magasabb szinten vagyunk tanácstalanabbak és fontosabb problémákban.”

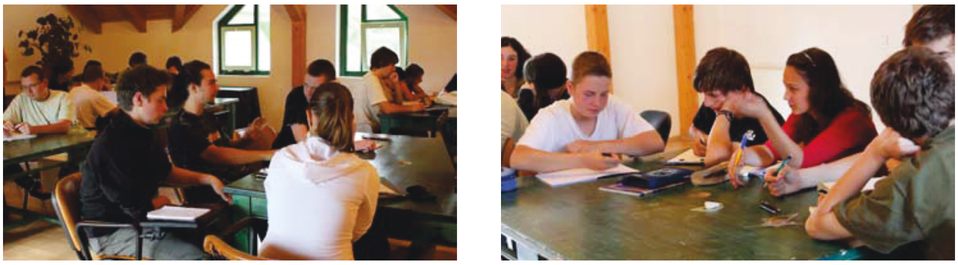
4. Megjegyzések

1. Ezt a foglalkozást kipróbáltuk általános iskolai diákokkal, középiskolás diákokkal és egyetemi hallgatókkal egyaránt. Az alapfeladat megoldására (esetleg egy kis próbálkozás után) majdnem minden esetben rájöttek a diákok (a legtöbb esetben kiscsoportokban dolgoztak) és nagyon sok bonyolultabb esetben is megsejtették a megoldásokat. A megoldások, bizonyítások egzakt leírása általában igényelt egy kis irányítást, néhol segítséget.

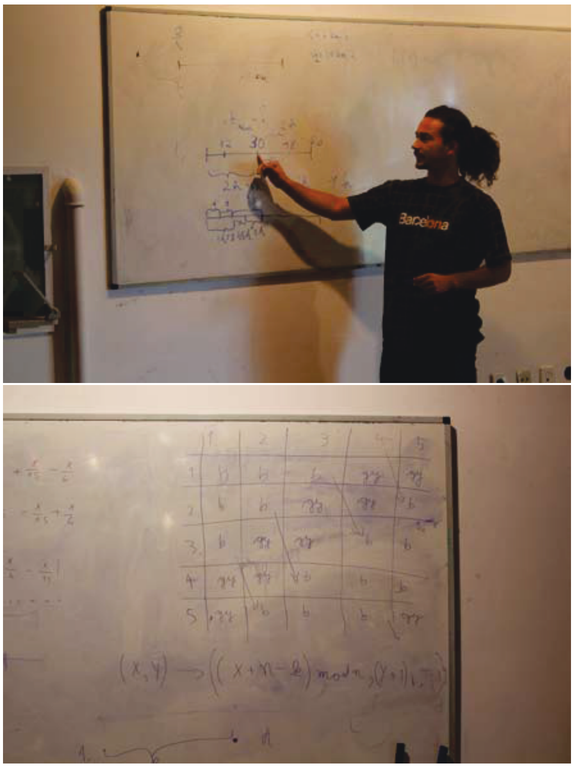
2. A kiscsoportos foglalkozások nagy előnyt jelentettek a próbálkozások és a cserék megtervezése során. Ezeknél a lépéseknél már a csoporton belül sikerült kiküszöbölni az esetleg elkövetett hibákat. A csoportos munka biztosította, hogy a diákok majdnem kivétel nélkül megértsék a cserék kivitelezésének módját, és gyakran több különböző terv is született az általános eset cseréinek tervezésére. Ugyanakkor időt is spórolhatunk, ha a csoportok különböző sajátos eseteket vizsgálnak, majd az információmegosztásra valamilyen kooperatív megoldást használunk (így azt is biztosíthajuk, hogy a kooperatív munka alapelvei érvényesüljenek).

3. A foglalkozásokat általában $2-3$ óra alatt viteleztük ki. Érdemes az alapfeladat megoldását egy külön tevékenység alatt tárgyalni, majd az általánosításokat egy másik tevékenységen.

4. Fontos kihangsúlyozni a gyakorlati feladat (a vonat elérése) és a matematikai probléma megoldása közti különbséget, a bizonyítás minden lépésének, például a cserék megszervezésének a fontosságát. Ez néha csak akkor válik érthetővé, ha ennek segítségével valamilyen félreértést ki lehet küszöbölni. A foglalkozások során a diákok majdnem minden esetben megfogalmazták a hibás sejtést a kétfajta jármű esetére és csak a cserék alaposabb elemzése során vették észre, hogy az hibás.



1.2. Ábra. Csapatmunka



További fotók

1. videó

2. videó

1.3. Ábra. Az alapfeladat megoldása és az általános esetben a biciklicserék tervének elkészítése

II. FEJEZET

TÖLTÖGETÉSES FELADATOKTÓL LINEÁRIS DIOFANTOSZI EGYENLETEKIG

1. Bevezetés

A következő feladatot Siméon Denis Poisson francia matematikus oldotta meg a 18-adik században ([**30**]):

1. Feladat. Egy embernek volt 12 pint[1] bora és felét a szomszédjának szerette volna adni. Nem rendelkezett semmilyen más mérőeszközzel, csak egy 5 pint és egy 8 pint űrtartalmű edénnyel. Kimérhetett-e 6 pint bort a 8 pintes edényben?

Hasonló feladatokat több feladatgyűjteményben találhatunk, néha akár 5. osztályosoknak is ilyen jellegű feladatot kell megoldaniuk. Egy ilyen feladat a következő:

2. Feladat. Rendelkezésünkre áll három edény: egy 4 literes, egy 7 literes és egy 11 literes. Mérjünk ki 1 liter vizet, ha kezdetben a legnagyobb edény tele van vízzel és a másik kettő üres!

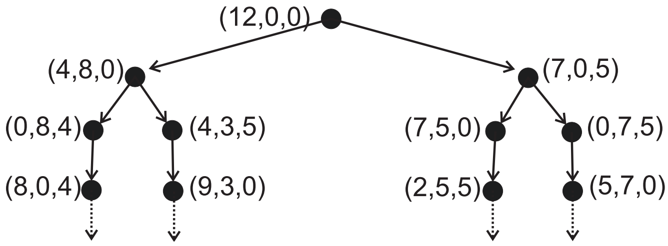
Ebben a fejezetben néhány gyakori, töltögetésekhez kapcsolódó típusfeladat megoldásának elemzésével foglalkozunk. Az elemzés egyrészt matematikai, megvizsgálunk néhány megoldási stratégiát, belátjuk, hogy a töltögetések ábrázolhatók egy biliárd golyó mozgásával egy sajátos alakú biliárd asztalon, sőt a golyó mozgását követve adunk általános feltételt néhány töltögetési feladat megoldhatóságára. Elemzésünk másrészt didaktikai jellegű és egy 2009-2010-ben végzett felmérés szolgál alapjául, amelyet a Developing Quality in Mathematics Education II nevű Comenius program keretén belül végeztünk Erdély több iskolájában (Báthory István Elméleti Líceum - Kolozsvár, Bolyai Farkas Líceum -

[1]1 pint körülbelül 568.26125 ml

Marosvásárhely, Márton Áron Líceum - Csíkszereda). Köszönettel tartozunk kollégáinknak, Csapó Hajnalkának, Szilágyi Jutkának, Szilágyi Emőkének és Mátéfi Istvánnak a felmérésben nyújtott segítségükért. Jelen fejezet gyakorlatilag a The Electronic Journal of Mathematics and Technology lapban (lásd [**3**]) megjelent cikkünk átdolgozott változata. A fejezet mottójának a következő Nietzsche idézetet választottuk: „I cook every chance in my pot. And only when it hath been quite cooked do I welcome it as my food." vagyis „... én még minden véletlent is a magam fazekában főzök. És csak ha ott megfőtt, van ínyemre, mint az én eledelem." (Nietzche: Imigyen szóla Zarathustra). Ez a mottó tükrözi a fejezet célját (ami általános célkitűzés is lehet a matematika oktatása során), hisz a töltögetéses feladatok megoldását a legtöbb diák általában nem látja át elejétől a végéig és így még azok számára is véletlennek tűnhet a megoldás, akik sikeresen megoldják az ilyen jellegű feladatokat. Célunk tehát ennek a „véletlennek" a megértése.

2. Megoldások és további feladatok

Az 1. feladat megoldására Poisson eredeti ötlete az volt, hogy ábrázolja egy gráfban az edények összes lehetséges állapotát és a lehetséges áttöltéseket. Így a gráf csúcsai az állapotok lennének és az irányított élek egy-egy lehetséges áttöltésnek felelnek meg. Az állapotokat jelölhetjük számhármasokkal, amelyekben az első szám a legnagyobb edényben, a második szám a 8 pintes edényben és a harmadik szám a legkisebb edényben levő víz mennyiségét jelöli. Az egyszerűbb áttekinthetőség kedvéért nem ábrázoljuk a gráf összes élét, hanem csak egy részét, amelynek fa struktúrája van. Ez azt jelenti, hogy a kezdeti állapot ($(12, 0, 0)$) a fa gyökere. Ebből az állapotból két másikat lehet létrehozni: vagy megtöltjük a legkisebbet, vagy a 8 pinteset. Így a kezdeti állapotból a $(4, 8, 0)$ vagy a $(7, 0, 5)$ állapotba juthatunk el egyetlen áttöltéssel. Ezekből az állapotokból egyetlen áttöltéssel az eddigiektől különböző $(0, 8, 4), (4, 3, 5), (0, 7, 5)$, illetve $(7, 5, 0)$ állapotok érhetők el. Ezeket a lehetséges áttöltéseket ábrázolja a 2.1. ábra. Ha minden lépésben csak a már ábrázolt állapotoktól különböző állapotokat tüntetjük fel a következő szinten, akkor egy fát jelenítünk meg, amely tartalmazza az összes lehetséges állapotot. Ebből a gráfból kiolvasható, hogy egy állapot elérhető-e és



2.1. Ábra. Poisson reprezentációja

hogy legkevesebb hány lépés (áttöltés) szükséges az eléréséhez. Folytatva az előbbi gráfot felírhatunk egy lehetséges megoldást:

$$(12,0,0) \to (4,8,0) \to (0,8,4) \to (8,0,4) \to (8,4,0) \to (3,4,5) \to$$
$$\to (3,8,1) \to (11,0,1) \to (11,1,0) \to (6,1,5) \to (6,6,0).$$

Tehát a 6 pint bor kimérhető a 8 pintes edényben. Gyakorlatilag az előbbi állapotsorozat teljes megoldásnak tekintendő akkor is, ha nem a gráfból származik. A gráf előnye, hogy megadja a legrövidebb megoldást és egyben annak a ténynek a bizonyítását is, hogy ez valóban a legrövidebb.

A 2. feladat megoldása első ránézésre átlátható:

$$(11,0,0) \to (7,0,4) \to (7,4,0) \to (3,4,4) \to (3,7,1).$$

Természetesen a feladatok megoldása újabb kérdéseket generál:

- Az 1. és 2. feladatok esetén melyek azok a mennyiségek, amelyeket ki lehet mérni?
- Hogyan függ a probléma megoldhatósága az edények méretétől és a kimérendő mennyiségtől?
- Rögzített edényméretekkel (és három edénnyel) milyen mennyiségeket lehet kimérni?
- Hogyan változik az előbbi három kérdésre adott válasz több edény esetén?

Sajátos esetek tanulmányozása során rájöhetünk, hogy a Poisson-féle reprezentáció nem előnyös az általános problémák vizsgálatában. Emiatt szükségünk van egy más megközelítésre, amely lehetővé teszi az általános esetek tárgyalását. Előbb fogalmazzuk meg azokat a problémákat, amelyeknek a megoldásával foglalkozunk.

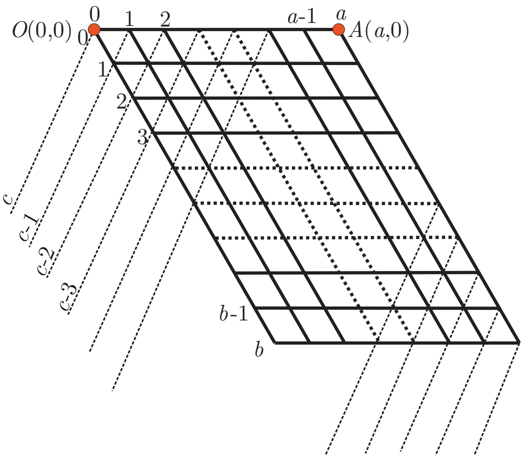
3. Feladat. Adott három beosztás nélküli edény, amelyeknek az űrtartalma rendre a, b és c liter, ahol ahol $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ és $c \geq a + b$. Kezdetben a legnagyobb edény tele van vízzel és a többi üres. Jellemezzük azokat a mennyiségeket, amelyeket az egyes edényekben ki lehet mérni!

4. Feladat. Adott $n+1$ beosztás nélküli edény, amelyek űrtartalma rendre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a_{n+1} liter, ahol $a_i \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n+1$ és $a_{n+1} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Kezdetben a legnagyobb edény tele van vízzel és a többi üres. Jellemezzük azokat a mennyiségeket, amelyeket az egyes edényekben ki lehet mérni!

Az 3. feladat megoldásáról a [**13**] könyvben a szerző azt állítja, hogy „Világos, hogy egy ilyen feladat (ahol $c = a + b$) mindig megoldható, ha a és b relatív prímek”, de a megoldás egyáltalán nem jelenik meg a könyvben és nem is tűnik annyira nyilvánvalónak. A következőkben megoldjuk a 3. feladatot és a felhasznált eszközöket általánosítjuk annak érdekében, hogy a 4. feladat megoldására is alkalmasak legyenek. A matematikai háttér kitisztázása után bemutatjuk a felmérésünk eredményeit. Ezek egyértelműen azt mutatják, hogy a diákok az ilyen jellegű feladatok megoldására „próba-szerencse” típusú mechanizmusokat használnak (vagyis véletlenszerűen töltögetnek és esetleg vigyáznak arra, hogy ne jussanak vissza olyan állapotba, amely korábban már előfordult). Ugyanakkor számítógépes szimulációkkal megpróbáltuk ezt a mechanizmust tesztelni, és arra a következtetésre jutottunk, hogy ha véletlenszerűen töltögetünk, akkor is – előbb vagy utóbb – elérjük az összes lehetséges állapotot. Ha a véletlenszerű lépések során arra is odafigyelünk, hogy a korábbi állapotokat ne ismételjük, akkor a megoldáshoz szükséges lépések száma viszonylag kicsi lesz (ezt bizonyítani is lehet, de a felhasznált eszközök meghaladják a középiskolai tananyagot, ezért ezzel nem foglalkozunk). Ez azt igazolja, hogy az ilyen jellegű feladatok lényegében nem alkalmasak a diákok kombinatorikai készségének vizsgálatára, hisz a megoldás megtalálása inkább igényel türelmet, kitartást, odafigyelést, mint jó kombinatorikai készséget.

3. A modell, egy algoritmikus megközelítés és egy kis matematikai háttér

Tekintsünk egy $a \times b$ méretű paralelogrammát az egységoldalú és 60°-os szöggel rendelkező paralelogramma által generált végtelen rácson. Ezt egy biliárd asztalnak tekintjük. Vizsgáljuk annak a biliárd golyónak a mozgását ezen az asztalon, amely az $O(0,0)$ pontból indul az OA él mentén (ahol $A(a,0)$) és súrlódásmentesen halad.

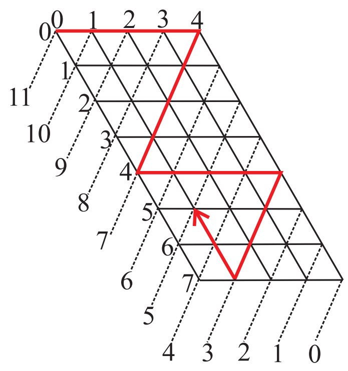


2.2. Ábra. A biliárd asztal

A golyó mozgása egy lehetséges töltögetési sorrendnek felel meg. Számozzuk meg az átlókat a 2.2. ábrának megfelelően, és a tábla minden P pontjához rendeljük hozzá a két koordinátáját, valamint az őt tartalmazó átló számát. Ez a három szám megfelel a három edényben levő vízmennyiségeknek. Így az O kezdőpontnak megfelelő számok $(0, 0, c)$, vagyis ez a pont a kezdeti állapotnak felel meg. Az A pontnak megfelelő számok $(a, 0, c - a)$, tehát ez annak az állapotnak felel meg, amikor az a űrtartalmű edény tele van és a többi víz a legnagyobb edényben van. Az asztal szerkezetének köszönhetően a golyó csak a berajzolt vonalak mentén mozoghat, és az oldalakkal való ütközési pontok mindig egy-egy töltögetésnek felelnek meg. Az alaposabb megértés kedvéért $a = 4$, $b = 7$ és $c = 11$ esetén a 2.3. ábrán bejelöltük a golyó pályáját és feltüntettük az ütközési pontoknak megfelelő állapotokat. Látható, hogy ebben az esetben a golyó pályája áthalad az oldalakon levő összes rácsponton, tehát ebben az esetben mindenik edényben ki lehet mérni az összes olyan egész mennyiséget, amely nem nagyobb az edény maximális kapacitásánál. A következő paragrafusban igazoljuk, hogy ez egy általános jelenség, ha a és b relatív prímek. Pontosabban igaz a következő tétel:

2.1. Tétel. *Ha $c = a + b$ és $d = (a, b)$, akkor a biliárd golyó pályálya az asztal peremén levő (x, y) rácspontot pontosan akkor tartalmazza, ha $d|x$ és $d|y$ (az (a, b) szimbólum az a és b legnagyobb közös osztóját jelöli).*

Megjegyzés. Ha $d = 1$, akkor a golyó pályája érinti az asztal peremén levő összes rácspontot, tehát a megfelelő edényekben ki lehet mérni az összes egész mennyiséget, amely nem haladja meg az illető edény maximális kapacitását.



(0,0,11)	(2,0,9)
(4,0,7)	(0,2,9)
(0,4,7)	(4,2,5)
(4,4,3)	(0,6,5)
(1,7,3)	(4,6,1)
(1,0,10)	(3,7,1)
(0,1,10)	(3,0,8)
(4,1,6)	(0,3,8)
(0,5,6)	(4,3,4)
(4,5,2)	(0,7,4)
(2,7,2)	(4,7,0)

2.3. ÁBRA. A biliárd golyó pályája és az edények állapota

Megjegyzés. Ha $d = (a, b)$, akkor (víz kiöntése nélkül) pontosan a d-vel osztható mennyiségek mérhetők ki, tehát a 3. feladat megoldása visszavezetődik az előbbi tételre.

Az állapotoknak ugyanazt a sorozatát generálja ki a következő algoritmus, mint a biliárd golyó ütközéseinek sorozata a megfelelő biliárd asztalon:

- ha lehetséges, töltsél a-ból b-be[2];
- ha b tele van, akkor töltsél b-ből c-be;
- ha az előbbi lépések közül egyik sem lehetséges, akkor tölts c-ből a-ba.

Ez lehetővé teszi, hogy valamilyen egyszerű program segítségével generáljunk egy olyan állapotsorozatot, amely az összes lehetséges állapotot tartalmazza.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy $a < b$ és $d = (a, b)$. Ha a második edényben d liter vizet mérünk ki, miközben a kisebb edényből a középsőbe x-szer töltöttünk és a b edényt y-szor ürítettük ki, akkor $ax - by = d$, tehát a töltögetési algoritmusból leolvashatjuk az $ax-by = d$ egyenlet egy megoldását is. Ennek segítségével előállítható az egyenlet összes megoldása. A fordított tulajdonság nem igaz, mert az $ax - by = d$ egyenlet megoldásainak ismerete nem adja meg a töltögetési algoritmust is. Emiatt a mérés problémája nem ekvivalens a diofantikus egyenlet megoldásának problémájával.

Több edény esetén úgy tűnik, a probléma bonyolultabb. Első ránézésre hajlamosak vagyunk magasabb dimenziós reprezentációra gondolni. Egy töltögetés során azonban egyszerre csak két edény tartalma változik, tehát ha az adatok reprezentálására többdimenziós alakzatot használunk (pl. egy hasábot), akkor egy töltögetés annak valamilyen lapján reprezentálható. Emiatt gyakorlatilag ezeket a lapokat lefejthetjük a síkba és így használhatunk valamilyen síkbeli ábrázolást. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ az edények űrtartalmát jelöli és

[2]Itt a, b és c egyben az a, b, illetve c űrtartalmú edényt jelöli.

$a_1, a_2, \ldots, a_j$ legnagyobb közös osztója minden $j \geq 2$ esetén d_j, akkor

$$d_3 =(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3) = (d_2, a_3)$$
$$d_4 =(a_1, a_2, a_3, a_4) = ((a_1, a_2, a_3), a_4) = (d_3, a_4)$$

és általában

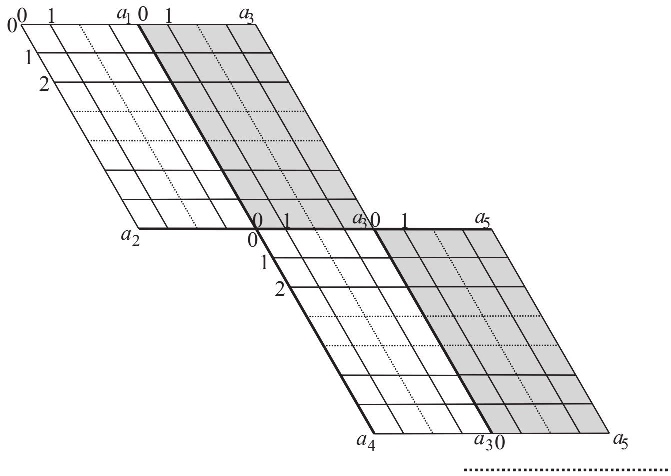
$$d_{j+1} = (d_j, a_{j+1}), \quad j \geq 2.$$

Tekintsük az $a_1 \times a_2$, $a_2 \times a_3$, $a_3 \times a_4, \ldots, a_{n-1} \times a_n$ és $a_n \times a_1$ méretű paralelogrammákat, amelyekben van egy 60°-os szög és amelyeket a 2.4. ábrának megfelően egymás mellé helyezünk (ezek a biliárd asztalok). Minden $1 \leq j \leq n-1$ esetén a biliárd golyónak a j-edik asztalon való mozgása megfelel az a_j, a_{j+1} és a_{n+1} edényekkel való töltögetésnek, ahol az $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$ edények tele vannak és az $a_{j+2}, \ldots, a_n$ edények üresek. Az utolsó aztalon való mozgás az a_n, a_1 és a_{n+1} űrtartalmú edényekkel való töltögetésnek felel meg, miközben a többi edény mind tele van. Az első asztalon, amelynek oldalhosszai a_1 és a_2 megjelöljük az összes olyan ütközési pontot, amely a második asztallal való közös oldalra illeszkedik. Ezekből a pontokból elindítunk egy-egy biliárd golyót és megjelöljük az összes ütközési pontot, amelyek a második és a harmadik asztal közös oldalán megjelennek. Ezt folytatva minden $2 \leq j \leq n-1$ esetén a $(j-1)$-edik és a j-edik asztal közös oldalán levő összes ütközési pontból elindítunk egy-egy biliárd golyót a j-edik asztalon és megjelöljük a j-edik és a $(j+1)$-edik asztal közös oldalán keletkező összes ütközési pontot. Ha minden $1 \leq j \leq n-1$ esetén S_j-vel jelöljük a j-edik és a $(j+1)$-edik asztal közös oldalát, akkor S_j hossza a_{j+1} és azt kellene vizsgálnunk, hogy az $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}$ szakaszokon milyen pontok vannak bejelölve. Ennek érdekében a 2.1. tételt átfogalmazzuk a következő módon:

2.2. Tétel. *Tekintjük a b-nek egy d' osztóját és az összes biliárd golyó pályáját, amely az a, illetve b oldalhosszúságú asztalon a $(0, kd')$ pontokból indul, valamilyen $k \in \mathbb{N}$ és $kd' \leq b$ esetén. Az asztal peremén levő (x, y) rácspont pontosan akkor tartozik a vizsgált pályák valamelyikéhez, ha $d|x$ és $d|y$, ahol $d = (d', a)$.*

Ez a tétel biztosítja, hogy minden S_j szakaszon pontosan azokat a rácspontokat jelöljük be, amelyeknek koordinátái a d_{j+1}

többszörösei. Így az S_{n-1} szakaszon (amelynek hossza a_n) pontosan azokat a rácspontokat jelöljük meg, amelyeknek koordinátái oszthatók $d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$-vel. A szimmetria miatt ez minden szakaszra elvégezhető az asztalok sorrendjének megfelelő cseréjével. Ez viszont azt jelenti, hogy minden edényben pontosan azokat az egész mennyiségeket lehet kimérni, amelyek a d többszörösei és amelyek nem nagyobbak az illető edény űrtartalmánál.



2.4. Ábra. Kiterített lapok

Az előbbi gondolatmenet alapján igaz a következő két tétel:

2.3. Tétel. *Adott három beosztás nélküli edény, amelyeknek űrtartalma rendre a, b és $c \geq a + b$, ahol $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Kezdetben a legnagyobb edény tele van vízzel és a másik kettő üres.*

- *Ha $c = a + b$ és $(a, b) = d$, akkor az a űrtartalmú edényben kimérhetünk $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, a - d, a$ liter vizet, a b űrtartalmú edényben $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, b - d, b$ liter vizet és a c űrtartalmú edényben $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, c - d, c$ liter vizet.*
- *Ha $c > a + b$ és $(a, b) = d$, akkor az a űrtartalmú edényben kimérhetünk $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, a - d, a$ liter vizet, a b űrtartalmú edényben $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, b - d, b$ liter vizet és a c űrtartalmú edényben $c - a - b, c - a - b + 1 \cdot d, c - a - b + 2 \cdot d, \ldots, c - d, c$ liter vizet.*

2.4. Tétel. *Adott $n+1$ beosztás nélküli edény, amelyek űrtartalma rendre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a_{n+1}, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ és d az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok legnagyobb közös osztója. Kezdetben a legnagyobb edény tele van vízzel. Ha $a_{n+1} \geq \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, akkor minden $j \in \{1, 2, \ldots n\}$ esetén az a_j űrtartalmú edényben ki lehet mérni $0, 1{\cdot}d, 2{\cdot}d, \ldots, a_j - d, a_j$ liter vizet és az a_{n+1} űrtartalmú edényben $c, c+d, c+2d, \ldots, a_{n+1} - d, a_{n+1}$ liter vizet, ahol $c = a_{n+1} - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.*

Megjegyzés. Készítettünk egy grafikus felületet Matlab-ban, amely $n \leq 5$ esetén ábrázolja a biliárd golyó mozgását és követi az ütközéseknek megfelelő állapotokat. A forráskód letölthető a

http://www.math.ubbcluj.ro/∼andrasz/filling/animation/animation.html

címről és megtalálható a mellékleten is.

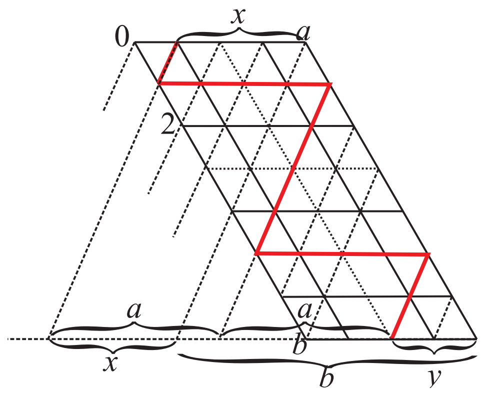
4. Bizonyítások

Ebben a paragrafusban igazoljuk a korábban kijelentett tételeket, illetve kiegészítjük a hiányos gondolatmeneteinket.

A 2.1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A bizonyítás alapötlete egy felső és utána következő alsó ütközési pont koordinátája közti összefüggés. Ha a felső oldalon a golyó az $(a-x, 0)$ pontban érintette az asztalt és az alsó oldalt az $(a-y, b)$ pontban, akkor y az $x+b$-nek a-val való osztási maradéka (lásd a 2.5. ábrát). Emiatt az alsó szakaszon az ütközési pontok koordinátái a $b, 2b, 3b, \ldots, (a_1-1)b, a_1 b$ számoknak a-val való osztási maradékai, ahol $a = a_1 d$ és $d = (a, b)$. Másrészt ezek a maradékok pontosan a $0, d, 2d, \ldots, (a_1-1)d$ számok, mivel mindegyik osztható d-vel és páronként különböznek (a számuk pedig pontosan a_1). Ezzel a bizonyítás teljes. □

A 2.2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Ugyanazt az észrevételt használva írhatjuk, hogy az alsó oldalon az ütközési pontok koordinátái az $(a - kd') + lb$ számok a-val való osztási maradékai, ahol $k, l \in \mathbb{N}^*$. Másrészt ezek a maradékok pontosan (d', a) többszörösei, tehát a tétel igaz. □

A 2.3. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A 2.3. tétel állításai következnek a 2.1. tételből és az állapotoknak a biliárd asztalon való ábrázolásából.



2.5. ÁBRA. Felső és alsó ütközési pont viszonya

A $c \geq a + b$ feltétel biztosítja, hogy az egész asztalt használhatjuk, csak az átlókat c-tól kezdve visszafele kell számoznunk. □

Megjegyzés. Ha $c < a+b$, akkor nem minden esetben lehet az összes olyan egész mennyiséget kimérni, amely nem haladja meg az edény kapacitását. A Poisson-féle gráfos reprezentációval igazolható, hogy $a = 7$, $b = 11$ és $c = 13$ esetén nem lehet kimérni 1 liter vizet. Ennek az esetnek az alaposabb elemzésével nem foglalkozunk.

A 2.4. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A 2.2. tétel és a leírt szerkesztés alapján (lásd a 2.4. ábrát) állíthajuk, hogy az a_1 edényben kimérhető az összes d-vel osztható egész mennyiség, amely nem haladja meg a_1-gyet. Hasonlóan, az edények megfelelő cseréjével elérhető, hogy minden $1 \leq j \leq n$ esetén az a_j űrtartalmú edényben kimérhető legyen az összes d-vel osztható egész mennyiség, amely nem haladja meg a_j-t. Ahhoz, hogy az a_{n+1}-ben is minden lehetséges mennyiséget megkapjunk, azt kell tennünk, hogy amikor az a_j és a_{j+1} oldalhosszúságú asztalon vizsgáljuk a golyó mozgását (és a megfelelő állapotokat), akkor minden $1 \leq k \leq j-1$ esetén az a_k űrtartalmú edényt tele hagyjuk, az $a_{j+2}, \dots, a_n$ edényeket üresen és a_{n+1}-ben hagyjuk a többi vizet. □

Megjegyzés. Érdemes az előbbi bizonyítások gondolatmenetét konkrét eseteken kipróbálni.

5. A felmérés és eredményei

120 diákkal írattunk egy felmérőt, amely a következő két feladatot tartalmazta:

1. Adott három beosztás nélküli edény, amelyek űrtartalma rendre 7 liter, 17 liter és 24 liter. Kezdetben a legnagyobb edény tele van vízzel.
   a) Mérjünk ki 1 liter vizet valamelyik edényben!
   b) Mérjünk ki 1 liter vizet a legnagyobb edényben!
   c) Mindhárom edény esetén adjuk meg az összes, az illető edényben kimérhető mennyiséget!
2. Adott három beosztás nélküli edény, amelyek űrtartalma rendre 21 liter, 34 liter, 55 liter. Kezdetben a legnagyobb edény tele van vízzel. Mérjünk ki 1 liter vizet valamelyik edényben!

A diákok fele 5. vagy 6. osztályos volt és a fele 8. osztályos, így két kategóriába soroltuk őket: 60 diák került a 10–12 éves kategóriába és 60 diák a 13–14 éves kategóriába. A felmérőn a diákoknak nemcsak a feladatok megoldására kellett koncentrálniuk, hanem arra is, hogy lejegyezzék a megoldással kapcsolatos gondolataikat, a sikertelen próbálkozásaikat, a feladatokról kialakított véleményüket stb. Korábban a diákok egyáltalán nem oldottak hasonló jellegű feladatokat, tehát ez a felmérő teljesen újszerű problémahelyzetbe hozta őket.

A feladatok természete és a megoldáshoz szükséges minimális lépésszám garantálta, hogy a diákok ne lássák át egyből a megoldást. Arra számítottunk, hogy véletlenszerű lépéseket fognak végrehajtani és hamar rájönnek arra, hogy a korábbi állapotokat érdemes elkerülni. Ugyanakkor azt vártuk, hogy a diákok eléggé sok lépést fognak végrehajtani mielőtt feladják, és hogy a két korcsoport szignifikánsan különbözni fog a végrehajtott lépések szempontjából.

Az első csoportban (10–12 évesek) nagyon kevés helyes megoldás született az első feladat a) és b) alpontjára és egyetlen megoldás sem született a c) alpontra, valamint a második feladatra. A második csoportban sokkal több megoldás volt az első feladat a) és b) alpontjára, néhány majdnem teljesen jó megoldás a c) alpontra és egyetlen helyes megoldás sem született a második feladatra. A megoldási algoritmusokra vonatkozó feltételezéseink beigazolódtak.

Meglepetésünkre az első csoport 60%-a és a második csoport 45%-a nem is értette meg a feladatot (beosztást akart festeni az edényre, felezett mennyiségeket, azt javasolta, hogy szerezzünk egy 1 literes edényt, vagy szemmérték alapján mérte volna ki az 1 litert stb.). A következő meglepetés abból eredt, hogy az első csoportból azoknak a diákoknak a nagy része, akik megértették a feladatot (és végre is hajtottak legalább 7-8 lépést), egy idő után vagy egyszerűen abbahagyta a töltögetést, vagy valamilyen hibát követett el. A legtöbben 6-9 lépés után hagyták abban a töltögetést. A harmadik meglepetést az okozta, hogy azok a diákok, akik az első feladat a) és b) alpontját megoldották, a második feladatnál sokkal kevesebb lépés után adták fel, mint amennyit az első feladatnál végrehajtottak (holott logikus, hogy nagyobb edények esetén több állapot van, tehát előfordulhat, hogy többet kell töltögetni). Gyakorlatilag 20%-kal kevesebb lépést hajtottak végre, mint az első feladatnál. Ez arra utal, hogy a munkamemória megtelt a nagyobb számokkal végzett műveletek miatt, vagyis a 100-nál kisebb számokkal végzett összeadás és kivonás nem teljesen operacionális a 14 éves diákoknál. Ezt alátámasztják a diákok által írt megjegyzések: „megtelt az agyam", „addig kell méregetni, amíg elfáradsz".

Egyetlen diák sem vette észre, hogy döntéseik (honnan hová töltenek) véletlenszerűek és senki nem próbált egyszerre több lehetőséget végigszámolni. Azt sokan észrevették, hogy érdemes elkerülni a korábbi állapotokat, ennek ellenére általában 10-nél kevesebb lépés után leálltak. A második csoport 23%-a oldotta meg az első feladat a) és b) alpontját, és a sikeres megoldás oka egyértelműen a sok végrehajtott lépés volt (alig 1 vagy 2 diák akadt, aki végrehajtott 10-nél több lépést és nem sikerült eljutnia a megoldáshoz).

A helyes lépések száma alapján készített hisztogramok összehasonlítása szignifikáns különbséget mutat a két csoport közt, a második csoport diákjai lényegesen több lépést hajtottak végre átlagosan.

6. Megjegyzések, következtetések

• Az alapfeladatot, valamint a hozzá kötödő tételeket több alkalommal is kipróbáltuk tehetséggondozó táborban, egyetemi hallgatókkal és továbbképzőn. Megfelelő irányított kérdésfeltevéssel a bizonyítás részleteire is rájöttek a résztvevők.

• A szakirodalomban sok tanulmányt találhatunk a diagramok és ábrák használatának a fontosságáról a feladatok megoldásában (lásd [**29**] és az ott megtalálható hivatkozásokat). A Poisson-féle ábrázolás egy tipikus példája a hierarchikus struktúráknak (lásd [**28**]), míg a biliárd golyós ábrázolás egyfajta dinamikus diagramnak tekinthető. A mi esetünkben a bizonyítás kulcseleme a dinamikus struktúrából fakad és nincs jelen a hierarchikus struktúrában. Meggyőződésünk, hogy sok más bizonyítás esetén is a dinamikus diagramok használata növelheti a hatékonyságot.

• A vizsgált probléma egyértelműen mutatja, hogy az oktatási tevékenységek során mennyire el lehet kerülni a probléma mély megértését. A konkrét töltögetéses feladatok megoldhatók direkt módon, a megfelelő állapotok felsorolásával. Ez egy órán olyannak tűnhet, mintha valamilyen csoda menne végbe, lépegetünk és egyszercsak eltaláljuk a megoldást. Sajnos a tapasztalat azt mutatja, hogy a diákok nagy része ehhez van szokva, teljesen rendjén van számára, ha megjelenik a megoldás, megértés vagy motiváció nélkül. Ez a matematika megértésének egy igen komoly akadálya lehet és gyakorlatilag lehetetlenné teszi egy tudatos, aktív tanulási hozzáállás kialakulását.

• A számítógépes szimulációk azt mutatják, hogy mindkét alapfeladat megoldható lett volna véletlen lépések végrehajtásával is, tehát az átlagosan gyenge eredmény nem magyarázható a matematikai tehetség hiányával vagy a kombinatorikai készség fejletlenségével. Egyszerűen a diákoknak nem volt türelmük végrehajtani megfelelő számú viszonylag egyszerű lépést. Talán a probléma és a kudarc okának megértése érthetőbbé teszik Jim Watkins szavait: „A river cuts through rock, not because of its power, but because of its persistence.”[3]

[3] Az, hogy a folyó átfúrja a sziklát, nem az erejének tudható be, hanem a kitartásának.

III. FEJEZET
GYUFASZÁLAK ÉS NÉGYZETEK

1. Bevezetés

Spencer Kagan „Készítsünk négyzeteket” projektjét ([**9**], 15:4-15:9) használtuk alaptevékenységként. Ennek során a diákokat 4 fős csapatokba osztottuk és minden diák kapott 3 darab azonos (20 cm hosszúságú és $1,5-2$ cm szélességű) papírcsíkot. Minden csapat dolga az volt, hogy olyan alakzatokat hozzon létre (rakjon ki) és rajzoljon le, amelyeken $1, 2, 3, \ldots$ négyzet látható és teljesülnek a következő szabályok:

- az alakzatban minden papírcsík fontos, vagyis bármelyiket elvéve megváltozik a látható négyzetek száma;
- az alakzat létrehozásakor minden csapat felhasználja az összes paírcsíkját;
- nincsenek szabad végpontok, vagyis minden papírcsík mindkét végéhez illeszkedik egy másik papírcsík vége;
- nincsenek parciális vagy teljes átfedések, vagyis egymással párhuzamos papírcsíkoknak nem lehet egymást elfödő darabja – ez természetesen nem zárja ki a metszet lehetőségét nem párhuzamos papírcsíkok esetén.

A foglalkozás első $15-20$ percében a diákok a papírcsíkokkal rakosgatták az alakzatokat, majd $10-15$ percig csak rajzolgatták a lehetséges konfigurációkat. A következő lépésben a csoportok egy nagy közös poszterre felrajzolták az alakzataikat. A papírcsíkok helyett természetesen használhatunk hurkapálcát vagy óriásgyufát.

A következő mozzanatban a diákoknak az volt a feladata, hogy fogalmazzák meg a tevékenységhez (és természetesen az alakzatokhoz) kapcsolódó kérdéseiket, majd a kérdések megfogalmazása után próbálják nehézségi sorrendbe rakni a felmerült problémákat (természetesen a megoldások ismerete nélkül, pusztán sejtéses alapon), majd válasszanak ki néhányat, amiről úgy gondolják, hogy megoldható és probálják megoldani. A továbbiakban a diákok által megfogalmazott problémákat ismertetjük és azok közül néhánynak a megoldását.

2. A felmerülő problémák

Az eredeti feladat pontatlan (nyitott) megfogalmazása meghatározza az első természetes kérdést:

1. Feladat. Milyen $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan alakzat, amelyet 12 egybevágó szakasz alkot, részleges vagy teljes átfedés, illetve szabad végpontok nélkül, és amelyen pontosan n darab négyzet látható?

Sajátos esetek elemzése alapján látható, hogy a feladat egyáltalán nem triviális még 12 szakasz esetén sem. Ugyanakkor természetesen fogalmazódik meg az általánosabb probléma is, amelyben a szakaszok száma $4m$, valamilyen $m \in \mathbb{N}^*$ esetén. A következő természetes kérdés (amit majdnem minden csapat megfogalmazott):

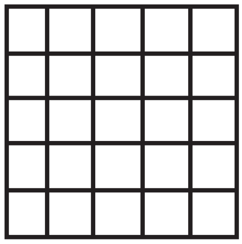
2. Feladat. Legfeljebb hány négyzet keletkezhet egy olyan ábrán, amelyet 12 egybevágó szakasz alkot, részleges vagy teljes átfedés, illetve szabad végpontok nélkül?

Ez a probléma több szakasz esetén is hozzáférhetőnek tűnik. A diákok általában gyorsan meg is találják rá a választ (bizonyítás nélkül).

3. Feladat. Legfeljebb hány négyzet keletkezhet egy olyan ábrán, amelyet $4m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) egybevágó szakasz alkot, részleges vagy teljes átfedés, illetve szabad végpontok nélkül?

Intuitív szempontból az előbbi két feladat megközelíthetőnek tűnik. Ezt igazolja, hogy a diákok nagy része kevés gondolkodás (és persze a kezdeti foglalkozás) után megrajzolja a maximális számú négyzetet tartalmazó alakzatot. Általános esetben ez egy négyzet, amelynek minden oldalát $2m-1$ egyenlő részre osztjuk. $m = 3$ esetén a legtöbb négyzetet tartalmazó alakzat a 3.1. ábrán látható 5×5-ös rács, amelyen összesen 55 négyzet látható.

Annak igazolása érdekében, hogy a legtöbb négyzetet tartalmazó alakzat valóban az, amelyet a sejtésünk mutat, több egyszerűbb tulajdonságot érdemes bizonyítani. Így jó volna belátni, hogy a legtöbb

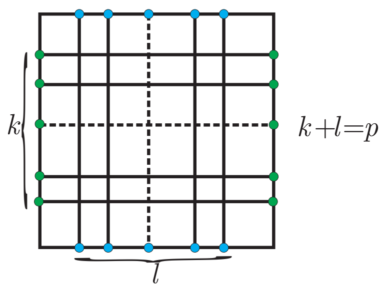


n=55

3.1. Ábra. A legtöbb négyzetet tartalmazó, 12 egybevágó szakaszból alkotott alakzat

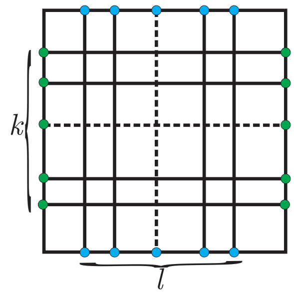
négyzetet tartalmazó alakzat mindig egy négyzet, amelyet a további szakaszokkal rácsszerűen felosztunk. Ha ez sikerül, akkor már csak a rácsokat kellene összehasonlítani. Ez a gondolatmenet vezet az eredeti feladatnak a következő átfogalmazásához, amely ugyan a 2. és 3. feladat részének tekinthető, de a rá adott válasz már egyáltalán nem tűnik nyilvánvalónak.

4. Feladat. Egy négyzet két oldala vízszintes és két oldala függőleges. A négyzetbe rajzoljunk k darab vízszintes és l darab függőleges, az oldalakkal egybevágó szakaszt (lásd a 3.2. ábrát). Legfeljebb hány négyzet keletkezhet egy ilyen ábrán, ha $k + l = p$ és p egy rögzített természetes szám?



3.2. Ábra. l függőleges és k vízszintes szakasz, $k + l = p$ rögzített

5. Feladat. Egy négyzet két oldala vízszintes és két oldala függőleges. A négyzetbe rajzoljunk k darab vízszintes és l darab függőleges, az oldalakkal egybevágó szakaszt (lásd a 3.3. ábrát). Legfeljebb hány négyzet keletkezhet egy ilyen ábrán, ha k és l rögzített természetes számok?



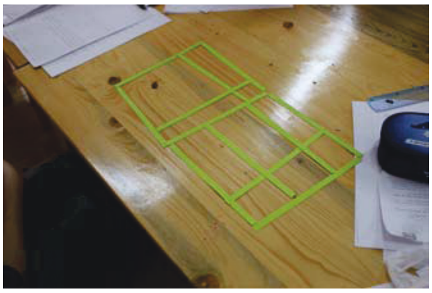
3.3. ÁBRA. l függőleges és k vízszintes szakasz, k és l rögzített

Általában az előbbiektől teljesen elütő jellegű problémák is felmerülnek. A különböző csapatoknak gyakran különböző konfigurációkkal sikerül előállítani ugyanannyi négyzetet, sőt az is előfordul, hogy egy csapat több, különböző alakzatot szerkeszt ugyanannyi négyzettel. Emiatt természetes módon jelenik meg a következő kérdés:

6. Feladat. Adott m és n esetén hány olyan lényegesen különböző alakzat létezik, amelyet $4m$ szakasz határoz meg és amelyen pontosan n négyzet látható?

Ez a probléma nagyon jó annak tisztázására, hogy mit értünk ebben az esetben különböző alakzatokon. Ezt a problémát még rögzített m-re és n-re (pl. $m = 3$ és $n = 7$) is nagyon nehezen lehet kezelni, ennek a megoldásával nem foglalkozunk. Hasonlóan felvetődik a kérdés, hogy ha adott m-re a négyzetek maximális száma M_m, akkor igaz-e, hogy 1-től M_m-ig minden n-re előállítható olyan konfiguráció, amelyen pontosan n darab négyzet látszik. Sok más jellegű általánosítás is megfogalmazódhat, például mi történik 3-dimenziós feladat esetén (egy kockát darabolunk síkokkal és a keletkező kis kockák maximális számát keressük), vagy mi történik, ha egy adott téglalaphoz hasonlóakat keresünk az alakzaton stb. A következőkben megoldjuk a 2., a 3., a 4. és az 5., valamint az 1. feladatot és nem foglalkozunk a 6. feladattal, illetve semmilyen más problémával.

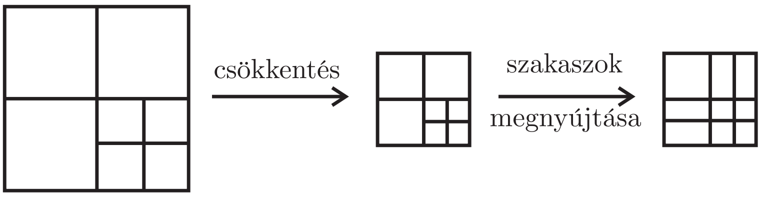
További fotók

3. Megoldások

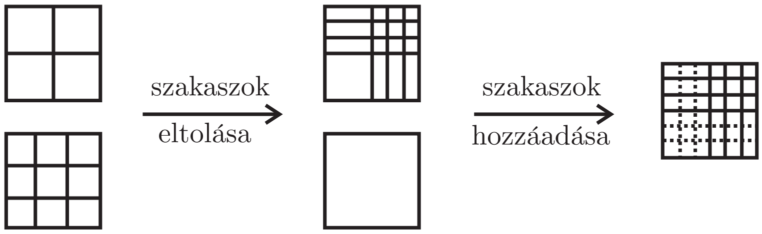
Az általánosság csorbítása nélkül feltételezhetjük, hogy a szakaszok hossza 1 egységnyi. Első lépésben igazoljuk, hogy ha egy alakzaton a négyzetek száma maximális, akkor az alakzat egy négyzet, amelyet a többi szakasszal felosztunk kisebb részekre. Ehhez a következő észrevételekre van szükségünk:

- Ha egy alakzaton szereplő legnagyobb négyzet oldala nem 1 egységnyi, akkor szerkeszthető olyan alakzat, amelyben több négyzet van, mint az eredetiben. Ehhez elégséges a legnagyobb négyzetet egységnyire csökkenteni, majd a belsejében keletkező rövidebb szakaszokat egységnyi hosszúságig megnyújtani. Így keletkezhetnek szabad szakaszok, amelyekből további négyzeteket lehet kirakni és a lecsökkentett négyzetben legalább annyi négyzet látható, mint az eredetiben. Ezt a szerkesztést a 3.4. ábrán láthatjuk. Ezzel a módszerrel a különálló, egységnél nagyobb oldalhosszúságú alakzatok redukálhatók egységoldalú négyzetekre és azok felbontására.



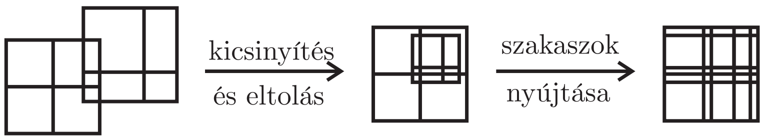
3.4. Ábra. Méretcsökkentés és nyújtás

- Ha a legnagyobb négyzet (N) oldalhossza 1 egység és a rajta kívül eső tartományban van más négyzet is, akkor az N belsejében felépíthető a külső négyzet egy kicsinyített mása és az így keletkező alakzaton a négyzetek száma ismét nagyobb, mint az eredeti alakzaton. Ebből a célból a legjobb, ha az N-ben eredetileg látható legkisebb négyzetre kicsinyítjük a külső négyzetet. Ezt a szerkesztést a 3.5. ábrán láthatjuk.
- Ha a legnagyobb négyzet (N) oldalhossza 1 egységnyi és további négyzetek metszik N-et, akkor az N-be belemetsző szakaszok eltolásával kaphatunk olyan alakzatot, amelyen szintén több négyzet van, mint az eredetin. Gyakorlatilag az egyik négyzet kicsinyített mását hozzuk létre a másik



3.5. Ábra. Külső négyzetek eltűntetése

belsejében és a lekicsinyített szakaszokat meghosszabbítjuk. Ezt a szerkesztést a 3.6. ábrán láthatjuk. Ez a szerkesztés akkor is használható, ha egyszerre több N-be belemetsző négyzetet akarunk felszámolni (beköltöztetni az N belsejébe).

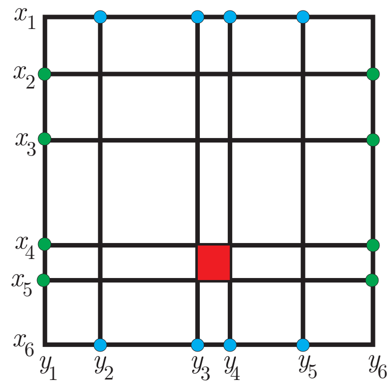


3.6. Ábra. Metsző egységnégyzetek eltűntetése

- Több, ciklikusan egymást metsző négyzet esetén is növelhető az ábrán látható négyzetek száma, ha egy négyzet belsejébe költöztetjük a többi által meghatározott alakzat egy kicsinyített mását.

Az előbbi észrevételek alapján világos, hogy ha egy alakzaton keletkező négyzetek száma maximális, akkor az alakzat egy egységnyi oldalú négyzet, amelynek a további szakaszok egy felosztását adják. Így elégséges egy (általában nem szabályos) rácson megszámolni a keletkező négyzetek számát, majd meghatározni, hogy ez mikor a lehető legnagyobb. A számlálás egyetlen nehézsége, hogy egy tetszőleges rácson meg kell találni azokat a mennyiségeket, amelyek alapján a négyzetek megszámlálhatók. Ha arra gondolunk, hogy az alakzaton megjelenő rácsvonalak helyét szükséges egyértelműen jellemezni (pl. megrajzolás vagy programozási célból), akkor látható, hogy érdemes az oldalakon keletkező osztópontok $x_1, x_2, \ldots, x_l$ és

$y_1, y_2, \ldots, y_k$ koordinátáit jelölni[4]. Ezekkel a koordinátákkal a rács



3.7. ÁBRA. Az osztópontok koordinátái

egy tetszőleges téglalapjáról eldönthető, hogy négyzet vagy sem. Ha a téglalap oldalainak tartóegyenesei az $x_p < x_q$ és $y_s < y_t$ koordinátájú osztópontokon haladnak át, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a vizsgált téglalap négyzet:

$$x_q - x_p = y_t - y_s.$$

Így a koordináták alapján a négyzetek számlálása azt jelentené, hogy az

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\} \text{ és } Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$$

halmazokban kiszámítjuk az összes $x_q - x_p$, illetve $y_t - y_s$ alakú különbséget, majd a kapott különbségek közti egyezéseket számoljuk meg. Például az $X = \{0, 1/2, 1\}$ és $Y = \{0, 1/2, 1\}$ esetén az X elemeiből képezett különbségek $1/2, 1/2, 1$ és az Y elemeiből képezett különbségek $1/2, 1/2, 1$, tehát a lehetséges egyezések száma 5 (az 1 csak az 1-gyel talál, viszont mindenik 1/2 talál a másik halmazhoz tartozó bármelyik 1/2-del). Ez mutatja, hogy ha a négyzetet az oldalainak felezőpontjait összekötő (az oldalakkal párhuzamos) egyenesek segítségével osztjuk fel, akkor 5 négyzet keletkezik. Mindez persze nagyon nyakatekertnek tűnhet, de programozási szempontból

[4]Az oldalakat is beleszámolva van k, illetve l szakaszunk, és a csúcsokat is osztópontnak tekintettük.

nézve egy működőképes algoritmus. A bizonyításhoz ezt az algoritmust követni túl bonyolultnak tűnik, ezért átalakítjuk. A $x_q - x_p = y_t - y_s$ feltétel ekvivalens az

$$x_q + y_s = x_p + y_t$$

feltétellel, tehát elégséges az egyezéseket csak az x_q+y_s alakú összegek közt megvizsgálni. Úgy tűnik, hogy akkor van a legtöbb négyzet, ha a legtöbb egyezés megjelenik az $x_q + y_s$ alakú összegek közt. Ez viszont azt jelenti, hogy amikor az

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}, \qquad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$$

halmazokból megszerkesztjük az

$$X + Y = \{x_q + y_s | 1 \leq q \leq l, 1 \leq s \leq k\}$$

halmazt, akkor az $X + Y$ halmazban az elemek száma minimális kell legyen. Ez gyakorlatilag a bizonyítások alapötlete. A pontosság kedvéért érdemes részletesebben is megvizsgálni az egyes eseteket.

A 2. FELADAT MEGOLDÁSA. Elégséges a 4. feladatot $p = 8$-ra megoldani és ehhez elégséges az 5. feladatot megoldani a $(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5)$ és $(4, 4)$ párokra.

A $(4, 4)$ esetben $0 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 = 1$ és $0 = y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6 = 1$, tehát

$$0 = x_1 + y_1 < x_2 + y_1 < x_3 + y_1 < x_4 + y_1 < x_5 + y_1 < x_6 + y_1 <$$
$$< x_6 + y_2 < x_6 + y_3 < x_6 + y_4 < x_6 + y_5 < x_6 + y_6 = 2.$$

Eszerint $|X + Y| \geq 11$. Ugyanakkor az $x_q + y_s$ alakú összegek közt az $s_1 = x_1 + y_1$ összeg 1-szer, az $s_2 = x_2 + y_1$ legfeljebb kétszer, az $s_3 = x_3 + y_1$ legfeljebb háromszor, és általában az $s_u = x_u + y_1$, $1 \leq u \leq 6$ összeg legfeljebb u-szor szerepelhet. Hasonló módon az $s_{6+v-1} = x_6 + y_v$ összeg legfeljebb $(7 - v)$-szer fordulhat elő, tehát a rácson megjelenő négyzetek száma legfeljebb

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 + C_5^2 + C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 55.$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk az összes olyan alakzatot, amelyben a négyzetek száma maximális, azt is meg kell vizsgálnunk, hogy az előbbi gondolatmenetben mikor lehetséges az, hogy mindenik összeg a lehető legtöbbször jelenik meg. Az $s_1, s_2, \ldots, s_6$ összegek a $[0,1]$ intervallumban vannak és az $s_6, s_7, \ldots, s_{11}$ összegek az $[1,2]$ intervallumban, tehát ahhoz, hogy az x_1+y_i alakú összegek az $X+Y$ halmazban ne hozzanak létre újabb elemet a már felsorolt 11 elemen kívül, szükséges az

$$\{y_2, y_3, y_4, y_5\} \subseteq \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

feltétel. Hasonlóan az is szükséges, hogy

$$\{x_2, x_3, x_4, x_5\} \subseteq \{y_2, y_3, y_4, y_5\},$$

tehát $x_i = y_i$, $1 \leq i \leq 6$. Ugyanakkor az $x_2 + x_5 < x_2 + x_6$ és így az $x_2 + x_5$ csak akkor lehet az eredetileg felsorolt 11 összeg közt, ha $x_2 + x_5 \leq 1$. Ebben az esetben viszont az $x_2 + x_1$, $x_2 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_2 + x_4$ és $x_2 + x_5$ összegek x_2 és 1 közt vannak. Emiatt ezek csak akkor lehetnek az eredetileg felsorolt 11 elem közt, ha $x_5 = 1 - x_2$, $x_4 = x_5 - x_2 = 1 - 2x_2$, $x_3 = x_4 - x_2 = 1 - 3x_2$ és $x_2 = 1 - 4x_2$, tehát $x_i = y_i = \frac{i-1}{5}$, ha $1 \leq i \leq 6$. Ezekre a számokra az alakzaton megjelenő négyzetek száma valóban 55 és ez jelenti a $k = l = 4$ esetén a maximumot.

Ha $k = 3$ és $l = 5$, akkor $0 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 1$ és $0 = y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6 < y_7 = 1$, tehát

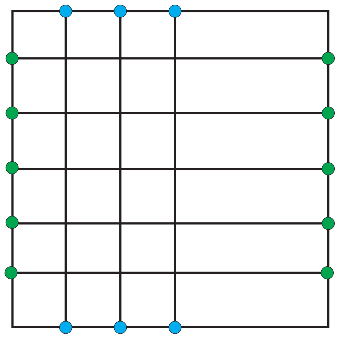
$$0 = x_1 + y_1 < x_1 + y_2 < x_1 + y_3 < x_1 + y_4 < x_1 + y_5 <$$
$$< x_1 + y_6 < x_1 + y_7 (= 1) < x_5 + y_2 < x_5 + y_3 <$$
$$< x_5 + y_4 < x_5 + y_5 < x_5 + y_6 < x_5 + y_7 = 2.$$

Ez alapján $|X+Y| \geq 13$. Ugyanakkor az x_q+y_s összegek közt az x_1+y_u legfeljebb u-szor jelenhet meg $u \leq 4$ esetén, 4-szer ha $u \in \{5, 6\}$ és 5-ször ha $u = 7$. Hasonlóképpen az $x_5 + y_v$ összeg legfeljebb 1-szer jelenhet meg $v \geq 5$ esetén és $6 - v$-szer, ha $2 \leq v \leq 4$. Eszerint a négyzetek száma legfeljebb

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_4^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 42.$$

Ez el is érhető ha $x_i = y_i = \frac{i-1}{6}$, $1 \leq i \leq 4$ és $y_i = \frac{i-1}{6}$, $5 \leq i \leq 7$. Ezeknek az értékeknek megfelelő alakzat látható a 3.8. ábrán.

Hasonló gondolatmenet alapján $k = 2, l = 6$ esetén legtöbb 24, $k = 1, l = 7$ esetén legtöbb 11 és $k = 0, l = 8$ esetén legtöbb 1 négyzet



3.8. ÁBRA. A négyzetek maximális száma $k = 3$ és $l = 5$ esetén

keletkezhet, tehát az ábrán látható négyzetek száma legfeljebb 55. Ezt $k = l = 4$ és az egyenlőközű rács esetén kaphatjuk meg (lásd a 3.1. ábrát). □

A 3. FELADAT MEGOLDÁSA. Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan elégséges $0 \le k \le 4m - 4$ és $l = 4m - 4 - k$ esetén meghatározni a négyzetek maximális számát és utána ezeket a maximális számokat összehasonlítani. Megismételve az előbbi gondolatmenetet, minden rögzített k, l esetén egyenletes felosztásra kapjuk a legtöbb négyzetet és amikor k, l változik, akkor $k = l = 2m - 2$ esetén van a legtöbb négyzet. Ebben az esetben a négyzetek száma $\frac{m(2m-1)(4m-1)}{3}$. A bizonyítás részleteinek leírását az olvasóra bízzuk. □

A 4. FELADAT MEGOLDÁSA. Ha $p = 2w$, $w \in \mathbb{N}$ a legtöbb négyzet $k = l = w$ és egyenletes felosztás esetén jelenik meg. Ekkor a négyzetek száma $\frac{(w+1)(w+2)(2w+3)}{6}$. Ha $p = 2w + 1$, $w \in \mathbb{N}$, a legtöbb négyzet $k = w$, $l = w + 1$ esetén jelenik meg az $x_i = y_i = \frac{i-1}{w+2}$, $1 \le i \le w + 1$, illetve $y_i = \frac{i-1}{w+2}$, $i > w + 1$ és $x_{w+1} = 1$ osztópontokban húzott egyenesekre. Ebben az esetben a négyzetek száma $\frac{(w+1)(2w^2+10w+6)}{6}$. □

AZ 5. FELADAT MEGOLDÁSA. Ha $k \le l$, akkor a legtöbb négyzet $x_i = y_i = \frac{i-1}{l+1}$, $1 \le i \le k + 2$ és $y_i = \frac{i-1}{l+1}$, $i \ge k + 2$ esetén jelenik meg. Ebben az esetben a négyzetek száma $\frac{(k+1)(k+2)}{2} + \sum_{j=0}^{k-1} (k-j)(l+1-j)$. □

Az 1. feladat megoldása. A 2. feladat megoldása alapján látható, hogy legfeljebb 55 négyzet jelenhet meg az ábrán. Másrészt nem minden $n \leq 55$ esetén létezik olyan alakzat, amelyen pontosan n négyzet jelenik meg. A 2. feladat megoldásában használt gondolatmenethez hasonlóan igazolható, hogy nem létezik olyan alakzat, amelyen n négyzet látható, ha $47 < n < 55$ vagy $44 < n < 47$. Az n többi értékére a mellékletben található ábrák tartalmaznak egy-egy megoldást. □

4. Tapasztalatok, következtetések

- A bevezetőben említett foglalkozást több diákcsoporttal is kiviteleztük. Voltak foglalkozásaink középiskolás diákokkal, egyetemi hallgatókkal és vegyes (diák+egyetemi hallgató) csoportokkal is. Kipróbáltuk hagyományos osztályban is és tehetséggondozó táborban is (pl. SimpleX Tehetséggonozó tábor, Torockó, 2010 június). Legtöbb foglalkozáson a diákok az 1. feladat egy részét oldották meg és megfogalmazták a 2., 3., 6. feladatokat, esetleg további problémákat. Az esetek nagy részében rájöttek a megfelelő jelölések fontosságára, de nem vették észre, hogy az $X + Y$ halmazzal érdemes dolgozni. Egy kis segítséggel viszont meg tudták találni az $X + Y$ számosságának alsó korlátját és ennek segítségével a megfelelő alakzatokat is.
- A megfogalmazott problémák tükrözik a kíváncsiságvezérelt matematika oktatás egyik sarkalatos problémáját: megfelelő környezetben a diákok nagyon sokrétű, érdekes, esetleg bonyolult vagy megoldhatatlan feladatot fogalmaznak meg. Ez a kíváncsiság megnyilvánulásának természetes módja. Általában a diákok sokkal több feladatot megfogalmaznak, mint amennyit meg tudnak oldani, vagy esetleg, mint amennyit a tanár meg tud oldani (és persze arról se feledkezzünk meg, hogy az idő is korlátos, tehát sok feladat megoldására időhiány miatt nem is kerülhet sor). Emiatt egy ilyen tevékenység során más a tanár szerepe, mint a hagyományos, nagyrészt frontális tevékenységek során. A tanárnak az

alaposabban tanulmányozandó feladat kiválasztásában kell segítséget nyújtania, ezért fontos, hogy neki is legyen tapasztalata az ilyen jellegű tevékenységekben. A tapasztalat azért is lényeges, hogy a szélsőségeket (túl egyszerű vagy túl bonyolult probléma) elkerüljük. Gyakran előfordul, hogy az osztályban teljesen más problémák kerülnek előtérbe, mint amit a tanár előre kigondolt. Éppen ezért nehéz tanári feladat a tanulási környezet, a probléma megválasztása is. Egy jól megtervezett problémakörnyezetben majdnem mindig felmerülnek azok a problémák is, amelyeket érdemes tanulmányozni (például a legtöbb négyzetet tartalmazó alakzat).

- A feladatok megoldását elemezve láthatjuk, hogy a következő lényegi lépéseket hajtottuk végre:
  - megfogalmaztuk a geometriai feladatot, sajátos eseteket, részproblémákat fogalmaztunk meg;
  - létrehoztunk egy algebrai modellt (bevezettük a megfelelő változókat és az $X + Y$ halmazt);
  - az algebrai modellben megoldottuk a problémát (meghatároztuk, hogy az $X + Y$ halmaznak mikor van a legkevesebb eleme);
  - az algebrai modellből származó megoldás alapján megoldottuk az eredeti geometriai feladatot is.

  Ez nagyon hasonlít a modellezés Blum-féle modelljére (lásd [**10**]), ahol előbb létrehozunk egy helyzeti modellt, majd egy matematikai modellt, megoldjuk a matematikai modellt és végül a modellből származó megoldás alapján a helyzeti modellben megjelent kérdésre (vagy esetleg az eredeti problémára) adunk választ. Ez a hasonlóság arra utal, hogy a problémamegoldás közben is aktiválhatjuk ugyanazokat a mechanizmusokat, mint a modellezési tevékenységek során. Ez természetesen a megoldandó feladatok jellegétől függ.
- A vegyes (diák+egyetemi hallgató) csapatokban való munka nagyon hasznos az egyetemi hallgatók szempontjából, hisz

ők jövendőbeli tanárként is átélik a helyzetet. Ez segít nekik a lezajló jelenségek, a szerepek megértésében, a fő problémák letisztázásában, a diákok gondolkodásának megértésében. Mivel ugyanahhoz a csapathoz tartoznak, a diákok sokkal kommunikatívabbak az egyetemista (vagy esetleg tanár) csapattárssal, mint más esetekben. Ez mindkét félnek előnyös lehet, hisz kialakíthat egy másfajta együttműködést, mint amit a hagyományos tanórákon tapasztalunk. Meggyőződésünk, hogy néha érdemes vegyes (egyetemista+diák vagy tanár+diák) csapatokban is dolgozni, esetleg több szaktanár részvételével.

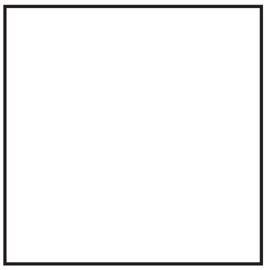
- Az 1., 2. és a 6. feladat sajátos eseteit majdnem minden csoport megfogalmazta és sikerült részleges megoldásokat adniuk vagy sejtéseket megfogalmazniuk a megoldásra vonatkozóan. A hagyományos órák keretén belül ez több problémát is felvetne, hisz általában a megfogalmazott feladatok nagyon kevés részét oldották meg teljesen, tehát szigorú eredménycentrikusság esetén a hatásfok viszonylag alacsonynak mondható (megfogalmaznak 10 feladatot és megoldanak 1-et). Másrészt az egyes alakzatokon megjelenő négyzetek megszámlálása nagyon jó alkalom a számlálási technikák gyakorlására, tökéletesítésére (minden csapat megvizsgálta a többi csapat ábráit és eldöntötte, hogy azok helyesek vagy sem). A tevékenység során a diákok teljesen természetes módon oldanak meg a tananyagban is előforduló feladatokat (négyzetek megszámlálása egy szabályos téglalaprácson), ráadásul néha a megváltoztatott környezet egészen más jellegű megoldásokat eredményez. Gondoljuk végig, hogy az 5×5-ös táblán látható négyzeteket általában a méretük szerint szoktuk összeszámlálni és így kapjuk az

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

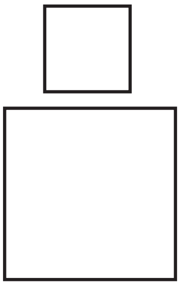
négyzetet. A foglalkozások során gyakorlatilag két teljesen más számlálási technika jelent meg. Ugyanakkor az a tény, hogy a problémát részlegesen meg tudják oldani, és a helyes megoldást megsejtik, a legtöbb diákban olyan kognitív disszonanciát ([**11**]) eredményez, ami stimuláló hatással van a megoldás későbbi megbeszélése során.

- A romániai matematika tanterv az utóbbi néhány évben teljes szemléletváltáson ment át. Az eredetileg majdnem kizárólag tartalomorientált tanterv ma már kompetenciafejlesztésre koncentrál, diákcentrikus igyekszik lenni és külön kihangsúlyozza, hogy a kíváncsiságvezérelt oktatást kell előtérbe helyezni (lásd például a 2006-ban jóváhagyott 12. osztályos tantervet vagy az 5-8 osztály teljes tantervét). Természetesen ez a tartalmak, a tevékenységek átgondolása nélkül lehetetlen és a tartalmak átszervezése kellő tapasztalat nélkül hiábavaló, esetleg káros. Az eddigi tevékenységeink (lásd [**2**], [**4**]) alapján állíthatjuk, hogy a teljes tanterv átstrukturálható úgy, hogy a kíváncsiságvezérelt szemléletmód érvényesülhessen. Az átszervezés egyik legnagyobb veszélye, hogy a lényeg pont úgy elvesztődhet az új tanterv/tanrend szerint is, mint a régi tanterv, szemléletméd szerint. Sőt, a nem teljesen hagyományos oktatásszervezés során a tanár személyisége, rugalmassága, találékonysága, esetleges szakmai hiányosságai sokkal inkább előtérbe kerülnek, mint a hagyományos, nagyrészt frontális oktatásra alapozott tanításban, ezért nagy a veszélye annak, hogy az új szemléletre alapozott oktatás az elején sokkal alacsonyabb hatékonyságot mutasson.

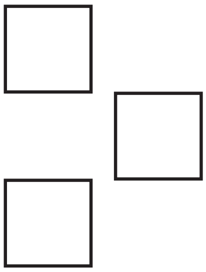
Melléklet



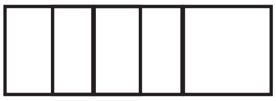
n=1



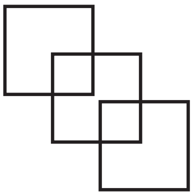
n=2



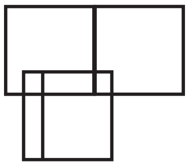
n=3



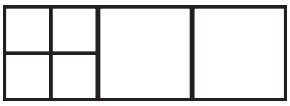
n=4



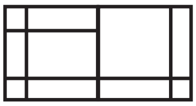
n=5



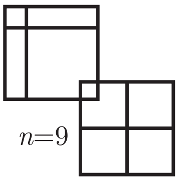
n=6



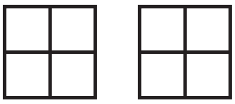
n=7



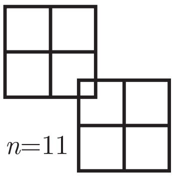
n=8



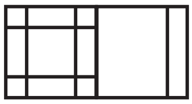
n=9



n=10

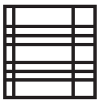


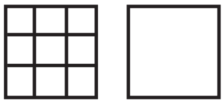
n=11

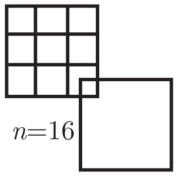


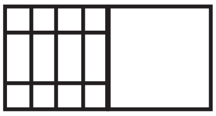
n=12

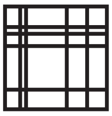

n=13

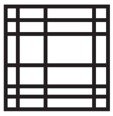

n=14

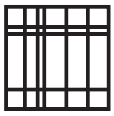

n=15

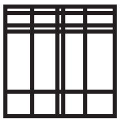

n=16

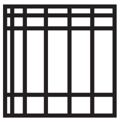

n=17

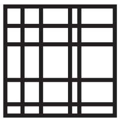

n=18

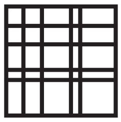

n=19

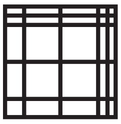

n=20

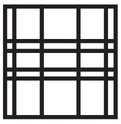

n=21

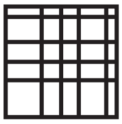

n=22

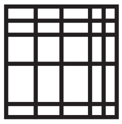

n=23

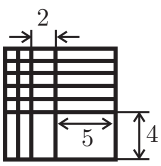

n=24


n=25

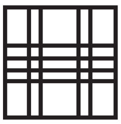

n=26

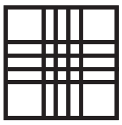

n=27

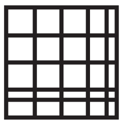

n=28

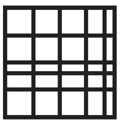


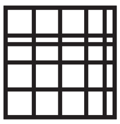
n=29

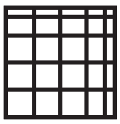

n=30

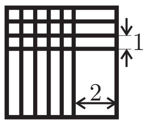

n=31


n=32

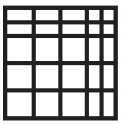

n=33

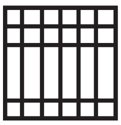

n=34

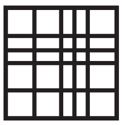

n=35

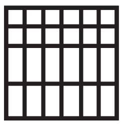


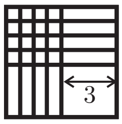
n=36


n=37

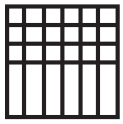

n=38


n=39

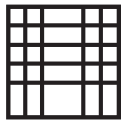

n=40



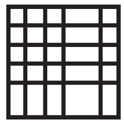
n=41



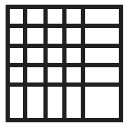
n=42



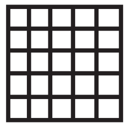
n=43



n=44



n=47



n=55

IV. FEJEZET
ALAPMŰVELETEK

1. Értjük vagy tudjuk

Az elemi és az általános iskolában tanított matematika egyik alapvető célkitűzése a számokkal (természetes, egész, racionális) végzett műveletek tulajdonságainak az elsajátítása, a műveletek elvégzésére vonatkozó algoritmusok begyakorlása és a számolási készség funkcionálisan integrált szintre való fejlesztése. Ennek a célnak az elérésére gyakran kész algoritmusokat tanítanak a diákoknak. Az összeadás, a kivonás, a szorzás, az osztás, a gyökvonás a tananyagban mint megtanítandó algoritmus (vagy szabály) jelenik meg. Ennek természetesen van előnye is, mert aki gyorsan megérti, átlátja és kevés gyakorlással elsajátítja a szükséges technikákat, az fontosabb dolgokkal foglalkozhat. Ezt az előnyt az esetek nagy részében sajnos nem sikerül kiaknázni. Ugyanakkor van néhány negatív vetület is: a legtöbb diáknak a matematikáról hamis képe alakulhat ki, hisz nem értheti, hogy a matematika nemcsak a végeredményt jelenti (a kész algoritmust, a szabályt, a tételeket, a fogalmakat), hanem a matematikai tevékenységet is magába foglalja, amelynek végeredményeként a késztermékek megjelennek; a másik igen fontos negatív vetület az, hogy ezzel a módszerrel gyakorlatilag a dolgok technikai oldalára koncentrálunk és a gondolatiságot majdnem száműzzük, holott a formális aspektusok (a műveletek végzése, a rövidített számítási képletek stb.) elsajátítása nem garantálja a gondolkodási mechanizmusok fejlődését. A gondolkodási mechanizmusok, általános kognitív sémák fejlesztésére is koncentrálnunk kell. Ennek a legegyszerűbb módja, hogy nemcsak azt mutatjuk meg, hogy hogyan működnek az algoritmusok és mire jók, hanem azt is, hogy miért működnek úgy, ahogyan működnek. Ha nem ezt tesszük, akkor a diákjaink a legjobb esetben is csak tudni fogják azt, amit tanítunk, és általában nem fogják érteni. Ebben a fejezetben az alapműveletekre vonatkozó algoritmusokat próbáljuk újra „felfedezni”, konkrét tárgyi tevékenységekre építve.

2. Feladatok

Mindvégig szükségünk van néhány (3-4) különböző típusú tárgyra úgy, hogy a típusokon belül legyen eléggé sok azonos tárgy. Használhatunk különböző színű paszulyszemeket, vagy cukorkákat, gombokat, papírcsíkokat stb. Megállapodás szerint kiválasztjuk, hogy melyik tárgy (szimbólum) jelöli az egyeseket, melyik a tízeseket, melyik a százasokat, ezreseket, illetve a tízezreseket és a foglalkozások során a számokat a tárgyakkal reprezentáljuk. Az egyszerűség kedvéért mi a leírásban szimbólumokat használunk, a fotókon látható, hogy diákjainkkal tartott foglalkozásokon színes papírcsíkokat vagy kisgyerekeknek gyártott színes műanyag gombocskákat használtunk. A 9. táblázatban az általunk használt szimbólumok és a nekik megfelelő számértékek láthatók.

Számérték	1	10	100	1000	10000
Szimbólum	$\bigcirc$	$\square$	$\triangle$	∇	$\Diamond$

9. Táblázat. Szimbólumok és számértékük

Alapfeladatként érdemes a tizedes reprezentációt gyakorolni. Ennek érdekében rakassunk ki a meglévő tárgyak segítségével különböző mennyiségeket. Például:

1. Feladat. Rakjuk ki a $12, 23$, $38, 49$, $52, 98$, $124, 342, 891, 1871$ és 12321 számoknak megfelelő mennyiségeket a tárgyak (szimbólumok) segítségével.

Ennek a gyakorlatnak az a fő célja, hogy a diákok érzékeljék az ábrázolási lehetőségeket, lássák be, hogy az adott tárgyakból a legkevesebb darabot használó ábrázolás épp a tizedes reprezentáció. Ha erre maguktól nem jönnek rá, akkor érdemes a következőhöz hasonló feladatokat is adni:

2. Feladat. Hány különböző módon ábrázolható a rögzített szimbólumok segítségével a 24? Hát a 132?

Az első feladat néhány esetének lehetséges megoldásaiból tartalmaz egy párat a 10. táblázat. Látható, hogy ugyanazt a számot általában többféle módon is ábrázolhatjuk, és egy lehetséges ábrázolásból egy másikat úgy kaphatunk, ha a tárgyakat beváltjuk: több kisebb értékűt nagyobb értékűre, vagy egy nagyobb értékűt több kisebb értékűre.

Mennyiség	Ábrázolás szimbólumokkal
12	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○○
	□ ○ ○
23	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
	□ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
	□□ ○ ○○
38	□□□ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
124	△□□ ○ ○ ○ ○
342	△△△□□□□ ○ ○
1871	▽△△△△△△△△□□□□□□□○
12321	◊▽▽△△△□□○

10. TÁBLÁZAT. Mennyiségek reprezentálása tárgyakkal vagy szimbólumokkal

A szimbólumokkal való reprezentációt használva értelmezhetjük az összeadást, a kivonást, a szorzást és az összeadást. Célunk az, hogy a tárgyi műveletek szintjéről eljussunk a hatékony algoritmusokig. Első fázisban mindenféle algoritmus ismerete nélkül, a reprezentációk segítségével végezzünk alapműveleteket (összeadást, kivonást, szorzást, osztást). A következő fázisban a szimbólumokkal végzett műveleteket kövessük lépésről lépésre végig számokkal is, majd próbáljunk általános esetben is használható algoritmust megfogalmazni, amely csak a számjegyekkel való reprezentációt használja.

Megjegyzés. Érdemes csoportmunkában megszervezni a feladatok megoldását és a különböző csoportoknak különböző műveletet adni alapfeladatként, majd mozaik módszerrel megosztani a tapasztalatokat.

3. Feladat. Végezzük el a szimbólumokkal való reprezentáció alapján a következő műveleteket:

$$a)\ 14+39;\quad b)\ 36+87;\quad c)\ 168+277+59;$$
$$d)\ 246-98;\quad e)\ 526-349;\quad f)\ 1001-213.$$

Megoldás. a) Első lépésként reprezentáljuk a számokat a szimbólumok segítségével.

$$14 \quad \sim \quad \square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$
$$39 \quad \sim \quad \square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

tehát ha összeadjuk a 14-et és a 39-cet, akkor az összeg reprezentálása

$$\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

Ebben a reprezentálásban 10-nél több 1-es van, tehát 10 darab 1-est kicserélhetünk egy 10-esre, és így az eredmény

$$\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

vagyis 53. Tehát $14+39=53$.

Megjegyzés. Fontos, hogy az elején a tárgyakkal (szimbólumokkal) végezzük a műveleteket és az eredményt a konkrét reprezentációból olvassuk le.

b) Az összeadandók reprezentálása

$$36 \quad \sim \quad \square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc, \text{ és}$$
$$87 \quad \sim \quad \square\square\square\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

tehát

$$36+87 \quad \sim \quad \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc.$$

Látható, hogy az átváltásokat kezdhetnénk előlről is. Átválthatunk 10 tízest egy százasra, utána 10 egyest egy tízesre. Az eredmény reprezentációja tehát

$$\triangle\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

vagyis $36+87=123$. Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha előbb az egyeseket váltjuk át tízesre, majd a tízeseket százasra.

c) Az összeadandók reprezentálása

$$\begin{aligned}
168 &\sim \triangle\square\square\square\square\square\square\ \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,\\
277 &\sim \triangle\triangle\square\square\square\square\square\square\square\ \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \text{ és}\\
59 &\sim \square\square\square\square\square\ \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,
\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}
168+277+59 \quad\sim\quad & \triangle\triangle\triangle\\
& \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\\
& \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\\
& \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\\
& \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc.
\end{aligned}$$

Ha átváltunk 10 darab 10-est egy 100-asra és 20 darab 1-est két 10-esre, akkor az eredmény reprezentációja

$$\begin{aligned}
168+277+59 \quad\sim\quad & \triangle\triangle\triangle\triangle\\
& \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\\
& \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc.
\end{aligned}$$

Ez még mindig nem a legegyszerűbb, tehát ismét be kell váltani 10 darab 10-est egy 100-asra. Így az eredmény

$$168+277+59 \quad\sim\quad \triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\ \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

vagyis $168+277+59=504$. Látható, hogy az átváltásokat tetszőleges sorrendben is végezhetjük, mindig ugyanahhoz az eredményhez jutunk. Ha azt szeretnénk, hogy egyetlen típust se kelljen egynél többször váltani, akkor érdemes az egyesekkel kezdeni, aztán a tízesekkel és így tovább. Ez gyakorlatilag az összeadási algoritmust eredményezi, ha leírjuk számjegyekkel is.

d) A 246 egy lehetséges reprezentációja $\triangle\triangle\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ és ebből kellene elvenni 98-at, azaz $\square\square\square\square\square\square\square\square\square\ \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$-at. Mivel 246 reprezentációjában nincs annyi $\bigcirc$, mint 98 reprezentációjában, érdemes egy nagyobb egységet felváltani. Tehát egy □-et felváltunk 10 darab ○-re. Így a

△△□□□ ○○○○○○○○○○○○○○○○

számból kell elvennünk □□□□□□□□□ ○○○○○○○○-at. Az egyeseket el is vehetjük, tehát a továbbiakban a

△△□□□ ○○○○○○○○

számból kell elvenni □□□□□□□□□-et. Mivel nincs elégséges 10-es abban a reprezentációban, amiből kivonunk, átváltunk egy 100-ast. A

△□□□□□□□□□□□□□ ○○○○○○○○

számból elvehetjük a □□□□□□□□□-et és az eredmény

△□□□□ ○○○○○○○○,

vagyis az eredmény 148. Látható, hogy a kivonás ismét kivitelezhető több módon, átválthattuk volna előbb a százast és csak a végén a tízest, sőt átválthatunk egy százast egyesekre, majd visszaváltjuk a fölösleget. Ha viszont a legkevesebb lépésben szeretnénk elérni az eredményt, és egy lépésben az eredmény egy számjegyét meg szeretnénk határozni, akkor érdemes ismét az egyesektől kezdeni és minden lépésben eggyel nagyobb nagyságrendű elemekkel (tárgyak, szimbólumok vagy számjegyek) dolgozni. Ez vezet el a kivonás ismert algoritmusához.

e) Az $526-349$ kivonást most számjegyekkel írjuk le, de mindvégig a reprezentációkkal végzett műveletekre gondolunk. Az 526-ban csak 6 darab 1-es van és ebből nem lehet elvenni a 9-cet, tehát egy tízest átváltunk és a 16 egyesből elvesszük a 9-cet. Így marad 7 egyes és ez az eredményben megadja az egyesek számát. A maradék 5 százasból és 1 tízesből el kell vennünk 4 tízest és 3 százast. Emiatt elváltunk egy százast tízesekbe és a 11 tízesből elvesszük a 4 tízest. A maradék 7 tízes az eredményben a tízesek számát adja. A maradék 4 százasból elvesszük a 3 százast és 1 százast kapunk, tehát az eredmény 177.

f) Az $1001 - 213$ kivonásnál az 1001 reprezentációjában szereplő ezrest kell felbontanunk úgy, hogy legyen legalább 10 egyes. Ezt az $1000 = 10 \cdot 100 = 9 \cdot 100 + 10 \cdot 10 = 9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 10 = 990 + 10$ felbontással kapjuk (előbb felbontjuk 10 darab 100-asra, majd egy százast tovább bontunk 10 tízesre és egy tízest egyesekre bontunk). Így a $99(11) - 213$ kivonást kell elvégezni, ahol a zárójel azt fejezi ki, hogy 11 darab egyes van. Ez ekvivalens a $998 - 210$ kivonással, aminek az eredménye 788. □

Megjegyzés. Az előbbi műveletek elvégzése arra volt jó, hogy megértsük az összeadás és a kivonás elvégzésének lépéseit. Ezt érdemes tevékenységként végrehajtani és hagyni, hogy a diákok elemezzék a lehetőségeiket, esetleg annyi példát adni nekik, amennyi meggyőzi őket, hogy az ismert algoritmus (amelyet sok esetben a diákok maguk is felfedeznek a tevékenység során) valóban a lehető leghatékonyabb. Ezzel egy általános matematikai elv működését is megmutatjuk, ez a matematikának a belső tisztaság és rend igénye, amely szerint minden problémára érdemes a legegyszerűbb, ugyanakkor a legáltalánosabb megoldást adni. Ez a diákok számára egy olyan fontos stratégiai tanulság lehet a továbbiakra vonatkozóan, amely nem lenne látható a kész algoritmusok kizárólagos megtanításával. Mindezt csak azért hangsúlyozzuk ki, mert tanárként pontosan tudatában kell lennünk annak, hogy az általunk választott módszerek milyen másodlagos információt közvetítenek az elsődleges tárgyi tartalmon túl. Hosszú távon ugyanis ezek a másodlagos információk nagy mértékben hozzájárulnak a gondolkodási mechanizmusok fejlődéséhez, a véleményalkotáshoz. A kíváncsiságvezérelt oktatás egyik alapvető trükkje, hogy valamilyen konkrét tevékenység során olyan, kezdetben másodlagosnak minősíthető jelenségek váljanak láthatóvá, amelyek további kérdések, motivációk forrását alkotják. Olyan ez, mint a túrázás, nemcsak a végcél a fontos, gyakran menet közben fedezzük fel a szép helyeket.

A következő két feladat az osztás és a szorzás algoritmusának felfedezését célozza meg.

4. Feladat. A számok reprezentációit használva végezzük el a következő osztásokat, majd ez alapján fogalmazzunk meg egy általános algoritmust az osztás elvégzésére:

a) 96:3; *b*) 385:7; *c*) 4164:12; *d*) 24123:43.

MEGOLDÁS. a) A 96 reprezentációja

□□□□□□□□□ ○ ○ ○ ○ ○ ○

és ezt kell 3 egyforma csoportba osztani. Ezt elérhetjük, ha átrendezzük a szimbólumokat:

□□□ ○ ○
□□□ ○ ○
□□□ ○ ○,

tehát az eredmény 32.

b) Az osztás kivitelezhető lenne úgy is, hogy mindent átváltunk egyesekre és azokat rakosgatjuk szét 7 csoportba. Ez azonban eléggé sok időt venne igénybe. Ha arra törekszünk, hogy minél kevesebb lépést hajtsunk végre, akkor érdemes minél nagyobb darabok szétosztásával kezdeni, vagyis az osztást elölről érdemes végrehajtani. A 385 egy reprezentációja △△△□□□□□□□□ ○ ○ ○ ○○ és a 3 háromszöget nem lehet 7 egyforma csoportba rakni, ezért átváltjuk őket négyzetekre. Így 38 négyzetünk és 5 körünk lesz. Ezekből kialakíthatunk 7 egyforma csoportot úgy, hogy előbb elrendezünk a négyzetekből, amennyit csak lehet, a többit átváltjuk és aztán az egyesekből is kialakítjuk a 7 egyforma csoportot. Első lépésben a

□□□□□
□□□□□
□□□□□
□□□□□   □□□ ○ ○ ○ ○○
□□□□□
□□□□□
□□□□□

konfigurációhoz jutunk, majd az átváltás után kialakíthatjuk a 7 egyforma csoportot és leolvashatjuk a végeredményt. Ezek alapján $385 : 7 = 55$. Természetesen a csoportok kialakíthatók az egyesektől kezdve is, csak többször kell tízest átváltani egyesekre és ha az osztás nem végezhető el maradék nélkül, akkor sokkal hosszadalmasabb lehet.

□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯

c) A 12 reprezentációja □ ◯ ◯, ennek a 10-szerese △□□, és a százszorosa ∇△△, tehát a 4164-nek a ∇∇∇∇△□□□□□□ ◯◯◯◯ reprezentációjából kiindulva elégséges lenne a □ ◯ ◯, △□□, illetve ∇△△ alakú csoportokat kialakítani. Látható, hogy három ∇△△ alakú csoport leválasztható és marad

△△△△△□□□□□□ ◯◯◯◯.

Ebből kialakítható 4 darab △□□ alakú csoport és marad még

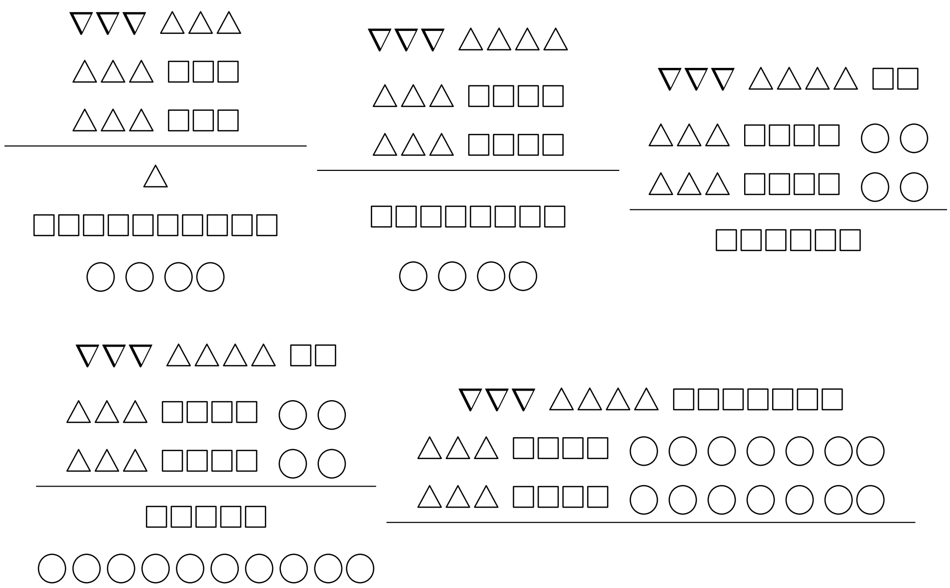
□□□□□□□□ ◯◯◯◯.

Egy négyzet átváltásával kialakítható 7 darab □ ◯ ◯ alakú csoport, tehát a 4164-et felírtuk

$$300 \cdot 12 + 40 \cdot 12 + 7 \cdot 12$$

alakban. Emiatt az osztás eredménye $300 + 40 + 7 = 347$. A csoportok kialakításának menete a következő:

	∇∇∇	∇∇∇ △△△
∇∇∇∇△	△△△	△△△ □□□
□□□□□□	△△△	△△△ □□□
◯◯◯◯	△△△△△□□□□□□	△△
	◯◯◯◯	◯◯◯◯



A végeredmény az utolsó ábráról olvasható le.

d) Ezt az osztást az előbbi elgondolás alapján hajtjuk végre, csak nem a szimbólumokkal írjuk le, hanem számokkal. A 43000 nagyobb, mint az osztandó, ezért csak a 4300 többszöröseit alakítjuk ki az első lépésben. 6 ilyen csoport már több lenne, mint az osztandó, ezért 5 ilyen csoportot alakítunk ki. Ez után a $24123 - 5 \cdot 4300 = 2623$-at kell tovább osztanunk. Ebből a 430 többszöröseit alakítjuk ki. Itt kialakítható 6 csoport, mivel $6 \cdot 430 = 2580 < 2623$, tehát marad még $2623 - 2580 = 43$. Így gyakorlatilag a 24123 számot előállítottuk $5 \cdot 4300 + 6 \cdot 430 + 1 \cdot 43 = 500 \cdot 43 + 60 \cdot 43 + 1 \cdot 43$ alakban, tehát az osztás végeredménye $500+60+1 = 561$. Ezek a lépések már az ismert osztási algoritmus lépései, ha megfelelően írjuk le. □

Megjegyzések. 1. Az osztásnak ez a konkrét tárgyi elvégzése egyértelműen elvezet a maradékos osztás tételéhez is.

2. A kivitelezésnél gyakorlatilag nincs szükség a szorzásra, csak az osztónak a $10, 100, 1000, \ldots$-szeresét kell ismernünk, a csoportok kialakíthatók ismételt kivonással is. A szorzás használata arra jó, hogy a lépések számát lecsökkentsük.

5. Feladat. A számok reprezentációit használva, végezzük el a következő szorzásokat, majd ez alapján fogalmazzunk meg egy általános algoritmust a szorzás elvégzésére:

a) $5 \cdot 6$;   *b*) $14 \cdot 4$;   *c*) $34 \cdot 23$;   *d*) $256 \cdot 23$;   *e*) $214 \cdot 321$.

Megoldás. A hat reprezentációja ◯◯◯◯◯◯, tehát az $5 \cdot 6$ reprezentációja

◯◯◯◯◯◯
◯◯◯◯◯◯
◯◯◯◯◯◯
◯◯◯◯◯◯
◯◯◯◯◯◯.

Az eredményt leolvashatjuk úgy is, hogy megszámoljuk a köröcskéket, de úgy is, hogy átírjuk egyszerűbb reprezentációra (átváltjuk, amit át lehet). Így a □□□ reprezentációt kapjuk, tehát az eredmény 30.

b) A $14 \cdot 4$ ugyanannyi, mint a $4 \cdot 14$, hisz ha kirakunk 14-szer 4 köröcskét (14 sor és 4 oszlop formájában), az ugyanannyi, mintha 4-szer raktunk volna ki 14-et (4 oszlop és 14 sor alakjában). A 14 reprezentációja □◯◯◯◯, tehát a $4 \cdot 14$ reprezentációja

□◯◯◯◯
□◯◯◯◯
□◯◯◯◯
□◯◯◯◯.

Az egyeseket átváltva kapunk még egy □-et és hat ◯-t, így az eredmény reprezentációja

□□□□□◯◯◯◯◯◯,

vagyis az eredmény 56. Látható, hogy az átváltáshoz kiszámoltuk a köröcskék számát, vagyis $4 \cdot 4 = 16$-ot és a 6-os adta az egyesek számát az eredményben, az 1-et pedig hozzáadtuk a tízesek számához ($4 \cdot 1$-hez).

c) A $34 \cdot 23$ kiszámításához a 23-at kellene 34-szer leírni és átváltások sorozatával leolvasni az eredményt. Ezt kellene minél egyszerűbben elvégezni. A 23 reprezentációja □□◯◯◯. Ha minden szimbólumot eggyel nagyobb nagyságrendűre váltunk, akkor a szám tízszeresét kapjuk, tehát a $10 \cdot 23 = 230$ reprezentációja $\triangle\triangle\square\square\square$. A 34 felírható $3 \cdot 10 + 4$ alakban, tehát az eredmény három $\triangle\triangle\square\square\square$ csoportból és 4 darab $\square\square \bigcirc \bigcirc\bigcirc$ csoportból áll. Így az eredmény reprezentációja

$$\begin{gathered}
\triangle\triangle\square\square\square \\
\triangle\triangle\square\square\square \\
\triangle\triangle\square\square\square \\
\square\square \bigcirc \bigcirc\bigcirc \\
\square\square \bigcirc \bigcirc\bigcirc \\
\square\square \bigcirc \bigcirc\bigcirc \\
\square\square \bigcirc \bigcirc \bigcirc\,.
\end{gathered}$$

Ezt a reprezentációt egyszerűsítjük, amennyire csak lehet. Előbb 10 kört átváltunk egy négyzetre és a maradék 2 kört leírjuk. 10 négyzetet átváltunk háromszögre és a maradék 8-at leírjuk, majd leírjuk a 7 háromszöget is. Így az eredmény reprezentációja

$$\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square\square\square \bigcirc \bigcirc,$$

tehát az eredmény 782.

d) A $256 \cdot 23$ helyett a $23 \cdot 256$-ot reprezentáljuk. A 256 reprezentációja $\triangle\triangle\square\square\square\square\square \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc$, tehát a tízszerese $\nabla\nabla\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square$, így az eredmény egy reprezentációja

$$\begin{gathered}
\nabla\nabla\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square \\
\nabla\nabla\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square \\
\triangle\triangle\square\square\square\square\square \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \\
\triangle\triangle\square\square\square\square\square \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \\
\triangle\triangle\square\square\square\square\square \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc.
\end{gathered}$$

Az átváltásokat elvégezve az eredmény reprezentációja

$$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square\square\square \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc,$$

tehát az eredmény 5888. Látható, hogy gyakorlatilag a $3 \cdot 256$ és a $2 \cdot 256 \cdot 10$ szorzásokat végeztük el. Ha előbb ezeket kiszámítjuk (előbb csoportokon belül végezzük az átváltásokat), akkor az eredmény egy reprezentációja

$$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\triangle\square\square$$

$$\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

alakú és innen szinén az 5888 végeredményt kapjuk. Számjegyekkel leírva látható, hogy a $3 \cdot 256 + 2 \cdot 2560 = 768 + 5120 = 5888$ műveleteket végeztük el. Ez látható módon az ismert szorzási algoritmushoz vezet.

e) Elvégezzük a $214 \cdot 3 = 642$, a $214 \cdot 2 = 428$ és a $214 \cdot 1 = 214$ szorzásokat, majd összeadjuk a 64200, 4280 és a 214 számokat. Az eredmény 68694. $\square$

Fotók&videók

Megjegyzés. A tevékenységek során a diákok gyakran az elölről való szorzást fedezik fel.

3. A rövidített számítási képletek képi megjelenítése

Ebben a paragrafusban néhány ábrát készítünk el, amelyek segíthetik a diákokat a miértek tisztázásában és a rövidített számítási képletek megjegyzésében. Az ábrák közül néhányat maguk a diákok is képesek felfedezni, ezért érdemes olyan foglalkozásokat szervezni a rövidített számítási képletek tanítása előtt, amelyek a különböző képletek ábrázolásának felfedezésére irányulnak.

6. Feladat. Ábrázoljuk egy ábrán az a^2, a b^2 és az $(a + b)^2$ mennyiségeket, ha $a, b > 0$.

7. Feladat. Ábrázoljuk egy ábrán az a^2, a b^2, a c^2 és az $(a + b + c)^2$ mennyiségeket, ha $a, b, c > 0$.

8. Feladat. Ábrázoljuk egy ábrán az a^2, a b^2, a c^2, a d^2 és az $(a + b + c + d)^2$ mennyiségeket, ha $a, b, c, d > 0$.

9. Feladat. Szemléltessük az a^3, a b^3 és az $(a + b)^3$ mennyiségeket, ha $a, b > 0$.

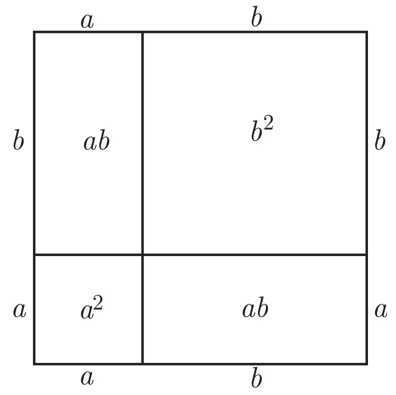
10. Feladat. Szemléltessük az a^3, a b^3, a c^3 és az $(a + b + c)^3$ mennyiségeket, ha $a, b, c > 0$.

11. Feladat. Bontsuk tényezőkre geometria ábrázolás segítségével az $a^2 - b^2$ kifejezést, ha $a \geq b > 0$.

12. Feladat. Szemléltessük az $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ egyenlőtlenséget, $a, b, c > 0$ esetén.

13. Feladat. Szemléltessük az $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ egyenlőtlenséget, $a, b, c > 0$ esetén.

A 6. FELADAT MEGOLDÁSA. Egy $a+b$ oldalhosszúságú négyzetet feldarabolunk úgy, hogy keletkezzen egy a és egy b oldalhosszúságú négyzet. Ennek egy lehetséges módja a 4.1. ábrán látható. A darabok



4.1. ÁBRA. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

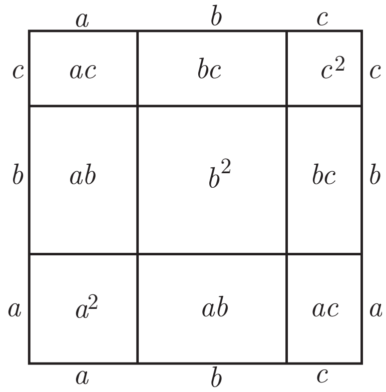
területe rendre a^2, b^2, ab, ba, és az eredeti négyzet területe egyenlő a darabok területével, tehát $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. □

A 7. FELADAT MEGOLDÁSA. Az $a+b+c$ oldalhosszúságú négyzet oldalait felosztjuk a, b és c hosszúságú szakaszokra a 4.2 ábrának megfelelően és a megfelelő osztópontokat összekötjük. A kapott 9 kis téglalap területének az összege az eredeti négyzet területét adja, tehát megkapjuk az

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

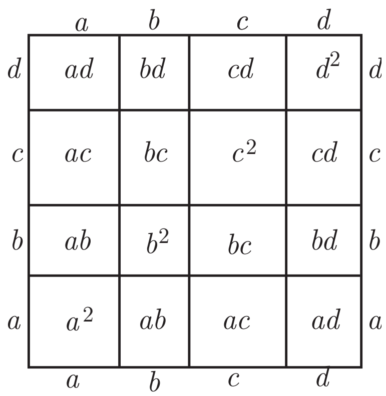
összefüggést. □

A 8. FELADAT MEGOLDÁSA. Akárcsak az előbbi két feladat esetében az $a + b + c + d$ oldalhosszúságú négyzet oldalait felosztjuk



4.2. Ábra. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

a, b, c és d hosszúságú szakaszokra a 4.3. ábrának megfelelően és a megfelelő osztópontokat összekötjük. Ha az eredeti négyzet területét



4.3. Ábra. Négytagú kifejezés négyzetének a szemléltetése

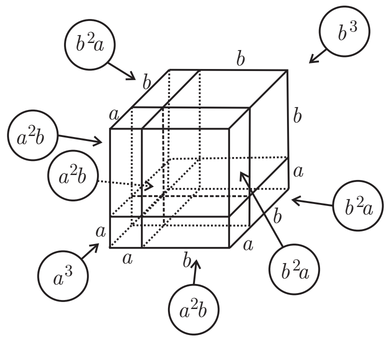
felírjuk kétféle módon, akkor az

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2bd + 2cd + 2da$$

egyenlőséghez jutunk. □

Megjegyzés. Az ábrázolás segítségével tetszőlegesen sok tagú kifejezés négyzetét is felírhatjuk és világosan látszik, hogy az összes lehetséges két tényezős szorzat megjelenik a kifejtésben. Ezt azért fontos kihangsúlyozni, mert enélkül, a binom és a trinom kifejtése alapján a diákok egy része a négytagú kifejezés négyzetének kifejtésére azt sejtheti, hogy abban csak az ab, bc, cd és da szorzatok jelennek meg.

A 9. FELADAT MEGOLDÁSA. Daraboljunk fel egy $a + b$ oldalhosszúságú kockát úgy, hogy keletkezzen egy a és egy b oldalhosszúságú kocka. A feldarabolás látható a 4.4. ábrán. Az eredeti



4.4. ÁBRA. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

kocka térfogata $(a + b)^3$, és ez egyenlő a keletkező kis téglatestek térfogatának összegével. Így az

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

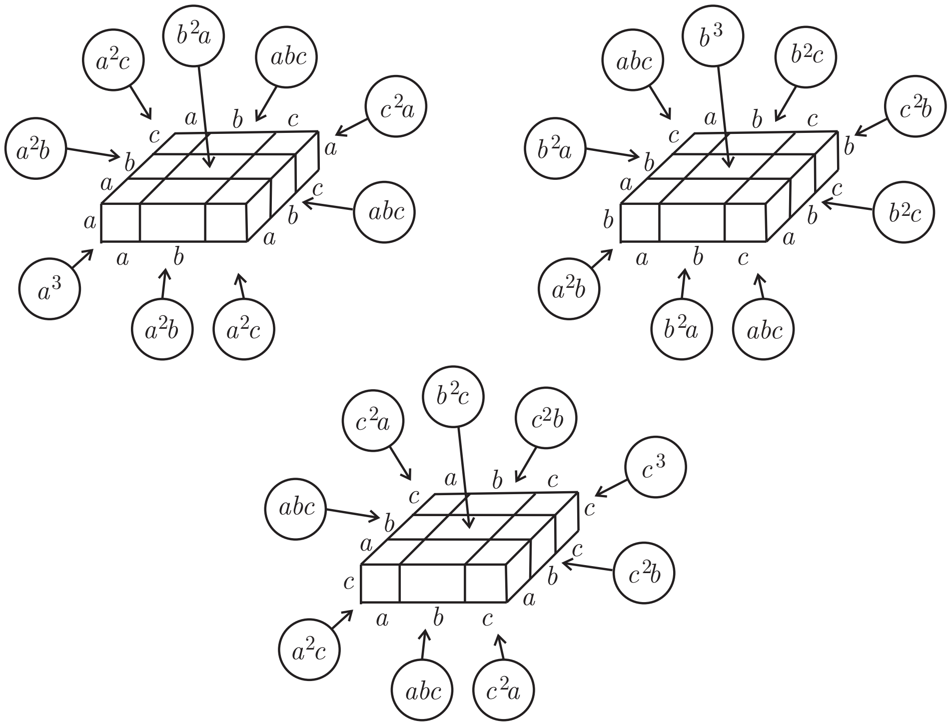
összefüggéshez jutunk. □

A 10. FELADAT MEGOLDÁSA. Osszuk fel egy $a + b + c$ oldalhosszúságú kocka oldalait a, b, illetve c hosszúságú szakaszokra és a megfelelő osztópontokra illeszkedő, az oldallapokkal párhuzamos, síkok segítségével daraboljuk fel a kockát téglatestekre. Így 27 téglatest keletkezik. A 4.5. ábrán a keletkező darabok láthatóak. A 27 téglatest térfogatának az összege egyenlő az eredeti kocka térfogatával, tehát az

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3\left(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2\right)+6abc$$

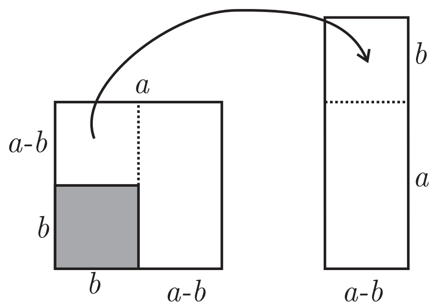
azonosságot kapjuk. □

A 11. FELADAT MEGOLDÁSA. Az a oldalhosszúságú négyzetből kivágunk egy b oldalhosszúságú négyzetet. Ha a megmaradt síkidomot



4.5. ÁBRA. Trinom harmadik hatványának a szemléltetése

átalakítjuk téglalap alakúvá, akkor megkaphatjuk az $a^2 - b^2$ egy felbontását. A 4.6. ábrán látható átalakítás eredményeként az

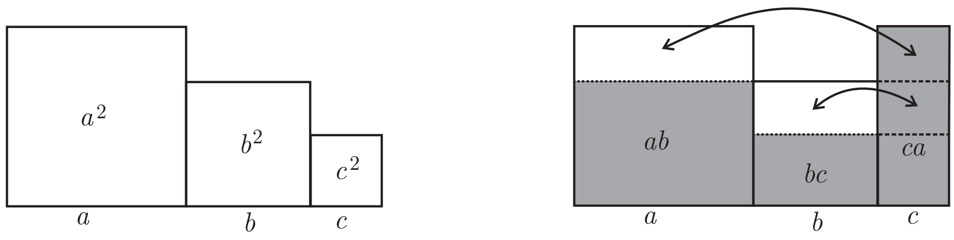


4.6. ÁBRA. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

felbontáshoz jutunk. $\square$

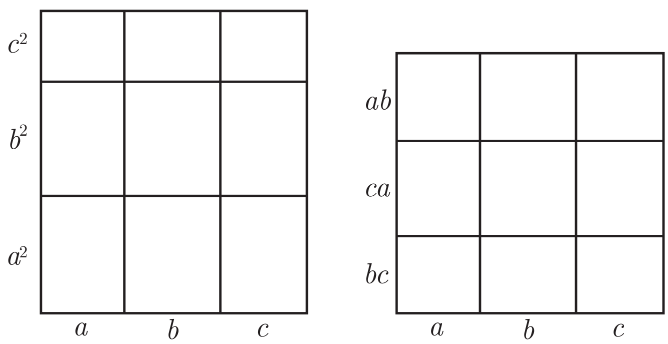
A 12. FELADAT MEGOLDÁSA. Feltételezzük, hogy $a \geq b \geq c$. Ez nem csorbítja az általánosságot, mert az egyenlőtlenség mindkét oldala szimmetrikus. Rajzolunk egymás mellé három négyzetet, amelyek oldalhossza rendre a, b, illetve c (lásd a 4.7. ábrát). A három



4.7. ÁBRA. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

négyzet területe összesen $a^2 + b^2 + c^2$. Ezen az ábrán megjeleníthető az $ab + bc + ca$ kifejezés is, ez a 4.7 második ábráján látható satírozott téglalapok területének összege. Ez viszont nem nagyobb, mint az eredeti négyzetek területének összege, mert a közös részeken kívül a nyilakkal bejelölt megfelelő téglalapok közül az besatírozottak területe nem haladhatja meg a társuk területét (van egy közös oldal és a másik két oldal összehasonlítható a feltételezett rendezés alapján). Ez alapján $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. □

A 13. FELADAT MEGOLDÁSA. A 4.8 ábra első téglalapjának területe az előbbi feladat alapján legalább akkora, mint a második téglalap területe. Az első területe



4.8. ÁBRA. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b,$$

míg a második területe

$$3abc + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

A közös részek elhagyása után az

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

egyenlőtlenséghez jutunk. □

Megjegyzés. A vizuális gondolkodás fontosságának tanulmányozására és további vizuális bizonyítások vizsgálatára ajánljuk a [**19**], [**12**], [**26**] és [**27**] könyveket.

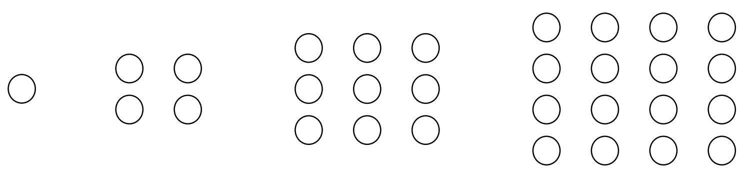
4. A négyzetgyökvonás

14. Feladat. Rakjuk ki tárgyakból (lásd a második paragrafust) vagy szimbólumokból az 500-nál kisebb négyzetszámokat négyzet alakban, és egyszerűsítsük le a reprezentációkat, amennyire csak lehet!

15. Feladat. Rakjuk ki szimbólumokból a 234^2, illetve a 2314^2 számokat, és egyszerűsítsük le a reprezentációkat, amennyire csak lehet!

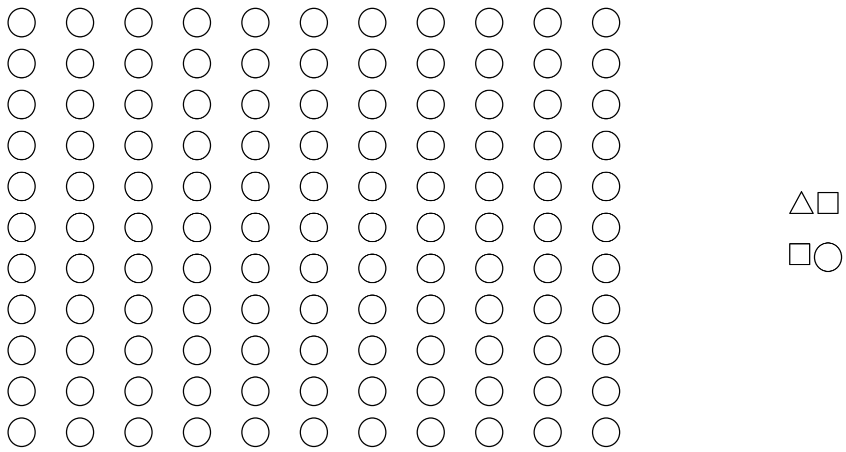
16. Feladat. Az előbbi reprezentációkhoz hasonló reprezentációk alapján döntsük el, hogy a következő számok négyzetszámok-e vagy sem és ha négyzetszámok, akkor számítsuk ki a négyzetgyöküket: 189, 128, $1156, 45369$, 1234321.

A 14. FELADAT MEGOLDÁSA. Az $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 9^2$ számok esetén négyzet alakú konfigurációkat rakunk ki, amlyeknek az oldalhossza a négyzetre emelendő szám. Ezeket nem lehet egyszerűsíteni, ha azt szeretnénk, hogy a négyzet alakzatok megmaradjanak.

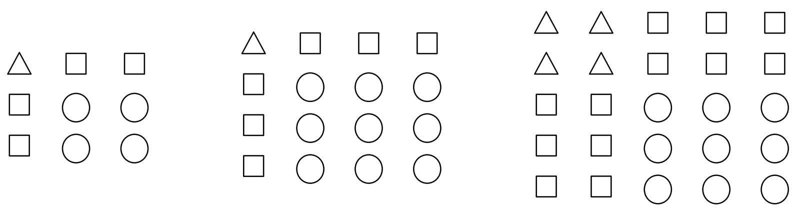


Ha viszont kirakjuk a $10^2 = 100$-at, akkor a 100 darab kör helyettesíthető egy háromszöggel. Alakítsuk át a $11^2, 12^2, 13^2$

reprezentációját a következő ábrának megfelelően. A bal felső sarokban levő 10×10 köröcskéből lesz egy háromszög, az utolsó oszlop első tíz eleméből és az utolsó sor első tíz eleméből lesz egy négyzet és a jobb alsó sarokban levő kör megmarad.



A kapott reprezentáció gyakorlatilag a $11^2 = (10+1)^2$-nek a 6. feladat megoldásában használt ábrázoláshoz hasonló megjelenítése, csak itt nem téglalapokat ábrázolunk, hanem azok területét. Hasonló módon a 12^2, 13^2, illetve 23^2 esetén a következő reprezentációkat kapjuk:



A reprezentációk alapján leolvashatjuk, hogy $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, illetve $23^2 = 529$. □

Megjegyzés. Az elején érdemes a diákokkal elvégeztetni az átalakításokat úgy, hogy mindig a körökből kirakott alakzatokból induljanak ki. Így az alakzatok struktúrája könnyen átlátható és az is világos, hogy az átlóra illeszkedő négyzetek (a számjegyek négyzetének megfelelő négyzet alakú részek) minden eleme önmagában is teljes négyzet kell legyen $(1, 100, 10000)$. Ez a gyökvonás során azért lesz fontos, mert emiatt kell majd hátulról kettes csoportokba osztani a számot.

A 15. FELADAT MEGOLDÁSA. A 234^2 reprezentálásához a $234 = 200 + 30 + 4$ felírást és a háromtagú kifejezés négyzetét használjuk.

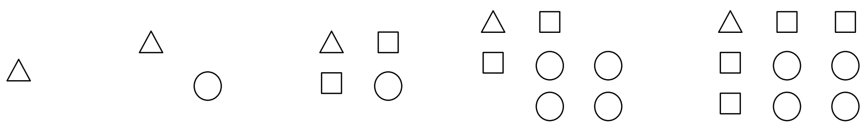
$$\begin{array}{ccccccccc}
\Diamond & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\
\Diamond & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\
\cline{1-2}
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\
\cline{3-5}
\triangle & \triangle & \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\triangle & \triangle & \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\triangle & \triangle & \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\triangle & \triangle & \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\cline{6-9}
\end{array}$$

A reprezentáció alapján leolvasható az eredmény: $234^2 = 54756$. A 2314^2 reprezentálásához a négytagú kifejezés négyzetének ábrázolását használjuk és így szükségünk van két újabb szimbólumra, a 10^5 és a 10^6 jelölésére. Legyen ez a két szimbólum a $\bigstar$ és a $\heartsuit$.

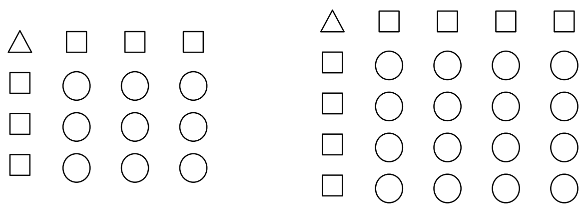
$$\begin{array}{cccccccccc}
\heartsuit & \heartsuit & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \nabla \\
\heartsuit & \heartsuit & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \nabla \\
\cline{1-2}
\bigstar & \bigstar & \Diamond & \Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\
\bigstar & \bigstar & \Diamond & \Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\
\bigstar & \bigstar & \Diamond & \Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\
\cline{3-5}
\Diamond & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \triangle & \square & \square & \square & \square \\
\cline{6-6}
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\cline{7-10}
\end{array}$$

A reprezentáció alapján leolvasható, hogy $2314^2 = 5354596$. Nem kötelező a többtagú kifejezések négyzetének használata, hisz a reprezentációk lépésenként is létrehozhatók úgy, hogy minden lépésben csak a binom négyzetét használjuk. A 2314^2 kirakása során első lépésben kirakhatjuk a $(2 \cdot 1000 + 314)^2$ kifejtésének megfelelő alakzatot vagyis a bal felső 2×2-es négyzetet, az első két sor és oszlop többi elemét (a kétszeres szorzatok), majd a 314^2 helyére, vagyis a jobb alsó saroktól számolt 8×8-as négyzetbe tovább bontjuk a 314-et. □

A 16. FELADAT MEGOLDÁSA. Az előbbi reprezentációkat fordított gondolatmenet alapján is felépíthetjük és így egy természetes gyökvonási algoritmushoz jutunk. Ennek a formális leírása a jól ismert gyökvonási algoritmus. A 196 reprezentálható △□□□□□□□□□ ○ ○ ○ ○ ○ ○ alakban. Ebből elkezdjük kialakítani a négyzet alakú konfigurációt úgy, hogy előbb a százasokból kialakítjuk a legnagyobb négyzetet, amely 1×1-es, majd kezdjük rakosgatni az egyeseket (egyenként) és mindegyik lerakott egyesre kiegészítjük az alakzatot négyzetre a hiányzó tízesek elhelyezésével.



A következő „keretezést” csak úgy tudjuk elvégezni, ha egy tízest elváltunk egyesekre. Így az alakzaton már elhelyezett szimbólumokon kívül még 4 darab négyzet és 12 darab kör áll rendelkezésünkre.



Ezekből pontosan ki tudunk rakni még két sort és két oszlopot, tehát a 196-ból ki tudtunk alakítani egy négyzetet, vagyis a 196 négyzetszám. Az alakzatról azt is leolvashatjuk, hogy 196 négyzetgyöke 14.

Az előbbi eljárás arra is jó, hogy eldönthessük négyzetszám-e egy szám vagy sem. A 128-ból kiindulva kialakíthatjuk $11^2 = 121$-et és a maradék 7 kör nem elégséges, hogy egy nagyobb négyzetet is kialakítsunk. Emiatt a 128 nem lehet teljes négyzet (két egymás utáni természetes szám négyzete közt nincs más négyzetszám).

Az 1156 esetén a $\nabla\triangle\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ reprezentációban az ezrest átváltjuk százasokra, mivel az 1000 nem négyzetszám. Így 11 százasunk van, tehát egy 3×3-as négyzetet lehet belőlük kirakni.

$$\begin{array}{ccc} \triangle & \triangle & \triangle \\ \triangle & \triangle & \triangle \\ \triangle & \triangle & \triangle \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square \\ \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square \\ \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square \\ \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc \\ \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc \end{array}$$

A maradék két százast átváltjuk tízesekre és kezdjük az egyesekből is kirakni a követktező négyzetet. A 25 tízesből és 6 egyesből átváltás nélkül kirakhatjuk a következő két sort és oszlopot. A maradék 13 tízesből átváltunk egyet, és lesz 12 tízes és 12 egyes. Ezekből pontosan kialakítható a következő két sor és oszlop.

$$\begin{array}{ccccccc} \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\ \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\ \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}$$

A kialakult ábráról leolvasható, hogy az 1156 négyzetszám, és 34 a négyzetgyöke.

A 45369 esetén az első lépésben kirakjuk a 2×2-es négyzetet a $\Diamond$-okból, majd százasokból kezdjük a következőt úgy, hogy közben kipótoljuk az alakzatot négyzetre (ezresekkel).

$$\begin{array}{cc} \Diamond & \Diamond \\ \Diamond & \Diamond \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \Diamond & \Diamond & \nabla \\ \Diamond & \Diamond & \nabla \\ \nabla & \nabla & \triangle \end{array}$$

Miután egy sort és egy oszlopot létrehoztunk már csak 1 darab ezresünk, 2 százasunk, 3 tízesünk és 9 egyesünk marad. Ebből a százasokat nem tudjuk felpótolni egy 2×2-es alakzatra, és ha átváltanánk egy ezrest százasokra, akkor a 11 százasból készíthető egy 3×3-as alakzat, de ezt sem tudnánk ezresekkel kiegészíteni, ezért az egyesekre térhetünk.

$$
\begin{array}{cccc}
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle \\
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle \\
\nabla & \nabla & \triangle & \square \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle \\
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle \\
\nabla & \nabla & \triangle & \square & \square \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle \\
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle \\
\nabla & \nabla & \triangle & \square & \square & \square \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc
\end{array}
$$

Mivel sikerült kialakítani a négyzet alakzatot, a vizsgált szám teljes négyzet, és az ábra alapján látható, hogy a 45369 négyzetgyöke 213. $\square$

Megjegyzések. 1. A bemutatott eljárás arra is alkalmas, hogy nem teljes négyzetek esetén kiszámítsuk a szám négyzetgyökének a tizedesjegyeit.

2. A binom köbének térbeli reprezentációja alapján hasonló módon vonhatunk köbgyököt is.

3. Ebben a fejezetben csak a természetes számokkal végzett alapműveletek tárgyi szintű elvégzésével foglalkoztunk. Hasonló módon szerkeszthetünk olyan környezetet, amelyben a negatív számokkal végzett műveletek, illetve a racionális törtekkel végzett műveletek tulajdonságai jelennek meg természetes módon.

4. Láthattuk, hogy a műveletek tárgyi szinten történő elvégzése során a műveletek tulajdonságai is megjelennek, ráadásul általában a műveletek elvégzési algoritmusai előtt. Így például a kommutativitást és a szorzásnak az összeadásra vonatkozó disztributivitását használtuk a szorzás elvégzésénél. A gyökvonás, látható módon, a négyzetreemelés fordított művelete. Az ilyen jellegű absztrakt tulajdonságokat érdemes a tevékenységek során megfogalmazni (a kellő pillanatban), és kihangsúlyozni egyrészt a fontosságukat, másrészt a természetes úton való megjelenésüket.

V. FEJEZET
SZÁMJEGYEK ÉS MINTÁZATOK

Ebben a fejezetben néhány olyan feladattípust vizsgálunk meg, amelyek az általános iskolában és a középiskolában előfordulnak ugyan, de megoldásuk során nagyon gyakran nem a kísérletezés, a felfedezés kerül előtérbe, hanem valamilyen módszer (pl. teljes indukció) vagy azonosság (pl. mértani haladvány első n tagjának összege) formális alkalmazása. Arra szeretnénk rámutatni, hogy a tevékenységek rugalmasabb szervezése és a feladatok nyitott megfogalmazása esetén az ilyen jellegű problémák mennyivel több matematikai élményt nyújthatnak diákjainknak, mint a hagyományos megközelítésben.

1. Feladatok és megoldási stratégiák

1. Feladat. Végezd el a következő műveleteket:

a) 35^2, 335^2, 3335^2;
b) 33^2, 333^2, 3333^2;
c) $11^2, 101^2, 1001^2$;
d) $11^2, 111^2, 1111^2$;
e) $11^3, 101^3, 1001^3$.

Az elvégzett műveletek (és esetleg további kísérletezések, számolások) alapján oldd meg a következő feladatokat:

1. Az előbbi eredményekben találd meg az általános mintázatokat (ha léteznek) és igazold is őket!
2. Számítógép (vagy számológép) segítségével találj az előbbiekhez hasonló mintázatokat!
3. Keress hasonló feladatokat feladatgyűjteményekben, szaklapokban vagy az interneten!
4. Igazold az összes szabályosságot, amit találtál!

Egy kis számolgatás (amelyre célszerű számológépet használni) után azonnal észrevehetjük, hogy a $\underbrace{33...3}_{n-1}5^2$ szám $\underbrace{11...1}_{n-1}\underbrace{22...2}_{n}5$ alakú.

Ebben a megközelítésben a pontos mintázat megtalálása és az egzakt megfogalmazás a tevékenység egyik fontos mozzanata. Az a) alpont alapján a következő tulajdonságot fogalmazzuk meg:

Minden $n \geq 1$ természetes szám esetén

$$\underbrace{33...3}_{n-1}5^2 = \underbrace{11...1}_{n-1}\underbrace{22...2}_{n}5.$$

Ha sikerült megfogalmazni az általános tulajdonságot, akkor a bizonyításra több lehetőség áll rendelkezésünkre. Az egyik lehetőség a szorzás elvégzése, a másik a tízes számrendszerbeli reprezentáció, a mértani haladvány összegképletének és a rövidített számítási képleteknek a használata. Mi csak az elsőt írjuk le (a második lényegében azonos a következő feladat megoldásával.

Bizonyítás. A bal oldalon elvégezzük a szorzást.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & \overline{3} & \overline{3} & \overline{3} & & \overline{3} & \overline{3} & \overline{5} \\
\hline
 & & & & 1 & 6 & 6 & \dots & 6 & 6 & 7 & 5 \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 5 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 5 & & \\
 & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\
1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 5 & & & & & & \\
\hline
1 & \dots & 1 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \\
 & n\text{-}1 & & & & & n & & & & &
\end{array}
\quad \text{x} \quad \underbrace{\overline{3\ 3\ 3\ \ \ 3\ 3}}_{n\text{-}1}\overline{5}$$

A szorzás és az összeadás algoritmusa alapján a bizonyítás teljes. □

A feladatot természetesen megfogalmazhatjuk fordítva is.

2. Feladat. Bizonyítsd be, hogy a következő számok teljes négyzetek

a) $\underbrace{11...1}_{n-1}\underbrace{22...2}_{n}5, \ \forall n \geq 1;$ b) $\underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n}, \ \forall n \geq 1.$

Ebben az esetben is az egyik megoldási stratégia az, hogy kipróbáljuk $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén, hogy minek lehet a négyzete, majd ha sikerül ezt megsejteni, akkor igazoljuk az előbbi módszerrel. Ez a megfogalmazás azonban lehetővé teszi (különösen középiskolában), hogy a hatékonyság nevében formális számolással igazoljuk a tulajdonságot.

MEGOLDÁS. a) A tízes számrendszerbeli reprezentáció alapján írhatjuk, hogy

$$\underbrace{11...1}_{n-1}\underbrace{22...2}_{n}5 = 5 + 2\,(10 + ... + 10^n) + \left(10^{n+1} + ... + 10^{2n-1}\right) =$$

$$= 5 + 10 \cdot \frac{10^{2n-1} - 1}{9} + 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \frac{45 + 10^{2n} + 10^{n+1} - 20}{9} =$$

$$= \frac{25 \cdot (4 \cdot 10^{2n-2} + 4 \cdot 10^{n-1} + 1)}{9} = \frac{25 \cdot (2 \cdot 10^{n-1} + 1)^2}{9} =$$

$$= \left[\frac{5 \cdot (2 \cdot 10^{n-1} + 1)}{3}\right]^2, \quad \forall n \geq 1.$$

Elégséges tehát igazolni, hogy $(2 \cdot 10^{n-1} + 1) \,\vdots\, 3$. A $2 \cdot 10^{n-1} + 1$ szám $n = 1$-re éppen három, míg $n \geq 2$-re 2-vel kezdődik, 1-gyel végződik és a többi számjegye 0, tehát a számjegyek összege 3. Ebből következik, hogy $(2 \cdot 10^{n-1} + 1) \,\vdots\, 3$, tehát $\frac{5 \cdot \left(2 \cdot 10^{n-1} + 1\right)}{3} \in \mathbb{N}$ és így a vizsgált szám teljes négyzet.

b) Haladványok segítségével írhatjuk, hogy

$$\underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n} = \left(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{2n-1}\right) -$$

$$- 2\left(1 + 10 + ... + 10^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{10^{2n} - 1}{9} - 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$$

$$= \frac{10^{2n} - 1 - 2 \cdot 10^n + 2}{9}$$

$$= \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2, \ \forall n \geq 1.$$

Ugyanakkor $10^n - 1 = \underbrace{99...9}_{n}$, tehát $(10^n - 1) \,\vdots\, 3$ és így a vizsgált szám teljes négyzet. Pontosabban az is látszik, hogy $\frac{10^n-1}{3} = \underbrace{33...3}_{n}$, tehát

$$\underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n} = \underbrace{33...3}_{n}^2. \tag{1}$$

□

Természetesen fontos, hogy középiskolában az ilyen jellegű bizonyításokat is tudják elvégezni a diákjaink, de hogyha az ilyen tulajdonságok nem társulnak próbálkozásokkal, kézzelfogható kísérletezéssel, akkor a legtöbb diák számára üres, formális számolás kategóriába kerülnek.

3. Feladat. Számítsd ki az

$$\frac{1}{1,\underbrace{00...0}_{99}1}$$

szám első 200 tizedesjegyét.

A számjegyek meghatározása gyakorlatilag azt jelenti, hogy eléggé szoros alsó és felő becslésre van szükségünk, vagy egyszerűen az osztást kell elvégeznünk. Ahhoz, hogy pontosabb képünk legyen az osztás menetéről érdemes előbb végigszámolni az $\frac{1}{1,1}$, $\frac{1}{1,01}$, $\frac{1}{1,001}$ $\frac{1}{1,0001}$ osztásokat.

Első megoldás. A tervben szereplő osztásokat úgy végezzük el, hogy mindig kétszer annyi tizedesjegyet kapjunk, mint ahány tizedesjegye van a nevezőnek. Így rendre a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$\frac{1}{1,1} = 0,90...$$

$$\frac{1}{1,01} = 0,9900...$$

$$\frac{1}{1,001} = 0,999000...$$

$$\frac{1}{1,0001} = 0,99990000...$$

Sőt, ha alaposabban megfigyeljük az osztásokat, akkor azt is látjuk, hogy az előbbi egyenlőségekben a jobb oldalon szakaszos törteket kapunk és a megjelenő számjegyek pontosan a szakasz számjegyei. Így az a sejtés fogalmazható meg, hogy

$$\frac{1}{1,\underbrace{00...0}_{n}1} = 0,(\underbrace{99...9}_{n+1}\underbrace{00...0}_{n+1}).$$

Ezt igazolhatjuk akár a tízes számrendszerbeli felírás alapján (a megfelelő mértani haladványok összegzésével), akár az osztás elvégzésével. $\square$

Második megoldás. Ha $a = 0,\underbrace{00...0}_{99}1$, akkor

$$\frac{1}{1,\underbrace{00...0}_{99}1} = \frac{1}{1+a} = \frac{1+a-a}{1+a} = 1 - \frac{a}{1+a} = 1 - \frac{a+a^2-a^2}{1+a} =$$

$$= 1 - a + \frac{a^2}{1+a} = 1 - a + a^2 - \frac{a^3}{1+a} = 0,\underbrace{99...9}_{100}\underbrace{00...0}_{99}1 - \frac{a^3}{1+a}.$$

Másrészt $0 < \frac{a^3}{1+a} < a^3 = \frac{1}{10^{300}}$, tehát $\frac{1}{1+a} = 0,\underbrace{99...9}_{100}\underbrace{00...0}_{100}....$ $\square$

Megjegyzés. Keressünk hasonló szabályosságokat (akár a képletekből kiindulva, akár a műveletekből)!

2. További tulajdonságok

Ebben a paragrafusban felsorolunk néhány olyan tulajdonságot, amelyet a diákjaink a foglalkozások során megfogalmaztak (vagy találtak). Természetesen mindezt a teljesség igénye nélkül.

a) $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5 = \underbrace{33...3}_{n}5^2, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6 = \underbrace{33...3}_{n-1}4^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

c) $\underbrace{44...4}_{n}6\underbrace{22...2}_{n}4 = \underbrace{66...6}_{n+1}8^2, \quad n \in \mathbb{N};$

d) $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9 = \underbrace{66...6}_{n-1}7^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

e) $\underbrace{99...9}_{n}\underbrace{00...0}_{n}25 = \underbrace{99...9}_{n}5^2, \quad n \in \mathbb{N};$

f) $\underbrace{99...9}_{n}8\underbrace{00...0}_{n}1 = \underbrace{99...9}_{n+1}{}^2, \quad n \in \mathbb{N};$

g) $5\underbrace{44...4}_{n}7\underbrace{55...5}_{n}6 = 2\underbrace{33...3}_{n}4^2, \quad n \in \mathbb{N};$

h) $2\underbrace{77...7}_{n-1}\underbrace{88...8}_{n}9 = 1\underbrace{66...6}_{n-1}7^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

i) $63\underbrace{99...9}_{n-1}84\underbrace{00...0}_{n}1 = 7\underbrace{99...9}_{n+1}{}^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

j) $\underbrace{44...4}_{2n} - 11 \cdot \underbrace{44...4}_{n} + 9 = \underbrace{66...6}_{n-1}3^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

k) $1\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{00...0}_{n}1 = 1\underbrace{00...0}_{n}1^2, \quad n \in \mathbb{N};$

l) $1\underbrace{00...0}_{n}3\underbrace{00...0}_{n}3\underbrace{00...0}_{n}1 = 1\underbrace{00...0}_{n}1^3, \quad n \in \mathbb{N};$

m) $1\underbrace{00...0}_{n}4\underbrace{00...0}_{n}6\underbrace{00...0}_{n}4\underbrace{00...0}_{n}1 = 1\underbrace{00...0}_{n}1^4, \quad n \in \mathbb{N};$

n) $1\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{00...0}_{n}1 = 1\underbrace{00...0}_{n}1\underbrace{00...0}_{n}1^2, \quad n \in \mathbb{N}.$

Megjegyzések. 1. Az ilyen jellegű gyakorlatok alkalmasak a rövidített számítási képletek felfedezésére/gyakorlására (lásd az utolsó négy tulajdonságot).

2. A mintázatok vizsgálatára más jellegű feladatok is alkalmasak. Ajánlunk még három feladatot:

- Határozzuk meg az $\dfrac{1}{127}$ tört tizedes reprezentációjában a szakasz hosszát!
- Rögzített $n \in \mathbb{N}^*$ esetén határozzuk a $\underbrace{99...9}_{n}$ számnak azt a legkisebb többszörösét, amely nem tartalmaz 9-es számjegyet!
- Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén végtelen sok olyan csupa 1-es és 2-es számjeggyel felírható szám létezik (a 10-es számrendszerben), amely osztható 2^n-nel!

VI. FEJEZET
KERESZTÜL A SIVATAGON

1. Az alapfeladat

1. Feladat. Rendelkezésünkre áll egy terepjáró, amely egyszerre legtöbb 100 liter üzemanyagot tartalmazhat, és amely 100 km távolság megtételéhez 10 liter üzemanyagot használ. Ennek a segítségével át kell jutnunk a sivatagon, amelyben nincs töltőállomás. Szervezzük meg az átjutást (készítsünk átjutási tervet), ha

- a sivatag szélessége 1100 km;
- a sivatag szélessége 1600 km.

Legalább mennyi üzemanyag szükséges az átjutáshoz az előbbi két esetben?

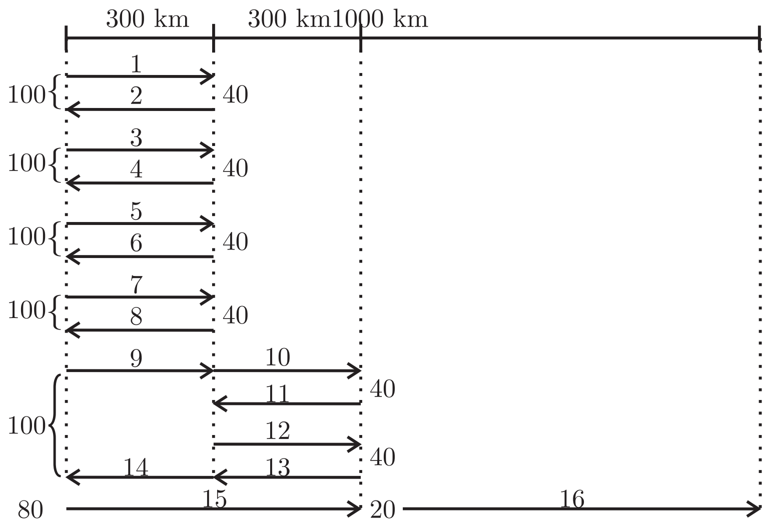
2. Feladat. Az előbbi feltételekkel vizsgáljuk meg, hogy a sivatag milyen D szélessége esetén lehetséges az átjutás, és hogyan függ D-től az átjutáshoz szükséges minimális üzemanyagmennyiség.

Megjegyzés. Érdemes a tevékenységeket csoportban megszervezni és a lehetséges átjutási terveket, az érveket a csoportok bemutatói alapján közösen megbeszélni.

Az 1. feladat megoldása. Mindkét esetben valamilyen lerakatot kell létrehozni a sivatagban. A kérdés csak az, hogy ezt hol érdemes létrehozni és ott mennyi üzemanyagot kell felhalmozni. Az első esetben egy lehetséges megoldás, ha a kiindulási ponttól 300 km-re hozzuk létre a lerakatot. Így itt tudunk hagyni 40 liter üzemanyagot, és visszatérünk a kiindulási pontba. A lerakattól az út végéig számított 800 km megtételéhez 80 liter üzemanyagra van szükség, tehát amikor következő alkalommal indulunk, akkor elégséges 70 liter üzemanyagot tankolni. Ebből 30-at elhasználunk, amíg elérünk a lerakatig, tehát a tankban marad még 40 liter, amely a lerakott 40 literrel pontosan elég a hátralevő út megtételéhez. Tehát 170 liter üzemanyaggal át lehet jutni a sivatagon. Kérdés, hogy ez az átjutás optimális-e vagy sem. Ha a lerakatot a kiindulási ponttól 200 km-re hozzuk létre, akkor 150 liter üzemanyag is elégséges és ha csak 100 km-re, akkor elégséges 130 liter. Ha $100 \cdot d$-vel jelöljük a kiindulási pont és a lerakat távolságát, akkor ahhoz, hogy a lerakattól át lehessen jutni a sivatag túlsó oldalára, szükséges a $d \geq 1$ egyenlőtlenség. Másrészt a lerakat létrehozása $200 \cdot d$ távolság megtételét igényli és ez után ismét meg kell tenni a teljes utat, tehát a felhasznált üzemanyag mennyisége $110 + 20d$. Így az optimális megoldás az, amikor a kiinduló ponttól 100 km-re hozzuk létre a lerakatot. Ugyanakkor, ha több lerakatot hozunk létre, vagy bonyolultabb átjutási tervet készítünk, akkor is legalább ennyi üzemanyagot használunk, tehát ez egy optimális megoldás.

Megjegyzés. A kivitelezés szempontjából nem ez az egyetlen, mert ha az első út alkalmával csak 80 litert tankolunk, akkor 60 liter üzemanyagot tehetünk le a lerakatnál. Ha a második alkalommal 50 liter üzemanyagot tankolunk, akkor szintén eljutunk a sivatag túlsó oldalára. A felhasznált üzemanyag mennyisége és a lerakat helye ugyanaz, mint az előbbi megoldásban, de a kivitelezés nem ugyanaz. Ez azt mutatja, hogy ha a tankolt mennyiségeket változóknak tekintjük, akkor az optimális eset végtelen sok lehetséges kivitelezését kapjuk.

A második esetben látható, hogy egy lerakat nem elégséges, hisz ez egyrészt nem lehetne a kiindulási ponttól több, mint 500 km-re, másrészt a túlsó szélétől több, mint 1000 km-re. Így legalább két lerakat szükséges. Ha például az első lerakatot 300 km-re, a másodikat az elsőtől ismét 300 km-re helyezzük el, akkor a kiindulási ponttól 5-ször megtéve az utat az első lerakatig és vissza elérhetjük, hogy az első lerakatnál legyen 200 liter üzemanyag. Ugyanakkor azt is elérhetjük, hogy a második lerakathoz eljusson ebből 80 liter (mielőtt utolsó alkalommal visszatérnénk a kiindulási pontba, kétszer megtesszük a két lerakat közti utat). Így, ha 80 liter üzemanyagot tankolunk a kezdőpontnál, akkor a második lerakatnál lesz a tankban 20 liter, ami az ott található 80 literrel együtt elégséges ahhoz, hogy átjussunk. Ez természetesen nem valószínű, hogy az optimális megoldás, hisz ebben az esetben 580 liter üzemanyagot használtunk (lásd a 6.1.



6.1. Ábra. Egy lehetséges átjutási terv a második esetben

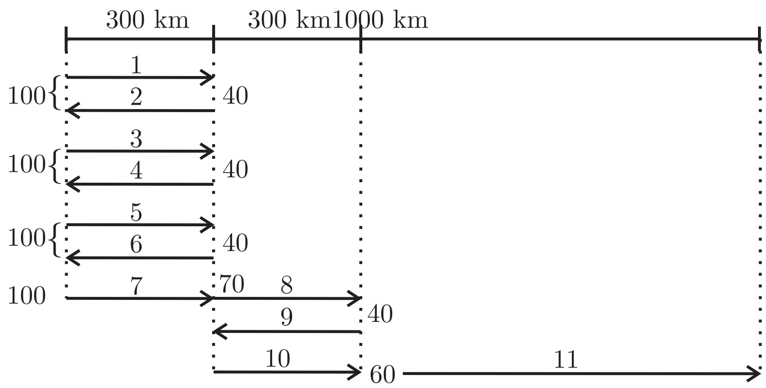
ábrát). Világos, hogy ha csak két lerakatot hozunk létre, akkor az utolsó lerakatot a kezdőponttól 600 km-re kell létrehoznunk. Ha az első lerakat a kezdőponttól $100d_1$ távolságra van, akkor a két lerakat közti távot legalább 3-szor és emiatt a kezdőpont és az első lerakat közti távolságot legalább 5-ször kell megtennünk. Ha ezeket a távolságokat többször tesszük meg, akkor növekszik a fogyasztás is, tehát megvizsgálhatjuk, hogy létezik-e olyan átjutás, ahol az első szakaszt 5-ször és a másodikat 3-szor tesszük meg. Ebben az esetben legtöbb 300 liter üzemanyagot használnánk el (mert háromszor indulunk a kiindulási pontról), és ezzel a teljes távot egyszer tennénk meg, az első 600 km-t még kétszer és az első $100d_1$ távolságot még kétszer. Így viszont a $280 + 20d_1 \leq 300$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Másrészt az első lerakathoz legfeljebb $2(100 - 20d_1) + 100 - 10d_1$ üzemanyag jut el, és ez nem lehet sem kevesebb, mint 100, sem több, mint 200. Ez alapján a $2 \leq d_1 \leq 4$ egyenlőtlenség adódik. Mivel ez ellentmond a $d_1 \leq 1$ egyenlőtlenségnek, az átjutás nem lehetséges ezekkel a feltételekkel. Ha az első szakaszt 7-szer teszi meg, a másodikat 3-szor és az utolsót 1-szer, akkor az első lerakathoz legfeljebb $3(100-20d_1)+100-10d_1$ liternyi üzemanyag jut el. Ezt kétszeri továbbindulás során használjuk fel, tehát

$$100 \leq 3(100 - 20d_1) + 100 - 10d_1 \leq 200.$$

Ez alapján $\frac{20}{7} \leq d_1 \leq \frac{30}{7}$. Másrészt a második lerakathoz $400 - 70d_1 - 30d_2$ liter üzemanyag érkezhet. Ahhoz, hogy innen továbbjuthassunk ez nem lehet kevesebb, mint 100 liter és ennél többre nincs is szükség az átjutáshoz. Így a

$$\begin{cases} 7d_1 + 3d_2 = 30 \\ d_1 + d_2 = 6 \end{cases}$$

rendszerhez jutunk, amelynek a megoldása $d_1 = d_2 = 3$. Ez teljesíti a $\frac{20}{7} \leq d_1 \leq \frac{30}{7}$ feltételt, tehát ezzel egy lehetséges kivitelezés lerakatainak helyét határoztuk meg.



6.2. Ábra. Egy lehetséges átjutási terv a második esetben

Az átjutás kivitelezési tervét tartalmazza a 6.2. ábra. Látható, hogy a terv szerinti fogyasztás 400 liter. Az előbbi gondolatmenet azt is mutatja, hogy két lerakattal ennél kevesebb üzemanyaggal nem juthatunk át a sivatagon. Vizsgáljuk azt az esetet is, amikor 3 lerakatot hozunk létre. Ebben az esetben az út utolsó szakaszát csak egyszer fogjuk megtenni, az utolsó előtti szakaszt legalább 3-szor (mert az utolsó lerakatot létre kell hozni), a másodikat legalább 5-ször (ha csak háromszor járnánk be, akkor vagy fölösleges lenne a lerakat, vagy lehetne csökkenteni a teljes fogyasztást) és az elsőt legalább 7-szer (az előbbihez hasonló okok miatt). Ha az első szakaszt több, mint 7-szer járjuk be, akkor a teljes fogyasztás 400 liternél nagyobb, tehát más esetet nem is kell vizsgálnunk. Ebben az esetben négyszer indulunk a kiindulópontból és így az onnan elvett üzemanyagmennyiség $300 + v$, ahol $0 < v \leq 100$. Az első lerakathoz $300+v-70d_1$ liter, a másodikhoz $300+v-70d_1-50d_2$ liter és az utolsóhoz $300+v-70d_1-50d_2-30d_3$ liter üzemanyag jut. Ez alapján a teljes fogyasztás $(300+v)$ felírható $70d_1 + 50d_2 + 30d_3 + 100$ alakban, vagyis ennek a minimumát keressük. Ugyanakkor teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségeknek (ezek fejezik ki azt, hogy a lerakatoktól lehetséges annyiszor indulni, ahányszor feltételeztük):

$$\begin{aligned} v \leq& \quad 70d_1 && \leq 100+v \\ 100+v \leq& \quad 70d_1+50d_2 && \leq 200+v \end{aligned}$$

Ezekkel a feltételekkel a teljes fogyasztás akkor a legkisebb, ha $d_1 = \frac{v}{70}$, $d_2 = \frac{100}{50} = 2$ és $d_3 = \frac{100}{30} = \frac{10}{3}$. Ezeknek a távolságoknak a megtételéhez $300 + \frac{140}{3}$ liter üzemanyag szükséges, tehát ez jelenti a távolság megtételéhez szükséges minimális üzemanyag mennyiséget. $\square$

2. Az általános eset

Az előbb bemutatott megoldás egy foglalkozáson kialakult gondolatmenetet követ, viszont sokkal alkalmasabb a problémák megértésére, mint a lerövidített megoldás. Sőt az is észrevehető az előbbi esetekből, hogy mit érdemes és mit nem érdemes nyomon követni. A második feladat megoldásának leírása során egy hatékonyabb gondolatmenetet követünk.

A 2. FELADAT MEGOLDÁSA. Ahhoz, hogy a D távolságot megtegyük, a $D - 1000$ távolságnak megfelelő pontban rendelkeznünk kell 100 liter üzemanyaggal. A $D - 1000 - \frac{1000}{3}$ pontban ugyanakkor rendelkeznünk kell legalább 200 liter üzemanyaggal (akkor is, ha nem ebben a pontban van a lerakat), mert az utolsó előtti szakaszon legalább háromszor kell végighaladni és az előtte lévőn ennél többször. Hasonló módon a $D - 1000 - \frac{1000}{3} - \frac{1000}{5}$ pontban legalább 300 liter és általában a $D - 1000 \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ pontban legalább $100(n+1)$

liter üzemanyag szükséges. Mivel az $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ általános tagú sorozat nem korlátos, tetszőleges szélességű sivatagon át lehet jutni. Ugyanakkor, ha a sivatag szélessége pontosan

$$D_n = 1000 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1},$$

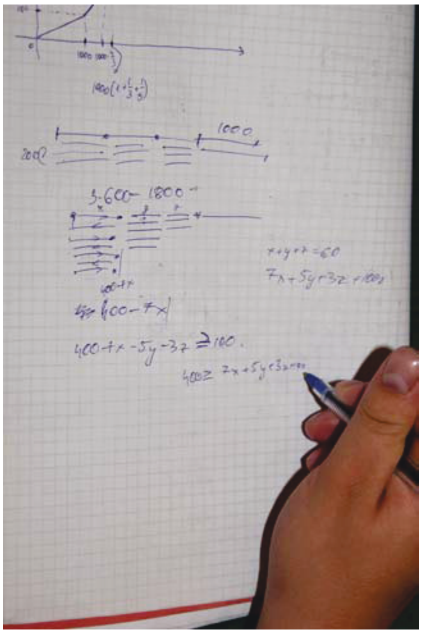
akkor a lerakatok (beleértve a kiinduló pontot és a végpontot) közti távolságok rendre

$$\frac{1000}{2n+1}, \frac{1000}{2n-1}, \ldots, \frac{1000}{5}, \frac{1000}{3}, 1000.$$

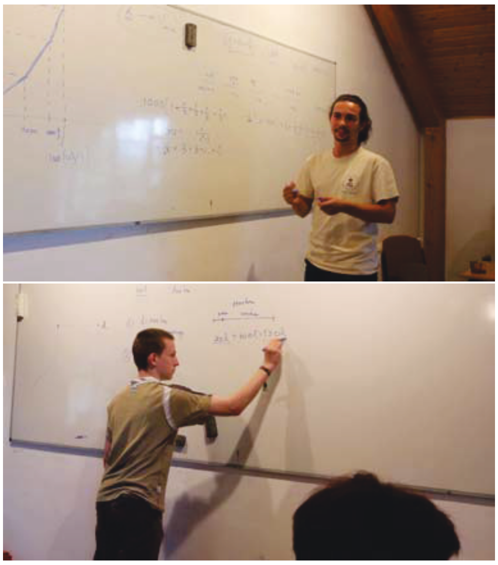
Ha $D_n < D < D_{n+1}$, akkor az első útszakasz hossza $D - D_n$ és ezt $(2n+3)$-szor kell bejárni, tehát a minimálisan szükséges üzemanyag mennyiség $100(n+1) + (2n+3) \cdot \frac{D-D_n}{10}$. $\square$

Megjegyzés. A feladat megoldását 1947-ben közölte N.J. Fine az American Mathematical Monthly folyóiratban (24-31. oldal). A feladat sok tanár és sok matematikus érdeklődését felkeltette, így több érdekes feladatokat tartalmazó gyűjteményben is megtalálható (pl. L.A. Graham: Ingenious Mathematical Problems and Methods, Dover Publications, 1959; Martin Gardner: The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, University Of Chicago Press, 1987; Martin Gardner: My Best Mathematical and Logic Puzzles, Dover Publications, 1994) és napjainkig több általánosítása, variánsa jelent meg (legtöbb cikk „Jeep problem"-ként hivatkozik az eredeti feladatra). A feladatot Hollandiában a Mathematics B-Day nevű versenyen diákoknak is kitűzték és megtalálható a Primas projekt honlapján (www.primas-proiect.eu) is.

6.3. ÁBRA. Csapatmunka a tervezésnél



6.4. ÁBRA. Modellalkotás és optimizálás a második esetben



6.5. ÁBRA. A megoldás bemutatása

Fotók&videók

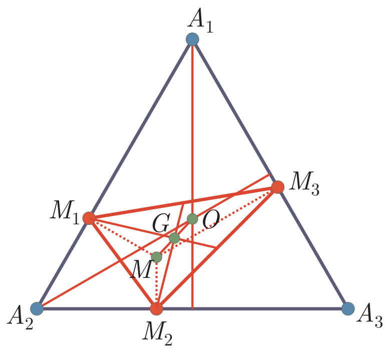
VII. FEJEZET
TALPPONTI HÁROMSZÖGEK

Ebben a fejezetben egy geometria feladatból indulunk ki, és annak a lehetséges általánosításait próbáljuk feltérképezni. A bizonyítások során a komplex számok geometriáját, valamint vektorgeometriát alkalmazunk. A tevékenységeink során a tulajdonságok általánosításainak felfedezésére, a sejtések ellenőrzésére dinamikus geometriai szoftvereket (Geonext, Geobegra, Cabri) használtunk.

1. Az alapfeladat

1. Feladat. Igazoljuk, hogy ha M_1, M_2 és M_3 egy tetszőleges M pontnak az $A_1A_2A_3$ egyenlő oldalú háromszög A_1A_2, A_2A_3 és A_3A_1 oldalára eső merőleges vetülete, akkor az $M_1M_2M_3$ háromszög súlypontja az OM szakasz felezőpontja, ahol O az $A_1A_2A_3$ háromszög középpontja.

Megjegyzés. A továbbiakban az $M_1M_2M_3$ háromszöget az M-hez tartozó talpponti háromszögnek nevezzük.



7.1. Ábra. Talpponti háromszög súlypontja

Célunk az, hogy a feladat megoldásából kiindulva próbáljunk általánosabb tulajdonságokat megfogalmazni, felfedezni, majd ezek közül néhányat bizonyítani. Ennek érdekében előbb ismertetjük a feladat egy megoldását.

Bizonyítás. Az $A_1A_2A_3$ háromszög középpontját választjuk origónak, a háromszög köré írható kör sugarát egységnek, valamint az OA_3 egyenest Ox tengelynek. Így az A_1, A_2 és A_3 csúcsoknak megfelelő komplex számok (a csúcsok affixumai)

$$a_1 = \varepsilon, \quad a_2 = \varepsilon^2 \text{ és } a_3 = \varepsilon^3,$$

ahol $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon \neq 1$. A továbbiakban minden U pont affixumát a megfelelő kis betűvel jelöljük. A koordináta-rendszer megválasztásának következtében az m_1 könnyen kiszámolható, hisz a valós része $-\frac{1}{2}$ (mivel rajta van az A_1A_2 egyenesen) és az imaginárius része ugyanaz, mint az m imaginárius része (a merőleges vetítés miatt). Így

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{m - \overline{m}}{2}.$$

Az m_2 kiszámításához forgassuk el trigonometriai irányban $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ szöggel az ábrát. Így az M_2 pont a $Q(\varepsilon^2 \cdot m)$ pontnak az A_1A_2 oldalra eső merőleges vetületébe transzformálódik, tehát

$$m_2 \cdot \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2 \cdot m - \left(\overline{\varepsilon^2 \cdot m}\right)}{2},$$

vagyis

$$m_2 = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon + \frac{m - \varepsilon^2 \cdot \overline{m}}{2}.$$

Hasonló meggondolás alapján

$$m_3 = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 + \frac{m - \varepsilon \cdot \overline{m}}{2}.$$

Az előbbi összefüggések alapján írhatjuk, hogy

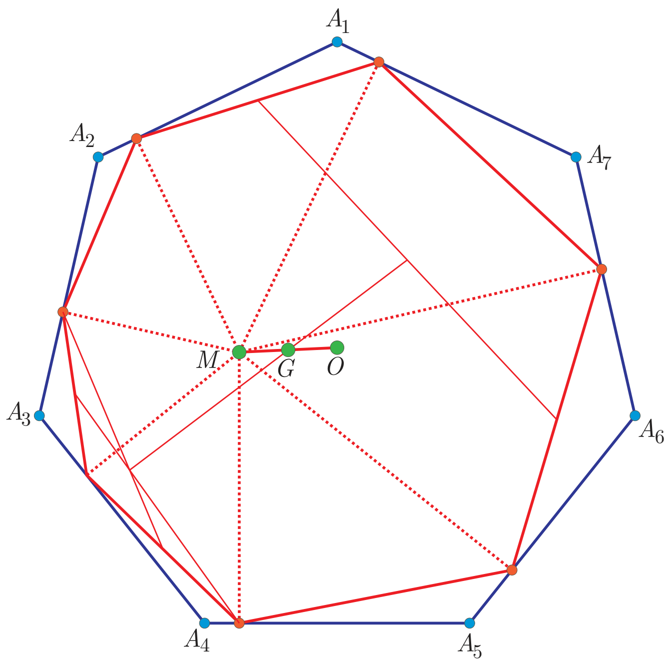
$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} = \frac{m}{2},$$

vagyis az $M_1M_2M_3$ háromszög súlypontja az OM szakasz felezőpontja. □

2. Sejtések és bizonyítások

Sokféle általánosítás lehetséges, első lépésben megpróbálhatjuk az egyenlő oldalú háromszöget helyettesíteni valamilyen más alakzattal, például általános háromszöggel, szabályos sokszöggel, szabályos tetraéderrel vagy szabályos szimplexszel. Ugyanakkor megváltoztathatjuk a vetületek szerkesztési módját, vagy a súlypont helyett valamilyen más nevezetes pontot is vizsgálhatunk. Mindezeket a lehetőségeket érdemes valamilyen dinamikus geometriai program segítségével megvizsgálni. Egy kis kísérletezés során azonnal észrevehetjük, hogy szabályos sokszögre is hasonló tulajdonság teljesül. Ezt fogalmazzuk meg a következő tételben.

7.1. Tétel. *Jelöljük $1 \leq i \leq n$ esetén M_i-vel az M pont merőleges vetületét az $A_1A_2A_3\dots A_n$ szabályos sokszög A_iA_{i+1} oldalára ($A_{n+1} = A_1$) és O-val a szabályos sokszög középpontját. Az $M_1M_1M_2\dots M_n$ sokszög súlypontja az OM szakasz felezőpontja.*



7.2. Ábra. Talpponti sokszög súlypontja

Bizonyítás. Elsőnek vizsgáljuk azt az esetet, amikor n páratlan. A sokszög csúcsait választhatjuk az

$$a_j = \varepsilon^j = \cos\frac{2j\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2j\pi}{n}, \quad 1 \leq j \leq n$$

affixumú pontoknak. Mivel $n = 2k + 1$, $A_k A_{k+1} \parallel Oy$, tehát

$$m_k = \cos\frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{m - \overline{m}}{2}.$$

Forgatásokat használva írhatjuk, hogy

$$m_j \cdot \varepsilon^{k-j} = \cos\frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{m \cdot \varepsilon^{k-j} - (\overline{m \cdot \varepsilon^{k-j}})}{2}$$

ha $1 \leq j \leq 2k + 1$. De $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^{2k} = \varepsilon^{-1}$, tehát

$$m_j = \varepsilon^{k+j+1} \cos\frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{m - \varepsilon^{2j+1} \cdot \overline{m}}{2} \quad \text{ha} \quad 1 \leq j \leq 2k + 1.$$

Ezekből és a $\sum\limits_{v=0}^{n-1} \varepsilon^v = 0$ egyenlőségekből következik, hogy

(2)
$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{m}{2}.$$

Ha n páros ($n = 2k$), akkor a sokszög csúcsait választhatjuk az

$$a_j = z_0 \varepsilon^j = z_0 \left(\cos\frac{2j\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2j\pi}{n}\right), \quad 1 \leq j \leq n,$$

pontokban, ahol

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2k} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2k}.$$

Ebben az esetben

$$m_{k-1} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2k} + \frac{m - \overline{m}}{2},$$

és így forgatásokat használva

$$m_j \cdot \varepsilon^{k-j-1} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2k} + \frac{m \cdot \varepsilon^{k-j-1} - (\overline{m \cdot \varepsilon^{k-j-1}})}{2}$$

ha $1 \leq j \leq 2k$. Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy

(3)
$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{m}{2}.$$

A (2) és (3) egyenlőségek alapján a tulajdonság bizonyítása teljes. □

Megjegyzés. Ha $n = 2k$, akkor az $\frac{m_j+m_{j+k}}{2}$ komplex számnak megfelelő pont az M vetülete az A_jA_{j+1} oldallal párhuzamos szimmetriatengelyre. Így az

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{m_j+m_{j+k}}{2} = \frac{m}{2}$$

egyenlőség azt is kifejezi, hogy az M-nek az oldalakkal párhuzamos szimmetriatengelyekre való vetületei által meghatározott sokszög súlypontja az OM szakasz felezőpontja. Ezt a tulajonságot tekinthetjük úgy, mint a 7.1 tulajdonságot, egy elfajult k oldalú szabályos sokszögre alkalmazva (a sokszög gyakorlatilag az origó).

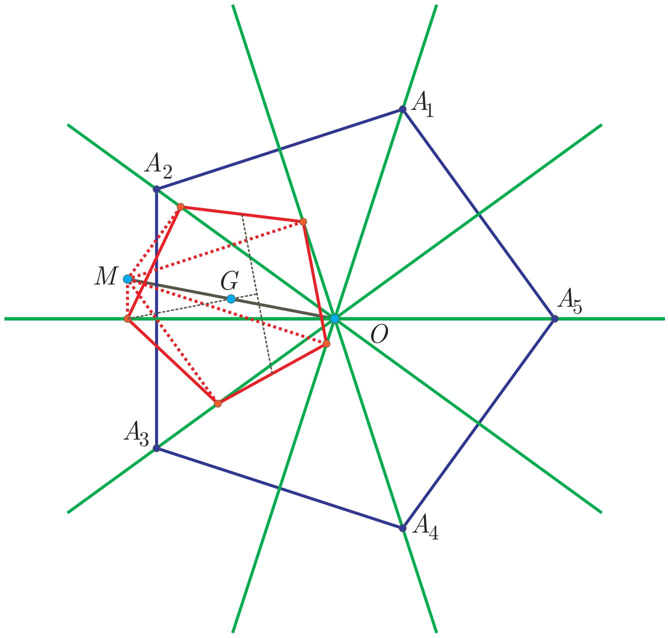
Az előbbi megjegyzés azt sugallja, hogy nemcsak az oldalakon meghatározott vetületeket lehet (és érdemes) vizsgálni, hanem a szimmetriatengelyekre eső vetületeket is. Valamilyen dinamikus geometriai program segítségével kísérleteket hajthatunk végre. Így megfogalmazhatjuk a következő tulajdonságot:

7.2. Tétel. *Egy tetszőleges M pontnak egy n oldalú szabályos sokszög szimmetriatengelyeire eső vetületei által meghatározott sokszög súlypontja az M-et az eredeti sokszög középpontjával összekötő szakasz felezőpontja.*

Bizonyítás. A bizonyítás menete a 7.1. tétel bizonyításához hasonló. Ha a koordinátarendszert úgy választjuk, hogy az egyik szimmetriatengely épp az Oy tengely legyen, akkor az erre eső vetület affixumának valós része 0 és az imaginárius része megegyezik az M imaginárius részével. Így gyakorlatilag ugyanazokat a számolásokat kell elvégezni, mint a 7.1. tétel bizonyításában, csak a valós rész kiszámításában $\cos\frac{(2k-1)\pi}{2k}$, illetve $\cos\frac{2k\pi}{2k+1}$ helyett 0-val kell számolni. Így a tulajdonság igaz. □

Megjegyzés. Az általunk szervezett 4 foglalkozás során a 7.1. tételt minden csoportnak sikerült megfogalmaznia, míg a 7.2. tételt csak egy alkalommal fogalmazta meg az egyik csoport.

Annak érdekében, hogy magasabb dimenzióban is általánosítani tudjuk az előbbi tulajdonságot, előbb próbáljunk megfogalmazni egy



7.3. Ábra. Szabályos sokszög szimmetriatengelyeire eső vetületek

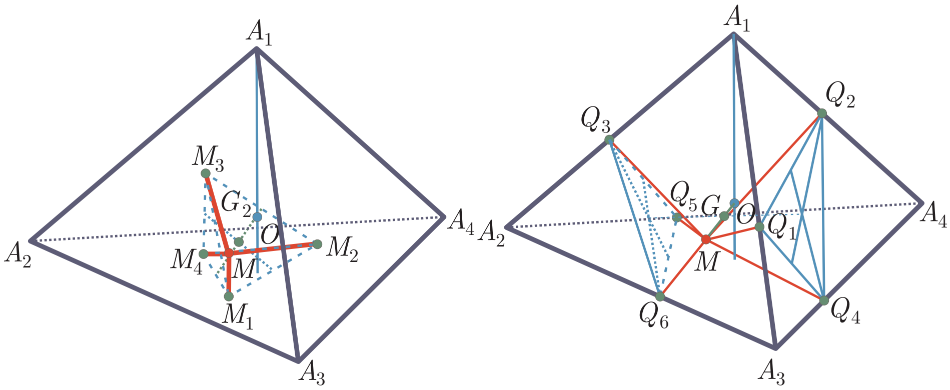
hasonló tulajdonságot szabályos tetraéderre. Ennek kikísérletezéséhez 3 dimenziós szerkesztőprogram szükséges (például az Euler 3D).

7.3. Tétel. *Az $A_1A_2A_3A_4$ szabályos tetraéder középpontja O, M_i ($1 \le i \le 4$) egy tetszőleges M pont vetülete a tetraéder oldallapjaira és Q_i, $1 \le i \le 6$ az M vetületei az élekre. Igaz a következő kijelentés:*

a) *Az $M_1M_2M_3M_4$ tetraéder G_2 súlypontja illeszkedik az OM szakaszra és teljesíti az $\frac{OG_2}{OM} = \frac{2}{3}$ egyenlőséget.*
b) *A $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ pontrendszer G_1 súlypontja illeszkedik az OM szakaszra és teljesíti az $\frac{OG_1}{OM} = \frac{1}{3}$ egyenlőséget.*

Bizonyítás. Előbb belátjuk, hogy a két tulajdonság ekvivalens egymással. Az 1. feladat alapján (lásd a 7.4. ábrát):

$$\frac{\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OM_1}}{2} = \frac{\overrightarrow{OQ_4} + \overrightarrow{OQ_5} + \overrightarrow{OQ_6}}{3},$$



7.4. Ábra. Tetraéderre vonatkozó vetületek

$$\frac{\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{OM_2}}{2}=\frac{\overrightarrow{OQ_4}+\overrightarrow{OQ_1}+\overrightarrow{OQ_2}}{3},$$
$$\frac{\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{OM_3}}{2}=\frac{\overrightarrow{OQ_3}+\overrightarrow{OQ_5}+\overrightarrow{OQ_2}}{3}$$

és

$$\frac{\overrightarrow{OO_4}+\overrightarrow{OM_4}}{2}=\frac{\overrightarrow{OQ_1}+\overrightarrow{OQ_3}+\overrightarrow{OQ_6}}{3},$$

(ahol $Q_1 \in A_1A_3, Q_2 \in A_1A_4, Q_3 \in A_1A_2, Q_4 \in A_4A_3, Q_5 \in A_2A_4, Q_6 \in A_2A_3$, $\overrightarrow{AB}$ az A-ból B-be mutató vektor és O_i a lapok középpontjai). Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OM_i}=\frac{2}{3}\cdot\sum_{i=1}^{6}\overrightarrow{OQ_i},$$

mivel $\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}\overrightarrow{OO_i}=0$. Így

$$\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OG_2}=\overrightarrow{OG_1},$$

tehát a két tulajdonság ekvivalens.

Az első tulajdonság igazolásának céljából a tetraéder csúcspontjait az $A_1\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$, $A_3\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$, $A_4\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ pontoknak választjuk (ez gyakorlatilag, az origó, a tengelyek és az egység megválasztásával ekvivalens) és kiszámítjuk az M_i pontok koordinátáit. A lapok egyenlete rendre:

$$\begin{aligned}
A_1A_2A_3 &: \quad -2\sqrt{3}y+\sqrt{3}z-\sqrt{2}=0,\\
A_1A_2A_4 &: \quad 3\sqrt{2}x-\sqrt{6}y-\sqrt{3}z+\sqrt{2}=0,\\
A_1A_3A_4 &: \quad 3\sqrt{2}x+\sqrt{6}y+\sqrt{3}z-\sqrt{2}=0 \quad \text{és}\\
A_3A_2A_4 &: \quad z=0.
\end{aligned}$$

Másrészt az (x_0, y_0, z_0) koordinátájú pontnak az $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ egyenletű síkra eső vetületének az x koordinátája

$$x = x_0 - A\cdot\frac{A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D}{A^2+B^2+C^2},$$

tehát

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_4 = x_0,\\
x_2 &= x_0-3\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}\cdot x_0+\sqrt{6}\cdot y_0+\sqrt{3}\cdot z_0-\sqrt{2}}{27} \quad \text{és}\\
x_3 &= x_0-3\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}\cdot x_0-\sqrt{6}\cdot y_0-\sqrt{3}\cdot z_0+\sqrt{2}}{27}.
\end{aligned}$$

Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{2x_0}{3}.$$

Hasonló összefüggés teljesül az y és a z koordinátákra is, tehát G_2 rajta van az OM szakaszon és teljesíti az $\frac{OG_2}{OM}=\frac{2}{3}$ egyenlőséget. □

Az előbbi tulajdonságokra alapozva megfogalmazhatjuk a következő sejtést egy n dimenziós szimplexre vonatkozóan:

7.4. Sejtés. Ha az $A_1A_2A_3...A_nA_{n+1}$ szabályos n-szimplexben G_k-val jelöljük egy tetszőleges M pontnak a k dimenziós lapokra eső vetületei által meghatározott pontrendszer súlypontját, akkor $G_k \in OM$ és teljesíti az $\frac{OG_k}{OM}=\frac{k}{n}$, $1\le k\le n-1$, egyenlőséget, ahol O a szimplex középpontja.

Megjegyzés. A foglalkozásokon a 7.3. tételt minden csoport megfogalmazta, míg a 7.4. sejtést csak egy csoport. Ugyanakkor a 7.3. tétel bizonyításának elemzése során a csapatok egyöntetűen egy más megközelítés szükségességét fogalmazták meg az általános eset vizsgálata érdekében.

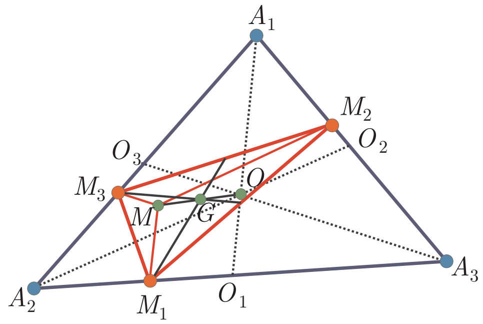
A megfogalmazott sejtés igazolható a 7.3. tételhez hasonló módon, a számolások viszont bonyolultabbak. Annak érdekében, hogy az általános esetet egyszerűbben lehessen igazolni, előbb a két dimenziós változatnak keresünk egy olyan általánosítást, amely más eszközökkel is egyszerűen bizonyítható, és amelynek a többdimenziós általánosítása a megfogalmazott sejtésnél általánosabb. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, érdemes átfogalmazni az eredeti feladatot úgy, hogy ne merőleges vetületek szerepeljenek benne, hanem csak olyan fogalmak, amelyeknek a kezelése egyszerűbb (súlypontok, arányok, párhuzamosság). Egy szabályos sokszögben a középpontot az oldal felezőpontjával összekötő szakasz merőleges az oldalra, tehát a merőleges vetületet felfoghatjuk úgy is, mintha az M pontból az O középpontot az oldal O_i középpontjával összekötő szakasszal húznánk párhuzamost, és annak az oldallal való metszetét szerkesztenénk meg. Ez egy tetszőleges háromszögben is elvégezhető. Mivel az egyenlő oldalú háromszögben a középpont súlypont is, ezért a következő sejtés az eredeti feladat általánosítása.

7.5. Sejtés. Az $A_1A_2A_3$ háromszögben $O_1 \in A_2A_3$, $O_2 \in A_3A_1$ és $O_3 \in A_1A_2$ az oldalak felezőpontjai és $A_1O_1 \cap A_2O_2 \cap A_3O_3 = \{O\}$. Ha M egy tetszőleges pont a síkban és $M_1 \in A_2A_3$, $M_2 \in A_3A_1$, valamint $M_3 \in A_1A_2$ úgy, hogy $MM_1||OO_1$, $MM_2||OO_2$, illetve $MM_3||OO_3$, akkor az $M_1M_2M_3$ háromszög súlypontja az OM szakasz felezőpontja.

A sokszögekre vonatkozó tulajdonság általánosítása lenne a következő tulajdonság:

7.6. Sejtés. Az $A_1A_2 \ldots A_n$ sokszögben jelölje $O_1, O_2, \ldots, O_n$ rendre az A_1A_2, $A_2A_3, \ldots,$ A_nA_1 oldalak felezőpontját és O a sokszög súlypontját. Ha egy tetszőleges M pont esetén tekintjük az $M_i \in A_iA_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$ pontokat úgy, hogy $MM_i||OO_i$, $1 \leq i \leq n$, akkor az $M_1M_2 \ldots M_n$ sokszög súlypontja az OM szakasz felezőpontja.

Geometriai szerkesztőprogramok segítségével megvizsgálhatjuk az előbbi sejtések sajátos eseteinek a helyességét. A szerkesztések alapján



7.5. ÁBRA. Talpponti háromszög általános háromszögben

a 7.5. sejtés igaznak tűnik, de a 7.6 sejtésre azonnal találunk ellenpéldákat $n \geq 4$ esetén.

Megjegyzés. Annak a problémának a vizsgálatával, hogy milyen további feltételeket kell a sokszögnek teljesítenie ahhoz, hogy a 7.6. sejtés igaz legyen, nem foglalkoztunk. A foglalkozásokon az egyik csoport azt vette észre, hogy a 7.6. sejtés igaz trapézokra.

A 7.5. SEJTÉS BIZONYÍTÁSA. Minden pont helyzetvektorát a megfelelő kis betűvel jelöljük. Így a feltételek alapján írhatjuk, hogy $o = \frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$, $o_1 = \frac{1}{2}(a_2+a_3)$, $o_2 = \frac{1}{2}(a_3+a_1)$ és $o_3 = \frac{1}{2}(a_1+a_2)$. Mivel M tetszőleges pont a síkban, létezik $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$m = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

és $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Ugyanakkor $M_1 \in A_2A_3$, tehát létezik $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $m_1 = \lambda_1 a_2 + (1-\lambda_1)a_3$. Az $MM_1 || OO_1$ feltétel azt jelenti, hogy

$$m - m_1 = c(o - o_1)$$

valamilyen $c \in \mathbb{R}$ esetén. Ez alapján

$$\alpha_1 a_1 + (\alpha_2 - \lambda_1)\, a_2 + (\alpha_3 - 1 + \lambda_1)\, a_3 = c\left(\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{6}a_3\right).$$

Ha a helyzetvektorok kezdőpontját az $A_1A_2A_3$ síkon kívül vesszük fel, akkor az a_1, a_2 és a_3 vektorok lineárisan függetlenek, tehát a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & \frac{1}{3}c \\ \alpha_2 - \lambda_1 & = & -\frac{c}{6} \\ \alpha_3 - 1 + \lambda_1 & = & -\frac{c}{6} \end{cases}.$$

Ez alapján

$$m_1 = m - 3\alpha_1(o - o_1) = \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1\right) a_2 + \left(\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_1\right) a_3.$$

Hasonló gondolatmenet alapján írhatjuk, hogy

$$m_2 = \left(\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) a_3 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) a_1 \text{ és}$$

$$m_3 = \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3\right) a_1 + \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\right) a_2,$$

tehát

$$g = \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3) = \frac{1}{2}(m + o),$$

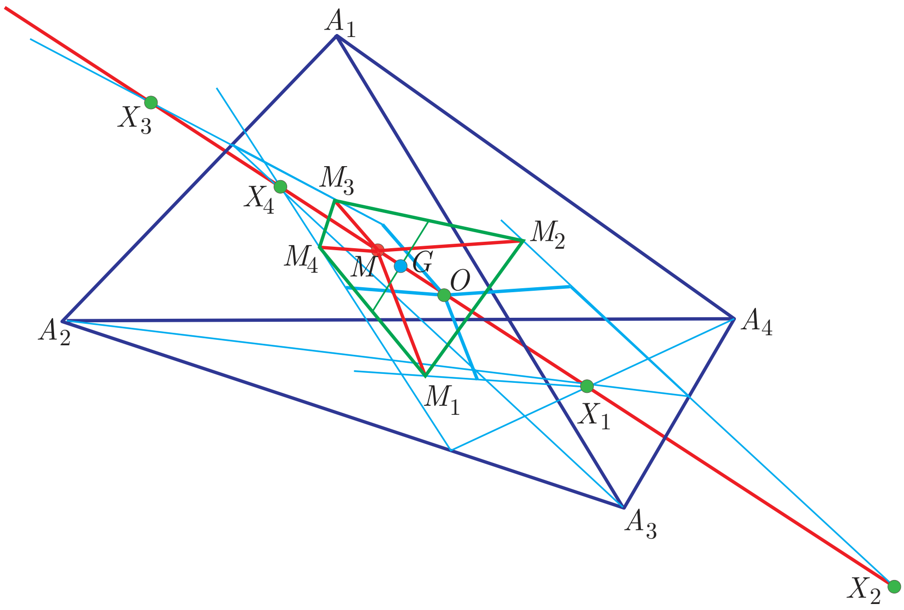
és ez épp a bizonyítandó tulajdonság. □

A 7.3. tétel és a 7.5. sejtés bizonyítását vizsgálva, megfogalmazzuk a következő tulajdonságot:

7.7. Tétel. *(Szilágyi Zsolt, András Szilárd) Az $A_0 \dots A_n$, n-szimplexben M egy tetszőleges pont és O a szimplex középpontja. Jelölje $O_{i_0 \dots i_k}$ az $A_{i_0} \dots A_{i_k}$ lap súlypontját és $M_{i_0 \dots i_k}$ az $A_{i_0} \dots A_{i_k}$ lapnak és az M-en át az $O_{i_0 \dots i_k} A_{i_{k+1} \dots A_{i_n}}$ lineáris varietással párhuzamos varietásnak a metszetét. Ha rögzített k-ra ($k \in \{1, 2, 3 \dots, n-1\}$) $G_k^{'}$ jelöli az $M_{i_0 \dots i_k}$ pontrendszer súlypontját, ahol $i_0 \dots i_k$ az összes lehetséges értékeket felveszi, akkor az M, O, $G_k^{'}$ pontok egy egyenesre illeszkednek és*

$$\frac{OG_k^{'}}{OM} = \frac{k}{n}.$$

Bizonyítás. $\mathbb{R}^n$-ben minden pont helyzetvektorát a megfelelő kisbetűvel jelöljük. M tetszőleges pont és $A_0 \dots A_n$ egy n-szimplex, tehát létezik $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ és $m = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$.



7.6. ÁBRA. Talpponti tetraéder tetszőleges tetraéderben

Ha $\overline{m} := m_{i_0\dots i_k} = \sum\limits_{j=0}^{k} c_j a_{i_j}$ (ahol $\sum\limits_{j=0}^{k} c_j = 1$) az $A_{i_0}\dots A_{i_k}$ lapnak és az $O_{i_0\dots i_k}A_{i_{k+1}}\dots A_{i_n}$-val M-en át húzott párhuzamosnak a metszete, és $o_{i_0\dots i_k} = \frac{1}{k+1}\sum\limits_{j=0}^{k} a_{i_j}$ az $A_{i_0}\dots A_{i_k}$ lap középpontja, akkor a párhuzamosság feltétele:

$$m - \overline{m} = c\left(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j (a_{i_j} - o_{i_0\dots i_k})\right),$$

ahol $\lambda_j \in \mathbb{R}$, minden $j \in \{k+1,\dots,n\}$ esetén és $\sum\limits_{j=k+1}^{n} \lambda_j = 1$.

Ez felírható

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_{i_j} - c_j)a_{i_j} + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{i_j} a_{i_j} = c\left(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j a_{i_j} - \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} a_{i_j}\right),$$

alakban, tehát $\lambda_j = \frac{\alpha_{i_j}}{c}$, ha $k+1 \leq j \leq n$, és $c_j = \alpha_{i_j} + \frac{c}{k+1}$, ha $0 \leq j \leq k$. Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy $c = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_{i_j}$, és így

$$\overline{m} = m_{i_0 \ldots i_k} = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_{i_j} + \frac{1}{k+1} (\alpha_{i_{k+1}} + \ldots + \alpha_{i_n}) \right] a_{i_j}.$$

Az n-szimplexben a k dimenziós lapok száma C_{n+1}^{k+1}, tehát

$$\begin{aligned} g_k' &= \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \sum_{i \in C_{n+1,k+1}} m_{i_0 \ldots i_k} \\ &= \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \sum_{i \in C_{n+1,k+1}} \left(\sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_{i_j} + \frac{1}{k+1} (\alpha_{i_{k+1}} + \ldots + \alpha_{i_n}) \right] a_{i_j} \right), \end{aligned}$$

ahol $C_{n+1,k+1}$ a $\{0, 1, \ldots, n+1\}$ halmaz összes lehetséges $(k+1)$-ed osztályú kombinációinak a halmaza. Azoknak az i kombinációknak a száma, amelyekre $l \in \{i_0, \ldots, i_k\}$, ahol l egy rögzített eleme a $\{0, 1, \ldots, n+1\}$ halmaznak pontosan C_n^k, míg azoknak az i kombinációknak a száma, amelyekre $l \in \{i_0, \ldots, i_k\}$ és $j \in \{i_{k+1}, \ldots, i_n\}$, pontosan C_{n-1}^k (j szintén rögzített). Emiatt

$$\begin{aligned} g_k' &= \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \sum_{l=0}^{n} \left[C_n^k \alpha_l + \sum_{j \neq l} \frac{C_{n-1}^k}{k+1} \alpha_j \right] a_l \\ &= \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \sum_{l=0}^{n} \left[C_n^k \alpha_l + \frac{C_{n-1}^k}{k+1} (1 - \alpha_l) \right] a_l \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(\frac{k+1}{n+1} \alpha_l + \frac{n-k}{n(n+1)} (1 - \alpha_l) \right) a_l \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(\frac{k}{n} \alpha_l + \frac{n-k}{n(n+1)} \right) a_l. \end{aligned}$$

A szimplex súlypontja $o = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n} a_i$, tehát

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG'_k} &= \sum_{l=0}^{n}\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{k}{n}\alpha_l+\frac{n-k}{n(n+1)}\right)a_l \\ &= \sum_{l=0}^{n}\left(-\frac{k}{n(n+1)}+\frac{k}{n}\alpha_l\right)a_l. \end{aligned} \tag{4}$$

Másrészt $\overrightarrow{OM} = \sum\limits_{l=0}^{n}\left(\alpha_l - \frac{1}{n+1}\right)a_l$, tehát $\overrightarrow{OG'_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{OM}$, ami a bizonyítandó tulajdonság. □

Megjegyzés. A 7.7. tétel alapján állíthatjuk, hogy a 7.4. sejtés igaz, mert egy szabályos n-szimplexben az $O_{i_0\ldots i_k}A_{i_{k+1}}\ldots A_{i_n}$ varietás merőleges az $A_{i_0}\ldots A_{i_k}$ lapra.

A 7.5. tétel bizonyítását vizsgálva, felmerül egy természetes kérdés: helyettesíthetők-e a lapok súlypontjai valamilyen más ponttal az adott lapon? A következő tétel erre a kérdésre ad választ a síkban.

7.8. Tétel. *Tekintsük az $A_1A_2A_3$ háromszöget és a w_1, w_2, w_3 valós számokat, amelyek összege 1. Jelölje O a háromszg̈ síkjában a (w_1, w_2, w_3) baricentrikus koordinátákkal rendelkező pontot és legyen M egy tetszőleges pont a síkban. Ha megszerkesztjük az $M_1 \in A_2A_3$, $M_2 \in A_3A_1$ és $M_3 \in A_1A_2$ pontokat úgy, hogy $MM_1||OA_1$, $MM_2||OA_3$ és $MM_3||OA_3$, akkor az $M_1M_2M_3$ háromszög súlypontja egybeesik az MOP háromszög súlypontjával, ahol P-nek az $M_1M_2M_3$-re vonatkozó baricentrikus koordinátái (w_1, w_2, w_3).*

Megjegyzés. Ha $w_1 = w_2 = w_3$, akkor P az $M_1M_2M_3$ háromszög súlypontja, így az előbbi tétel a 7.5. sejtésre vezetődik vissza.

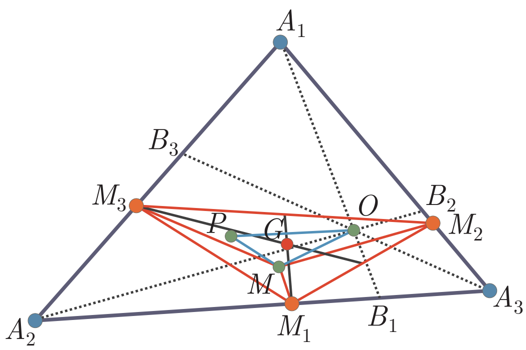
Bizonyítás. Jelölje $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ az M pont baricentrikus koordinátáit. Így

$$m = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3$$

és

$$o = w_1 a_1 + w_2 a_2 + w_3 a_3,$$

ahol a_1, a_2, a_3 rendre a csúcsok helyzetvektorai, m és o pedig az M, illetve O pont helyzetvektora.



7.7. Ábra. Általánosított talpponti háromszög egy általános háromszögben

$M_1 \in A_2A_3$, tehát létezik $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $m_1 = \lambda_1 a_2 + (1-\lambda_1)a_3$. Az $MM_1 || OA_1$ feltétel $m_1 - m = c(o - a_1)$ alakban írható, ahol $c \in \mathbb{R}$. Ez alapján

$$(5)\quad \lambda_1 a_2 + (1-\lambda_1)a_3 - \gamma_1 a_1 - \gamma_2 a_2 - \gamma_3 a_3 = c(w_1 a_1 + w_2 a_2 + w_3 a_3 - a_1).$$

Ha a helyzetvektorok középpontját az $A_1A_2A_3$ síkon kívül vesszük fel, akkor a_1, a_2, a_3 lineárisan független, tehát (5) alapján $-\gamma_1 = c(w_1 - 1)$, $\lambda_1 - \gamma_2 = cw_2$ és $1 - \lambda_1 - \gamma_3 = cw_3$. Ezek alapján

$$(6)\qquad m_1 = \left(\gamma_2 + \gamma_1 \frac{w_2}{w_2 + w_3}\right) a_2 + \left(\gamma_3 + \gamma_1 \frac{w_3}{w_2 + w_3}\right) a_3.$$

Hasonló gondolatmenet követve

$$(7)\qquad m_2 = \left(\gamma_3 + \gamma_2 \frac{w_3}{w_1 + w_3}\right) a_3 + \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{w_1}{w_1 + w_3}\right) a_1,$$

$$(8)\qquad m_3 = \left(\gamma_1 + \gamma_3 \frac{w_1}{w_2 + w_1}\right) a_1 + \left(\gamma_2 + \gamma_3 \frac{w_2}{w_2 + w_1}\right) a_2.$$

A (6), (7) és (8) összefüggés alapján

$$m_1(1 - w_1) + m_2(1 - w_2) + m_3(1 - w_3) = m + o,$$

tehát

$$\frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3) = \frac{1}{3}(m + o + p),$$

és ez a bizonyítandó tulajdonságot fejezi ki. □

Megjegyzés. A 7.8. tétel is kiterjeszthető szimplexekre, de a bizonyításhoz szükséges számolás sokkal bonyolultabbá válik.

Megjegyzés. Érdekes lenne egy olyan általános affin tulajdonság, amely magába foglalja az összes bizonyított tulajdonságot (beleértve a 7.1. tételt is).

3. Tapasztalatok, következtetések

• A tevékenységnek több párhuzamos célja volt. Az első, hogy a résztvevők tapasztalják meg, hogy közismert feladatokkal kapcsolatosan is mindig felmerülhetnek újabb és újabb problémák és ezek hatására az eredeti feladatot néha érdemes teljesen más szempontból nézni. A második cél, hogy a tanárok tisztán lássák a kíváncsiágvezérelt tevékenységek néhány fontos jellemzőjét, például azt, hogy sokkal több probléma merülhet fel, mint amit meg tudunk oldani, de ezeket a problémákat is meg kell pontosan fogalmazni és dönteni kell, hogy mit vizsgálunk és mit nem, érezzék a kísérletezés fontosságát, a sejtések és azok vizsgálatának a jelentőségét, vegyék észre, hogy a bizonyítás önmagában nagyon kevés embert fog érdekelni, motiválni (általában őket sem érdekli az n dimenziós eset). A harmadik cél annak a megértése volt, hogy a kíváncsisgvezérelt oktatás nem azon áll vagy bukik, hogy a kiválasztott tananyag életközeli vagy sem, hanem sokkal inkább azon, ahogyan a kitűzött problémát kezeljük, megközelítjük.

• A megjegyzések mutatják, hogy a megfogalmazott kérdések – és gyakran a válaszok is – újabb kutatásokat motiválnak. Ez a matematikai (és egyben matematikusi) tevékenységről egy valósabb képet mutat, mint a tankönyvekben található bizonyítások összessége.

• A tevékenységek néhány résztvevője azt nyilatkozta, hogy leginkább annak a megértésében volt hasznos számára ez a tevékenység, mennyire fontos a feladatmegoldásban is az alternatívák vizsgálata, az eszközök, a szemléletmód megválasztása, annak a képessége, hogy ezeket váltogatni tudjuk; mennyire fontos, hogy egy ismert tulajdonság bizonyítását hogyan építjük fel annak érdekében, hogy a bizonyításból további ihletet meríthessünk. Ugyanakkor kiemelték a kellően (probléma-)gazdag szituáció fontosságát is.

VIII. FEJEZET
DOBOZOK

Ebben a fejezetben két olyan tevékenységet ismertetünk, amelyet a PRIMAS projekt keretén belül tartottunk a SimpleX Egyesület Tehetséggondozó táborában és a Márton Áron Líceum által szervezett Tehetségnapon. Mindkét feladatot (foglalkozást) a 9. osztály (13-15 éves korosztály) számára ajánljuk.

1. A konzervdoboz méretei

1. Feladat. Adott töltőtérfogat mellett milyen méretűre kell készíteni a konzervdobozokat, ha azt szeretnénk, hogy a felhasznált bádogmennyiség minimális legyen?

2. Feladat. Hogyan kell kinéznie egy konzervdoboznak, ha a konzervdoboz aljának és tetejének kivágása során a felhasznált anyagmennyiség p-ed része elvesztődik (a kivágás alakja és az eredeti anyag alakja miatt) és a gyártó adott töltőtérfogat mellett a legkevesebb anyagot szeretné felhasználni a doboz gyártásához?

Az 1. feladat megoldása. Jelölje R az alapkör sugarát és h a doboz magasságát. A doboz térfogata

$$V = \pi R^2 h$$

és a felszínhez használt anyag mennyisége

$$F = 2\pi Rh + 2\pi R^2,$$

tehát F minimumát keressük, ha V értéke adott. Így $h = \frac{V}{\pi R^2}$, tehát az

$$F(R) = R^2 + \frac{V}{\pi R}$$

kifejezés legkisebb lehetséges értékét keressük rögzített V esetén. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$F(R) = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Ebben az esetben $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, tehát az optimális anyagtakarékosság eléréséhez a

$$\frac{h}{2R} = 1$$

egyenlőség szükséges. □

Megjegyzés. A gyakorlatban sok konzervdoboz valóban ilyen alakú. Az F függvény minimuma a tevékenység során más módon is meghatározható, pl. egy Excel táblázatban kiszámítjuk a függvény értékeit és a numerikus értékek alapján határozzuk meg a minimális értéket.

A 2. FELADAT MEGOLDÁSA. Jelölje R az alapkör sugarát és h a doboz magasságát. A doboz térfogata

$$V = \pi R^2 h$$

és a felszínhez használt anyag mennyisége

$$F = 2\pi Rh + 2(1+p)\pi R^2,$$

tehát F minimumát keressük, ha V értéke adott. Így $h = \frac{V}{\pi R^2}$, tehát az

$$F(R) = (1+p)R^2 + \frac{V}{\pi R}$$

kifejezés legkisebb lehetséges értékét keressük rögzített V esetén. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$F(R) = (1+p)R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(1+p)V^2}{4\pi^2}}$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi(1+p)}}.$$

Ebben az esetben $h = 2(1+p)\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi(1+p)}}$, tehát az optimális anyagtakarékosság eléréséhez a $\frac{h}{2R} = 1 + p$ egyenlőség szükséges. □

Megjegyzés. Standard méretűnek számít a $7,5$ cm átmérőjű és 11 cm magasságú doboz is. Ezek a méretek akkor optimálisak, ha a tetejét és az alját (amely kezdetben egy 8 cm átmérőjű körlap) egy körülbelül 8 cm oldalhosszúságú négyzetből vágjuk ki és a szélén keletkező $0,25$ cm vastagságú körgyűrűt az illesztéshez használják (ezt gyűrik fel és préselik össze az oldallappal). Érdemes a világhálón megkeresni a „Hogyan készül a konzervdoboz” című filmet (YouTube-ról letölthető, a Discovery Channel készítette). Ez alapján még valóságosabb modellt lehet gyártani.

2. A Finettis doboz

Szükségünk van egy 140 g-os és egy 400 g-os Finetti rudacskákat tartalmazó, felbontatlan dobozra, egy vonalzóra és egy mérlegre.

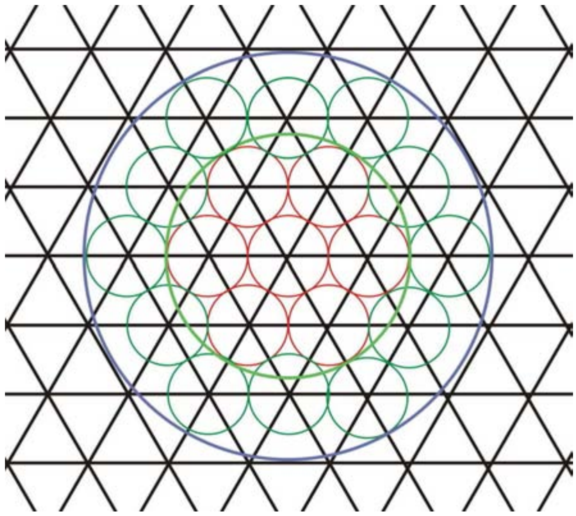
3. Feladat. Hány Finetti rudacskát tartalmaz a mellékelt ábrán látható doboz?

8.1. Ábra. A 140 g-os Finettis doboz

4. Feladat. Mekkora a 400 g töltött ostyarudacskát tartalmazó doboz átmérője, ha ugyanakkora rudacskákat tartalmaz, mint az előbbi doboz?

5. Feladat. Milyen matematikai problémák merülnek fel az előbbi két feladat kapcsán?

A 3. FELADAT LEHETSÉGES MEGOLDÁSA. Érdemes megmérni a doboz átmérőjét, és jó lenne ismerni a rudacskák átmérőjét is. Feltételezzük, hogy (a jobb térkihasználtság érdekében) a rudacskák a doboz aljára merőlegesen állnak, így elégséges egy olyan keresztmetszetet vizsgálni, amely párhuzamos az alappal. A rudacskák átmérője ismeretlen, ezért valamilyen becslésre van szükségünk. A dobozon látható képeken a rudacskák átmérője $1,1$ cm, ezért megközelítőleg $1,1$ cm-es átmérővel számolunk (habár köztudott, hogy a legtöbb termék esetén a csomagoláson levő fotók nem pontosak a méreteket illetően). Nagyjából ugyanezt a becslést kapnánk akkor is, ha a 8.2. és a 8.3. ábra alapján a rudacskák száma és a doboz átmérője alapján adnánk becslést. A doboz külső átmérője majdnem 7 cm, és ebből le kell vonni majdnem 1 cm-t ahhoz, hogy a doboz tetején a nyílás átmérőjét megkapjuk. A matematikai probléma tehát annak a meghatározásából áll, hogy adott 6 cm átmérőjű körlap belsejébe hány $1,1$ cm átmérőjű körlap helyezhető el átfedés nélkül. A valóságban természetesen a

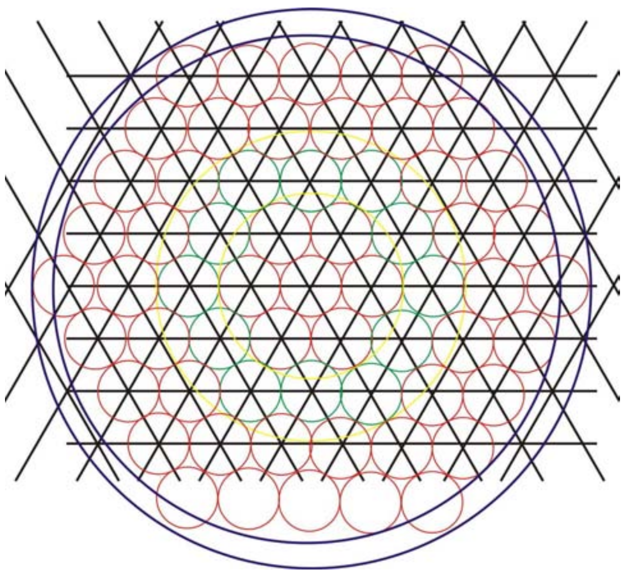


8.2. ÁBRA. Az optimális elrendezés

rudacskák nem állnak annyira szorosan egymás mellett, ezért az $1,1$ cm-es átmérő a gyakorlatban magába foglalhatja a rudacskák közti hézag méretét is. Így egy 6 cm-es átmérőre legfeljebb 5 darab $1,1$

cm átmérőjű rudacska illeszkedhet. Ha a középpontból kiindulva megpróbáljuk elhelyezni a kis körlapokat, akkor a 8.2. ábrán látható konfigurációhoz jutunk. Ez mutatja, hogy így 19 kis körlap helyezhető el, tehát a dobozban levő Finetti rudacskák száma megközelítőleg 19. □

Megjegyzés. A doboz kibontása után ellenőrizhető, hogy a doboz valóban megközelítőleg 19 rudacskát tartalmaz, tehát megközelítőleg $7,35$ g egy rudacska tömege. Ha megmérjük a rudak tömegét, akkor látható, hogy ez átlagosan 8 g, tehát átlagosan 1 rudacskával több van a dobozban, mint amennyi szükséges lenne ahhoz, hogy a doboz tartalmának tömege 140 g legyen.



8.3. Ábra. A nagyobb doboz szerkezete

A 4. feladat lehetséges megoldása. Az előbbi feladat alapján egy rudacska tömege átlagosan 8g, tehát a 400g-os dobozban körülbelül 50 darab Finetti rudacska van. Próbáljuk meg ezeket elhelyezni az előbbi konfigurációnak megfelelően. Látható, hogy $9 \cdot 1,1 = 9,9$ cm átmérőjű körlapra elhelyezhető 61 darab $1,1$ cm átmérőjű körlap, ezért lehetséges csökkenteni a nagy körlap átmérőjét.

Ha egy kicsit csökkentjük (kb. $9,3$ cm-re) ezt az átmérőt, akkor még mindig elhelyezhető $61 - 6 = 55$ kis körlap. Ha viszont lecsökkentjük $8 \cdot 1,1 = 8,8$ cm-re a nagy körlap átmérőjét, akkor nem fog ráférni a szükséges 50 kis körlap. Így tehát a doboz átmérője körülbelül $10,3$ cm (mivel a lyuk belső átmérője és a külső átmérő közti különbség 1cm). □

Megjegyzés. Ha megmérjük a doboztt, akkor látható, hogy az átmérője $10,2$ cm és 52 rudacskát tartalmaz, tehát a becslésünk elfogadható.

Az 5. feladat megoldása. A felmerülő matematikai problémák közül felsorolunk néhányat.

1. Legfeljebb hány darab r sugarú körlap helyezhető el adott R sugarú körlap belsejében átfedés nélkül?

   Ekvivalens megfogalmazás: Ha egy R sugarú körlap belsejébe r sugarú körlapokat helyezünk, akkor legalább hányad része marad lefedetlenül?
2. Határozzuk meg, hogy adott sokszög (pl. téglalap) vagy tetszőleges síkbeli tartomány belsejébe hány darab r sugarú körlap helyezhető el átfedés nélkül!

   Ekvivalens megfogalmazás: Ha egy síkbeli tartomány belsejébe r sugarú körlapokat helyezünk el, akkor legalább hányad része marad lefödetlenül?
3. Adott testre határozzuk meg, hogy legfeljebb hány r sugarú gömb helyezhető el a belsejében!
4. Ha a síkra r sugarú körlapokat helyezünk, akkor legalább hány százaléka marad lefödetlenül?
5. Mi változik, ha az előbbi problémákban nem csak r sugarú köröket (gömböket) használunk, hanem több fajta körünk (gömbünk) van, pl. $r_1, r_2, \dots, r_k$ sugarúakat?
6. Az előbbi feladatokra hogyan lehet hatékony megoldási algoritmusokat szerkeszteni, amelyek ha nem is a legoptimálisabb megoldást adják, mégis képesek eléggé jól megközelíteni a legjobb lefödéseket?

□

3. Didaktikai megjegyzések

A matematikai tevékenységek során nem mindig a megoldás megtalálása a fontos. Ezt különösen akkor fontos tudnunk, amikor esetleg nem is egy lehetséges megoldás létezik, vagy esetleg a pontos megoldásnak csak valamilyen becslését keressük. A második foglalkozás a hagyományos oktatási rendszerben azt a benyomást keltheti, hogy a feladat sem volt igazi feladat és a megoldás sem volt helyes. Ezt a foglalkozást épp emiatt választottuk, és a SimpleX Egyesület táborában ez lett a diákok által egyértelműen a legsikeresebbnek szavazott foglalkozás. A kétségek eloszlatásának érdekében illik tisztázni a foglalkozás célját. A második foglalkozás alapvetően a problémaérzékenység fejlesztését célozza meg, és a további kutatásokat motiválhatja, hisz a legtöbb megfogalmazott probléma nagyon nehéz, esetleg nem teljes mértékben megoldott. Pakolási problémákkal kapcsolatos konfigurációk szemléltetéséhez ajánljuk a [**32**] honlapot, illetve a [**18**] cikket és a [**17**] könyvet. Érdemes megemlíteni, hogy a tevékenységet általános iskolai diákokkal is kipróbáltuk, és a VI-VII. osztályos diákok is megsejtették az optimális elrendezés alakját. Ennek az elrendezésnek az optimalitása 1969 és 1999 közt megoldatlan probléma volt (a megoldás a [**18**] cikkben található). A gyakorlati probléma ugyanakkor egzakt módon nem is oldható meg, hisz a csomagoló automata nem darabszám szerint csomagol, ezért különböző dobozokban előfordulhat, hogy nem azonos a rudacskák száma. Mindez azt mutatja, hogy a gyakorlati feladatok esetén a megoldás fogalmát is újra kell értelmeznünk. Ez egy nagyon veszélyes egyensúlyi probléma, hisz a diákokban a megoldott feladatok és a bizonyított tételek alapján alakul ki a megoldás és a bizonyítás fogalma. Így ha nem fektetünk egyaránt hangsúlyt az elméleti szempontból helyes gondolatmenetekre és a gyakorlati okoskodásokra, akkor valamelyik komponens sérülni fog. Tanítási szempontból világos, hogy a kettő közti különbséget érdemes minden adandó alkalommal megvilágítani.

Végezetül néhány tipp a kivitelezésre vonatkozóan:

Fotók&videók

8.4. Ábra. Mérés és modellalkotás

• Mindkét tevékenységet érdemes kiscsoportos foglalkozás keretén belül megszervezni, mert így több alternatív szempont, matematikai probléma kerül elő.

• Mindkét foglalkozás segítségével világosan lehet szemléltetni a modellezési tevékenységek lépéseinek a fontosságát (lásd a Blum-féle modell: a helyzeti modell megszerkesztése, a matematikai modell megszerkesztése, a modell validálása stb.). Ugyanakkor a második esetben jól érzékelhető a gyakorlatorientált tevékenységek és a hagyományos matematikai megközelítésmód egyik fontos különbsége: a gyakorlatorientált megközelítésmód esetén nem elsődlege fontosságú az elméleti háttér tisztázása, sokkal inkább a minél pontosabb és gyakorlati szempontból használható numerikus eredmény.

• Az első tevékenység során érdemes az első feladattal kezdeni és a diákokra bízni az egyre valósághűbb modellek elkészítését. Így ők vezetik be a különböző paramétereket (p) és megvizsgálják a gyártási folyamat során felmerülő problémákat (anyagveszteség, a kivágás alakjából fakadó megszorítások, a perem préseléséhez szükséges anyagmennyiség stb.).

IX. FEJEZET

KAMATOZÁSI SÉMÁK ÉS AZ EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY

A fejezet célja az exponenciális függvény bevezetése, valamint tulajdonságainak igazolása a határérték fogalmának a felhasználására alapozva. Az újdonság a megközelítésben és a bizonyításokban rejlik, hisz gyakorlatilag kamatozási sémákat hasonlítunk össze és az összehasonlítás szolgáltatja a tulajdonságokat vagy a bizonyítások alapötletét. Gyakorlatilag olyan tevékenységeket, feladatlapokat mutatunk be, amelyek lehetővé teszik az exponenciális függvény tulajdonságainak vizsgálatát anélkül, hogy a feladatokban megjelenne az exponenciális függvény. Így, egyrészt a tulajdonságok nagyon erős intuitív jelentést és magyarázatot nyernek, másrészt a tanulmányozásuk motiválása természetessé válik, hisz az alapkérdés majdnem mindig ugyanaz: melyik befektetés előnyösebb?

1. Pénzügyi fogalmak

Szükségünk van néhány alapvető pénzügyi fogalomra.

Kamat: a jövőbeli és a jelenbeli pénzösszeg közötti különbözet.

Kamatláb: időegység (pl. 1 év) alatt realizált kamat és tőke aránya.

Egyszerű kamat: csak az alaptőke kamatozik, azaz minden időegységben az *alaptőke·kamatlábbal* nő a tőke.

Kamatos kamatozás: minden periódusban az épp aktuális tőke kamatozik, vagyis az *aktuális tőke·kamatlábbal* nő a tőke.

Megjegyzés. Egyszerű kamat esetén tehát a kamatokat nem adjuk hozzá az alaptőkéhez, míg kamatos kamat esetén a kamatokat is hozzáadjuk az alaptőkéhez. A kamatnak az alaptőkéhez való hozzáadását a továbbiakban tőkésítésnek nevezzük. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy egyszerű kamatozás esetén nincs tőkésítés, kamatos kamatozás esetén minden időegység végén tőkésítünk.

Tekintsünk néhány példát! Ha az éves kamatláb 10%, és a befektetett összeg 100 pénzegység, akkor egyszerű kamatozás esetén
1 év után

$$100 + 100 \cdot 0,10 = 110,$$

2 év után

$$110 + 100 \cdot 0,10 = 120$$

pénzegységünk van. A fogalom megértésének ellenőrzéseképpen a tanulók megoldják a bevezető feladatlap 1. feladatát, amelyben rájönnek az egyszerű kamat linearitására, azaz, hogy éves p kamatláb esetén, ha a befektetett összeg S, akkor az n év után kivehető összeg

$$S_n = S(1 + np).$$

Kamatos kamatozás esetén, 10%-os éves kamatlábat használva 1 év után $100 + 100 \cdot 0,10 = 110$ pénzegységünk van, majd ez a teljes összeg kamatozik, így 2 év után $110 + 110 \cdot 0,10 = 121$ pénzegységünk van.

A fogalom megértésének ellenőrzéseképpen a tanulók megoldják a bevezető feladatlap 2. feladatát, amelyben rájönnek hogy minden évben az összeg $1,1$-szer nő és levonják a következtetést, hogy ha az éves kamatláb p és a befektetett összeg S, akkor kamatos kamat esetén az n év után kivehető összeg

$$S'_n = S(1 + p)^n.$$

A bevezető feladatlap 3. és a 4. feladatának megoldásakor a tanulók megfogalmazzák, hogy ugyanolyan kamatláb mellett kamatos kamattal jobban megéri befektetni, illetve, hogy ha az egyszerű kamat esetén nagyobb a kamatláb, mint a kamatos kamat esetén, akkor rövid távon jobban megéri az egyszerű kamattal befektetni, de hosszú távon a kamatos kamat éri meg jobban.

A fenti példákban a kamatozási periódus 1 év volt. A mindennapi életben gyakran találkozhatunk azonban olyan befektetésekkel, amelyeknél a kamatozási periódus egy évnél rövidebb, vagyis gyakoribb tőkésítésre van lehetőség. Ilyen esetekben a kamatozási periódussal megegyező érvényességi időtartamra vonatkozó kamatlábat kell használni. Ha például a befektetett pénzösszeg 100 pénzegység, az éves kamatláb 10% és havonta tőkésítünk, akkor a havi kamatláb $\frac{10}{12}$%, így kamatos kamatozás esetén 1 hónap után $100 + 100 \cdot \frac{10}{12\cdot 100} = 100,8(3)$ pénzegységünk van, 2 hónap után $100,8(3) + 100,8(3) \cdot \frac{10}{12\cdot 100} = 101,6736(1)$ pénzegységünk van, 1 év után $100(1+\frac{10}{12\cdot 100})^{12} \approx 110,471$ pénzegységünk van, 2 év után pedig $100(1+\frac{10}{12\cdot 100})^{24} \approx 122,039$ pénzegységgel rendelkezünk. Egyszerű kamatozás esetén 1 hónap után a befektetett tőke felnövekedett értéke $100 + 100 \cdot \frac{10}{12\cdot 100} = 100,8(3)$ pénzegység. 2 hónap után $100 + 100 \cdot 2 \cdot \frac{10}{12\cdot 100} = 101,(6)$ pénzegység, 1 év után pedig $100\left(1 + 12 \cdot \frac{10}{12\cdot 100}\right) = 110$ pénzegység.

Vizsgáljuk mi történik a pénzösszeggel, ha hetente tőkésítünk. Ekkor 1 év után tőkénk felnövekedett értéke $100(1+\frac{10}{52\cdot 100})^{52} \approx 110,506$.

Az előbbi példákból látható, hogy a tényleges kamat nemcsak a kamatlábtól függ, hanem a kamatozási sémától, vagyis a tőkésítések számától és azok ütemezésétől is függ. Ezt a függőséget jobban megérthetjük ha elég sok konkrét esetet megvizsgálunk (lásd a bevezető feladatlap 5. és 6. feladatát).

2. Az $(e_n)_{n\geq 1}$, $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat vizsgálata

2.1. A sorozat monotonitása. Az $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat vizsgálatát az első feladatlap megoldásával kezdjük. A megoldások során világossá válik az e_n gyakorlati jelentése és az $(e_n)_{n\geq 1}$ sorozat monotonitása. Érdemes tehát kihangsúlyozni, hogy ha elhelyezünk a bankban 1 pénzegységet évi 100%-os kamattal, és n-szer tőkésítsük egy évben (egyenlő időközönként úgy, hogy az utolsó tőkésítés az év végén legyen), akkor egy év múlva a számlánkról

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

pénzegységet vehetünk fel. Az $(e_n)_{n\geq 1}$, sorozat monotonitása a feladatok megoldásából azonnal adódik, mert többszöri tőkésítés esetén érezhetően több pénzünk lesz, tehát

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{9}$$

Ez természetesen csak egy intuitív érv, hisz nemcsak a tőkésítések száma, hanem azok ütemezése is számít. Például ha csak egyszer tőkésítünk félévkor, akkor az év végén

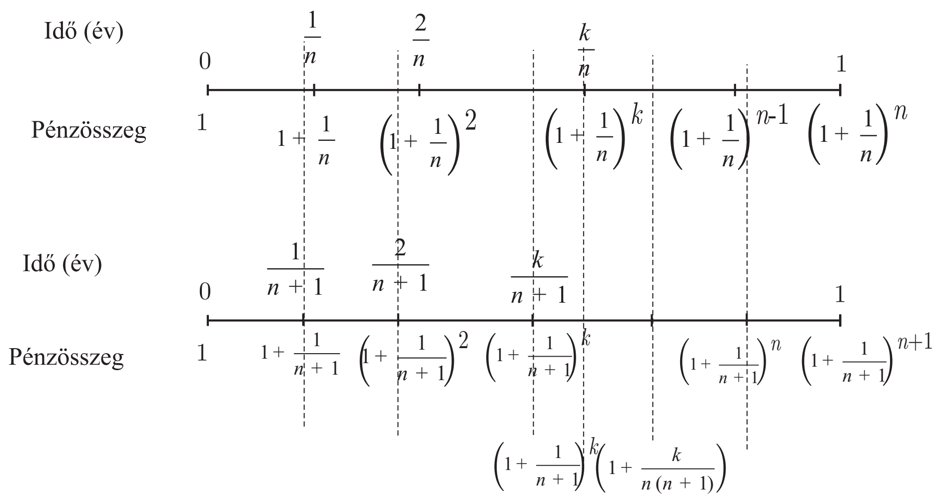
$$S_1 = S\left(1 + \frac{p}{2}\right)^2$$

pénzünk lesz, míg ha 10 hónap után is és 11 hónap után is tőkésítünk, akkor

$$S_2 = S\left(1 + \frac{5p}{6}\right)\left(1 + \frac{p}{12}\right)^2$$

pénzünk lesz. Egy kis számolással belátható, hogy $p < 18$ esetén az első eset előnyösebb, tehát önmagában véve a tőkésítések száma nem mérvadó, az ütemezések is számítanak. Emiatt fontos igazolni, hogy a monotonitásra vonatkozó sejtés helyes. Ennek érdekében érdemes nyomon követni a pénzmennyiség alakulását a két kamatozási séma segítségével (az egyik szerint n-szer tőkésítünk, a másik szerint $(n+1)$-szer, mindkét esetben egyenlő időközönként). Ez kivitelezhető számítógépes program segítségével (szimulációval) vagy számolások segítségével. Ha folyamatosan követjük a pénzmennyiséget, akkor világos, hogy az $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \ldots \frac{n+1}{n+1}$ illetve a $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n}{n}$ időpillanatokban érdemes mindkét kamatozási séma szerinti összeget kiszámolni. Vizsgáljuk, hogy mennyi pénzünk van az év $\frac{k}{n}$-ed részekor, ha n-szer tőkésítünk, illetve ha $(n+1)$-szer tőkésítünk. Ennek érdekében először megoldatjuk a tanulókkal az első feladatlap 3. feladatát. Ha a diákok rájönnek, hogy a két kamatozási séma szerinti értéknövekedést kell követni azokban az időpontokban, amikor tőkésítés történik, akkor megvan a bizonyítás alapötlete, különben ennek a tisztázására érdemes további feladatokat megoldatni, mindaddig, amíg a diákok megfogalmazzák az általánosítást, amit matematikai indukcióval igazolhatnak. n-szeri tőkésítés esetén közvetlenül a k-adik tőkésítés után (az év első $\frac{k}{n}$-ed részének a végén)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$$



9.1. Ábra. n-szeri, illetve $(n+1)$-szeri tőkésítés egy évig

pénzegységünk van. $n+1$ -szeri tőkésítés esetén k tőkésítés után az év $\frac{k}{n+1}$-ed része telt le (ez kevesebb, mint $\frac{k}{n}$) és így az $(n+1)$-szeri tőkésítés esetén a k-adik tőkésítés után még $\frac{k}{n} - \frac{k}{n+1} = \frac{k}{n(n+1)}$ hosszúságú időintervallumra kell kamatot számolni ahhoz, hogy az év $\frac{k}{n}$-ed része után is megkapjuk a tőkénk aktuális értékét. Így

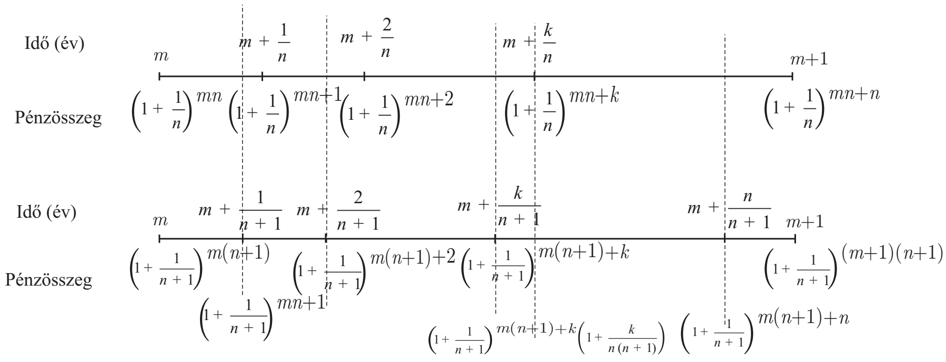
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^k \left(1+\frac{k}{n(n+1}\right)$$

pénzegységünk lesz. Azt sejtjük, hogy a második esetben a gyakoribb tőkésítések miatt nagyobb pénzösszegünk lesz, vagyis bármely $k=\overline{1,n}$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^k \left(1+\frac{k}{n(n+1)}\right). \tag{10}$$

Ez az egyenlőtlenség k szerinti indukcióval igazolható és így $k=n$ esetén pontosan a (9) egyenlőtlenséget kapjuk.

Hasonló módon a tanulók beláthatják, hogy az $(m+1)$-edik év $\frac{k}{n}$ „pillanatában” kevesebb pénzünk lesz évi n-szeri tőkésítéssel, mint évi $n+1$-szeri tőkésítéssel. Az így kapott egyenlőtlenséget úgy is igazolhatjuk, hogy a (9) egyenlőtlenséget m-edik ($m \in \mathbb{N}^*$) hatványra



9.2. ÁBRA. A két séma az $(m+1)$-edik évben

emeljük, így a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{m(n+1)}. \tag{11}$$

Majd a (10) és (11) egyenlőtlenségekből kapjuk az

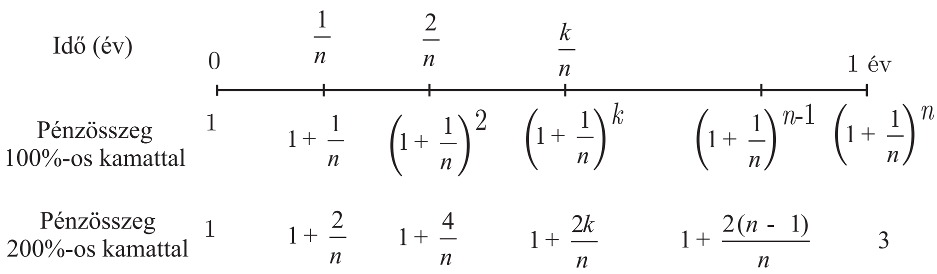
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn+k} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{m(n+1)+k}\left(1+\frac{k}{n(n+1)}\right) \tag{12}$$

bármely $m \in \mathbb{N}^*$ és $k = \overline{1,n}$ esetén, egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenségek igazolása során érdemes a 9.1. és a 9.2 ábrát (vagy valamilyen hasonló ábrázolást) használni.

2.2. A sorozat korlátossága. A korlátosság kérdése természetes módon merül fel, hisz fontos tudni, hogy az egy éven belüli tőkésítések számának (n) növekedésével legfeljebb mennyi pénzre tehetünk szert. Valamilyen felső korlát megállapítása érdekében összehasonlítjuk az évente n-szeri tőkésítésre és p kamatlábra alapozott kamatozási sémát valamilyen egyszerű kamatozási sémával, amelyben a kamatláb p-nél nagyobb. Ezt megtehetjük számítógépes kísérletezés segítségével vagy valamilyen formális számítások alapján. Kezdetben hasonlítsuk össze az 1 pénzegységből induló 100% éves kamatlábbal és n-szeri tőkésítéssel járó kamatozási sémát a 200% éves egyszerű kamatra alapozott kamatozási sémával (lásd a 2. feladatlap 1.–4. feladatait). A 11. táblázat a pénzösszegeket tartalmazza a két séma

Idő	$p=1$, Tőkésítések száma: n	$p=2$ Tőkésítések száma: 0
$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$1+\frac{2}{n}$
$\frac{2}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$	$1+\frac{4}{n}$
$\frac{3}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$	$1+\frac{6}{n}$
$\frac{4}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^4$	$1+\frac{8}{n}$

11. Táblázat. Kamatozási sémák összehasonlítása



9.3. Ábra. n-szeri tőkésítés $p = 1$-re és egyszerű kamat $p = 2$-re

szerint az első néhány hónapban (mindkét séma esetén a kezdőösszeg 1).
Látható, hogy

$$1+\frac{1}{n}<1+\frac{2}{n},$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}<1+\frac{4}{n}.$$

Megvizsgáljuk, hogy a továbbiakban is teljesül-e az egyenlőtlenség. Ez azt jelenti, hogy az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<1+\frac{2k}{n}, \tag{13}$$

egyenlőtlenséget szeretnénk igazolni $k \le n$ esetén (lásd a második feladatlap feladatait). A (13) egyenlőtlenséget a matematikai indukció módszerével próbáljuk bizonyítani. $k = 1$ és $k = 2$ esetén már láttuk, hogy igaz. Feltételezzük, hogy a (13) egyenlőtlenség igaz valamilyen rögzített k esetén, és igazolni próbáljuk $k+1$-re. Így az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} < 1+\frac{2(k+1)}{n}, \quad \text{ha} \quad k \leq n-1$$

egyenlőtlenséget kellene belátni. Másrészt, ha a (13) egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk $1+\frac{1}{n}$-nel, az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{2k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

igaz egyenlőtlenséget kapjuk. A kérdés az, hogy igaz-e az

$$\left(1+\frac{2k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1+\frac{2(k+1)}{n}$$

egyenlőtlenség $k \leq n-1$ esetén. Ekvivalens átalakítások után a

$$\frac{2k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \Longleftrightarrow k \leq \frac{n}{2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami nem teljesül minden $k \leq n$ esetén. Az előbbi gondolatmenet viszont azt is mutatja, hogy a matematikai indukció elve alapján a (13) egyenlőtlenség igaz $k \leq \frac{n}{2}$ esetén. Ha n páratlan természetes szám, akkor $\frac{n}{2}$ nem természetes szám, ez viszont nem okoz gondot, mert $k = \frac{1}{2}$ esetén is teljesül a (13) egyenlőtlenség, így a matematikai indukció elve alapján teljesül $k \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{n}{2}\right\}$ esetén is. Tehát tetszőleges n természetes szám esetén a (13) egyenlőtlenség igaz minden $k \in \left\{\frac{i}{2} | 1 \leq i \leq n\right\}$ esetén. Így igaz $k = \frac{n}{2}$ esetén is, azaz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < 2$, amiből négyzetre emeléssel az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 4$ egyenlőtlenséget kapjuk, azaz az $(e_n)_{n\geq 1}$ sorozat felülről korlátos. Ugyanakkor $e_n \geq e_1 = 2$, bármely $n \geq 1$ esetén. Mivel a sorozat növekvő és felülről korlátos, konvergens is. Az $(e_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértékét e-vel jelöljük és az eddigi gondolatmenet alapján

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e \in (2,4].$$

Gyakorlatilag az $(e_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértéke azt mutatja meg, hogy folyamatos tőkésítéssel maximálisan mekkora pénzösszeget kaphatunk egy év alatt 1 pénzegységből kiindulva, ha az éves kamatláb 100%. Egy kis számítógépes kísérletezés után azt is láthatjuk, hogy a (13) egyenlőtlenség igaz minden $k \leq n$ esetén is és $e_n < 3$. Az $e_n < 3$ becslés igazolása érdekében próbáljuk meg a második kamatozási séma esetében csökkenteni a kamatlábat. Így meg kellene vizsgálni, hogy milyen feltételek mellett teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{3k}{2n}, \tag{14}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{4k}{3n}, \tag{15}$$

és általában

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{(m+1)k}{mn}. \tag{16}$$

Az előbbi egyenlőtlenségek $k \in \{0,1\}$ esetén teljesülnek. Ha megpróbáljuk őket indukcióval igazolni rendre a $k \leq \frac{n}{3}$, $k \leq \frac{n}{4}$ és $k \leq \frac{n}{m+1}$ feltételekhez jutunk. Ez természetesen nem azt jelenti, hogy csak ezekre a k értékekre teljesül az egyenlőtlenség. Ezek a feltételek mindössze annyit jelentenek, hogy ezekre a k értékekre tudjuk matematikai indukcióval egyszerűen igazolni az egyenlőtlenségeket. Így kijelenthetjük, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/(m+1)} < 1+\frac{(m+1)\frac{n}{m+1}}{m\frac{n}{m+1}}. \tag{17}$$

vagyis

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}, \ \forall m,n \geq 1. \tag{18}$$

Ez mutatja, hogy érdemes az

$$f_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}, m \geq 1$$

sorozatot is vizsgálni, hisz ennek a sorozatnak minden tagja felső korlátja az $(e_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak. Ugyanakkor amiatt, hogy kamatozási sémában csökkentettük a kamatot intuitíven azt várhatjuk (ezt esetleg ábrázolással vagy számítógépes kísérlettel is alá tudjuk támasztani), hogy az $(f_m)_{m\geq 1}$ sorozat csökkenő. Az $f_m > f_{m-1}$ egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1-\frac{1}{m}\right)^{m} \tag{19}$$

egyenlőtlenséggel és ez felfogható úgy, mintha a negatív kamatlábbal dolgoznánk, vagyis fogyna a pénzünk. Ha nemcsak az év végén, hanem az $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m}{m}$ időpontokban hasonlítjuk össze a pénzmennyiségeket a két fogyási séma esetében (az egyik szerint m-szer, a második szerint $(m+1)$-szer vonjuk le az épp meglévő tőkéből annak $\frac{1}{m}$-ed illetve $\frac{1}{m+1}$-ed részét), akkor láthatjuk, hogy az

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{k}\left(1-\frac{k}{m(m+1)}\right) > \left(1-\frac{1}{m}\right)^{k}, \quad k \leq m \tag{20}$$

egyenlőtlenséget kellene belátnunk. Ez viszont matematikai indukcióval egyszerűen belátható.

Másrészt $f_m = e_m\left(1+\frac{1}{m}\right)$, tehát

$$\lim_{m\to\infty} f_m = \lim_{m\to\infty} e_m = e,$$

tehát írhatjuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{21}$$

Egy kis számolással látható, hogy $f_5 < 3$, tehát $e \in (2,3)$. Ennél pontosabb becslést is kaphatunk, ha egy számítógépen kiszámoltatjuk a két sorozat elemeit. Ez arra is jó, hogy valamilyen intuitív elképzelésünk lehessen a konvergencia gyorsaságáról is, tehát arról, hogy az előbbi sorozatok segítségével mennyire hatékonyan lehet megközelíteni az e-t. Például $n = 10000$ esetén $e_n = 2,718146$ és $f_n = 2,718418$ tehát az első 10000 tag kiszámításával csak három tizedesnyi pontossággal tudjuk meghatározni az e-t. Ez azt mutatja, hogy a konvergencia lassú, az $f_n - e_n$ különbség nagyjából a $\frac{2}{n}$ sorozat sebességével csökken.

Megjegyzés. A teljesség kedvéért belátjuk, hogy a (13) egyenlőtlenség minden $k \leq n$ esetén is érvényes. A bizonyításban

Newton binomiális tételét használjuk. $k \leq n$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1 + k\cdot\frac{1}{n} + \frac{k(k-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-(k-1))}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{k}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdots$$

$$\cdots\frac{k}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} <$$

$$< 1 + \frac{k}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{k!}\right) <$$

$$< 1 + \frac{k}{n}\left(1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}\right) =$$

$$= 1 + \frac{k}{n}\left(1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) < 1+\frac{2k}{n}.$$

Tehát a (13) egyenlőtlenség igaz minden $k \leq n$ természetes számra és így $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{2}{1}$, tehát az $e \in (2,3]$ tulajdonság így is belátható.

3. A korlátosság egy más igazolása

Hasonlítsuk össze az 1 pénzegységből kiinduló, évente n-szeri tőkésítésre alapozott kamatozási sémát azzal a kamatozási sémával, amelyben minden $1 \leq k \leq n$ esetén az év első $\frac{k}{n}$-ed részének a végén úgy számítjuk a végösszeget, mintha erre az időszakra egyszerű kamat járna, de ezt a kamatot a periódus elején hozzádjuk az alaptőkéhez és az egészet kamatoztatjuk. Amiatt, hogy már az elején hozzáadjuk a kamatot az eredeti összeghez és így kamatoztatjuk, az intuíció azt sugallja, hogy a végösszeg nagyobb lesz, mint az első séma esetén. Az első néhány esetre az értékeket a 12. táblázat tartalmazza. Ezekből az értékekből látható, hogy a második séma előnyösebb a vizsgált periódusokra. A továbbiakban ezt indukcióval igazoljuk.

Pontosabban a következő egyenlőtlenséget kellene igazolni:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \leq 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2},\quad k \leq n. \tag{22}$$

Idő	$n-$ szer tőkésítve	Az elején tőkésítve
$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$
$\frac{2}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$	$1+\left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{2}{n}=1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}$
$\frac{3}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$	$1+\left(1+\frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}=1+\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}$
$\frac{4}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^4$	$1+\left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n}=1+\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}$

12. Táblázat. Kamatozási sémák összehasonlítása

$k\in\{0,1\}$ esetén az egyenlőtlenség igaz. Ha feltételezzük, hogy egy rögzített k-ra teljesül, akkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} &\le \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\\ &=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2}{n^2}+\frac{k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}\le\\ &\le 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2}{n^2}+\frac{2k}{n^2}+\frac{1}{n^2}=\\ &\le 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}.\end{aligned}$$

Használtuk, hogy $k\le n$ esetén $k-\frac{k}{k+1}\le n$, vagyis $\frac{k^2}{k+1}\le n$. A matematikai indukció elve alapján a (22) egyenlőtlenség teljesül. Így $k=n$ esetén azt kapjuk, hogy

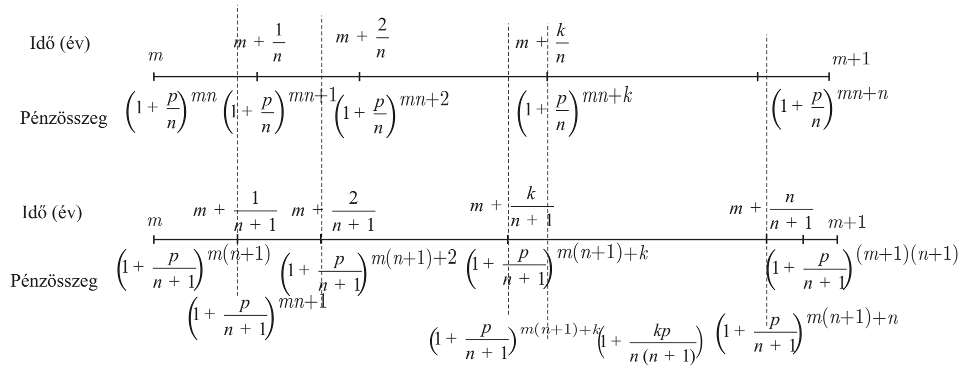
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3,$$

tehát $e\in(2,3)$.

4. Az exponenciális függvény értelmezése

Ebben a paragrafusban azt vizsgáljuk meg, hogy a folyamatos tőkésítéssel 1 pénzegységből 1 év alatt elérhető pénzösszeg hogyan függ a kamatlábtól. Jelöljük $p>0$-val az éves kamatlábat. Ha egy év alatt n-szer tőkésítünk (egyenlő időközönként), akkor az év végén

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$$



9.4. Ábra. n-szeri illetve $(n+1)$-szeri tőkésítés az $m+1$-edik évben

pénzegységünk lesz és akárcsak a $p=1$ esetben itt is sejthetjük, hogy az $(e_{p,n})_{n\geq 1}$, $e_{p,n}=\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$ sorozat növekvő. Tehát azt sejtjük, hogy

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n<\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^{n+1},\quad \forall p>0,\ n\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

A bizonyítás részleteinek tisztázása érdekében minden $k\in\{0,1,\ldots,n\}$-re vizsgáljuk meg a számla egyenlegét közvetlenül az év első $\frac{k}{n}$-ed része után (lásd a harmadik feladatlap feladatait)! n-szeri tőkésítés esetén $\left(1+\frac{p}{n}\right)^k$ pénzegységünk lesz, $(n+1)$-szeri tőkésítés esetén pedig

$$\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^k\left(1+\frac{kp}{n(n+1)}\right)$$

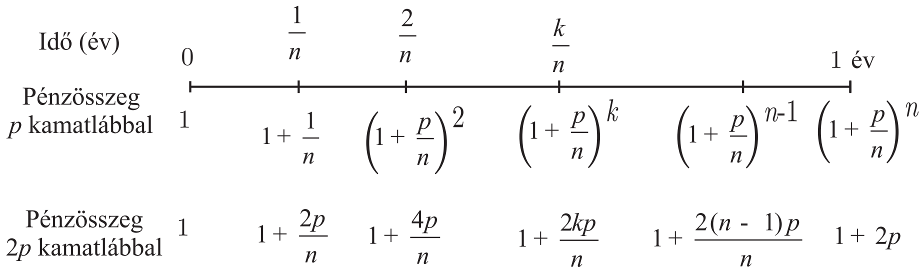
pénzegységünk. Tehát a sejtésünk az, hogy
(24)

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^k<\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^k\left(1+\frac{kp}{n(n+1)}\right), \forall n\in\mathbb{N},\ 1\leq k\leq n.$$

Látható, hogy ebből az egyenlőtlenségből $k=n$ esetén következik a (23) egyenlőtlenség. A (24) egyenlőtlenség igazolása matematikai indukció segítségével egyszerűen elvégezhető.

Hasonló gondolatmenet alapján belátható, hogy

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{mn+k}<\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^{m(n+1)+k}\left(1+\frac{kp}{n(n+1)}\right), \tag{25}$$



9.5. Ábra. n-szeri tőkésítés p-re és egyszerű kamat $2p$-re

ha $m \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq n$.

Ez az egyenlőtlenség igazolható a (23) és (24) egyenlőtlenségek alapján is.

Megjegyzés. Hasonló módon igazolható, hogy $p \geq 0$ esetén

$$\left(1 - \frac{p}{m+1}\right)^k \left(1 - \frac{kp}{m(m+1)}\right) > \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k, \quad k \leq m \tag{26}$$

és így az $f_{p,n} = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{n+1}$ sorozat csökkenő. Az $e_{p,n} < f_{p,n}$ egyenlőtlenség alapján következik, hogy az $(e_{p,n})_{n\geq 1}$ sorozat felülről és az $(f_{p,n})_{n\geq 1}$ sorozat alulról korlátos, tehát mindkét sorozat konvergens. Az $f_{p,n} = e_{p,n}\left(1 + \frac{p}{n}\right)$ egyenlőség alapján a két sorozatnak ugyanaz a határértéke. Ha $l(p)$-vel jelöljük a határértéket, akkor felírhatjuk, hogy $p \geq 0$ esetén

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n < l(p) < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{27}$$

4.1. A korlátosság vizsgálata. Az $(e_{p,n})_{n\geq 1}$ sorozat korlátosságának igazolásához összehasonlítjuk az n-szeri tőkésítésre alapozott kamatozási sémát valamilyen más kamatozási sémával, amelynek nagyobb lehet a hozama 1 év alatt. Ilyen kamatozási sémát úgy szerkeszthetünk, ha növeljük a kamatlábat vagy a kamatozási időt. Első problémaként vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a kamatozás tőkésítés nélkül megy végbe és az éves kamatláb $2p$ (lásd a 4. feladatlap feladatait). A 13. táblázatban $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén feltüntettük a két kamatozási sémának megfelelő mennyiségeket.

Éves kamatláb: p, Tőkésítések száma: n	Éves kamatláb: $2p$ Tőkésítések száma: 0
$1+\frac{p}{n}$	$1+\frac{2p}{n}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^2$	$1+\frac{4p}{n}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^3$	$1+\frac{6p}{n}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^4$	$1+\frac{8p}{n}$

13. Táblázat. Kamatozási sémák összehasonlítása

A táblázat első néhány sorát vizsgálva azt gondolhatjuk, hogy a második oszlopban mindvégig nagyobbak az értékek, mint az elsőben. Ha ezt matematikai indukcióval próbáljuk igazolni, szükségünk van a $k \le \frac{n}{2p}$ egyenlőtlenségre (az indukciós lépésnél). Igaz tehát a következő tétel:

9.1. Tétel. *Ha* $n \in \mathbb{N}$, $p > 0$ *és* $k \le \frac{n}{2p}$, *akkor*

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^k < 1+\frac{2kp}{n}. \tag{28}$$

Bizonyítás. $k = 1$ esetén igaz az $1+\frac{p}{n} < 1+\frac{2p}{n}$ egyenlőtlenség. Feltételezzük, hogy a (28) egyenlőtlenség igaz valamilyen rögzített k esetén, és igazoljuk $(k+1)$-re. Igazolni kellene tehát az

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{k+1} < 1+\frac{2(k+1)p}{n}$$

egyenlőtlenséget, ha $k \le \frac{n}{2p} - 1$. Ha a (28) egyenlőtlenség mindkét oldalát $1+\frac{p}{n}$-nel szorozzuk, az

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{2kp}{n}\right)\left(1+\frac{p}{n}\right)$$

igaz egyenlőtlenséget kapjuk. A kérdés az, hogy igaz-e az

$$\left(1+\frac{2kp}{n}\right)\left(1+\frac{p}{n}\right) < 1+\frac{2(k+1)p}{n}$$

egyenlőtlenség minden $k \leq \frac{n}{2p} - 1$ természetes szám esetén. Ez viszont a

$$\frac{2kp^2}{n^2} < \frac{p}{n} \Leftrightarrow k < \frac{n}{2p}$$

egyenlőtlenségekkel egyenértékű. Tehát a (28) egyenlőtlenség igaz a $k \leq \frac{n}{2p}$ természetes számok esetén. □

Megjegyzés. Hasonló módon végezhetünk összehasonlítást más kamatozási sémákkal is. Például olyanokkal, ahol a kamatláb $\frac{m+1}{m}p$, valamilyen $m \in \mathbb{N}$ esetén.

A (28) egyenlőtlenségből következik az $(e_{p,n})_{n\geq 1}$ sorozat korlátossága is, hisz $k = \left[\frac{n}{2p}\right]$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\left[\frac{n}{2p}\right]} < 1 + \frac{2\left[\frac{n}{2p}\right]p}{n} \leq 1 + \frac{2 \cdot \frac{n}{2p} \cdot p}{n} = 2.$$

Így

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{2p\left[\frac{n}{2p}\right]+2p} < 2^{2p}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{2p} < 4^{2p}, \tag{29}$$

ha $n > p$.

4.2. A korlátosság más igazolása. Tekintsük azt a kamatozási sémát, amelyben a kamatláb szintén p, de minden $1 \leq k \leq n$ esetén az év első $\frac{k}{n}$-ed része utáni pénzmennyiséget úgy számítjuk ki, mintha a $\frac{k}{n}$ hosszúságú periódusra járó kamatot az év elején hozzáadnánk az alaptőkéhez és az így kapott összeg kamatozna egyszerű kamattal. A 14. táblázat $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén tartalmazza a két séma szerinti értékeket.

A táblázat és a konstrukció alapján látható, hogy $p \leq 1$ esetén a második oszlopban nagyobbak az értékek, mint az elsőben. Így megfogalmazhatjuk a következő tételt:

9.2. Tétel. *Ha $n, k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$ és $0 \leq p \leq 1$, akkor*

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{kp}{n} + \frac{k^2p^2}{n^2}. \tag{30}$$

$n-$szer tőkésítve	Az elején tőkésítve
$1+\frac{p}{n}$	$1+\left(1+\frac{p}{n}\right)\frac{p}{n}=1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^2$	$1+\left(1+\frac{2p}{n}\right)\frac{2p}{n}=1+\frac{2p}{n}+\frac{4p^2}{n^2}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^3$	$1+\left(1+\frac{3p}{n}\right)\frac{3p}{n}=1+\frac{3p}{n}+\frac{9p^2}{n^2}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^4$	$1+\left(1+\frac{4p}{n}\right)\frac{4p}{n}=1+\frac{4p}{n}+\frac{16p^2}{n^2}$

14. Táblázat. Kamatozási sémák összehasonlítása

Bizonyítás. $k=0$ és $k=1$ esetén az egyenlőtlenség triviális. Ha feltételezzük, hogy egy rögzített k-ra teljesül, akkor

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{k+1} \leq \left(1+\frac{kp}{n}+\frac{k^2p^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{p}{n}\right)=$$
$$=1+\frac{(k+1)p}{n}+\frac{k^2p^2}{n^2}+\frac{kp^2}{n^2}+\frac{k^2p^3}{n^3}\leq$$
$$\leq 1+\frac{(k+1)p}{n}+\frac{k^2p^2}{n^2}+\frac{2kp^2}{n^2}+\frac{p^2}{n^2}=$$
$$\leq 1+\frac{(k+1)p}{n}+\frac{(k+1)^2p^2}{n^2}.$$

A bizonyítás során felhasználtuk, hogy $\frac{k^2p}{k+1}=kp-\frac{kp}{k+1}<n$, mivel $p\leq 1$. □

Megjegyzések. 1. $k=n$ esetén az

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \leq 1+p+p^2$$

becslést kapjuk. Ez sokkal jobb közelítés, mint a (29) egyenlőtlenségben kapott becslés, viszont csak akkor használható, ha $0\leq p\leq 1$.

2. Ha $p>0$ tetszőleges és n elég nagy, akkor

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \leq 1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}.$$

Elégséges az egyenlőtlenséget racionális p-re igazolni. Ha $p = \frac{a}{b}$, akkor az előbbi tétel alapján $bn > a$ esetén

$$\left(1 + \frac{1}{bn}\right)^a \leq 1 + \frac{a}{bn} + \frac{a^2}{b^2 n^2}.$$

Másrészt

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{bn}\right)^b,$$

tehát

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{a}{b}} \leq \left(1 + \frac{1}{bn}\right)^a$$

és így a kijelentett egyenlőtlenség igaz.

Az előbbiek alapján az $(e_{p,n})_{n\geq 1}$ sorozat $p > 0$ esetén felülről korlátos és növekvő, tehát konvergens. Így létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = l(p) \in \mathbb{R}$ határérték. Hasonló módon igazolható, hogy $p < 0$ esetén a sorozat csökkenő és alulról korlátos, tehát ebben az esetben is létezik az $l(p)$ határértéke. A továbbiakban a $p \to l(p)$ megfeleltetéssel értelmezett függvényt szeretnénk megvizsgálni. Első lépésként az e szám segítségével valamilyen kézzelfoghatóbb összefüggést vezetünk le $l(p)$-re, majd tanulmányozni fogjuk ennek a függvénynek a monotonitását, konvexitását, folytonosságát, deriválhatóságát.

4.3. Az $l(p)$ függvény alakja. Keressünk összefüggést az $l(1) = e$ és az $l(p)$ közt, ha p tetszőleges. Az

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{np} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p\right)^n \geq \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$$

egyenlőtlenség alapján $e^p \geq l(p)$, ha $p \geq 0$. Számítógépes kísérletekkel észrevehető, hogy $l(p)$ és e^p értéke nagyon közel van egymáshoz, tehát megfogalmazódik az a sejtés, hogy $l(p) = e^p$. Ahhoz, hogy ezt beláthassuk igazolni kellene, hogy $e^p \leq l(p)$, ha $p \geq 0$. Ennek érdekében felírjuk, hogy

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{np} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p\right)^n \leq \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}\right)^n,$$

tehát ha sikerülne igazolni, hogy

$$\left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)^n \le \left(1+\frac{p}{n}\right)^n + \frac{M}{n},$$

ahol $M > 0$ egy valós szám, akkor határértékre térve következne, hogy $e^p \le l(p)$. Az $a = 1 + \frac{p}{n}$ jelöléssel Newton binomiális tétele alapján írhatjuk, hogy

$$\left(a+\frac{p^2}{n^2}\right)^n = a^n + n\frac{p^2 a^{n-1}}{n^2} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k a^{n-k}\frac{p^{2k}}{n^{2k}}.$$

Ugyanakkor

$$C_n^k a^{n-k}\frac{p^{2k}}{n^{2k}} < a^n \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!n^k}\frac{p^{2k}}{n^k} < a^n\frac{p^{2k}}{n^k}$$

és

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{p^{2k}}{n^k} < \frac{p^4}{n^2}\frac{1}{1-\frac{p^2}{n}},$$

tehát

$$\left(a+\frac{p^2}{n^2}\right)^n \le a^n + \frac{p^2}{n}a^n + a^n\frac{p^4}{n^2}\frac{1}{1-\frac{p^2}{n}}$$

és így

$$\left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)^n \le \left(1+\frac{p}{n}\right)^n\left[1+\frac{p^2}{n}+\frac{p^4}{n^2}\frac{1}{1-\frac{p^2}{n}}\right],$$

vagyis határértékre térve $e^p \le l(p)$. Az eddigiek alapján $p \ge 0$ esetén $l(p) = e^p$. Másrészt, ha $p < 0$, akkor

$$\begin{aligned} l(p) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-p}{n+p}\right)^n} \\ &= \frac{1}{e^{-p}} = e^p, \end{aligned}$$

tehát $l(p) = e^p$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

Megjegyzés. A (27) alapján írhatjuk, hogy $p \geq 0$ esetén

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n < e^p < \left(1+\frac{p}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

4.4. Más bizonyítás az $l(p)$ függvény alakjára. Előbb igazoljuk, hogy ha $x_n \to \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. Ha $[x_n]$ az x_n egész részét jelenti, akkor

$$[x_n] \leq x_n < [x_n] + 1$$

és így

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$, és egy konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, a fogó tétel alapján következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. Így viszont

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p}}\right)^p = e^p.$$

Itt gyakorlatilag az előbbi tulajdonságot használtuk az $x_n = \frac{n}{p}$ sorozatra és azt, hogy ha $u_n \to e$, akkor $u_n^p \to e^p$ (vagyis az x^p hatványfüggvény folytonosságát e-ben).

5. Az exponenciális függvény tulajdonságai

5.1. Az exponenciális függvény monotonitása. Természetesen tevődik fel a kérdés, hogy a kamatláb növekedésével hogyan változik a folyamatos tőkésítéssel 1 év után megkapható pénzösszeg. Sőt a válasz is majdnem egyértelmű, hisz a kamatláb növekedése a kamat növekedését vonja maga után, így a végösszegnek is növekednie kell, hisz ugyanazok a kamatozási feltételek (lásd az 5. feladatlap 1. feladatát). A pontosság kedvéért írjuk le matematikailag is. Ha $x < y$, akkor

$$1+\frac{x}{n} < 1+\frac{y}{n}.$$

Ha n elég nagy, akkor feltételezhetjük, hogy az előbbi két kifejezés pozitív, tehát n-edik hatványra emelhetjük. Így az

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ahonnan $n \to \infty$ esetén következik, hogy

$$e^x \leq e^y.$$

Látszik tehát, hogy a monotonitás valóban nyilvánvaló, de a szigorú monotonitás nem annyira, hisz azt is be kell látni, hogy $x < y$ esetén $e^x \neq e^y$. Ha $x < y$, akkor léteznek olyan $\frac{r_1}{q_1}, \frac{r_2}{q_2}$ racionális számok, amelyekre $q_1, q_2 > 0$ és $x < \frac{r_1}{q_1} < \frac{r_2}{q_2} < y$, tehát az előbbi gondolatmenet alapján

$$e^x \leq e^{\frac{r_1}{q_1}} \leq e^{\frac{r_2}{q_2}} \leq e^y.$$

Ez viszont azt mutatja, hogy elégséges igazolni azt, hogy $e^{\frac{r_1}{q_1}} \neq e^{\frac{r_2}{q_2}}$. Ezt a lehetetlenre való visszavezetés módszerével tesszük meg. Ha

$$e^{\frac{r_1}{q_1}} = e^{\frac{r_2}{q_2}},$$

akkor

$$e^{r_1 q_2} = e^{r_2 q_1}$$

és ez valóban nem lehetséges, hisz $r_1q_2, r_2q_1 \in \mathbb{Z}$ és $r_1q_2 < r_2q_1$. Így tehát az $x \to e^x$ exponenciális függvény szigorúan növekvő $\mathbb{R}$-en.

5.2. A monotonitás más bizonyítása. A hatványozás tulajdonságai alapján tudjuk, hogy

$$e^{p_1+p_2} = e^{p_1} \cdot e^{p_2},\ \forall p_1, p_2 \in \mathbb{N}$$

és azt is sejthetjük, hogy ez érvényes tetszőleges $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ esetén (lásd az 5. feladatlap 2. feladatát). Az $e^{p_1+p_2} = e^{p_1} \cdot e^{p_2}$ egyenlőség igazolásához értelmezzük az $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ és $(c_n)_{n\geq 1}$ sorozatokat úgy, hogy $a_n = \left(1+\frac{p_1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\frac{p_2}{n}\right)^n$ és $c_n = \left(1+\frac{p_1+p_2}{n}\right)^n$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{p_1},\ \lim_{n\to\infty} b_n = e^{p_2} \text{ és } \lim_{n\to\infty} c_n = e^{p_1+p_2}.$$

Azt kellene igazolni, hogy az $(a_nb_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak ugyanaz a határértéke, mint a $(c_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak.

Előbb igazoljuk, hogy $e^p > 1$, bármely $p > 0$ esetén. Az $\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő, konvergens és határértéke e^p, tehát

$$1 < 1+p < \left(1+\frac{p}{n}\right)^n < e^p, \text{ bármely } n > 1$$

esetén. Newton binomiális képlete alapján:

$$a_n b_n = \left(1 + \frac{p_1+p_2}{n} + \frac{p_1 p_2}{n^2}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{p_1+p_2}{n}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(1+\frac{p_1+p_2}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{p_1p_2}{n^2}\right)^k.$$

Ha $p_0 = p_1 + p_2 > 0$, akkor

$$C_n^k \left(1+\frac{p_1+p_2}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{p_1p_2}{n^2}\right)^k < e^{p_0} \left(\frac{p_1p_2}{n}\right)^k,$$

tehát

$$a_n b_n \leq \left(1+\frac{p_1+p_2}{n}\right)^n + e^{p_0} \cdot \frac{p_1p_2}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{p_1p_2}{n}}.$$

Az viszont egyértelmű, hogy $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ esetén $c_n < a_n \cdot b_n$, tehát a fogó tételéből az előbbi két egyenlőtlenség alapján következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = e^{p_1+p_2},$$

vagyis

$$e^{p_1+p_2} = e^{p_1} \cdot e^{p_2}, \text{ ha } p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Mivel $e^{-p} = \frac{1}{e^p}$, az előbbi egyenlőség kiterjeszthető tetszőleges valós számokra is. Az előbbi egyenlőség alapján a monotonitást egyszerű vizsgálni, hisz ha $p_1 < p_2$ valós számok és $p_3 = p_2 - p_1 > 0$, akkor $e^{p_2} = e^{p_1+p_3} = e^{p_1} \cdot e^{p_3} > e^{p_1}$, mert $e^{p_3} > 1$. Következésképpen az f függvény szigorúan növekvő.

5.3. Az exponenciális függvény konvexitása. Az exponenciális függvény konvexitása a gyakorlatban is megjelenik. Tegyük fel, hogy két befektetés közt választhatunk:

- letétbe helyezünk 1/2 pénzegységet p_1 kamatlábbal és 1/2 pénzegységet p_2 kamatlábbal, mindkét esetben folyamatos tőkésítési feltétellel;

- letétbe helyezünk 1 pénzegységet $\dfrac{p_1+p_2}{2}$ kamatlábbal, folyamatos kamatozási feltétellel.

Kérdés, hogy melyik befektetés előnyösebb. Ehhez hasonló jellegű kérdések befektetések elemzésénél (portfóliók megszerkesztésénél) gyakran megjelennek. Sőt az első befektetés két komponensét nem kötelező azonos kiinduló tőkéből indítani. Elképzelhető, hogy valamilyen $\lambda \in (0,1)$ esetén p_1 kamatlábbal λ és p_2 kamatlábbal $1-\lambda$ kiindulási összeget kamatoztatunk és ezt viszonyítjuk ahhoz a befektetéshez, amelyben 1 pénzegységet kamatoztatunk $\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ kamatláb mellett (lásd az 5. feladatlap 3.–6. feladatait). A folyamatos kamatoztatást határátmenettel értelmeztük, ezért előbb megvizsgáljuk ugyanazokat a befektetési sémákat n-szeri tőkésítés mellett, ahol $n \in \mathbb{N}^*$ tetszőleges. Ehhez az

$$a_n = \lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^n, \quad b_n = (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^n \quad \text{és}$$
$$c_n = \left(1+\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}\right)^n$$

egyenlőségekkel értelmezett $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ és $(c_n)_{n\geq 1}$ sorozatokat fogjuk vizsgálni. Pontosabban az $a_n + b_n > c_n$ egyenlőtlenséget szeretnénk belátni (ezt számítógépes számításokkal egyszerűen megsejthetjük). Ha a befektetési sémákat nemcsak a végösszeg alapján hasonlítjuk össze, hanem megvizsgáljuk a két séma szerinti összeget külön-külön az év első $\frac{k}{n}$-ed részében is, akkor észrevehetjük, hogy az első befektetési séma szerint nemcsak a végén, hanem menet közben is mindig több pénzünk lesz vagyis teljesül a

$$\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k + (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k > \left(1+\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}\right)^k \tag{31}$$

egyenlőtlenség, minden $0 \leq k \leq n$ esetén. Ez az egyenlőtlenség rögzített k-ra az $x \to (1+x)^k$ függvény konvexitását jelenti. A teljesség kedvéért igazoljuk ezt az egyenlőtlenséget k szerinti indukcióval. Értelmezzük az $(a_{n,k})_{n,k\geq 1}$, $(b_{n,k})_{n,k\geq 1}$ és $(c_{n,k})_{n,k\geq 1}$ sorozatokat az

$$a_{n,k} = \lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k, \quad b_{n,k} = (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k \quad \text{és}$$

$$c_{n,k} = \left(1 + \frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}\right)^k$$

egyenlőségekkel. Ha $k = 1$, akkor

$$a_{n,1} + b_{n,1} = \lambda\left(1 + \frac{p_1}{n}\right) + (1-\lambda)\left(1 + \frac{p_2}{n}\right) =$$

$$= \lambda + \frac{\lambda p_1}{n} + 1 - \lambda + \frac{(1-\lambda)p_2}{n} = 1 + \frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n} = c_{n,1}.$$

Ha $k = 2$, akkor

$$a_{n,2} + b_{n,2} = \lambda\left(1 + \frac{p_1}{n}\right)^2 + (1-\lambda)\left(1 + \frac{p_2}{n}\right)^2 =$$

$$= 1 + 2\cdot\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n} + \frac{\lambda p_1^2 + (1-\lambda)p_2^2}{n^2} \text{ és}$$

$$c_{n,2} = \left(1 + \frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}\right)^2 = 1 + 2\cdot\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n} +$$

$$+ \frac{\lambda^2 p_1^2 + (1-\lambda)^2 p_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)p_1 p_2}{n^2}.$$

Össze kell tehát hasonlítanunk az

$$E_1 = \lambda p_1^2 + (1-\lambda)p_2^2$$

és

$$E_2 = \lambda^2 p_1^2 + (1-\lambda)^2 p_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)p_1 p_2.$$

kifejezéseket. Másrészt

$$E_1 - E_2 = \lambda p_1^2 + (1-\lambda)p_2^2 - \lambda^2 p_1^2 - (1-\lambda)^2 p_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)p_1 p_2 =$$

$$= \lambda(1-\lambda)p_1^2 + \lambda(1-\lambda)p_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)p_1 p_2 =$$

$$= \lambda(1-\lambda)\left(p_1 - p_2\right)^2 > 0,$$

tehát $a_{n,2} + b_{n,2} > c_{n,2}$.

A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy a

$$\lambda\left(1 + \frac{p_1}{n}\right)^k + (1-\lambda)\left(1 + \frac{p_2}{n}\right)^k > \left(1 + \frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}\right)^k \tag{32}$$

egyenlőtlenség minden $k > 1$ természetes szám esetén teljesül. A (32) egyenlőtlenség igaz $k = 2$-re, feltételezzük, hogy igaz k-ra, és igazoljuk $(k+1)$-re. A (32) egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk

$1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}$-nel. Így a következő igaz egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left(1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)\left(\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k+(1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k\right)>$$

$$>\left(1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)^{k+1}.$$

Kérdés, hogy igaz-e a

$$\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^{k+1}+(1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^{k+1}>$$

$$>\left(1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)\left(\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k+(1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k\right),$$

egyenlőtlenség, amely egyenértékű a

$$\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k\left(1+\frac{p_1}{n}-1-\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)+$$

$$+(1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k\left(1+\frac{p_2}{n}-1-\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)>0,$$

azaz

$$\frac{\lambda(1-\lambda)(p_1-p_2)}{n}\left(\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k-\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k\right)>0$$

egyenlőtlenséggel, amely igaz, mert az $\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k$ és $\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k$ számok rendezése ugyanaz, mint a p_1 és p_2 számok rendezése.

Tehát a (32) egyenlőtlenség igaz minden $k>1$ természetes szám esetén, így $k=n$ esetén is, tehát $a_n+b_n>c_n$, minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén. Mivel a (32) egyenlőtlenség bizonyításánál nem használtuk, hogy a p_1 és p_2 számok pozitívak, kijelenthetjük, hogy bármely p_1 és p_2 valós szám és $n>1$ természetes szám esetén

$$\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^n+(1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^n>\left(1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)^n. \tag{33}$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben határértékre térünk a

$$\lambda e^{p_1}+(1-\lambda)e^{p_2}\geq e^{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, tehát az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(p)=e^p$ exponenciális függvény konvex. A szigorú monotonitáshoz hasonlóan az is belátható, hogy az exponenciális függvény szigorúan konvex .

Ez azt jelenti, hogy folyamatos kamatozás esetén is kedvezőbb, ha pénzünk egy részét egy kamattal, másik részét másik kamattal helyezzük letétbe, mintha az egészet a kamatok súlyozott közepével kamatoztatnánk.

Megjegyzés. Látható, hogy az exponenciális függvény konvexitása az $x \to (1+x)^k$ hatványfüggvényektől öröklődik, tehát az előbbi indukciós bizonyítás elkerülhető, ha külön igazoljuk a hatványfüggvények konvexitását.

5.4. Az exponenciális függvény folytonossága. A folytonosság kérdése természetesen tevődik fel, hisz azt kell vizsgálni, hogy az e^p végeredmény modosítható-e tetszőlegesen kis mennyiséggel azáltal, hogy a kamatlábat megfelelően változtatjuk. Egy banknak fontos lehet, hogy mennyivel kell a kamatlábakat módosítania ahhoz, hogy a kifizetések egy adott mennyiséggel csökkenjenek (lásd az 5. feladatlap 7. és 8. feladatát).

Ha $p \in \mathbb{R}$, és a $(p_m)_{m\geq 1}$ sorozat elemei teljesítik a $p-1 < p_m < p+1$, $n \geq 1$, illetve $\lim\limits_{m\to\infty} p_m = p$ feltételt, akkor $p_m > p$ esetén írhatjuk, hogy

$$\left(1+\frac{p_m}{n}\right)^n - \left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \frac{p_m - p}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k} \left(1+\frac{p}{n}\right)^k .$$

Ugyanakkor

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^k < \left(1+\frac{p}{n}\right)^n < e^p < e^{p+1} \text{ és}$$

$$\left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k} < \left(1+\frac{p+1}{n}\right)^n < e^{p+1},$$

tehát

$$\left(1+\frac{p_m}{n}\right)^n - \left(1+\frac{p}{n}\right)^n \leq (p_m - p)e^{2p+2}.$$

Hasonló egyenlőtlenséget kapunk $p_m < p$ esetén is, tehát a majorálási kritérium és a $\lim\limits_{m\to\infty} p_m = p$ feltétel alapján $\lim\limits_{m\to\infty} e^{p_m} = e^p$. Ez biztosítja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(p) = e^p$ függvény folytonosságát minden $p \in \mathbb{R}$ pontban.

5.5. A folytonosság más bizonyítása. Elégséges a folytonosságot a 0-ban vizsgálni, mert ha egy $(p_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértéke $p \in$

$\mathbb{R}$, akkor a $(p_n - p)_{n\geq 1}$ sorozat határtértéke 0, és $e^{p_n} = e^{p_n - p} \cdot e^p$. Tekintsünk egy $(p_n)_{n\geq 1}$ sorozatot, amelynek a határértéke 0. Az a kérdés, hogy az $(e^{p_n})_{n\geq 1}$ sorozat határértéke egyenlő-e 1-gyel. Értelmezzük az $(x_{n,k})_{n,k\geq 1}$,

$$x_{n,k} = \left(1 + \frac{p_n}{k}\right)^k$$

sorozatot, és vizsgáljuk az $(x_{n,k} - 1)_{n,k\geq 1}$ sorozat viselkedését! Newton binomiális tétele alapján

(34)

$$x_{n,k} - 1 = p_n \left(1 + \frac{k-1}{2k} p_n + \frac{(k-1)(k-2)}{6k^2} p_n^2 + \ldots + \frac{1}{k^k} p_n^{k-1}\right),$$

tehát

$$|x_{n,k} - 1| < |p_n| \left(1 + |p_n| + \cdots + |p_n|^{k-1}\right) < |p_n| \cdot \frac{1}{1 - |p_n|}. \tag{35}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, következik, hogy létezik olyan n_1, amelyre $|p_n| < 1$, bármely $n \geq n_1$ esetén. Tehát, ha $n \geq n_1$, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k} = e^{p_n}$ alapján a (35) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|e^{p_n} - 1| \leq \frac{|p_n|}{1 - |p_n|},$$

bármely $n \geq n_1$ esetén. De $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|p_n|}{1-|p_n|} = 0$, tehát a majorálási kritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} e^{p_n} = 1$, vagyis az f függvény folytonos a 0-ban, következésképpen folytonos $\mathbb{R}$-en.

5.6. Az exponenciális függvény deriválhatósága. A közgazdaságtanban egy f függvény rugalmassága az x_0 pontban azt mutatja meg, hogy hány százalékkal változik meg a függvény értéke, ha x_0 értéke 1%-kal nő. Fontos lehet a kifizetési függvény rugalmasságának a tanulmányozása folytonos kamatozás esetén. Ez a probléma a függvény deriváltjának kiszámítását igényli, vagyis a

$$\lim_{p\to p_0} \frac{e^p - e^{p_0}}{p - p_0}$$

határérték kiszámítását.

Ha $p_0 \in \mathbb{R}$ és a $(p_m)_{m\geq 1}$ sorozat elemei teljesítik a $p_0 - 1 < p_m < p_0 + 1$, $m \geq 1$, illetve $\lim\limits_{m\to\infty} p_m = p_0$ feltételt, akkor $p_m > p_0$ esetén írhatjuk, hogy

$$\left(1+\frac{p_m}{n}\right)^n - \left(1+\frac{p_0}{n}\right)^n = \frac{p_m - p_0}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k} \left(1+\frac{p_0}{n}\right)^k.$$

Ugyanakkor

$$\left(1+\frac{p_0}{n}\right)^k < \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^k \text{ és } \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k} > \left(1+\frac{p_0}{n}\right)^{n-k-1},$$

tehát

$$\left(1+\frac{p_0}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k} \left(1+\frac{p_0}{n}\right)^k \leq \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1},$$

így

$$e^{p_0} < \frac{e^{p_m} - e^{p_0}}{p_m - p_0} < e^{p_m},$$

tehát az exponenciális függvény folytonossága és a feltételek alapján

$$\lim_{m\to\infty} \frac{e^{p_m} - e^{p_0}}{p_m - p_0} = e^{p_0},$$

vagyis az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(p) = e^p$ függvény deriválható minden $p \in \mathbb{R}$ pontban és $f'(p) = e^p$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

5.7. A deriválhatóság más bizonyítása. A derivált értelmezése alapján a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{p_n} - e^p}{p_n - p}$$

határérték létezését kell vizsgálnunk, ha a $(p_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértéke p. Mivel

$$\frac{e^{p_n} - e^p}{p_n - p} = e^p \cdot \frac{e^{p_n - p} - 1}{p_n - p},$$

elégséges a deriválhatóságot csak a 0-ban vizsgálni. Így feltételezhetjük, hogy a $(p_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértéke 0 és értelmezzük az $(x_{n,k})_{n,k\geq 1}$,

$$x_{n,k} = \left(1+\frac{p_n}{k}\right)^k$$

sorozatot. Az $\left(\frac{x_{n,k}-1}{p_n}\right)_{n,k\geq 1}$ sorozatot kell vizsgálnunk. A (34) egyenlőség alapján

$$\frac{x_{nk}-1}{p_n} = 1 + \frac{k-1}{2k}p_n + \frac{(k-1)(k-2)}{6k^2}p_n^2 + \cdots + \frac{1}{k^k}p_n^{k-1}.$$

Tehát

$$(36)\quad \left|\frac{x_{nk}-1}{p_n} - 1\right| < |p_n|\left(1 + |p_n| + \ldots + |p_n|^{k-2}\right) < |p_n| \cdot \frac{1}{1-|p_n|}.$$

Ebben az esetben is létezik az n_1 úgy, hogy $|p_n| < 1$, bármely $n \geq n_1$ esetén, tehát, ha $n \geq n_1$, akkor a (36) egyenlőtlenségből $k \to \infty$ esetén az $\left|\frac{e^{p_n}-1}{p_n} - 1\right| \leq \frac{|p_n|}{1-|p_n|}$ egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|p_n|}{1-|p_n|} = 0$, a majorálási kritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{p_n}-1}{p_n} = 1$, vagyis az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(p) = e^p$ függvény deriválható 0-ban és $f'(0) = 1$. Ha a $(p_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértéke $p \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{p_n} - e^p}{p_n - p} = \lim_{n\to\infty} e^p \cdot \frac{e^{p_n - p} - 1}{p_n - p} = e^p,$$

tehát az f függvény deriválható minden $p \in \mathbb{R}$ pontban és $f'(p) = e^p$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

6. Feladatlapok

Megjegyzés: számológép, számítógép használata megengedett (esetenként nélkülözhetetlen)!

Bevezető feladatlap

1. Feladat. Letétbe helyezünk 1000 lejt a bankba egyszerű kamatozásra. Az éves kamatláb[5] 10%. Mennyi pénzt vehetünk ki

a) 1 év után?
b) 2 év után?
c) 3 év után?
d) 10 év után?
e) 20 év után?

Mit vesztek észre? Fogalmazzatok meg egy általánosítást!

[5] A feladatlapokon a kamatláb mindig névleges kamatlábat jelent.

2. Feladat. Letétbe helyezünk 1000 lejt a bankba kamatos kamattal (minden év végén tőkésítünk). Az éves kamatláb 10%. Mennyi pénzt vehetünk ki

a) 1 év után?
b) 2 év után?
c) 3 év után?
d) 10 év után?
e) 20 év után?

Mit vesztek észre? Fogalmazzatok meg egy általánosítást!

3. Feladat. Hasonlítsátok össze az előző két feladat eredményeit! Mit vesztek észre?

4. Feladat. Vizsgáljátok meg, hogyan változik befektetett tőkénk értéke a következő 10 év során, ha az éves kamatláb 10% és nincs tőkésítés, illetve ha az éves kamatláb 7% és minden év végén tőkésítünk! Mekkora kellene legyen a második esetben a kamatláb ahhoz, hogy a végén ugyanakkora legyen a befektetés értéke, mint az első esetben?

5. Feladat. Letétbe helyezünk 1000 lejt a bankba. Az éves kamatláb 12%. Mennyi pénzt vehetünk ki, ha

a) az első negyedév elteltével tőkésítünk?
b) fél év elteltével tőkésítünk?
c) negyedévkor és félévkor is tőkésítünk?
d) negyedévkor, félévkor és 8 hónap elteltével is tőkésítünk?

Mit vesztek észre? Fogalmazzatok meg egy általánosítást!

6. Feladat. Letétbe helyezünk 1000 lejt a bankba. Az éves kamatláb 10% és az év során kétszer tőkésíthetünk. Legfeljebb mennyi pénzünk lehet év végén? Hogyan érdemes a tőkésítéseket ütemezni? Hát akkor ha többször $(3, 4, \ldots, n)$ tőkésíthetünk?

1. feladatlap

1. Feladat. Letétbe helyezünk 1 pénzegységet a bankba. Az éves kamatláb 100%. Fejezzük ki a befektetett tőkénk értékét az év végén, ha n-szer tőkésítünk, egyenlő időközökben úgy, hogy az utolsó tőkésítés épp az év végére kerüljön! Számítsátok ki a tőke számértékét, ha $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$! Mit tapasztaltok?

2. Feladat. Letétbe helyezünk 1 pénzegységet a bankba. Az éves kamatláb 100%. Fejezzük ki a befektetett tőkénk értékét minden hónap végén, ha az év során

a) kétszer
b) háromszor
c) négyszer
d) ötször

tőkésítünk, egyenlő időközönként úgy, hogy az utolsó tőkésítés az év végén történjen! Mit tapasztaltok?

3. Feladat. Mit állapíthattok meg az előbbi feladatok alapján? Igazoljátok az eredményt a matematikai indukció módszerével!

2. feladatlap

1. Feladat. Beteszünk 1 pénzegységet a bankba. Melyik esetben lesz 1 év múlva több pénzünk:

a) ha az éves kamatláb 200% és év közben nincs tőkésítés *vagy*
b) ha az éves kamatláb 100% és félévkor tőkésítünk?

2. Feladat. Beteszünk 1 pénzegységet a bankba. Melyik esetben lesz 1 év múlva több pénzünk:

a) ha az éves kamatláb 200% és év közben nincs tőkésítés *vagy*
b) ha az éves kamatláb 100% és negyedévente tőkésítünk?

3. Feladat. Beteszünk 1 pénzegységet a bankba. Melyik esetben lesz 1 év múlva több pénzünk:

a) ha az éves kamatláb 200% és év közben nincs tőkésítés *vagy*
b) ha az éves kamatláb 100% és havonta tőkésítünk?

4. Feladat. Mit állapíthattok meg az előző feladatok alapján? Próbáljatok egy általános tulajdonságot megfogalmazni!

5. Feladat. Hasonlítsátok össze az 1 pénzegységnyi alaptőke értékváltozását a következő két kamatozási séma szerint:

- az éves kamatláb 200% és nincs tőkésítés;
- az éves kamatláb 100% és évente n-szer tőkésítünk, ahol $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

A tőkésítések azonos időközönként történnek és az utolsó tőkésítés az év végén történik. Próbáljatok egy általános tulajdonságot megfogalmazni!

3. feladatlap

1. Feladat. Letétbe helyezünk 1 pénzegységet a bankba. Az éves kamatláb p. Fejezzük ki a befektetett tőkénk értékét az év végén, ha n-szer tőkésítünk, egyenlő időközökben úgy, hogy az utolsó tőkésítés épp az év végére kerüljön! Számítsátok ki a tőke számértékét, ha $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$! Mit tapasztaltok?

2. Feladat. Letétbe helyezünk 1 pénzegységet a bankba. Az éves kamatláb p. Fejezzük ki a befektetett tőkénk értékét minden hónap végén, ha az év során

a) kétszer
b) háromszor
c) négyszer
d) ötször

tőkésítünk, egyenlő időközönként úgy, hogy az utolsó tőkésítés az év végén történjen! Mit tapasztaltok?

3. Feladat. Mit állapíthattok meg az előbbi feladatok alapján? Igazoljátok az eredményt a matematikai indukció módszerével!

4. feladatlap

1. Feladat. Letétbe helyezünk 1 pénzegységet a bankban. Melyik esetben lesz 1 év múlva több pénzünk:

a) ha az éves kamatláb $2p$ és év közben nincs tőkésítés *vagy*
b) ha az éves kamatláb p és félévkor tőkésítünk?

2. Feladat. Letétbe helyezünk 1 pénzegységet a bankban. Melyik esetben lesz 1 év múlva több pénzünk:

a) ha az éves kamatláb $2p$ és év közben nincs tőkésítés *vagy*

b) ha az éves kamatláb p és negyedévente tőkésítünk?

3. Feladat. Letétbe helyezünk 1 pénzegységet a bankban. Melyik esetben lesz 1 év múlva több pénzünk:

a) ha az éves kamatláb $2p$ és év közben nincs tőkésítés *vagy*
b) ha az éves kamatláb p és havonta tőkésítünk?

4. Feladat. Mit állapíthattok meg az előző feladatok alapján? Próbáljatok egy általános tulajdonságot megfogalmazni!

5. Feladat. Hasonlítsátok össze az 1 pénzegységnyi alaptőke értékváltozását a következő két kamatozási séma szerint:

- az éves kamatláb $2p$ és nincs tőkésítés;
- az éves kamatláb p és évente n-szer tőkésítünk, ahol $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

A tőkésítések azonos időközönként történnek és az utolsó tőkésítés az év végén történik. Próbáljatok egy általános tulajdonságot megfogalmazni!

5. feladatlap

1. Feladat. Tanulmányozzuk az 1 pénzegység alaptőkéből 1 év alatt folyamatos kamatozással kapható pénzmennyiség változását a kamatláb függvényeként!

2. Feladat. Elhelyezünk 1 pénzegységet a bankban. Számítsátok ki, hogy mennyi pénzt vehetünk ki egy év múlva, ha havonta tőkésítünk és

a) az éves kamatláb 10%;
b) az éves kamatláb 20%;
c) az éves kamatláb 30%.

Szorozzátok össze az a) és a b) pontbeli eredményeket! Mit vesztek észre? Vizsgáljátok meg a szorzat és a c) alpontbeli eredmény különbségét, ha a tőkésítések számát növeljük!

3. Feladat. Elhelyezünk 1000 lejt a bankban. Számítsátok ki, hogy mennyi pénzt vehetünk ki egy év múlva havi, illetve napi tőkésítéssel, ha

a) 500 lejt évi 10%-os kamattal és 500 lejt évi 12%-os kamattal teszünk be?
b) A teljes összeget évi 11%-os kamattal tesszük be?

4. Feladat. Elhelyezünk 900 lejt a bankba. Számítsátok ki, hogy mennyi pénzt vehetünk ki egy év múlva havi, illetve napi tőkésítéssel, ha

a) 300 lejt évi 9%-os kamattal és 600 lejt évi 12%-os kamattal teszünk be?
b) A teljes összeget évi $\frac{1}{3} \cdot 9\% + \frac{2}{3} \cdot 12\% = 11\%$-os kamattal tesszük be?

5. Feladat. Elhelyezünk 1 pénzegységet a bankba. Számítsátok ki, hogy mennyi pénzt vehetünk ki minden hónapban, ha havonta tőkésítünk

a) Ha $\frac{2}{5}$-ét 10%-os kamattal és $\frac{3}{5}$-ét 15%-os kamattal teszünk be?
b) Ha a teljes összeget $\frac{2}{5} \cdot 10\% + \frac{3}{5} \cdot 15\% = 13\%$-os kamattal tesszük be?

6. Feladat. Fogalmazzatok meg egy általános tulajdonságot az előbbi két feladat alapján! Vizsgáljátok mi változik az előbbi két feladatban, ha folyamatos kamatozással kamatoztatjuk a pénzünket, majd fogalmazzatok meg általános tulajdonságot!

7. Feladat. Elhelyezünk 1 pénzegységet a bankban. Mennyi pénzt vehetünk ki egy év múlva havi, illetve napi tőkésítéssel, ha

a) az éves kamatláb 12%;
b) az éves kamatláb $12,1\%$;
c) az éves kamatláb $12,01\%$;
d) az éves kamatláb $12,001\%$?

8. Feladat. Elhelyezünk 1 pénzegységet a bankban. Mennyi pénzt vehetünk ki egy év múlva havi, illetve napi tőkésítéssel, ha az éves kamatláb

a) $0,1\%$; b) $0,01\%$;
c) $0,001\%$; d) $0,0001\%$?

7. Megjegyzések, tapasztalatok, következtetések

7.1. Tanítási tapasztalatok. Eddigi tanári tapasztalatunk azt mutatja, hogy a matematika, s ezen belül különösen a matematikai analízis iránti érdeklődés nagyon megcsappant az utóbbi évtizedben a középiskolások körében. Ennek több oka is lehet. Az egyik ok, hogy egyre kevésbé van türelmük a tanulóknak elbíbelődni egy kreatív gondolkodást igénylő feladaton, ha nem „jön ki az eredmény" öt perc után, akkor otthagyják, nem elég kíváncsiak a puszta matematikafeladatok megoldásának végkimenetelére. Természetesen ez alól vannak kivételek is, de sajnos már csak a versenyző diákok között, és ők sem mind motiváltak hosszan gondolkodni egy-egy nehezebb feladaton. Lehet, hogy ez magyarázható a felgyorsult világgal, vagy akár azzal is, hogy a gyerekek többsége tud programozni, és a számítógép azonnal jelzi, hogy hol a hiba, de persze nem kell kizárni esetleg azt sem, hogy mi pedagógusok is hibásak vagyunk, mert a („haladjunk a tananyaggal" típusú) rohanás miatt készen tálalunk bizonyos ötleteket, nem hagyunk órán elég időt, hogy mindenre maguktól jöjjenek rá a tanulók, nem vagyunk felkészülve az egyre gyakrabban elhangzó „Ennek hol vesszük hasznát az életben?" típusú kérdések megválaszolására.

Nagyon szépen hangzik a Gerőcs László által a „*Quo vadis matematikaoktatás*"[6] című cikkben megfogalmazott magyarázat arra, hogy miért nem lehet (nem kell) mindig megmagyarázni a fogalmak mindennapi életbeli hasznát: „[$\cdots$]*egy péknek vagy autószerelőnek, egy irodai alkalmazottnak, menedzsernek vagy egy bölcsésznek, jogásznak tényleg soha nem lesz szüksége például a logaritmus azonosságaira. De jó lenne, ha a döntéshozók is megértenék: mindezeket a dolgokat nem azért tanítjuk, mert valaha is használni fogja őket a diák, hanem azért, mert miközben a tanulók agyában végigvonul az a gondolkodási lépéssorozat, míg a megértés, a felfedezés, az alkalmazás különböző szintjei önállóan beépülnek gondolkodásának struktúrájába, addig olyan fejlődésen, csiszoltságon megy keresztül a gondolkodásának képessége (amit persze maga a diák sem vesz észre), hogy a folyamat végén (az érettségi vizsga tájékán) valóban tiszta fejjel, logikusan, fegyelmezetten gondolkodó ember válik (válhat) belőle. S bárhová is kerül az életben a diák, ezekre a képességekre mindenütt óhatatlanul nagy szüksége lesz, e képességeket mindenütt nagy haszonnal tudja majd al-*

[6]Népszava, 2007. június 9.

kalmazni leendő munkahelyein. Ez az igazi konvertálható tudás, így ezek fejlesztésére kell (kellene) a legnagyobb hangsúlyt fektetnünk.”

Ugyanakkor ez a magyarázat nagyon kevés diáknak elég. Szükség van arra, hogy minél több gyakorlati megközelítést lássanak a tanulók.

Az utóbbi évtizedben a tananyagot nagyon sokszor „átrendezték”, „csökkentették”, „szellőztetették”, de tartalmilag többnyire ugyanaz maradt, mint 20 évvel ezelőtt, annyi különbséggel, hogy kevesebb órában kell megtanítani, nem kell minden esetben a fogalmakat megmagyarázni, csak formailag tanítani, ami természetesen a kreatív gondolkodás fejlesztésének hátrányára van, ugyanakkor a fejlesztendő képességeknél egyik legfontosabb elemként szerepel. A modellezés, a fogalmak gyakorlati alkalmazása is szerepel a tanterv felvezető részében, csak éppen a tartalmi részek és a rájuk fordítható idő nem engedi meg, hogy egy-egy alkalmazás vagy modellezési feladatban a diákok elmélyüljenek.

Az érettségi követelmények miatt sajnos a matematikaoktatás a diákok és a társadalom elvárásaival ellentétben (sőt valójában a tanterv képesség illetve kompetencia fejlesztésre irányuló explicit követelménye ellenére is) egyre inkább információ-centrikus.

Az exponenciális függvény kamatozási sémákra épülő bevezetését tanárszakos hallgatókkal és egy középiskolásokból álló vegyes csoporttal (a SimpleX Egyesület tehetséggondozó táborában résztvevő 9., 10., 11. és 12. osztályos versenyző tanulókból állt) teszteltük le. Az utóbbi érdekes tapasztalat volt, hiszen a 9. és 10. osztályos tanulók semmilyen matematikai analízis alappal nem rendelkeztek, viszont például az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monotonitását azonnal észrevették. Sőt a számítógépen kíváncsiságukat kielégítve kiszámolták a sorozat tagjait milliós nagyságrendű indexekre is. Egy kicsit tartottunk attól, hogy a kisebbeknek nem lesz elég kézenfekvő ez a fajta megközelítés, de a visszajelzések megnyugtatóak. Egy kilencedikes tanuló visszajelzése:

Én azt hiszem, mindenki meg lehetett elégedve ezzel a bemutatással, én legalábbis nem ütköztem akadályba, úgy emlékszem, ez volt az egyik dolog, amit rendesen megértettem a táborban.

A 11. és 12. osztályosok is nagyon élvezték ezt a megközelítést annak ellenére, hogy már jól ismerték az exponenciális függvényt tulajdonságaival együtt. Ilyen felkiáltásokat lehetett hallani a foglalkozásokon: *„Jé, már látom, hogy mi lesz ebből!”*, *„Nahát, ilyen formában még nem találkoztam az exponenciális függvénnyel!”* stb.

A 11. és 12. osztályosok visszajelzései is pozitívak. Íme egy tizenkettedikes véleménye a foglalkozásról: „*Véleményem szerint a matematika különböző fejezeteinek más iránybeli megközelítése (gazdasági, fizikai, kémiai stb.) egy nagyon is pozitív dolog, ugyanis az elméletnek a gyakorlathoz való fűzése egyrészt hasznos, másrészt közelebb hozza a diákot a lényegbeli problémához, jobban felkelti érdeklődését és lelkesedését. Elvégre logikus, hogy ha valaki megérti hogy egy fogalom, egy tétel mire jó a gyakorlatban, és tudja is használni a mindennapi életben, akkor jobban lelkesedik érte, mint ha csak valami számok és képletek lennének egy papíron. Természetesen, szerintem ez a mi (matekesek) esetünkben nem merül fel annyira, hiszen én lelkesedtem annak idején az osztályban is, amikor a klasszikus módszerrel tanultuk. Számomra azok a „számok és képletek a papíron” mindig valamivel többet jelentenek :) Érdekes volt ez a megközelítés és szerintem nagyon* ***kellene*** *alkalmazni az ilyen oktatási módszert a sulikban is. Ez az egyik nagyobb gond a tanügyi rendszerben, hogy nem valósul a kellő összeköttetés a tantárgyak között. Sokkal többet tanulnának a diákok, ha inkább arra lenne a hangsúly fektetve, hogy a matematikát jobban összefűzzék a fizikával, kémiával, gazdaságtannal, biológiával, mintsem hogy külön-külön minden tanár leadja a saját, elvárt anyagát, függetlenül a másikétól. Elvégre az emberi agy úgy tárolja az információt, hogy különböző fogalmak között összeköttetést teremt.*”

A tudásnak valóban közvetlenül is alkamazhatónak kell lennie. Paradoxonnak tűnik, hogy ez épp azokon a területeken (értsd: matematika és a természettudományok) nem valósul meg, amelyek az elméleti oktatásban a legalkalmasabbak erre a célra.

7.2. Módszertani megjegyzések. Az exponenciális függvény bevezetése sok különböző elképzelés alapján kivitelezhető. Az általunk választott megközelítés előnye, hogy minden tulajdonság, amit vizsgálunk valamilyen kézzelfogható, sokszor gyakorlati problémából fakad. A vizsgált tulajdonságok nagy részét intuitíven megsejtik/megsejthetik a diákok, különösen ha számítógépes számolásokat is használhatnak. Így a bizonyítások jelentős része elvégezhető tapasztalati tényekből kiindulva. A jelenségek megsejtésére, a számolások elvégzésére, egyes részfeladatok megoldására csoportos tevékenységek is alkalmasak. A különböző tulajdonságokra adott alternatív bizonyítások azt probálják tükrözni, hogy általában több bizonyítás is létezhet. Természetesen a bemutatott bizonyításoktól különbözőek is előbukkanhatnak egy-egy foglalkozás során. Fontos, hogy a bemutatott bizonyításokat lehetséges alternatíváknak tekintsük és nem egyetlen lehetséges (és korántsem ajánlott) lehetőségnek. Egy ilyen jellegű bevezetés egyik fő célja, hogy a diákok észleljék a problémákat és próbáljanak azokra megoldásokat találni. Ebben a szemléletmódban a tanár szerepe nem az, hogy megmutassa a diákoknak a bizonyítást. Sokkal inkább az, hogy a diákokat arra késztesse, hogy maguk számoljanak, kísérletezzenek, próbálkozzanak, sejtéseket fogalmazzanak meg stb. Természetesen mindezt nem érdemes ezen a szinten kezdeni. Ahhoz, hogy ez sikeresen kivitelezhető legyen vagy a diákokat kell előzőleg hozzászoktatni ilyenféle munkához, vagy a tevékenységekre szánt időt kell kellőképpen eltúlozni, hisz a tanítási tapasztalatok azt mutatják, hogy ilyen jellegű tevékenységek sikeresek lehetnek akkor is, ha a diákok nincsenek hozzászokva a munkastílushoz, amennyiben eléggé sok idő áll rendelkezésükre.

A bemutatott megközelítés rámutat néhány alapvető problémára, amivel az analízis oktatása során szembesülünk. Talán a legfontosabb probléma, hogy az egész tárgyalásmód (akárcsak az analízis legtöbb bizonyítása) egyenlőtlenségek manipulálásán alapszik és ezt a 9. és 10. osztályos tananyag nem készíti elő, nem támogatja. A megközelítés második igen fontos jellemzője, hogy a bizonyítások nagy részénél meg kell sejteni valamit, amit viszonylag könnyen tudunk igazolni. Az effajta induktív gondolkodásmódot szintén jó gyakoroltatni a diákokkal, különben egyszerűen leszoknak arról, hogy a nyilvánvaló dolgokat észrevegyék, néven nevezzék. Sajnos, a tananyag tartalmi részének a felépítése teljesen ellentmond a kompetenciák fejlesztésére irányuló módszertani törekvéseknek, így a tartalmi részekre koncentrálva, a kísérletezést, az intuíció-próba-hiba-sejtés-bizonyítás kört a mindennapi gyakorlatban kényelmesen ki lehet iktatni. Csakhogy ennek az árát hosszú távon kell megfizetni méghozzá kamatos kamattal, hiszen diákjaink közül egyre kevesebben értik meg az alapfogalmakat, még kevesebben a fogalmak közti összefüggéseket és csak a ritka kivételek fogják megérteni a matematika működésének hihetetlen csodáit, holott mindennapjaink működése és minősége egyre inkább ezeknek a csodáknak a lététől függ.

X. FEJEZET

LINEÁRIS ALGEBRA PROBLÉMA- ÉS KÍVÁNCSISÁG ALAPÚ MEGKÖZELÍTÉSBEN

Ebben a fejezetben a tananyag lineáris algebra fejezetének egy részét próbáljuk meg a problémaközpontú tanítás elveinek megfelelően kidolgozni úgy, hogy az a kíváncsiságvezérelt tanulást támogassa, sokszor az alkalmazás felől kiindulva és a megfelelő modell gyártásával bevezetve az új fogalmakat. Úgy próbálunk építkezni, hogy a probléma megelőzze az elméletet, hogy a tanuló láthassa, hogy honnan és miért bukkannak elő a fogalmak, tulajdonságok és miért lesznek hasznosak a talált matematikai eszközök, miközben a modellalkotásról is némi képet szerezhet (akár ki nem mondott formában is).

1. Bevezető feladatok

1. Feladat. Az ABC háromszög AC és BC oldalán felvesszük a C-hez, illetve B-hez közelebb eső N és M harmadolópontot, valamint az AB oldal P felezőpontját, majd az eredeti háromszöget kitöröljük. Szerkesszük vissza az M, N és P pont alapján az eredeti háromszöget!

XIX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny
Kovács Lajos, Székelyudvarhely

Megoldás. Ha a megfelelő kisbetűkkel jelöljük a csúcsok helyzetvektorait, akkor $3m = 2b + c$, $3n = 2c + a$ és $2p = a + b$. Így ha m, n, p függvényében ki kell fejeznünk az a, b, c-t, akkor meg kell oldanunk a

$$(37) \qquad \begin{cases} 2b + c &= 3m \\ a + 2c &= 3n \\ a + b &= 2p \end{cases}$$

egyenletrendszert. A megoldásokból $b = \frac{1}{5}(2p - 3n + 6m)$, vagyis ha M-et választjuk a helyzetvektorok kezdőpontjának, akkor $b = \frac{1}{5}(2p - 3n)$. Ez azt mutatja, hogy B a PQ-t $3 : 2$ arányban osztó pont. Ha nem választjuk M-et kezdőpontnak, akkor az N-nek az O kezdőpontra vonatkozó Q szimmetrikusa esetén megszerkesztendő a PQ-nak az R pontja, amely a PQ szakaszt $3:2$ arányban osztja, majd az r-hez hozzá kell adni a $\frac{6}{5}m$ vektort. □

2. Feladat. Egy szigeten 13 szürke, 15 barna és 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, mindketten a harmadik színre változtatják bőrük színét. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva minden kaméleon azonos színű legyen? Hát akkor, ha 19 szürke, 13 barna és 20 zöld kaméleon van?

Megoldás. A problémát két dolog okozza: az első az, hogy három fajta találkozás van; a második az, hogy ezeknek a találkozásoknak nem ismerjük a sorrendjét. Ha viszont elképzeljük, hogy csak a szürke kaméleonok számát számláljuk, akkor gyakorlatilag az aktuális kaméleonszámból mindig csak kivonunk egyet, vagy hozzáadunk kettőt. Így viszont a végeredmény nem függ ezeknek a műveleteknek a sorrendjétől, csak attól, hogy melyiket hányszor hajtjuk végre. Ez azt jelenti, hogy a különböző típusú találkozások sorrendjétől nem függ a végeredmény, csak azoknak a számától. Ha a különböző típusú találkozások száma: a (szürkére változnak), b (barnára változnak) és c (zöldre változnak), akkor a találkozások sorrendjétől függetlenül a végén $13+2a-b-c$ szürke, $15-a+2b-c$ barna és $17-a-b+2c$ zöld színű kaméleon lesz. Ha minden kaméleon azonos színű, akkor az előbbi számok közül kettő 0 és a harmadik 45. Így a következő egyenletrendszereket kellene tanulmányozni:

$$\begin{cases} 13+2a-b-c=0 \\ 15-a+2b-c=0 \\ 17-a-b+2c=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} 13+2a-b-c=0 \\ 15-a+2b-c=45 \\ 17-a-b+2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13+2a-b-c=45 \\ 15-a+2b-c=0 \\ 17-a-b+2c=0 \end{cases}$$

Ha valamely rendszer két egyenletét kivonjuk egymásból, akkor ellentmondáshoz jutunk, mert egy 3-mal osztható szám 2 vagy 4 kellene legyen. Tehát nem lehetséges, hogy a kaméleonok mind azonos színűekké változzanak át.

Megjegyzés. Ez gyakorlatilag azt mutatja, hogy két különböző (rögzített) színhez tartozó kaméleonok számának különbsége invariáns a 3-mal való osztási maradékra nézve.

A második esetben a

$$\begin{cases} 19+2a-b-c=0 \\ 13-a+2b-c=0 \\ 20-a-b+2c=52 \end{cases}$$

egyenletrendszerhez (és két társához) jutunk. Ennek a természetes megoldásai $a=b-2$, $c=b+15$, alakúak, ahol $b\in\mathbb{N}$, $b\geq 2$. Tehát $a=0$, $b=2$ és $c=17$ esetén elérjük a kívánt állapotot. Látható, hogy ezek a találkozások lehetségesek is, tehát ebben az esetben elérhető, hogy csak egyszínű kaméleonok éljenek a szigeten. □

Megjegyzés. Ez a feladat azért hasznos, mert rávilágít arra, hogy a modellezési feladatok során megjelenhetnek egyenletrendszerek, ugyanakkor az is világos, hogy a rendszer megoldásának a tulajdonságai fontosak lehetnek a modellezett helyzet szempontjából. Az előbbi két feladat gyakorlatilag az összes jellemző esetet (egyértelműen megoldható rendszerek, összeférhetetlen rendszerek és határozatlan rendszerek) megjeleníti (fogjuk látni, hogy az összeférhetetlen rendszerek megjelennek akkor is, ha az ismeretlenek $\mathbb{R}$-ben vannak).

3. Feladat. Három víztisztító állomás három forrásból kapja a vizet: a K kútból, a T tóból és az F folyóból. Jelölje A_1, A_2 és A_3 a három állomást. Számítsuk ki a három állomás által kapott vízmennyiséget, ha x,y, illetve z a három (K,T,F) vízforrás által szolgáltatott mennyiség, és a források által szolgáltatott vízmennyiség eloszlása a következő:

- K: $\frac{1}{3}$ az A_1-nek, $\frac{1}{3}$ az A_2-nek, $\frac{1}{3}$ az A_3-nak;
- T: $\frac{1}{2}$ az A_1-nek, $\frac{1}{4}$ az A_2-nek, $\frac{1}{4}$ az A_3-nak;
- F: 0 az A_1-nek, $\frac{1}{2}$ az A_2-nek, $\frac{1}{2}$ az A_3-nak.

Vizsgáljuk a fordított problémát is: mennyi víz fogy a kútból, a tóból, illetve a folyóból, ha ismerjük a tisztító állomások h_1, h_2, h_3 hozamát?

Megoldás. Az első állomás hozama $h_1 = x\dfrac{1}{3} + y\dfrac{1}{2} + z \cdot 0$. A második állomás hozama $h_2 = x\dfrac{1}{3} + y\dfrac{1}{4} + z\dfrac{1}{2}$ és a harmadik állomás hozama $h_3 = x\dfrac{1}{3} + y\dfrac{1}{4} + z\dfrac{1}{2}$. A fordított probléma megoldása az

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 0 \cdot z & = & h_1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z & = & h_2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z & = & h_3 \end{array}\right. \tag{38}$$

egyenletrendszer tanulmányozását jelenti. Világos, hogy $h_2 \neq h_3$ esetén nincs megoldás, $h_2 = h_3$ esetén viszont végtelen sok megoldás létezik. A rendszer megoldásai $x = 3\left(h_1 - \frac{1}{2}y\right)$, $z = 2\left(h_2 - h_1 + \frac{1}{4}y\right)$, $y \in \mathbb{R}$ alakban reprezentálhatók, de ez nem minden $y \in R$ esetén adja az eredeti feladat egy megoldását, mert a vízfogyasztás nem lehet negatív. Így szükségesek az $y \geq 0$, $y \leq 2h_1$ és $y \geq 4(h_1 - h_2)$ feltételek, tehát csak $y \geq \max\{0, 4(h_1 - h_2)\}$ és $y \leq 2h_1$ esetén létezik megoldás. $0 \leq h_1 \leq h_2$ esetén tehát $y \in [0, 2h_1]$, és $2h_2 \geq h_1 \geq h_2$ esetén $y \in [4(h_1 - h_2), 2h_1]$. Ugyanakkor $2h_2 < h_1$ esetén nincs megoldása az eredeti problémának. Látható, hogy az utolsó esetben a rendszernek ugyan végtelen sok megoldása van, de az eredeti valós problémának nincs megoldása. □

4. Feladat. (munkaerő modell) Egy társadalomban egy munkaképes egyén egy adott t időpillanatban a következő három állapot valamelyikében lehet:

- s_1 a saját szakterületén dolgozik;
- s_2 más szakterületen dolgozik;
- s_3 nem dolgozik.

Jelöljük p_{ij}-vel azon egyének részarányát, akik a $[t, t + \Delta t]$ időintervallum alatt az s_i állapotból az s_j állapotba kerülnek és x_n, y_n, illetve z_n-nel a három állapotban levő egyének számát a $t + n\Delta t$ időpillanatban.

a) Határozzuk meg az x_n, y_n, z_n számokat az x_0, y_0, z_0 és a $(p_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ számok függvényében.
b) Vizsgáljuk meg, mit jelent az egyensúlyi állapot! Vizsgáljuk meg, mit jelent az, hogy a három kategória létszámának az egymáshoz viszonyított aránya nem változik!
c) Hogyan tanulmányozható a rendszer hosszú távú viselkedése?

Megoldás. A $t+(n+1)\Delta t$ időpillanatban az s_i állapotban levők az s_1, s_2 és s_3 állapotból származnak, méghozzá $p_{1i}x_n$ az s_1-ből, $p_{2i}x_n$ az s_2-ből és $p_{3i}x_n$ az s_3-ból. Ez alapján a következő rekurziós összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= p_{11}x_n + p_{21}y_n + p_{31}z_n \\ y_{n+1} &= p_{12}x_n + p_{22}y_n + p_{32}z_n \\ z_{n+1} &= p_{13}x_n + p_{23}y_n + p_{33}z_n \end{cases}$$

Látható tehát, hogy az a) alpont a rekurzió megoldását (az általános tag meghatározását) jelenti, az egyensúlyi állapot meghatározása egy egyenletrendszer megoldását és a hosszú távú viselkedés az előbbi rekurzióval adott sorozatok vizsgálatát (korlátosság, monotonitás, határérték számítás, periodikusság stb.). □

2. Mátrixok

2.1. A mátrix fogalma. A mindennapi életben találkozunk olyan mennyiségekkel, amelyek nem fejezhetők ki egyetlen szám segítségével. Néha szükségünk van egy számsorozatra vagy egy számtáblázatra ezek kifejezéséhez. Például a családi költségvetés elkészítése egyszerűbb, ha az értékeket egy táblázatba foglaljuk:

Hónap	Közköltség	Élelem	Ruházat	Egyéb
November	250	700	500	850
December	400	1000	800	1100

Hasonlóan, ha az A, B, C és D városok közti távolságokat szeretnénk megvizsgálni, figyelembe véve, hogy bármely két város közt lehet közlekedni közúton is és vasúton is, akkor a legkényelmesebb a következő táblázatot használni (a vasúti távolságok az átló alatt, a közúti távolságok az átló fölött vannak):

	A	B	C	D
A	0	120	200	155
B	100	0	80	110
C	190	90	0	160
D	150	100	150	0

A fentieket, ha tudjuk melyik mennyiség, mit jelent, az alábbi alakban is írhatjuk egyszerűsített táblázatokként:

$$\begin{pmatrix} 250 & 700 & 500 & 850 \\ 400 & 1000 & 800 & 1100 \end{pmatrix},$$

illetve

$$\begin{pmatrix} 0 & 120 & 200 & 155 \\ 100 & 0 & 80 & 110 \\ 190 & 90 & 0 & 160 \\ 150 & 100 & 150 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az ilyen típusú táblázatokkal gyakran találkozhatunk. A matematikában ezeket mátrixoknak nevezzük.

10.1. Értelmezés. $m \times n$-es mátrixnak nevezünk egy m sorból és n oszlopból álló

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

táblázatot. Az a_{ij} számokat ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) az A mátrix elemeinek nevezzük.

Megjegyzések. 1. A mátrixok jelölésére az

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

írásmódot használ, ami azt jelenti, hogy a mátrix i-edik sorának j-edik oszlopában az a_{ij} elem áll.

2. $\mathcal{M}_{m,n}(X)$-szel jelöljük azon $m \times n$-es mátrixok halmazát, amelyeknek minden eleme az X halmazból való. Például a valós elemű, m

sort és n oszlopot tartalmazó mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$-el jelöljük. $m = n$ esetén az $\mathcal{M}_n(X)$ jelölést használjuk.

3. Ha $m = n$, akkor a mátrixot négyzetes mátrixnak nevezzük. A komplex elemű, $n \times n$-es mátrixok halmazát $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$-vel jelöljük.

4. Ha $m = 1$, akkor a mátrix egyetlen sorból áll. Az ilyen mátrixot sormátrixnak nevezzük. Az egész elemű, n oszlopból álló sormátrixok halmazát például $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{Z})$-vel jelöljük.

5. Ha $n = 1$, akkor a mátrix egyetlen oszlopból áll, és oszlopmátrixnak nevezzük. A racionális elemű, m sorból álló oszlopmátrixok halmazát például $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{Q})$-val jelöljük.

6. A sormátrixok, illetve oszlopmátrixok tulajdonképpen X^n, illetve X^n-beli vektorok.

7. Egy $\mathcal{M}_{m,n}(X)$-beli mátrix felfogható egy $f : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to X$ függvényként is.

Természetesen a mátrixfogalom akkor lesz igazán hasznos számunkra, ha ezekkel a táblázatokkal nemcsak leírni tudunk bizonyos mennyiségeket könnyen átlátható formában (hiszen ez már önmagában is segítség), hanem ezek közt bizonyos összefüggéseket tudunk teremteni, amelyek hozzásegítenek egyébként nehezen kezelhető problémák gyors és könnyű megoldásához. Ezért a következőkben vizsgáljunk néhány olyan problémát, amely mátrixok segítségével kezelhető és keressünk olyan eszközöket, amelyek a problémák minél könnyebb és átláthatóbb vizsgálatát, illetve megoldását lehetővé teszik.

2.2. Mátrix szorzása számmal. Háziasszonyok gyakran szembesülnek az alábbihoz hasonló problémákkal. Két torta (sütemény) elkészítéséhez a következő nyersanyagokra van szükségünk: az elsőhöz szükséges cukor, liszt, tojás, eper, vaj; a másodikhoz pedig cukor, liszt, tojás, csokoládé, vaj. Azt, hogy melyik kellékből mennyire van szükség, a következő táblázatban foglaltuk össze:

$\cdot$	cukor	liszt	tojás	eper	csokoládé	vaj
S_1	150 g	120 g	8 db.	300 g	0	100 g
S_2	120 g	80 g	6 db.	0	200 g	150 g

A táblázatot a következő mátrixként is felfoghatjuk:

$$\begin{pmatrix} 150 & 120 & 8 & 300 & 0 & 100 \\ 120 & 80 & 6 & 0 & 200 & 150 \end{pmatrix}$$

Ha csak fél adagot akarunk sütni, mindkét süteményből, akkor minden kellékből a fentiek felét kell beletenni, ha viszont valami nagy családi esemény alkalmából egyszerre három adaggal is készítenénk mindkettőből, akkor minden kellék háromszorosára lesz szükségünk. Ha az ehhez szükséges mennyiségeket újabb táblázatokba foglaljuk, a fél adaghoz szükséges mennyiségek táblázata:

$\cdot$	cukor	liszt	tojás	eper	csokoládé	vaj
S_1	75 g	60 g	4 db.	150 g	0	50 g
S_2	60 g	40 g	3 db.	0	100g	75 g

illetve a három adaghoz szükséges mennyiségek táblázata:

$\cdot$	cukor	liszt	tojás	eper	csokoládé	vaj
S_1	450 g	360 g	24 db.	900 g	0	300 g
S_2	360 g	240 g	18 db.	0	600 g	450 g

Az előbbi táblázatokhoz rendelt mátrixok a következők:

$$\begin{pmatrix} 75 & 60 & 4 & 150 & 0 & 50 \\ 60 & 40 & 3 & 0 & 100 & 75 \end{pmatrix},$$

illetve

$$\begin{pmatrix} 450 & 360 & 24 & 900 & 0 & 300 \\ 360 & 240 & 18 & 0 & 600 & 450 \end{pmatrix}$$

A két utolsó mátrixot úgy kapjuk a hozzávalók eredeti mátrixából, hogy az első esetben minden elemét $0,5$-tel, a második esetben minden elemét 3-mal szorozzuk.

A továbbiakban, ha egy mátrix minden elemét ugyanazzal a számmal szorozzuk, azt mondjuk, hogy a mátrixot szorozzuk az adott számmal. Ezáltal tulajdonképpen egy műveletet értelmeztünk: egy mátrixnak valós (komplex stb.) számmal való szorzását.

10.2. Értelmezés. Ha $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ és $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor az $U = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ mátrixot az A mátrix α-val való szorzatának nevezzük és $\alpha \cdot A$-val jelöljük.

Példák

(1) $4 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 20 & 9 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 12 & 80 & 36 & 0 \\ 24 & 8 & -32 & 0 & -20 \end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -0 & 3 & 4\sqrt{2} \\ -2i & -8 & 0,5 \\ 7 & 4+2i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0 & 1,5 & 2\sqrt{2} \\ -i & -4 & 0,25 \\ 3,5 & 2+i & 0,5 \end{pmatrix}$

3. Mátrixok összeadása

Ha zsúfolt, vendégekkel teli hetünk lesz és kétszer is sütni szeretnénk, egyszer két, másodszor pedig három adagot, de a hozzávalókat egyszerre szeretnénk megvásárolni, nyilván minden alapanyagból ötször annyit kell vennünk, mint az egy adaghoz szükséges táblázatban található értékek. Ezt kétféleképpen is kiszámíthatjuk: úgy, hogy az $X = 2A$ mátrix megfelelő elemeit összeadjuk az $Y = 3A$ mátrix elemeivel, vagy úgy, hogy az A mátrix megfelelő elemeit öttel szorozzuk.

$$\begin{aligned} X + Y =& 2A + 3A \\ =& \begin{pmatrix} 300 & 240 & 16 & 600 & 0 & 200 \\ 1240 & 160 & 12 & 0 & 400 & 300 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 450 & 360 & 24 & 900 & 0 & 300 \\ 360 & 240 & 18 & 0 & 600 & 450 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 750 & 600 & 40 & 1500 & 0 & 500 \\ 600 & 400 & 30 & 0 & 1000 & 750 \end{pmatrix} \\ =& 5A \end{aligned}$$

A továbbiakban, ha két ugyanolyan típusú (méretű) mátrix megfelelő elemeit összeadjuk egymással, azt mondjuk, hogy a két mátrixot összeadtuk. Ezzel az ugyanolyan típusú mátrixok halmazában egy újabb műveletet értelmeztünk: a mátrixok összeadását.

10.3. Értelmezés. Ha $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ és $B = (b_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, akkor $A + B = (c_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, ahol

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},\ \forall i = \overline{1,m},\ \forall j = \overline{1,n}.$$

Példák

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ i & 2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -5 \\ -3+i & 2 \\ 0 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \\ 3i & \sqrt{3} & 0,(3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \\ 3i & \sqrt{3} & 0,(3) \end{pmatrix}$$

Megjegyzés. Az adott kontextusban egyszerűen belátható a mátrixok összeadásának összes tulajdonsága.

4. Mátrixok szorzása

Amikor a tortához szükséges termékeket bevásároljuk, az ár szempontjából nem mindegy, hogy hol tesszük ezt meg. Két különböző boltban az árak a következők:

- az A boltban 1 kg cukor 3 lej, 1 kg liszt $2,5$ lej, 1 tojás $0,3$ lej, 1 kg eper 7 lej, 1 kg csokoládé 20 lej, 1 vaj $4,5$ lej;
- a B boltban 1 kg cukor $2,8$ lej, 1 kg liszt 3 lej, 1 tojás $0,4$ lej, 1 kg eper 6 lej, 1 kg csokoládé 25 lej, 1 vaj $4,2$ lej.

A fenti adatokat a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

	Cukor	Liszt	Tojás	Eper	Csokoládé	Vaj
Az A boltban az ár (lej/kg vagy db)	3	$2,5$	$0,3$	7	20	$4,5$
A B boltban az ár (lej/kg vagy db)	$2,8$	3	$0,4$	6	25	$4,2$

Ahhoz, hogy eldönthessük, hogy melyik boltban érdemesebb vásárolni, kiszámítjuk az első torta, illetve a második torta hozzávalóinak árát az A, illetve B boltban.

- Az első torta alapanyagainak ára az A boltban:

$$p_{11} = 0,15 \cdot 3 + 0,12 \cdot 2,5 + 8 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 7 + 0,5 \cdot 4,5 = 7,5.$$

- Az első torta alapanyagainak ára a B boltban:

$$p_{12} = 0,15 \cdot 2,8 + 0,12 \cdot 3 + 8 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 6 + 0,5 \cdot 4,2 = 8,03.$$

- A második torta alapanyagainak ára az A boltban:

$$p_{21} = 0,12 \cdot 3 + 0,08 \cdot 2,5 + 6 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 20 + 0,75 \cdot 4,5 = 9,75.$$

- A második torta alapanyagainak ára az B boltban:

$$p_{22} = 0,12 \cdot 2,8 + 0,08 \cdot 3 + 6 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 25 + 0,75 \cdot 4,2 = 11,126.$$

Látható, hogy mindkét torta olcsóbb lesz, ha az A boltban vásárolunk. A kellékek A mátrixa és az árak B mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix}.$$

Megfigyelhetjük, hogy a p_{11}-et úgy kapjuk, hogy az A mátrix első sorának elemeit megszorozzuk a B mátrix első oszlopának megfelelő elemeivel (a sor első elemét az oszlop első elemével stb.) és ezeket összegezzük. A p_{12}-t hasonlóan képezzük, az első sor elemeit a második oszlop elemeivel szorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk. Ezeket a műveleteket nyilván csak akkor tudjuk ilyen módon elvégezni, ha az A oszlopainak száma megegyezik a B sorainak számával. A kapott p értékeket egy újabb mátrixszal írhatjuk le: $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$. Ez a mátrix az A és B mátrixok szorzata.

10.4. Értelmezés. Az $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ és $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ mátrixok szorzata az $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ mátrix, ahol

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

Példák:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+5\cdot 4 & 2\cdot(-2)+5\cdot(-9) \\ -1\cdot 1+3\cdot 4 & -1\cdot(-2)+3\cdot(-9) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & -49 \\ 11 & -25 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+0\cdot 1+(-2)\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot(-4)+(-2)\cdot 0 \\ 3\cdot(-2)+1\cdot 1+(-4)\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot(-4)+(-4)\cdot 0 \\ 1\cdot(-2)+0\cdot 1+0\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot(-4)+0\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -17 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ebben a kontextusban megvizsgálhatjuk a mátrixok szorzásának tulajdonságait. Mi csak a szorzásnak az összeadásra vonatkozó disztributivitására és az asszociativitásra térünk ki.

4.1. A disztributivitás vizsgálata. Ha egy, illetve három adag tortára való alapanyagot szeretnénk megvásárolni bármelyik boltból, ez ugyanannyiba kerül, ha egyszerre vásároljuk meg őket, mint ha rendre vennénk meg a hozzávalókat, előbb az egy adagra, utána a három adagra valót ugyanazokból a boltokból. Ha A-val, illetve C-vel jelöljük az alapanyagok mátrixát, B-vel az árakét, akkor:

$$(A+C)B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,48 & 32 & 1,2 & 0 & 2 \\ 0,48 & 0,32 & 24 & 0 & 0,8 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 32,12 \\ 38,94 & 44,504 \end{pmatrix},$$

$$AB+CB=\begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0,45 & 0,36 & 24 & 0,9 & 0 & 1,5 \\ 0,36 & 0,24 & 6 & 0 & 0,6 & 2,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 7,5 & 8,03 \\ 9,735 & 11,126 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 22,5 & 24,09 \\ 29,205 & 33,378 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 30 & 32,12 \\ 38,94 & 44,504 \end{pmatrix}.$$

A tulajdonság tetszőleges $A, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ mátrixokra fennáll, azaz $(A+C)B = AB + CB$. Ezt formálisan is igazolhatjuk. Valóban, ha $(A+C)B = D = (d_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}$, akkor

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+c_{ij})b_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk}+c_{ij}b_{jk}).$$

Ugyanakkor, ha $AB = E$ és $CB = F$, akkor

$$e_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \quad \text{és} \quad f_{ik} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}b_{jk},$$

tehát

$$e_{ik}+f_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk}+c_{ij}b_{jk}) = d_{ik}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy $A(C+B) = AC + AB$, ha $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ és $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, tehát a mátrixok szorzása disztributív a mátrixok összeadására nézve.

4.2. Az asszociativitás vizsgálata. Ha az elmúlt hónapban egy-egy adag tortát sütöttünk az egyik boltból vásárolt alapanyagokból, illetve a másik boltból vásárolt alapanyagokból is, ennek költségeit kétféleképpen számíthatjuk ki. Ha A-val jelöljük a hozzávalók mátrixát, B-vel az árak mátrixát és C-vel az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mátrixot, a tortatípus szerinti összköltségek mátrixát kiszámíthatjuk a következő módokon:

$$(AB)C = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} \\ p_{21} + p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,53 \\ 20,861 \end{pmatrix},$$

ahol az AB mátrix első sorában levő elemek az első, illetve a második torta alapanyagainak árát tartalmazza.

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5,8 \\ 5,5 \\ 0,7 \\ 13 \\ 45 \\ 8,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,53 \\ 20,861 \end{pmatrix}$$

Itt a BC mátrix elemei a megfelelő hozzávalók egységárát tartalmazzák a két boltban összesen, így az $A(BC)$ szorzat szintén az összköltség mátrixát adja. Belátható, hogy a tulajdonság tetszőleges $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ mátrixok esetén is igaz:

$$(AB)C = A(BC).$$

Formális bizonyítás. Ha $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, akkor a $D = AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ mátrix elemei $d_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}$. Ekkor $(AB)C = DC = E \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, ahol

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

Ugyanakkor $BC = F \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$, ahol $f_{lj} = \sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}$. Így $A(BC) = AF = G \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, ahol

$$g_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}f_{lj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

Az $(AB)C = A(BC)$ egyenlőség igazolásához, már csak azt kell belátnunk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \quad \forall x_{ij} \in \mathbb{C},$$

vagyis hogy egy $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ összegben az összegezési sorrend felcserélhető.

10.5. Lemma. *Ha $x_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,m}$ és $j = \overline{1,n}$, akkor*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

Bizonyítás. Legyen $X = (x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$. A $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ az i-edik sorban szereplő elemek összege, így a $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ összeg az X mátrix sorösszegeinek összege, ami nem más, mint a mátrix összes elemének összege. Hasonlóan a $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ a j-edik oszlopban szereplő elemek összege és a $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ összeg az X mátrix oszlopösszegeinek összege, ami szintén a mátrix összes elemének összege. Tehát a két összeg egymással egyenlő. $\square$

Ez alapján látható, hogy a mátrixok szorzása asszociatív. $\square$

Megjegyzés. A kontextus arra alkalmas, hogy az asszociativitásról intuitíven meggyőződhessünk, lássuk, hogy ez nemcsak egy absztrakt tulajdonság, hanem egy egyszerű gondolati átcsoportosítás leírása.

Térjünk vissza az 1. feladat megoldásához. Mátrixos jelölést használva, a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ 3n \\ 2p \end{pmatrix}$$

alakba írható. A megoldások mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3m \\ 3n \\ 2p \end{pmatrix}.$$

A 3. feladatban láttuk, hogy a jelenség egyik irányú leírása eredményezte a rendszert, a fordított folyamat leírása a megoldás felírását. Ugyanezt tükrözi, az előbbi két, mátrixokkal felírt, egyenlőség is. Ha tehát egy mátrixszal való szorzás egy állapotból egy másikba való eljutást írja le, akkor az előbbi eset mutatja, hogy néha a fordított transzformációt is le lehet írni egy mátrix segítségével. Így az a sejtésünk fogalmazódik meg, hogy a két mátrix szorzata az identikus transzformáció mátrixát adja meg. Ezt érdemes ellenőrizni, és mátrixokkal is felírni az identikus transzformációhoz tartozó mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az előbbi egyenlőségek jobb oldalán megjelenő mátrixot identikus mátrixnak vagy egységmátrixnak nevezzük és I_3-mal jelöljük. Ennek a mátrixnak az a tulajdonsága, hogy $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Általában, ha tekintjük az $n \times n$-es négyzetes mátrixok $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ halmazát és keresünk ebben a halmazban egy olyan I_n mátrixot, amelyre $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}$, akkor az

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

mátrixot kapjuk, ahol $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ha} \quad i = j \\ 0 & , \text{ha} \quad i \neq j \end{cases}$

10.6. Értelmezés. Az $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrixot egységmátrixnak nevezzük.

Az előbb azt is láttuk, hogy léteznek olyan mátrixok, amelyek szorzata a szorzótényezők sorrendjétől függetlenül az egységmátrixot eredményezi. Ezeket a mátrixokat egymás inverzének nevezzük.

10.7. Értelmezés. Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrixot invertálhatónak nevezzük, ha létezik olyan $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrix, amelyre

$$AA' = A'A = I_n.$$

Az A' mátrixot az A mátrix inverzének nevezzük és A^{-1}-nel jelöljük.

Vizsgáljuk meg, hogy a mátrix inverze, ha létezik, egyértelműen meghatározott-e. Ennek érdekében tekintsünk egy A invertálható mátrixot. Lehet-e ennek két egymástól különböző A' és A'' inverze?

Mivel A' és A'' inverzei az A-nak: $AA' = A'A = I_n$ és $AA'' = A''A = I_n$. Akkor $A'' = A''I_n = A''(AA') = (A''A)A' = I_nA' = A'$. Tehát, ha A' és A'' inverzei az A mátrixnak, akkor egymással egyenlőek. Ezért, ha A invertálható, az inverze egyértelműen meghatározott.

A 4. feladat során láttuk, hogy ha $u_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, akkor a rekurzió

$$u_{n+1} = P^t \cdot u_n$$

alakba írható. Emiatt

$$u_n = A \cdot u_{n-1} = A \cdot (A \cdot u_{n-2}) = \ldots = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{n} \cdot u_0,$$

ahol $A = P^t$. Ez motiválja a mátrixok hatványozásának vizsgálatát.

10.8. Értelmezés. Ha $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, értelmezhetjük az A mátrix hatványait induktív módon:

$$A^0 = I_n,\ A^1 = A \text{ és } A^{n+1} = A^n A,\ \forall n \geq 1 \text{ esetén.}$$

Megjegyzés. Mivel a mátrixokkal végzett műveletek, a szorzás kommutativitásától eltekintve, ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a valós számokkal végzett műveletek, ha két mátrix szorzási sorrendje felcserélhető, akkor igazak a komplex számok esetén fennálló rövidített számítási képletek.

10.9. Tétel. *Ha $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ és $AB = BA$, akkor*

- $A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + ... + AB^{k-2} + B^{k-1})$;
- $A^{2k+1} + B^{2k+1} = (A+B)(A^{2k} - A^{2k-1}B + ... - AB^{2k-1} + B^{2k})$;
- $(A+B)^k = A^k + C_k^1 A^{k-1}B + C_k^2 A^{k-2}B^2 + ... + C_k^{k-1}AB^{k-1} + B^k$,

bármely $k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$ esetén.

A 4. probléma részletesebb vizsgálata. Feltételezzük, hogy a P mátrix elemei

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

és meghatározzuk az egyensúlyi állapotot, illetve megvizsgáljuk a rendszer hosszú távú viselkedését. Sejthető, hogy ha $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ az egyének száma az egyensúlyi állapotban, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \overline{z}$. A továbbiakban ezt is igazoljuk.

Ha $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$ egy egyensúlyi állapot, akkor $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$,
tehát

$$\begin{cases} \overline{x} &= 0,7\overline{x} + 0,1\overline{y} + 0,1\overline{z} \\ \overline{y} &= 0,2\overline{x} + 0,6\overline{y} + 0,1\overline{z} \\ \overline{z} &= 0,1\overline{x} + 0,3\overline{y} + 0,8\overline{z} \end{cases}.$$

Ugyanakkor $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = N$, ahol N a populáció összlétszáma. A rendszer megoldásai: $\overline{x} = 0,25N$, $\overline{y} = 0,25N$ és $\overline{z} = 0,5N$. Ez azt mutatja, hogy az adott átmeneti mátrix (P) mellett egyensúlyi állapot csakis akkor jön létre, ha a populáció negyede saját szakterületén, negyede más szakterületen dolgozik és fele munkanélküli.

A feltételek alapján:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= p_{11}x_n + p_{21}y_n + p_{31}z_n \\ y_{n+1} &= p_{12}x_n + p_{22}y_n + p_{32}z_n \\ z_{n+1} &= p_{13}x_n + p_{23}y_n + p_{33}z_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N},$$

amely mátrixegyenlőség alakjában:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

P^t pedig a P mátrix transzponáltja, amit úgy kapunk a P mátrixból, hogy a sorait felcseréljük az oszlopaival. Ebből az egyenlőségből

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \left(P^t\right)^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = ... = \left(P^t\right)^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

bármely $n \geq 1$. A P^t mátrix hatványait számolva, egymás utáni négyzetre emelésekkel azt kapjuk, hogy

$$(P^t)^{32} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ez az egyensúlyi állapotra felírt feltételek alapján azt mutatja, hogy ettől az indextől kezdve az $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ sorozatok állandók. $\square$

Megjegyzés. Érdemes számítógépes szimuláció segítségével kikísérletezni, hogy más P mátrix esetén a rendszer milyen jellegzetes viselkedési mintát mutat hosszú távon. Ennek érdekében olyan $M = P^t$ mátrixokat kell generálni, amelyekben az elemek nem negatívak és oszloponként az összegük 1 (az ilyen mátrixokat sztochasztikus mátrixoknak nevezzük). Azt tapasztalhatjuk, hogy tetszőleges u_0 esetén az ilyen mátrixokra az $u_n = M^n \cdot u_0$ sorozat konvergál egy vektorhoz, ami épp az egyensúlyi állapotot írja le (vagyis az $u = M \cdot u$ egyenlet megoldása).

5. Feladat. (biomatematikai modell) Tekintsünk két állatfajt, melyek egyedei kölcsönösen vadásszák egymást (például a hiénák és oroszlánok az afrikai Szaharában). Ha x_n és y_n jelöli a két faj egyedeinek számát n év után, akkor modellezzük a következő két jelenséget:

a) Az új egyedek születése és más egyedek eltűnése a faj összlétszámának p százalékos változásához vezet, p lehet negatív is, ha az elhalálozási arány nagyobb a születési aránynál. Vizsgáljuk azt a helyzetet, amikor ez az arány 10% a hiénák esetében és -10% az oroszlánok esetében.

b) Mindkét faj a saját létszámával egyenesen arányos számú egyedet öl meg a másik fajból. Legyen ez az arány 15% az oroszlánok által megölt hiénák esetében és 20% a hiénák által megölt oroszlánok esetében.

Megoldás. A faj egyedszámának alakulását a következő rekurzióval írhatjuk le:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1,1x_n - 0,15y_n \\ y_{n+1} &= 0,9y_n - 0,2x_n \end{cases}$$

Ezek az egyenlőségek mátrix egyenlőség alakjában:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Innen $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = ... = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, tehát az egyedek számának változása a két fajban az $f(n) = A^n$ függvénytől függ, ahol $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$.

Legyen $x_0 = 100$ a hiénák kezdeti száma és $y_0 = 200$ az oroszlánoké. Ahhoz, hogy az egyedek számának változását vizsgáljuk, ki kell számolnunk az A^n mátrixot. Mivel $\operatorname{Tr} A = 2$, $\det A = 0,96$, a karakterisztikus egyenlet $r^2 - 2r + 0,96 = 0$, melynek gyökei $r_1 = 0,8$ és $r_2 = 13$, tehát $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ és

$$\begin{aligned} a_n &= r_1(0,8)^n + r_2(1,2)^n \\ b_n &= r_3(0,8)^n + r_4(1,2)^n \\ c_n &= r_5(0,8)^n + r_6(1,2)^n \\ d_n &= r_7(0,8)^n + r_8(1,2)^n \end{aligned}$$

Ha a kezdeti feltételekből kiszámítjuk az r_1, r_2, ... , r_8 állandókat, akkor azt kapjuk, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(0,8)^n + 3(1,2)^n}{4} & \dfrac{3[(0,8)^n - (1,2)^n]}{8} \\ \dfrac{(0,8)^n - (1,2)^n}{2} & \dfrac{3[(0,8)^n + (1,2)^n]}{4} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(0,8)^n + 3(1,2)^n}{4} x_0 + \frac{3[(0,8)^n - (1,2)^n]}{8} y_0 = \\ &= \frac{1}{8}(0,8)^n(2x_0 + 3y_0) + \frac{1}{8}(1,2)^n(2x_0 - y_0) = 100(0,8)^n, \\ y_n &= \frac{(0,8)^n - (1,2)^n}{2} x_0 + \frac{3(0,8)^n + (1,2)^n}{4} y_0 = \\ &= \frac{1}{4}(0,8)^n(2x_0 + 3y_0) - \frac{1}{4}(1,2)^n(2x_0 - y_0) = 200(0,8)^n. \end{aligned}$$

Látható, hogy mindkét faj kihalófélben van, mert számuk mértani haladványban csökken. □

Ha azt szeretnénk megvizsgálni, hogy tíz évvel ezelőtt mi volt az egyedek száma az egyes állatfajtákban tudva, hogy jelenleg a hiénák száma $x_0 = 100$ és az oroszlánok száma $y_0 = 200$, akkor a következő módon járhatunk el. Előbb azt vizsgáljuk meg, mi volt az egyedszám egy évvel ezelőtt. Ha x_{-1}, y_{-1}-gyel jelöljük az akkor élő hiénák illetve oroszlánok számát, az

$$\begin{cases} 1,1x_{-1} - 0,15y_{-1} &= 100 \\ 0,9y_{-1} - 0,2x_{-1} &= 200 \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk, melyben az ismeretlenek az x_{-1} és y_{-1}. Mátrixegyenlet formájában:

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{azaz}$$

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix},$$

ahol A az átmeneti mátrix. Ha az A olyan mátrix, amelynek létezik az A^{-1} inverz mátrixa, akkor a fenti egyenlőséget beszorozzuk balról A^{-1}-el és azt kapjuk, hogy $A^{-1}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix}$.
Ha még egy évvel visszamegyünk, azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{-2} \\ y_{-2} \end{pmatrix}, \text{ ahonnan}$$

$$\begin{pmatrix} x_{-2} \\ y_{-2} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = A^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = A^{-2} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$\begin{pmatrix} x_{-10} \\ y_{-10} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_{-9} \\ y_{-9} \end{pmatrix} = \left(A^{-1}\right)^2 \begin{pmatrix} x_{-8} \\ y_{-8} \end{pmatrix} = \ldots = \left(A^{-1}\right)^{10} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy

$$(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}, \ \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

invertálható mátrix és $\forall m \in \mathbb{N}$ esetén. Valóban, az értelmezés szerint $A^m(A^m)^{-1} = (A^m)^{-1}A^m = I_n$. Ugyanakkor

$$(A^{-1})^m A^m = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{m} \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m} = I_n,$$

mert a szorzás asszociativitása miatt a szorzásokat elvégezhetjük a közepéről kiindulva is. Hasonlóan $A^m(A^{-1})^m = I_n$ és az inverz mátrix egyértelműsége alapján $(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$.

10.10. Értelmezés. Ha $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertálható mátrix, értelmezzük az A mátrix negatív hatványait:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5. Egyenletrendszerek

Vizsgáljuk most meg, hogy adott A mátrix mellett lehetséges-e egy strukturálisan stabil egyensúly, azaz olyan állapot, amelyben a hiénák és az oroszlánok számának λ aránya állandó, nem változik egyik évről a másikra. A strukturális stabilitás feltétele adott $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $u_{n+1} = \lambda u_n$ egyenlőség teljesülése, ahol $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ és $u_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$. Ha $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ egy strukturálisan stabil állapotot jelölő vektor, akkor a $\lambda u = Au$ mátrixegyenlethez jutunk. Tehát a strukturális stabilitás csak olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén lehetséges, amelyre létezik olyan u, amelyre fennáll a $\lambda u = Au$ egyenlőség. Ezeket a λ értékeket az A mátrix sajátértékeinek, az u vektorokat pedig az A mátrix sajátvektorainak nevezzük. A $\lambda u = Au$ mátrixegyenlőséget felírva $(A - \lambda I_n)u = O_2$ alakban az

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x & + & a_{12}y & = & 0 \\ a_{21}x & + & (a_{22} - \lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

lineáris, homogén egyenletrendszert kapjuk. Ugyanezekhez a fogalmakhoz vezet, ha a munkaerőpiac modellel kapcsolatosan vagy ha geometriai transzformációkkal kapcsolatban teszünk fel hasonló kérdéseket. Mindezen kérdések a sajátértékek, sajátvektorok fogalmához vezetnek, illetve bizonyos homogén vagy nem homogén lineáris egyenletrendszerek megoldását teszik szükségessé.

Megjegyzés. Látható, hogy a legtermészetesebb probléma, amivel érdemes kezdeni a lineáris algebrát, a lineáris rendszerek vizsgálata.

5.1. Lineáris egyenletrendszerek megoldásának vizsgálata. A munkaerő, illetve biomatematikai modellben láttuk, hogy a munkaerőpiac stabilitásának feltételét a

$$\begin{cases} -0,3\overline{x}+0,1\overline{y}+0,1\overline{z} &= 0 \\ -0,3\overline{x}+0,1\overline{y}+0,1\overline{z} &= 0 \\ -0,3\overline{x}+0,1\overline{y}+0,1\overline{z} &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása adta, a hiénák és az oroszlánok strukturálisan stabil számát pedig a

$$\begin{cases} (1,1-\lambda)x-0,15y &= 0 \\ -0,2x+(0,9-\lambda)y &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása, a megfelelő λ értékek meghatározása után. Sok más gyakorlati feladat vezet lineáris egyenletrendszerekhez. Ezért szükségünk van olyan módszerre, amely alkalmas ezek megoldására, az ismeretlenek és egyenletek számától függetlenül.

10.11. Értelmezés. Lineáris egyenletrendszernek nevezünk egy olyan egyenletrendszert, amely $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$ alakú egyenleteket tartalmaz, ahol x_i, $i=\overline{1,n}$ az ismeretlenek és $a_i\in\mathbb{C}$, valamint $b\in\mathbb{C}$ rögzített számok.

Tekintsük az

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad ... & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{nn}x_n &= b_m \end{cases}$$

rendszert, rendeljük hozzá az

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

bővített mátrixot, és vizsgáljuk meg, hogy az egyenletrendszer megoldása közben melyek azok a műveletek, amelyeket végezhetünk úgy, hogy az eredeti rendszerrel ekvivalens rendszert kapjunk (két rendszer ekvivalens, ha azonos a megoldáshalmazuk).

(1) Az egyenletrendszer bármely egyenletét szorozhatjuk vagy oszthatjuk egy 0-tól különböző számmal.
(2) Bármely két egyenletet felcserélhetünk egymással.
(3) Az egyik egyenletet megszorozhatjuk egy számmal és hozzáadhatjuk egy másikhoz.

Az egyenletrendszer megoldása közben a rendszert mindig egy vele ekvivalens rendszerré alakítjuk úgy, hogy a végén a rendszer megoldása könnyen leolvasható legyen. Minden lépést a bővített mátrixon is elvégzünk, és a kapott mátrixokat az eredetivel ekvivalenseknek nevezzük.

10.12. Értelmezés. Ha adott egy mátrix, elemi sortranszformáción azokat a transzformációkat értjük, amelyek az eredeti mátrixhoz rendelhető lineáris egyenletrendszerrel ekvivalens egyenletrendszerhez tartozó mátrixszá alakítják az eredeti mátrixot.
Az elemi sortranszformációk a következők:

a) egy mátrix valamely sorát szorozzuk vagy osztjuk egy 0-tól különböző számmal;
b) egy mátrix két sorát felcseréljük;
c) egy mátrix egyik sorának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz.

A továbbiakban két mátrixot ekvivalensnek nevezünk, ha az egyik megkapható a másikból elemi sortranszformációk segítségével. Ezt $A \sim B$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzés. Ha B megkapható A-ból elemi transzformációk segítségével, akkor A is megkapható B-ből elemi transzformációk segítségével, mivel ezek a transzformációk megfordíthatóak.

1. Vizsgáljuk meg, hogy mit jelentenek a

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer esetén a bővített mátrixra alkalmazott elemi sortranszformációk. A következőkben párhuzamosan kezeljük ezeket a változtatásokat az egyenletrendszer és a hozzá tartozó bővített mátrix esetén:

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & 6y & + & 3z & = & 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Az első sort osztjuk 3-mal.

$$\begin{cases} x & - & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{3}z & = & \frac{2}{3} \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & 6y & + & 3z & = & 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Az első sor elemeit kivonjuk a második sor megfelelő elemeiből ($S_2 - S_1 \to S_2$) és a harmadik sor megfelelő elemeiből ($S_3 - S_1 \to S_3$).

$$\begin{cases} x & - & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{3}z & = & \frac{2}{3} \\ & & \frac{8}{3}y & - & \frac{4}{3}z & = & \frac{1}{3} \\ & - & \frac{16}{3}y & + & \frac{8}{3}z & = & -\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

A második sort osztjuk $\frac{8}{3}$-dal.

$$\begin{cases} x & - & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{3}z & = & \frac{2}{3} \\ & & y & - & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{8} \\ & - & \frac{16}{3}y & + & \frac{8}{3}z & = & -\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

A második egyenletet $\frac{2}{3}$-dal, majd $\frac{16}{3}$-dal szorozzuk és hozzáadjuk az elsőhöz, illetve a harmadikhoz ($\frac{2}{3}S_2 + S_1 \to S_1$, $\frac{16}{3}S_2 + S_3 \to S_3$).

$$\begin{cases} x & & & & = & \frac{3}{4} \\ & y & - & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{8} \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mivel az utolsó egyenlet bármely z-re igaz, ezért $z = \lambda$, $x = \dfrac{3}{4}$ és $y = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2}\lambda$. Tehát a rendszernek végtelen sok megoldása van, és az összes megoldás egy paraméter függvényében írható fel.

2. Oldjuk meg az $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + 3y - 7z = 0 \end{cases}$ egyenletrendszert úgy, hogy már csak a mátrixon végzett sortranszformációkat írjuk le.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_2 \\ \sim \\ S_3 - 3S_1 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 : 3 \\ \sim \\ S_3 - 2S_2 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Látható, hogy nincs szükség további átalakításokra, mert az utolsó sornak a

$$0x + 0y + 0z = -10$$

egyenlet felel meg. Mivel ez nem lehetséges, az eredeti egyenletrendszer összeférhetetlen.

3. Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 4 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszert úgy, hogy a mátrixát átalakítjuk az egységmátrixszá.

Bizonyítás. Sortranszformációk segítségével dolgozunk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_2 \\ \sim \\ S_3 - 2S_1 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 : 2 \\ \sim \\ S_3 - S_2 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} S_3 : 4 \\ \sim \\ S_1 + S_2 \to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 + \frac{1}{2}S_3 \to S_2 \\ \sim \\ S_1 + \frac{3}{2}S_3 \to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right),$$

amely egyenletek formájában az $x = \frac{9}{8}$, $y = \frac{3}{8}$ és $z = -\frac{5}{4}$ egyenlőségeket jelenti. Ez viszont épp a megoldás. $\square$

Az előbbi példában láthattuk, hogy az egyenletrendszerünk abban a pillanatban van megoldva, amikor az eredeti mátrix helyén az egységmátrixot sikerült létrehozni, természetesen amikor ez lehetséges. Mit jelent a mátrixműveletek szintjén ennek az állapotnak a létrehozása, amennyiben az lehetséges? Hogy jobban látható legyen, az előző egyenletrendszerben tekintsünk tetszőleges szabadtagokat:

$$\begin{cases} x - y - z = b_1 \\ x + y - 2z = b_2 \\ 2x + z = b_3 \end{cases}$$

Mátrix műveletként felírva az egyenletrenszert az $AX = B$ egyenletet jelenti, ahol A-val jelöljük az egyenletrendszer mátrixát:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{és } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása tulajdonképpen az $AX = B$ mátrixegyenlet megoldását jelenti. Rendre elvégezzük a szükséges sortranszformációkat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_2 \\ \sim \\ S_3 - 2S_1 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & 3 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & 2 & 3 & b_3-2b_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2:2 \\ \sim \\ S_3-S_2\to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_2-b_1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -b_1-b_2+b_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_2-b_1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -b_1-b_2+b_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_3:4 \\ \sim \\ S_1+S_2\to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{b_1+b_2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_2-b_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b_1-b_2+b_3}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{b_1+b_2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_2-b_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b_1-b_2+b_3}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2+\frac{1}{2}S_3\to S_2 \\ \sim \\ S_1+\frac{3}{2}S_3\to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8}b_1+\frac{1}{8}b_2+\frac{3}{8}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{8}b_1+\frac{3}{8}b_2+\frac{1}{8}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4}b_1-\frac{1}{4}b_2+\frac{1}{4}b_3 \end{array}\right)$$

Egyenlet formájában visszaírva:

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{8}b_1+\frac{1}{8}b_2+\frac{3}{8}b_3 \\ y &= -\frac{5}{8}b_1+\frac{3}{8}b_2+\frac{1}{8}b_3 \\ z &= -\frac{1}{4}b_1-\frac{1}{4}b_2+\frac{1}{4}b_3 \end{cases}$$

Ebben a felírásban a b_1, b_2, b_3 együtthatói az A mátrix inverz mátrixának elemei, és az előbbi gondolatmenet azt mutatja, hogy ha a $T_1, T_2, ..., T_q$ transzformációval az A-ból az I_n-hez jutunk, ugyanezekkel a transzformációkkal az I_n-ből az A^{-1} mátrixhoz jutunk. Ezt talán egyszerűbb belátni, ha észrevesszük, hogy minden sortranszformáció egy invertálható mátrixszal való szorzást jelent. Így, ha $E_1, E_2, ..., E_q$-val jelöljük azokat a mátrixokat, amelyeket ahhoz a q darab transzformációhoz rendelünk, amellyel az A-ból az I_n-t kapjuk, akkor felírhatjuk, hogy

$$E_qE_{q-1}\cdot\ldots\cdot E_1A = I_n$$

és innen

$$A^{-1} = E_qE_{q-1}\cdot\ldots\cdot E_1 = E_qE_{q-1}\cdot\ldots\cdot E_1\cdot I_n.$$

Tehát valóban, ha az $E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_q$ transzformációkkal A-ból I_n-t kapunk, akkor ugyanezekkel a transzformációkkal I_n-ből A^{-1}-t kapunk.

6. Didaktikai megjegyzések

• Az eddigiekben csak körvonalaztuk a tananyag felépítésének egy lehetséges módját. A konkrét kivitelezés során arra kell odafigyelni, hogy a tulajdonságokat és a fogalmak bevezetését valamilyen tevékenységekre építsük. A tevékenységek lehetnek közös, irányított kérdésfeltevésen alapuló megbeszélések is, de sokkal hatékonyabb, ha kiscsoportokban párhuzamosan több probbléma vizsgálatát tűzzük ki, és utána a csoportok egymás közti információcseréje által alakul ki a teljes kép. Ez különösen alkalmas a műveletek tulajdonságainak vizsgálata során.

• Érdemes a tulajdonságokat minél tagoltabbá tenni. Például a rendszerek megoldására és az inverz mátrix kiszámítására vonatkozó algoritmus megtalálása során a következő tevékenységeket ajánljuk:

- egy konkrét feladat segítségével tisztázni az inverz mátrix fogalmát;
- egy vagy két foglalkozás a rendszer megoldására sortranszformációk segítségével;
- egy foglalkozás, amelyben a sortranszformációkat és a hozzájuk tartozó mátrixokat azonosítjuk;
- a tapasztalatok összegzése és az algoritmus kipróbálása;
- begyakorlás.

• A mátrixok hatványozására érdemes külön 4 vagy 5 foglalkozást fordítani. Egy bevezető foglalkozást, amelyben a modellezési feladatok segítségével eljutunk a tényleges feladatig. Egy kísérletezésre szánt foglalkozást, egy foglalkozást a 2×2-es mátrixok hatványozására és a végén további 2 foglalkozást más méretű mátrixok hatványozására.

• A determinánsok bevezetését, illetve a Cramer szabály alkalmazását érdemes csak a fogalmak és alapalgoritmusok kitisztázása után elkezdeni. A jelenlegi tananyagban a számolási részletek és a fogalmak bevezetése annyira összemosódik, hogy sok diák számára az egész fejezet problematikája nem válik világossá.

XI. FEJEZET
KALANDOZÁS A VALÓSZÍNŰSÉG VILÁGÁBAN

Ebben a fejezetben a valószínűség fogalmának kíváncsiságvezérelt elemekkel való bevezetésével foglalkozunk. Ezt 10.-es korosztály számára 6 órában ajánljuk. A valószínűségszámítás tanítása során a következő készségek fejlesztését célozzuk meg: mindennapi szituációk értelemzése, ahol a véletlennek vagy bizonytalanságnak szerepe van, a valószínűségi állítások értékelése, a megszokott logikától eltérő, valószínűségi gondolkodás kialakítása, kombinatorikus gondolkodás és számlálási technikák.

1. Csaltál már dolgozatírás közben?

Kényelmetlen helyzetbe hoztam a tanulót ezzel a kérdéssel. Becsületesen akar válaszolni, és inkább nem akar semmit sem mondani, különösen, hogy a válasznak következményei lehetnek. Nos, van egy javaslatom: Itt van nálam egy dobókocka. Miért ne hagyatkozna a véletlenre a válaszadás közben? Igazság vagy sorsszerűség? Hadd döntsön a kocka a válasza felől, válaszát a következő szabályok alapján adja:

(i) Ha 1-et vagy 2-t dob, válaszoljon igennel, függetlenül attól, hogy mi az igazság.

(ii) Ha 3-at vagy 4-et dob, válaszoljon nemmel, az igazságtól függetlenül.

(iii) Ha 5-öt vagy 6-ot dob, válaszoljon az igazságnak megfelelően.

A dobás eredményét csak a tanuló látja. Senki sem fogja tudni, hogy valóban igazat mondott-e, vagy -kényszerűségből- hazudott. Sok tanulót megkérdezve, a válaszok alapján megtudhatjuk-e, hogy a megkérdezett tanulók hányad része csalt már dolgozatírás közben?

A válaszadáshoz ismerkedjünk meg a valószínűség alapvető szabályaival.

2. A valószínűség fogalmának bevezetése

Egy szabályos kockát feldobtunk 1000-szer és megfigyeltük, hogy páros számot dobtunk-e. A kísérlet eredményét a következő táblázatba foglaltuk:

Dobások száma	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Párosok száma	44	94	139	191	241	289	340	399	450	507
Relatív gyakoriság	0,44	0,47	0,463	0,478	0,482	0,482	0,486	0,499	0,5	0,507

Ha elég nagy a dobások száma, akkor a páros szám megjelenésének relatív gyakorisága egy állandó körül mozog, ez az állandó a páros szám dobásának valószínűsége, amely jelen esetben $\frac{1}{2}$.

Megjegyzés. Érdemes több, ehhez hasonló jelenséget vizsgálni, akár számítógépen generált véletlenszámok[7] segítségével is. A szimulációkon alapuló megközelítés lehetővé teszi a relatív gyakoriság kiszámítását abban az esetben is, amikor a lehetőségek száma végtelen. Így megvizsgálhatóak bonyolultabb kérdések is, például miért vannak a „darts” táblán a körök ott, ahol vannak, vagy egy tetszőleges céllövő táblán a felosztás valóban lineáris értékelést hoz-e létre stb.

Ezzel egy valószínűségi kísérletet hajtottunk végre, azonos körülmények között megismételtük ugyanazt a kísérletet. Egy kísérlet lehetséges kimenetelét eseménynek nevezzük.

Egy vizsgált eseménynek a valószínűségét a gyakorisági táblázatok alapján értelmezhetjük a következő módon:

11.1. Értelmezés. Ha n kísérletből az A esemény k-szor következik be, akkor a $\frac{k}{n}$ hányados az A esemény relatív gyakorisága. Az a $P(A)$ szám, amely körül egy esemény relatív gyakorisága ingadozik, az esemény valószínűsége.

Ez az értelmezés arra jó, hogy valamilyen közelítést kapjunk egy esemény valószínűségére, de arra, hogy pontos értéket számoljunk,

[7]A számítógépek nem valódi véletlenszámokat generálnak, mert valamilyen algoritmus alapján hozzák létre a számokat, de erre a célra megfelelnek a generált számok.

nem alkalmas. Az igaz ugyan, hogy egyre több kísérlettel egyre jobb közelítést kapunk, de pontos értéket sosem. Honnan tudjuk ugyanis, hogy az első táblázatban $0,5$ körül és nem $0,50001$ körül ingadoznak a gyakoriságok. Ezt csak nagyon nagy számú kísérlet elvégzése esetén tudnánk eldönteni és akkor sem teljes bizonyossággal. Emiatt szükséges a valószínűség egy más értelmezése is.

Hasonló játékot játszhatunk egy gyufásdobozzal. A doboz egyes lapjaira írjunk számokat 1-től 6-ig úgy, hogy a két legkisebb lapra kerüljön az 1 és a 2, a közepes méretűre a 3 és a 4, a legnagyobb lapokra pedig az 5 és a 6. Az asztal szélére helyezve alulról 50-szer pöccintjük a skatulyát úgy, hogy repüljön, és jegyezzük fel, hogy melyik oldalán áll meg (ezek a lehetséges eseményeket). A kísérletet teli gyufásdobozzal végezzük, az üres túl nagyot repül.

11.1. Ábra. A gyufásdoboz pöccintése

Megjegyzés. Ezt érdemes kiscsoportos foglalkozás formájában kivitelezni és ennek megfelelően több táblázatot készíteni. Ha a gyufásdobozok nagyjából azonosak (pl. teljesen új, azonos típusú dobozok), akkor az összesített eredményekből is számolhatunk relatív gyakoriságot.

Egy lehetséges eredmény:

Legnagyobb lap	Középső lap	Legkisebb lap
44	5	1

Aszerint, hogy mit figyelünk, többfajta táblázatot is készíthetünk. Előfordulhat, hogy az oldallapokat külön külön-követjük. Ebben az esetben a táblázatunk a következő alakú (mi mindvégig 50 dobásra készítjük a táblázatot, de ahhoz, hogy a relatív gyakoriság stabilitását észleljük, sokkal többre van szükség)

Felső lap száma	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság						

Ha csak azt követjük, hogy a kicsi, a közepes vagy a nagy lapjára esik, akkor a táblázatunk

Felső lap	Legnagyobb	Középső	Legkisebb
Gyakoriság			

Természetesen előfordulhat, hogy mást vizsgálunk, például azt, hogy a 4-es oldala lesz felül vagy sem. Ebben az esetben a táblázatunk:

Felső lap	4-es lap	Más lap
Gyakoriság		

Látható, hogy a kísérlet ugyanaz (feldobjuk a dobozt), de ehhez különböző eseményrendszereket rendelhetünk. Az első esetben az események: 1-es lapra esik, 2-es lapra esik, és így tovább, a második esetben az események: legkisebb lapra esik, középső méretű lapra esik, legnagyobb lapra esik és a harmadik esetben az események: 4-es lapra esik, nem a 4-es lapra esik. Természetesen az is látható, hogy ha az első táblázatot készítettük el, akkor ez alapján a másik kettő utólag is elkészíthető, míg ha csak a második vagy harmadik táblázatot készítettük el, akkor a többi nem készíthető el utólag. Ez azt mutatja, hogy az első táblázatban követett eseményekből elő lehet állítani a többit. Például az, hogy a legnagyobb lapok valamelyike lesz fent, két egyszerűbb eseményre bontható: az 5-ös és a 6-os lap megjelenésére. Ugyanakkor ezek az egyszerűbb események nem bonthatóak fel semmilyen más ezeknél is egyszerűbb eseményekre. Látható tehát, hogy a legegyszerűbb, felbonthatatlan események különös fontossággal bírnak, az ilyeneket elemi eseményeknek nevezzük, a többit összetett eseménynek. Így látszik, hogy arra van szükségünk, hogy az összetett eseményeket felbontsuk egyszerűbbekre és a felbontás alapján tudjuk kiszámolni a valószínűségüket a felbontásukban szereplő egyszerűbb események valószínűsége alapján.

11.2. Értelmezés. Az **elemi események** olyan kimenetelek, amelyek tovább már nem bonthatók. Az **összetett események** elemi eseményekre bonthatók.

A gyufásdobozos feladat esetén a 2. táblázatba foglalt események az elemi események és az összes többi összetett esemény. Hasonló módon egy szabályos dobókocka esetén az elemi események: A_i–az i-vel jelölt lap van felül, ahol $1 \leq i \leq 6$. Az elkészített táblázatok esetén a vizsgált eseményrendszereknek van egy közös sajátossága: minden lehetséges kimenetelt számoltunk és pontosan egy eseményhez számoltuk. Az ilyen eseményrendszereket teljes eseményrendszereknek nevezzük.

11.3. Értelmezés. Ha a kísérlet minden lehetséges kimenetele esetén az események közül pontosan egy valósul meg, azt mondjuk, hogy ezek az események **teljes eseményrendszert alkotnak**.

Ha a teljes eseményrendszer minden eseménye azonos valószínűséggel következik be, akkor a rendszert **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük. A gyufásdoboz esetén mindhárom elkészített táblázatunkhoz tartozik egy teljes eseményrendszer, de az egyik esetben sem klasszikus. Ugyanakkor a dobókocka esetén az $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ és $\{\{4\},\{1,2,3,5,6\}\}$ halmazok egy-egy teljes eseményrendszert tartalmaznak és ezek közül klasszikusnak tekinthető az első kettő. Ez gyakorlatilag azt az implicit feltételezést tartalmazza, hogy a kocka tökéletes, minden lap azonos valószínűséggel jelenik meg. Ha egy teljes eseményrendszer klasszikus és n eseményből áll, akkor az elemi események valószínűsége $\frac{1}{n}$, így ha egy A esemény pontosan k darab elemi esemény egyesítésére bontható, akkor a valószínűsége $\frac{k}{n}$. Ez gyakorlatilag a klasszikus valószínűség Laplace-féle modellje, amit Laplace a következőképpen fogalmazott meg: „Ha egy esemény valószínűségét akarjuk meghatározni, akkor meg kell keresnünk az összes olyan esetet, amelyek azt az eseményt eredményezik. Ezek a kedvező esetek. A valószínűséget a kedvező esetek és az összes eset számának hányadosa adja meg.” Vagyis mai megfogalmazásban:

11.4. Értelmezés. Egy klasszikus valószínűségi mezőben minden A eseményre

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}.$$

Ha a kísérlet az, hogy az ötös lottó sorsolásán (ahol az $1, 2, \ldots, 90$ számok közül húznak ötöt) kihúzzák az első nyerő számot, akkor az

- A : Egy és harminc közötti számot húznak ($1 \leq S \leq 30$, ahol S a kihúzott szám)
- B : Harminc és hatvan közötti számot húznak ($30 \leq S \leq 60$)
- C : Hatvan és kilencven közötti számot húznak ($60 \leq S \leq 90$)

események nem alkotnak teljes eseményteret, hisz a 30 és a 60 kihúzása esetén két esemény is bekövetkezik. Ha az E_i esemény minden $1 \leq i \leq 90$ esetén azt jelenti, hogy az i számú golyót húzzák, akkor az $E_1, E_2, \ldots, E_{90}$ egy klasszikus valószínűségi mezőt alkot és ebben

$$P(B) = P(C) = \frac{31}{90}, \quad P(A) = \frac{30}{90}.$$

Vizsgáljuk meg, mi annak a valószínűsége, hogy két érmét feldobva, mindkettővel fejet dobunk? Írjuk fel az összes lehetséges kimenetelt, majd két érmét 20-szor feldobva jegyezzük fel az eredményeket. Jelölje például a lehetséges kimenetelt: FF, FI, II. A kísérlet elvégzése előtt tippeljünk. A három esemény teljes eseményteret alkot, de nem klasszikus valószínűségi mező, hisz nem azonos valószínűséggel fordulnak elő az egyes kimenetelek (ez már 20 dobásnál is szokott érződni). Emiatt jó olyan elemi eseményeket értelmezni, amelyek klasszikus valószínűségi mezőt alkotnak. Tegyük fel, hogy két különböző érmét használunk (egy 50 banis és egy 10 banis). Így a lehetséges kimenetelek:

10-es	50-es	
F	F	FF
F	I	FI
I	F	IF
I	I	II

Ebben az esetben azonos valószínűségű a négy esemény és teljes eseményteret alkotnak, tehát alkalmazható a Laplace-képlet. Így annak a valószínűsége, hogy két fejet dobunk $\frac{1}{4}$, annak az A eseménynek a valószínűsége, hogy két írás vagy két fej jelenik meg az előbbi kísérletben

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ugyanakkor annak a B eseménynek a valószínűsége, hogy két különböző oldal jelenik meg az előbbi kísérletben

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Láthatjuk, hogy ezt a kísérletet vizsgálva két eset következhet be: megjelenhet két fej vagy két írás, ez az A esemény, vagy két különböző oldal (egy fej és egy írás) jelenik meg, ez a B esemény. Ugyanakkor az A és B nem következhet be egyszerre, tehát egymást kizárják. Ilyenkor azt mondjuk, a két esemény egymás komplementere. Az A esemény komplementer eseményét $\overline{A}$-sal jelöljük. Beláthatjuk, hogy két komplementer esemény valószínűségének összege mindig 1.

Mi annak a valószínűsége, hogy fej vagy írás jelenik meg az előbbi kísérletben? Jelölje ezt az eseményt C. Ez a **biztos esemény**, hisz csak fej vagy írás lehet a pénzfeldobás kimenetele, így

$$P(C) = \frac{4}{4} = 1.$$

Ennél nagyobb valószínűség nem lehet, hiszen az események bekövetkezésének relatív gyakorisága nem lehet 1-nél nagyobb. A biztos esemény valószínűsége 1.

Mi annak a valószínűsége, hogy három fej jelenik meg a két dobásból? Ez egy **lehetetlen esemény**, hisz a kísérlet egyetlen kimenetele sem kedvező számára. A lehetetlen eseményt $\emptyset$-tel jelöljük. Ennek valószínűsége 0. Általában egy kísérletnél egy biztos esemény komplementere mindig egy lehetetlen esemény lesz.

Láttuk, hogy az események gyakorlatilag az eseménytér részhalmazai, tehát a eseményekkel ugyanazokat a műveleteket végezhetjük, mint halmazokkal.

11.5. Értelmezés. Tetszőleges A és B esemény **egyesítése** (összege) az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor legalább az egyik bekövetkezik.

11.6. Értelmezés. Tetszőleges A és B esemény **metszete** (szorzata) az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor A is és B is bekövetkezik.

11.7. Értelmezés. Az A és B események **kizárják egymást**, ha egyszerre nem következhetnek be, azaz $A \cap B = \emptyset$.

Legyen A az az esemény, hogy a dobókockával legfeljebb 3-ast dobunk, B pedig az, hogy a dobókockával legalább 5-öst dobunk. Az a C esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor bekövetkezik az A vagy bekövetkezik a B, az A és B egyesítése, amit $A \cup B$-vel jelölünk.

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}. \tag{39}$$

Ez alapján $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6}$ és $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$. Látható, hogy amennyiben A és B nem következhet be egyszerre, akkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Legyen D az az esemény, hogy a dobókockával páros számot dobunk és E pedig az, hogy a dobókockával 3-mal osztható számot dobunk. Ebben az esetben $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ugyanakkor a $D \cup E$ eseménynek kedvező dobások a $2, 3, 4, 6$, vagyis $P(D \cup E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. A $D \cup E$-nek kedvező esetek megszámlálása során láttuk, hogy amely mindkét eseménynek kedvez, azt csak egyszer kell számolni. Így általában

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E).$$

Ez a halmazok számosságára vonatkozó $|D \cup E| = |D| + |E| - |D \cap E|$ szitaformula megfelelője. A logikai szita alapján kaphatunk képletet véges sok esemény egyesítésének valószínűségére is.

Megoldott feladat

Egy tálban három különböző gyümölcs van: alma, körte, szilva. Jelentse A azt az eseményt, hogy az alma kukacos, B azt, hogy a körte kukacos, C azt, hogy a szilva kukacos. Írjuk fel az A, B, C eseményekkel és a műveletekkel a következő eseményeket:

a) mind a három gyümölcs kukacos,

b) egyik gyümölcs sem kukacos,

c) legalább az egyik gyümölcs kukacos,

d) pontosan egy gyümölcs kukacos,
e) van olyan gyümölcs, amelyik nem kukacos.

A feladat javasolt megoldása. **a)** Mind a három gyümölcs akkor lehet egyszerre kukacos, ha mind a három esemény egyszerre következik be: $A \cap B \cap C$.

b) Egyik gyümölcs sem kukacos akkor, ha mind a három esemény komplementere egyszerre bekövetkezik: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

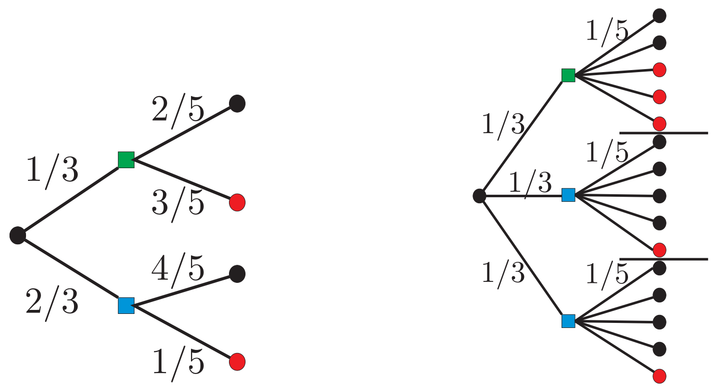
c) Legalább egy gyümölcs kukacos úgy lehetséges, ha vagy az alma kukacos, vagy a körte kukacos, vagy a szilva kukacos: $A \cup B \cup C$.

d) Pontosan egy gyümölcs akkor kukacos, ha az alma kukacos és a másik kettő nem, vagy a körte kukacos és a másik kettő nem, vagy a szilva kukacos és a másik kettő nem: $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

e) Van olyan gyümölcs, amelyik nem kukacos úgy lehetséges, ha vagy az alma, vagy a körte, vagy a szilva nem kukacos: $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$. □

3. A feltételes valószínűség fogalma

Próbáljunk a bevezetőben szereplő problémához hasonló modellt szerkeszteni. Tegyük fel, hogy van két dobozunk. Az első doboz 3 piros és 2 fekete, a második doboz 1 piros és 4 fekete golyót tartalmaz. A kísérlet abból áll, hogy feldobunk egy kockát és a dobás eredményének függvényében húzunk egy golyót a dobozból. Ha a dobás eredménye osztható 3-mal, akkor az első dobozból húzunk, különben a másikból. Mennyi a valószínűsége annak, hogy piros golyót húzunk? Jelöljük E_1-gyel azt az eseményt, amely pontosan akkor következik be, amikor a dobás eredménye 3-mal osztható, és E_2-vel a komplementer eseményt (a kockadobásra vonatkozóan). Világos, hogy $P(E_1) = \frac{1}{3}$ és $P(E_2) = \frac{2}{3}$. Ha a dobás megtörtént, akkor az eredmény függvényében más és más eseményeket kell vizsgálni. A mellékelt gráfokban ezeket a lehetőségeket ábrázoltuk. Az első gráfban a választások és azok valószínűsége jelenik meg. Ez alapján nem alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűség értelmezését, mert a gráfban az útvonalak nem azonos valószínűségűek. Emiatt átalakítjuk a gráfot úgy, hogy azonos valószínűségű elemi események jelenjenek meg. Így



11.2. Ábra. Ekvivalens ábrázolások

a második gráfot kaptuk. Ez alapján a piros golyó kihúzásának a valószínűsége $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, mert 15 lehetséges eset és 5 kedvező eset van. Látható, hogy ezt a következőképpen számoljuk:

$$P(A) = \frac{3}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}.$$

Vagyis az eredeti gráfban minden piros pontnak megfelelő útvonal mentén összeszorozzuk a valószínűségeket és ezeket összeadjuk.

Mindezt fogalmazzuk meg általánosan is. Ha a piros golyó kihúzása az A esemény, akkor a dobozok összetétele alapján nem magának az A-nak a valószínűségét ismerjük, hanem csak azt tudjuk, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy piros golyót húzunk, ha az E_1 bekövetkezett (ez a 3/5) vagy ha az E_2 következett be (ez 1/5). Ezeket a valószínűségeket **feltételes valószínűségnek** nevezzük. Ezek azt mutatják, hogy mennyi az A valószínűsége, ha tudjuk, hogy az E_1, illetve az E_2 bekövetkezett. Az A eseménynek az X eseményre vonatkozó feltételes valószínűségét $P(A|X)$-szel jelöljük.

Ezzel a jelöléssel a feladatban $P(A|E_1) = \frac{3}{5}$ és $P(A|E_2) = \frac{1}{5}$. A második gráf alapján látható, hogy a $P(A|E_1)$ gyakorlatilag az A-nak is és az E_1-nek is kedvező esetek száma és az E_1-nek kedvező esetek száma hányadosaként áll elő (mert ha E_1 bekövetkezett, akkor csak a neki kedvező eseteket kell tovább vizsgáljuk). Ez felírható az $A \cap E_1$

és az E_1 valószínűségének hányadosaként:

$$P(A|E_1) = \frac{3}{5} = \frac{\frac{3}{15}}{\frac{5}{15}} = \frac{P(A \cap E_1)}{P(E_1)}.$$

A továbbiakban ezt értelmezésnek tekintjük.

11.8. Értelmezés. Ha A és X két esemény, akkor

$$P(A|X) = \frac{P(A \cap E_1)}{P(E_1)}.$$

A bevezetett jelölések alapján láthatjuk, hogy a megoldott feladatban az A esemény valószínűségét a

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2)$$

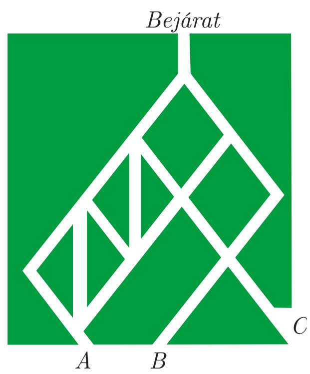
összefüggés alapján számoltuk ki. Hasonló összefüggést írhatunk fel akkor is, ha az eredeti gráfban az első elágazásnál több lehetőségünk van. Fontos, hogy az itt megjelenő $E_1, E_2, \ldots, E_n$ események teljes eseményrendszert alkossanak (azért, hogy a fa ágai közt ne legyenek átfödések). Így tehát érvényes a következő tétel (a teljes valószínűség tétele):

11.9. Tétel. *Ha $E_1, E_2, \ldots, E_n$ egy teljes eseményrendszer és A egy tetszőleges esemény, akkor*

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)P(E_n).$$

Megoldott feladat

A mellékelt ábrán egy útvesztőt látunk felülnézetben. Petike beszaladt, és mindig úgy választ irányt, hogy távolodjon a bejárattól. Nővére és szülei a három kijáratnál várják.



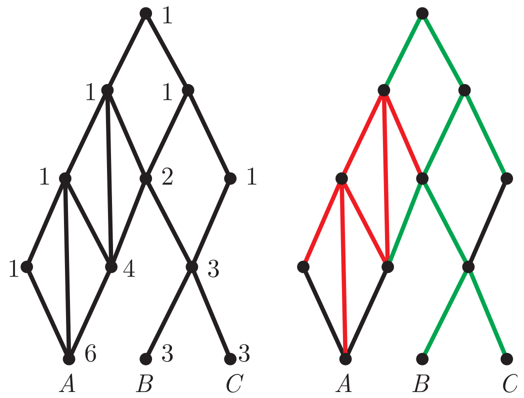
a) Hányféleképpen (hány különböző útvonalon) juthat ki Petike az útvesztőből?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy Peti az A jelű kijáratnál várakozó édesanyja kezei közé szalad?

JAVASOLT MEGOLDÁS. **a)** Az útvesztő elágazási pontjaihoz odaírtuk, hogy hányféleképpen lehet eljutni az egyes elágazásokhoz.

A gráfról leolvasható, hogy az A pontba 6, B-be és C-be 3-3 úton juthat, így az útvesztőből összesen 12-féleképpen lehet kiszabadulni.

b) Az egyes utak valószínűsége nem egyenlő. A gráfon színessel azokat a valószínűségeket tüntetjük fel, melyekkel az egyes utakat választja. A piros vonal azokat az éleket mutatja, melyeket $\frac{1}{3}$ valószínűséggel választ, a zöld élek azokat, melyeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel, a fekete élek pedig azok, melyeket 1 valószínűséggel választ az egyes csomópontokban.



Az A pontba hat úton juthat el. Ezek valószínűsége rendre:

- balra-balra-balra-jobbra: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{18}$;
- balra-balra-le: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$;
- balra-balra-jobbra-balra: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{18}$;
- balra-le-balra: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$;
- balra-jobbra-balra-balra: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{12}$;
- jobbra-balra-balra-balra: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8}$.

A fenti utakat egyszerre nem járhatjuk be, tehát a rajtuk való áthaladás valószínűsége összeadódik. Az A kijáratba érkezés valószínűsége:

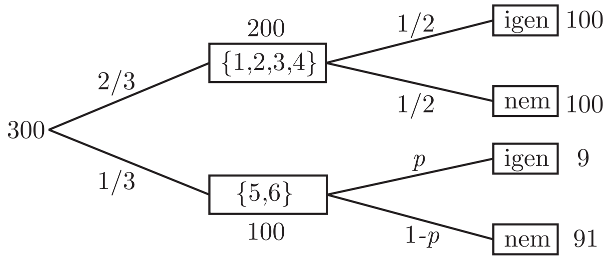
$$P(A) = 3 \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24} \approx 0,54.$$

□

4. Véletlen által kikényszerített válaszok elemzése

Térjünk vissza a bevezetőben feltett kérdéshez. Tegyük fel, hogy 300 tanulót kérdeztünk meg a javasolt módszerrel, és közülük 109-en válaszoltak igennel a dolgozatírás közben elkövetett csalással kapcsolatos kérdésre. Hány olyan diák van köztük, aki már legalább egyszer csalt dolgozatírás közben?

Ábrázoljuk egy gráfban a feladatban leírt szabályokat, és jelöljük p-vel azoknak az arányát (az egész populációban), akik már legalább egyszer csaltak (ez a valószínűség egy lehetséges közelítése).



Jelölje A azt az eseményt, amikor a kérdezett igennel válaszol. A keresett p valószínűség a második lépcsőben jelenik meg, az igen válasz feltételes valószínűségeként az 5-ös vagy 6-os dobást eredményező helyzetekben. A kapott igen válaszok relatív gyakorisága, vagyis a $\frac{109}{300}$, egy becslés az A valószínűségére. A teljes valószínűség tétele (vagy egyenesen a gráf) alapján

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot p + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2},$$

ahonnan

$$p = 3 \cdot P(A) - 1.$$

Ez alapján p becsült értéke $0,09$.

Megjegyzés. A következő gondolatmenet ugyanezt a logikát használja, csak nem a valószínűségekkel operál, hanem egyenesen a gyakoriságokkal: 300 diák közül körülbelül 100 fog igennel válaszolni, mivel a kocka ezt írja elő neki, és körülbelül 100 másik fog nemmel válaszolni ugyanebből az okból. Ezek a válaszok teljesen érdektelenek a felmérés számára. Az a körülbelül 9 szavazó lesz csak érdekes, akik nem tartoznak egyik dobókocka által válaszaikban megkötött csoporthoz sem. Ha ez a 9 ember a szabályoknak megfelelén játszott, és nem hazudtak önmagukkal kapcsolatban, ez azt jelenti, hogy a valóban igaz választ adó csoportban 100-ból 9-en csaltak már dolgozatírás közben. A csalások p aránya körülbelül 9%-ra becsülhető.

Látható, hogy ha kiválasztunk egy diákot az igennel válaszolók közül, akkor annak a valószínűsége, hogy ő valóban csalt már legalább egyszer, az $\frac{9}{109}$. Ez látszik a gráfon is, de kiszámolható a következőképpen is:

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|E_2) \cdot P(E_2)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{100} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{109}{300}} = \frac{9}{109}.$$

Ez biztosítja azt, hogy az igennel válaszolók közül ne lehessen kiválasztani azokat, akik valóban csaltak, vagyis maga a kérdezési módszer biztosítja az anonimitást. Általában két hibaforrás lehet: Az egyik a minta megválasztásával kapcsolatos, ezt a hibaforrást nem változtatja meg a választott kérdezési módszer. A másik hibaforrás a hamis (nem őszinte) válaszok. A közvetlen interjúkban számolnunk kell magasabb számú hamis válasszal. Így a névtelenség hiánya miatt egy közvetlen interjúban a csalók p aránya alábecsült lehet. Természetesen ez a felmérés nem tudja kiküszöbölni hamis válaszok adását, de az anonimitásnak köszönhetően várható, hogy az eredmény kevésbé lesz befolyásolt vagy torz, mint egy közvetlen interjúban.

5. Javasolt feladatok

1. Két kockával dobunk egy alkalommal. Add meg a lehetséges kimenetelekhez a komplementer eseményt!

a) Mindkét kockával egyest dobunk.

b) Legalább az egyik kockával egyest dobunk.

c) A dobott számok összege 10.

d) A dobott számok összege legalább 10.

f) A dobott számok összege legfeljebb 11.

2. Zárás előtt egy cukrászdában már csak háromféle rétes maradt: meggyes, túrós, almás. Bemegy egy vevő, aki négy szelet rétest szeretne vásárolni. Az eladóra bízza, hogy milyen rétest ad neki.

a) Milyen kimenetelek lehetségesek?

b) Mely események lehetségesek az alábbiak közül, melyik biztos és melyik lehetetlen?

A : Mindegyik fajtából kapott.

B : Valamelyik fajtából legalább két szeletet kapott.

C : Mindegyik rétes, amit kapott, különbözőféle.

D : Két szelet meggyes rétest kapott.

3. Dobjunk fel egy szabályos (hatlapú) dobókockát. Vizsgáljuk annak az eseménynek a valószínűségét, hogy

a) A: 5-tel osztható számot dobunk;

b) B: páros számot dobunk;

c) C: 1-et vagy 3-at dobunk.

Vizsgáljuk meg, hogy ez a három esemény teljes eseményteret alkot-e!

4. Egy dobókockával dobunk. A kísérlet lehetséges kimeneteleit három eseményre bontottuk fel, amely közül kettő a következő:

A1: Négyest vagy hatost dobunk.

A2: Prímszámot dobunk.

a) Add meg a harmadik eseményt úgy, hogy a három esemény együtt teljes eseményteret alkosson!

b) Melyik eseménynek mekkora a valószínűsége?

5. Dobjunk fel egy sárga, egy piros és egy zöld dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok mindegyike prímszám lesz?

6. Minek van nagyobb esélye? Annak, hogy egy szabályos kockát háromszor feldobva a dobások összege 11, vagy annak, hogy az összeg 12. De Méré lovag így érvelt:

11-et kapunk, ha a dobásaink:

$$6,4,1;\;\; 6,3,2;\;\; 5,5,1;\;\; 5,4,2;\;\; 5,3,3;\;\; 4,4,3;$$

12-öt, ha a három dobásunk

$$6,5,1;\;\; 6,4,2;\;\; 6,3,3;\;\; 5,5,2;\;\; 5,4,3;\;\; 4,4,4.$$

Tehát mindkét lehetőség ugyanolyan eséllyel következik be. Mi a hiba de Méré lovag érvelésében?

7. Ha egy kockával négyszer dobunk, akkor előnyös arra fogadni, hogy a négy dobásból lesz legalább egy hatos. Ha két kockával huszonnégyszer dobunk akkor hátrányos arra fogadni, hogy lesz legalább egy dupla hatos, holott $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$. Magyarázzuk meg a jelenséget! (A fogadás előnyös, illetve hátrányos aszerint, hogy a nyerés esélye meghaladja-e az $\frac{1}{2}$-et.)

8. Egy osztályból véletlenszerűen kiválasztunk egy tanulót. A jelentse azt az eseményt, hogy a kiválasztott tanuló fiú, B azt, hogy a kiválasztott tanuló franciát tanul, C azt, hogy a kiválasztott tanuló matematika versenyt nyert. Tudjuk, hogy az osztálylétszám 30, ebből 20 fiú. 10 tanuló tanul franciát, köztük 3 fiú van: Péter, Balázs és Miklós. Matematika versenyt egyedül Pali nyert az osztályból.

a) Írd le a következő eseményeket: $A \cap (B \cup C);, \overline{A} \cap B \cap C$.

b) Add meg ezeknek az eseményeknek a valószínűségét!

9. Migrénes (erős fejfájásos) betegek számára készített fájdalomcsillapító gyógyszer kipróbálásakor 200 beteg közül 100 betegnek hatóanyag nélküli tablettát (placebó) adtak, másik száznak viszont az új, hatóanyaggal rendelkező tablettát úgy, hogy a betegek ne tudják, melyik fajta tablettából kaptak. A betegek beszámoltak a tabletta hatásáról. Ennek alapján a következő táblázat készült:

	enyhült a fájdalom	nem enyhült a fájdalom
gyógyszert kapott	79	21
placebót kapott	38	62

a) Az elvégzett kísérletek alapján mi a valószínűsége annak, hogy az új gyógyszer hat?

b) Az orvos megvizsgált egy olyan beteget, akinek nem hatott a bevett tabletta. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a beteg placebót kapott?

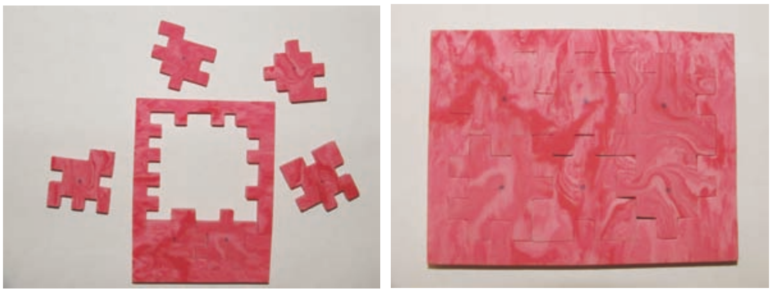
10. Egy fiút akkor engednek el focizni, ha három egymás utáni sakkparti közül legalább kettő egymás utánit megnyer. Partnerei Apa és Papa, mégpedig vagy Apa-Papa-Apa vagy Papa-Apa-Papa sorrendben. Apa jobban játszik, mint Papa. Melyik sorrend kedvezőbb a fiú számára?

XII. FEJEZET

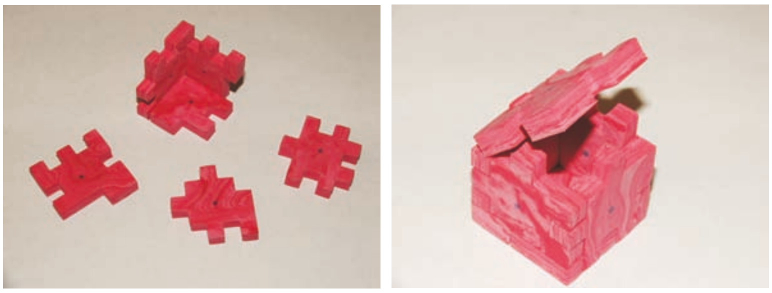
A HAPPY CUBE PUZZLE ELEMZÉSE

1. Mi is a Happy Cube?

A Happy Cube egy Belgiumból származó puzzle család, melyet 1986-ban alkotott meg Dirk Laureyssens. Ez egy habszivacsból készült 2 illetve 3 dimenziós kirakó. A teljes Happy Cube család négy készletet tartalmaz és mindegyik készlethez hat különböző modell tartozik. A modellek egyenként hat-hat puzzle elemből állnak össze, amelyek eredetileg egy téglalap alakú keretbe vannak ágyazva (lásd a 12.1.ábrát). és kirakható belőlük egy kocka is (lásd a 12.2.ábrát).



12.1. Ábra. Egy Happy Cube modell



12.2. Ábra. Egy Happy Cube kocka összerakása

A Happy Cube kocka kereskedelmi forgalomban is kapható, a gyártó cég hivatalos honlapján[8] keresztül is rendelhető, de világszerte rengeteg viszonteladó is forgalmazza.

A teljes család névszerint, nehézségi sorrendben a következő:

- **Little Genius** (★) :

Nature	*Fruits*	*Animals*	*Emotions*	*Transports*	*Symbols*
(⋆)	(⋆⋆)	(⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆⋆)

- **Happy Cube** (★★) :

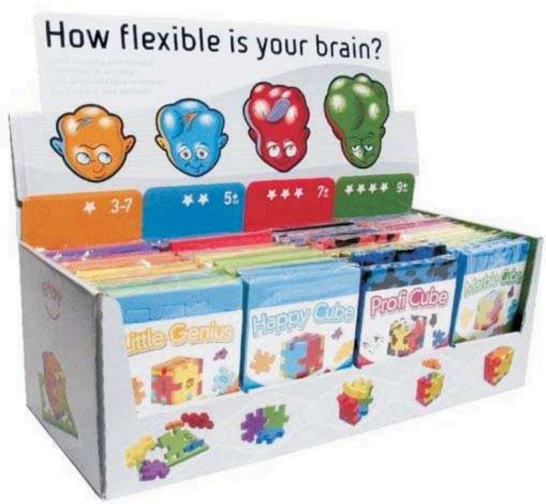
Milano	*New York*	*Tokyo*	*Amsterdam*	*Paris*	*Brussels*
(⋆)	(⋆⋆)	(⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆⋆)

- **Profi Cube** (★★★) :

Confusius	*Da Vinci*	*Marco Polo*	*Rubens*	*Watt*	*Newton*
(⋆)	(⋆⋆)	(⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆⋆)

- **Marble Cube** (★★★★) :

MartinL. King	*Omar Khayyam*	*Marie Curie*	*Buckminster Fuller*	*Mahatma Gandhi*	*Albert Einstein*
(⋆)	(⋆⋆)	(⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆⋆)



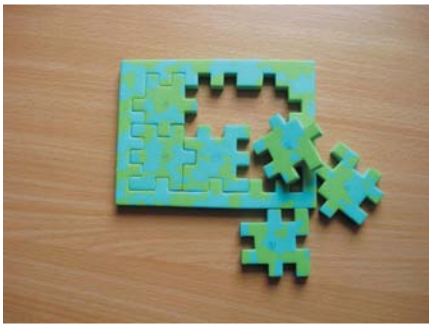
12.3. Ábra. A teljes Happy Cube család

[8] `www.happycube.com`

A négy készlet különböző nehézségi szintű és az ezeken belüli hat modell szintén nehézségi sorrend szerint van osztályozva. A nehézségi szinteket a csillagok növekvő száma jelzi. Ugyanakkor a gyártó cég a különböző készleteket különböző életkortól kezdődően ajánlja. Így a Little Genius készletet $3-7$ éves gyerekeknek, a Happy Cube készletet 5 éves kortól, a Profi Cube készletet 7 éves kortól és a Marble Cube készletet 9 éves kortól ajánlja.

A játékosok három különböző típusú feladatot teljesíthetnek:

- a hat puzzle-elem visszahelyezése a téglalap alakú keretbe, ezt nevezzük 2 dimenziós missziónak;

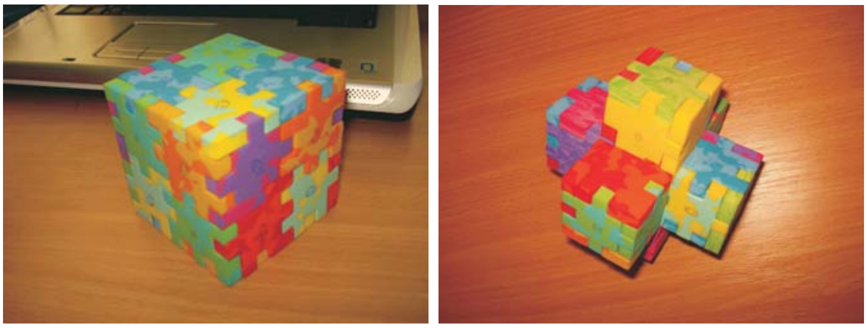


12.4. Ábra. 2 dimenziós misszió

- a hat puzzle-elemből egy kocka kirakása, ez a 3 dimenziós misszió;

12.5. Ábra. 3 dimenziós misszió

- több, esetleg azonos kocka elemeinek kombinálásával bonyolultabb test kirakása, ezt nevezzük ∞ dimenziós missziónak[9].



12.6. Ábra. ∞ dimenziós misszió

2. Rokon játékok

A Happy Cube világszerte ismertté vált, sok országban teljes egészében átvették, vagy hasonló puzzleket terveztek. Így például a Hollandok ugyanezt a játékot *Wirrel Warrel*-nek nevezték, a Spanyoloknál pedig *Cococrasch* néven vált ismertté.

12.7. Ábra. A holland Wirrel Warrel és a spanyol Cococrash

Látható, hogy ezek hasonlóak a belga Happy Cube kockákhoz, csak a nevüket változtatták meg, azonkívül a kockák jellege nem változott.

[9]Ez, a gyártó cég által használt, megnevezés matematikai szempontból nem igazán pontos, hisz a kirakott testek mind három dimenziósak.

Ugyanakkor az Amerikai Egyesült Államokban egy hasonló játékot *Snafooz*-nak hívnak. A különbség csupán az, hogy a teljes *Snafooz* család hat kockát tartalmaz és ezen kockák lapjai 6×6-osak, ellentétben a Happy Cube kockáival, melyben a lapok 5×5-ösek.

12.8. Ábra. Az amerikai Snafooz

A Japánoknál *Rubber* néven forgalmaznak egy hasonló játékot, ám ott a kocka lapjai 4×4-es elemekből állnak.

12.9. Ábra. A japán Rubber

3. Foglalkozások és sejtések

A Happy Cube kockákat először 2004-ben használtuk oktatási célokra. $10 - 11$ éves gyerekekkel játszottunk a kockákkal és a kirakás után a gyerekek a következő feladatokat kapták:

- Probálják megfogalmazni a kirakásnál használt stratégiájukat, vagy egyszerűen csak írják le a kirakás közben támadt ötleteiket.
- Találjanak valamilyen ábrázolást a lépéseik leírására.

Később szerveztünk hasonló tevékenységeket középiskolás diákoknak és egyetemi hallgatóknak is. Mindvégig a Profi Cube és a Marble Cube készletet használtuk. Meglepetésünkre, a legfiatalabb diákok is ugyanazokat a stratégiákat írták körül, mint a sokkal idősebb (egyben tapasztaltabb és képzettebb) kollégáik. A diákok nagy része egyértelműen a backtrackinget és a greedy algoritmust írta körül és a lépések ábrázolására valamilyen gráfot szerkesztett.

A foglalkozások során azonban felmerült egy sejtés. Úgy tűnt, hogy a gyártó által megadott nehézségi sorrend nem helyes. A legtöbb diáknak több fejtörést okozott a könnyebb (Profi) készlet 3-4 kockája, mint a nehezebb (Marble) készlet legtöbb kockája. Emiatt kezdtük vizsgálni a kockák klasszifikációjának kérdését.

Annak érdekében tehát, hogy meghatározzuk a helyes sorrendet és sejtésünket bebizonyítsuk, elméleti elemzéseket hajtottunk végre a kockákon, valamint diákok segítségével gyakorlati méréseket is végeztünk. Az elméleti elemzés során minden kockához valamilyen gráfot rendeltünk (a puzzle-darabok segítségével) és a gráfok tulajdonságai alapján bonyolultsági mutatókat értelmeztünk. A gráfok szerkezetét gyakorlatilag a megoldás során a sokak által használt mohó algoritmus tükrözi. Az elméleti elemzések egy részét számítógépes programok segítségével végeztük. A gyakorlati mérések abból álltak, hogy közel 120 egyetemi hallgatóval kirakattuk mind a 12 kockát és mértük minden kocka kirakási idejét, majd a kapott mérési eredményeket statisztikailag elemeztük. A legvégén az elméleti megfontolásokra alapozott rangsorok és a gyakorlati megfigyelések alapján szerkesztett rangsorok közötti összefüggéseket vizsgáltuk és néhány következtetést fogalmaztunk meg.

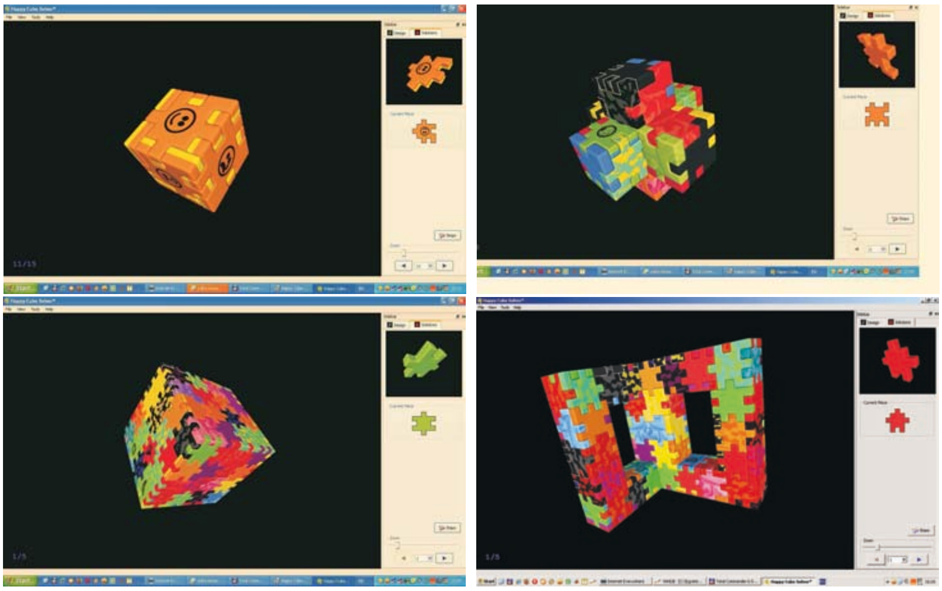
Foglalkozásaink egy része a DQME II[10] (Developing Quality in Mathematics Education II) nevű Comenius program keretén belül zajlott, míg a tényleges elemzést a PRIMAS [11](Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe) nevű FP7-es program számára hajtottuk végre. Az elemzés eredményei a Nieuw Archief voor Wiskunde folyóiratban jelentek meg.

[10]`http://www.dqme2.eu/`

[11]http://www.primas-project.eu

4. Happy Cube kirakó programok

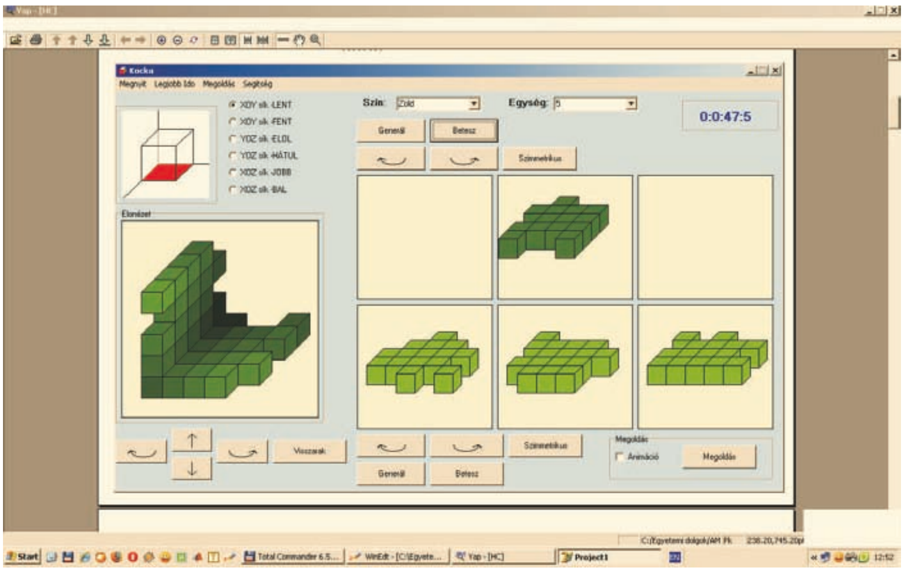
A gyártó cég készített egy *Happy Solver* nevű programot, amely megtalálható és ingyen letölthető a játék hivatalos honlapjáról. A program segítségével a Happy Cube család bármely kockájának megoldását megtekinthetjük, sőt az érdeklődő megalkothat a program segítségével egy bonyolultabb alakzatot, kiválaszthatja, hogy az melyik készlet elemeiből álljon össze, és ezt majd a program megpróbálja összerakni. Természetesen ez csak akkor sikerülhet, ha a kiválasztott puzzle-elemekből kirakható ez az alakzat.



12.10. Ábra. A Happy Solver segítségével készített alakzatok

A programnak két igen nagy hátránya van: az egyik, hogy nem interaktív (nem lehet rakosgatni a kockákat a program segítségével, nem lehet új kockákat definiálni stb.) és az ekvivalens megoldásokat nem ismeri fel. Így ugyanarra a kockára több megoldást is talál, holott ezek a megoldások egymással ekvivalensek (pl. forgatással egymásbavihetők vagy az egyiket megkaphatjuk a másikból a kocka kifordításával).

2005-ben egy egyetemi projekt keretén belül *Sipos István* és *Máté István* készítettek saját interaktív kockarakó programot[12]. Ez a program az érdeklődők számára igen sok lehetőséget kínál fel. A legfontosabbak, hogy a kockákat saját maguk rakhatják ki a játékosok, kiválaszthatják, hogy milyen méretű kockákat szeretnének rakni ($3 \times 3 \times 3$-as, $4 \times 4 \times 4$-es, $5 \times 5 \times 5$-ös vagy $6 \times 6 \times 6$-os) és a program tud új kockákat generálni. Az elemeket és az épülő kockát is lehet minden irányba forgatni, annak érdekében, hogy az jól látható legyen. Mindezek által fejleszthető a játékos térlátása is. A játékos kiválaszthatja a Profi vagy a Marble készlet kockáinak valamelyikét a játékhoz, vagy a program generálhat ezektől teljesen különböző típusokat. A program azt is méri, hogy mennyi idő szükséges a játékosnak az adott kocka kirakásához. Ezeket az időket le is mentheti a játékos, felállítva ezáltal egy ranglistát a legjobb eredményekkel. Ugyanakkor a program lehetővé teszi, hogy az adott kocka megoldását is megtekinthessük. Ezt a megoldást lépésenként mutatja meg a program. A 12.11. ábrán a programfelületet láthatjuk játék közben.



12.11. Ábra. A program játék közben

[12]Ez megtalálható a CD mellékleten

Látható, hogy a jobb felső sarokban az eltelt időt mutatja. Középen van a kigenerált kocka hat lapja, balra mellette rakható össze maga a kocka, e felett választható ki, hogy melyik oldalra szeretnénk beilleszteni a következő lapot. Középen fent ki lehet még választani azt is, hogy milyen színű legyen a kocka: piros, kék vagy zöld. Ezalatt van a „Generál” és a „Betesz” gomb, a neveik azt is elárulják, hogy mire is használhatóak. Ha a játékos feladta és nem tudja kirakni a kockát, a jobb alsó sarokban a „Megoldás” gomb megnyomásával a program megmutatja a kocka összerakásának lépéseit.

Ez a program tanulás szempontjából is, ugyanakkor szórakozás szempontjából is használható.

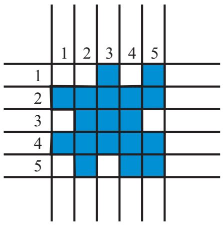
2006-ban szintén egy egyetemi projekt keretében Sipos Tamás írt egy $4D$-s kocka kirakására használható programot is. Ez azonban játék céljára nehezen használható mivel a legtöbb diáknak a négydimenziós térlátása nem működőképes.

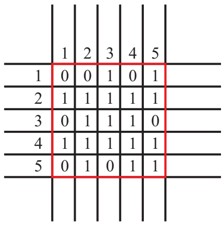
5. A kockák elméleti elemzése

A következőkben megvizsgáljuk, hogy a kockák darabjait hogyan reprezentálhatjuk és a reprezentáció alapján milyen kirakási algoritmust tudunk hozzárendelni, illetve, hogy a kirakás bonyolultságát milyen módon mérhetjük.

5.1. A kockák reprezentálása. Mindenik kockát hat lapból (puzzle-elemből) rakhatjuk ki. A könnyebb matematikai elemzés érdekében egy ilyen lapnak megfeleltetünk egy 5×5-ös mátrixot. Ezt a mátrixot úgy kapjuk meg, hogy 1-eseket teszünk a mátrixban oda, ahol a puzzle lapja ki van töltve és 0-t oda ahol, a puzzle-lapban szabad hely van (vagyis nincs kitöltve).

Ezt a szerkesztést mutatja be a 12.12. ábra. Annak érdekében, hogy az illeszkedéseket egyszerűbben vizsgálhassuk, a puzzle-darabok különböző helyzetének is megfeleltetünk egy-egy mátrixot. Így minden kocka minden lapjának megfeleltethetünk nyolc darab mátrixot. Ebből négy a lapnak a forgatásaiból keletkezik, a másik négy pedig ezeknek a forgatásoknak a szimmetrikusaiból (azaz ezen lapok másik oldalából). Tehát egy teljes kocka hat lapjához $6 \cdot 8$, azaz 48 mátrixot





12.12. Ábra. Egy lapnak mátrixszal való ábrázolása

rendelünk. Jelöljük ezeket a mátrixokat $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{48}$-cal. Természetesen ezek között azonos mátrixok is megjelenhetnek a szimmetrikus lapok miatt, de ez nem jelent nagyobb problémát, mivel a továbbiakban ezeket az eseteket is tárgyalni fogjuk.

Az így kapott mátrixok között definiálhatunk egy $\sim$ relációt. Azt mondjuk, hogy $A \sim B$, ha az A és B mátrixok ugyanazon kocka különböző oldalaihoz tartoznak és ezek a lapok a felső éleiknél összeilleszthetőek (anélkül, hogy forgatnánk őket). Ez az illeszkedés a következő feltételekkel írható le:

$$a_{1i} + b_{1i} = 1, i \in \{2, 3, 4\};$$

$$a_{11} + b_{11} \leq 1 \text{ és ha } a_{11} + b_{11} = 0, \text{ akkor } \min\{a_{21}, b_{21}\} = 0;$$

$$a_{15} + b_{15} \leq 1 \text{ és ha } a_{15} + b_{15} = 0, \text{ akkor } \min\{a_{25}, b_{25}\} = 0,$$

ahol a_{ij} az A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának az eleme, hasonlóan b_{ij} a B mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának az eleme.

Így a kocka összerakása gyakorlatilag 12 darab $\sim$ szerint megfelelő pár meghatározását jelenti.

A $\sim$ reláció segítségével generálhatunk egy F illeszkedési mátrixot, amely egy 48×48-as mátrix. Ezt az F mátrixot úgy kapjuk meg, hogy az (i, j)-edik pozícióba 1-est teszünk ha $M_i \sim M_j$, vagyis a két elem a felső éleiknél összeilleszthető, ellenkező esetben pedig az (i, j)-edik pozícióba 0-t teszünk. Így, ha a j-edik oszlopban lévő elemeket összeadjuk, megkapjuk, hogy az M_j által kódolt laphoz hány másik lap illeszkedik annak egy rögzített pozíciójában. Mivel mindegyik puzzle-elemnek megvan a helye a kockában, a kocka összerakását bármelyik elemtől elkezdhetjük.

Válasszuk kiinduló elemnek azt az M_j mátrixszal megadott lapot, ahol a $\sum_{i=1}^{48} f_{ij}$ szám a legkisebb lesz. Így próbáljuk lecsökkenteni a próbálkozási lehetőségek számát. Természetesen az lenne a legkedvezőbb eset számunkra, ha ez a minimális szám 1 lenne, vagyis találnánk egy olyan darabot, amelynek valamelyik oldalához pontosan egy másik darab illeszthető. Ennyire kedvező eset általában nincs, csak a Profi Cube készlet Watt kockájánál találunk ilyen biztos kiinduló pozíciót. Ez lényegesen megkönnyíti a kocka kirakásának elkezdését (természetesen, ha előbb elemezzük a darabokat). Minden kocka esetében meghatározhatunk egy olyan darabot, amelynek valamelyik oldalához minimális számú további darab illeszthető. Ezt a továbbiakban kialakuló konfigurációkra is alkalmazzuk, tehát egy adott konfigurációt (amit néhány puzzle-elemből raktunk ki) olyan él mentén próbálunk folytatni, amelynél az illeszkedési lehetőségek száma minimális. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a mohó algoritmust alkalmazzuk, minden lépésben valamilyen kritérium szerint a legjobbat igyekszünk lépni. Ez természetesen nem garantálja, hogy így kell a legkevesebbet lépni, de ennél jobb algoritmust csak akkor kaphatunk, ha vagy előre látjuk a kialakítható térbeli konfigurációkat vagy sokkal több esetet elemzünk.

Jelöljük c_1-gyel az F mátrix oszlopösszegei közül a legkisebbet, vagyis

$$c_1 = \min_{1\le j\le 48} \sum_{i=1}^{48} f_{ij}. \tag{40}$$

Ez a c_1 legyen az első összetettségi mutatónk a kockák elemzésében. A következő táblázatban megadjuk ezt a mutatót az általunk tanulmányozott két készlet kockáira vonatkozóan:

Profi	c_1	**Marble**	c_1
Confusius	8	King	2
Da Vinci	8	Khayyam	8
Marco Polo	7	Curie	3
Rubens	6	Fuller	2
Watt	1	Gandhi	2
Newton	2	Einstein	3

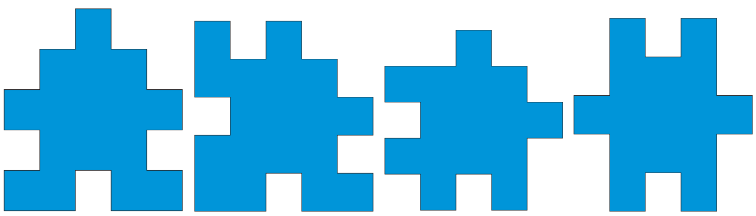
Megfigyelhetjük, hogy jó néhány kockának van szimmetrikus eleme. Így a c_1 számok nem jellemzik tökéletesen a helyzetet, mert nem veszik figyelembe a puzzle-darabok szimmetriáját. Amikor egy ilyen szimmetrikus lap illeszkedését vizsgáltuk, minden helyzetet külön esetnek számoltunk, pedig gyakorlatilag a kockarakónak ez nem jelent eltérő lehetőséget. Ezért ki kell küszöbölni azt, hogy ezeket külön eseteknek számoljuk.

A 12.27. és a 12.28. ábrán minden kockának fel vannak sorolva és meg vannak számozva az elemei. A következő táblázatban ezeket az ábrákat fekhasználva, soroljuk fel minden kockának a szimmetrikus lapjait (a „-" jel azt jelenti, hogy a megfelelő kockának nincs egyetlen szimmetrikus eleme sem):

Profi	Szimmetrikus elem	**Marble**	Szimmetrikus elem
Confusius	3,4,5,6	King	3
Da Vinci	2,3,4,5	Khayyam	4,6
Marco Polo	1,3,4,6	Curie	-
Rubens	1,4,6	Fuller	6
Watt	-	Gandhi	-
Newton	-	Einstein	-

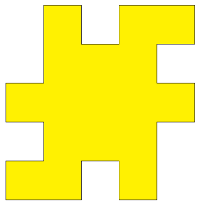
Minden M_k mátrix esetén megszámoljuk, hogy az M_k-val kódolt laphoz rendelt nyolc mátrix közül hány olyan van, amely a lap szimmetriája miatt azonos M_k-val. Az így kapott számot s_k-val jelöljük és az F illeszkedési mátrixban az M_k sorában és oszlopában az 1-esek helyett $\frac{1}{s_k}$-t teszünk. Jelöljük FS-sel az így kapott mátrixot.

Lássuk ezt egy konkrét esetben is. A Confusius-kockának, amint azt a fenti táblázatban is láthattuk, 4 szimmetrikus eleme van. Ezek a a 12.13. ábrán láthatóak.



12.13. Ábra. A Confusius-kocka összes szimmetrikus eleme

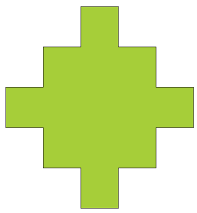
A 12.13. ábrán az első elemnek van egy függőleges szimmetriatengelye és emiatt a tengely szerinti szimmetrikusa ugyanazt a mátrixszot származtatja, mint az eredeti pozíció, tehát ennél a mátrixnál $s_k = 2$ és így $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{2}$. A második és a harmadik elem az egyik átlóra szimmetrikus, tehát $s_k = 2$ és $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{2}$. A negyediknek két szimmetria tengelye van, így $s_k = 4$ és $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{4}$.



12.14. Ábra. A Marco Polo-kocka egyik szimmetrikus eleme

A Marco Polo-kocka 12.14. ábrán látható darabjának szintén két azonos pozíciója van, mivel a puzzle-darab csak egy középpontos szimmetriával rendelkezik. Így $s_k = 2$ és $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{2}$.

A 12.15. ábra az Omar Khayyam-kocka egyik darabját ábrázolja. Láthatjuk, hogy ez centrálszimmetrikus és tengelyesen is szimmetrikus több tengelyre nézve. Ezt a darabot tetszőlegesen forgathatjuk, mindig ugyanazt a mátrixot származtatja, tehát itt $s_k = 8$ és $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{8}$.



12.15. Ábra. Az Omar Khayyam-kocka egyik szimmetrikus eleme

Az előbbi meggondolások alapján értelmezhetjük a cs_1 bonyolultsági mutatót, amely gyakorlatilag azt mutatja meg, hogy az első két darab összeillesztése során legalább hány esetünk van. Ez azért fontos, mert előfordulhat, hogy az összerakás során teljesen vissza kell bontani a kockát és valamilyen más kezdőlépéssel kell indulni.

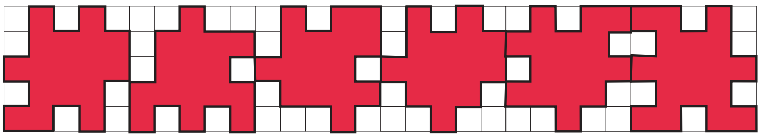
$$cs_1 = \min_{1 \leq j \leq 48} \sum_{i=1}^{48} fs_{ij} \qquad (41)$$

A következő táblázat a cs_1 mutatókat tartalmazza:

Profi	cs_1	**Marble**	cs_1
Confusius	4	King	2
Da Vinci	4	Khayyam	3
Marco Polo	4	Curie	3
Rubens	5	Fuller	2
Watt	1	Gandhi	2
Newton	2	Einstein	3

6. Egy kocka kirakásának lépései

Azért, hogy szemléletesebb és érthetőbb legyen az elemzés, vizsgáljuk meg a kockák felépítését a már fent említett Profi Cube készlet Watt kockáján keresztül. A mellékelt ábrán látható a Watt-kocka 6 darabja:

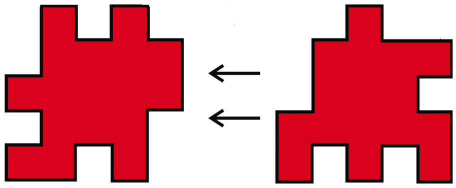


1 2 3 4 5 6

12.16. Ábra. A Watt-kocka darabjai

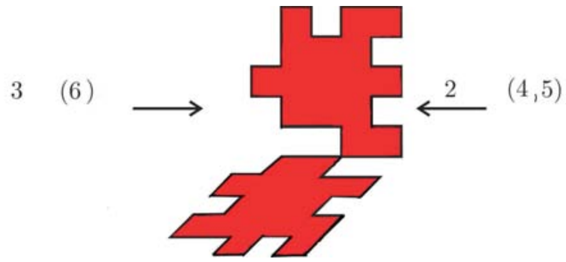
Azt már meghatároztuk, hogy a kirakás során van egy biztos kiinduló pont, vagyis egy olyan lap, amelyhez csak egyetlen másik lap illeszkedik. A 12.16. ábra szerint felsorolt puzzle-darabok közül, a Watt-kocka 1. és 2. darabja illeszthető össze ily módon. Ezt láthatjuk a 12.17. ábrán.

Miután összeillesztettük ezt a két darabot, meg kell vizsgálnunk, hogy a lehetséges négy pozícióra külön-külön hány elemet illeszthetünk. A 12.18. ábrán láthatjuk, hogy jobb oldalra két különböző elem illeszthető, éspedig a 12.16. ábra szerint a 4. vagy 5. elem, bal oldalra



12.17. Ábra. A Watt kocka első két darabjának összeillesztése

pedig három lehetőség van az illeszkedésre, méghozzá a 6. elemet lehet három különböző pozícióban beilleszteni.

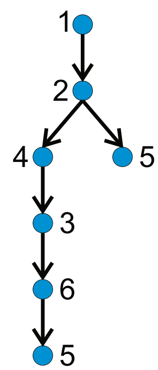


12.18. Ábra. A Watt-kocka 3. darabjának különböző beillesztési lehetőségei

Mi azt az oldalt fogjuk választani a továbblépéshez, amelyikhez a legkevesebb darabot lehet illeszteni, ezután pedig úgyanígy ezekhez is sorra megnézzük, hogy hány elem illeszthető. A továbblépéshez mindig azt a pozíciót választjuk, ahol a legkevesebb számú lehetőség van az illeszkedésre. Így lassan minden kedvező lehetőséget számbavéve felépíthetjük a kockánkat. Ezzel a módszerrel mindig csak a meglévő konfigurációt kell vizsgáljuk (tehát nem kell fejben előre látnunk olyan alakzatokat, amelyek még nincsenk kirakva) és minden lépésben olyan továbblépési lehetőséget választunk, amely visszalépés esetén a lehető legkevesebb további alternatívát adja.

7. A kockákhoz tartozó gráfok

Az összerakás lehetséges lépéseit ábrázolhatjuk egy fa struktúrában (gráfban). A kiinduló darabot azonosítjuk a gyökérrel és minden továbblépési lehetőséget egy-egy ággal. Így megkapjuk a kocka kirakásához tartozó gráfot. A Watt-kockához tartozó gráfot a 12.19. ábrán láthatjuk.



12.19. Ábra. A Watt-kocka megoldásának struktúrája

A Watt-kocka esetében ez a struktúra egy két levelű fát fog jelenteni, ahol a csomópontok számozása megegyezik a megfelelő elemek számozásával a 12.16. ábra alapján. Ez a gráf megmutatja nekünk, hogy a Watt-kockát hogyan rakhatjuk össze két próbálkozásból. Ezek a lehetőségek pedig a következők: $1-2-5$ vagy $1-2-4-3-5-6$. Láthatjuk, hogy a felsoroltak közül az utóbbi lesz a kocka kirakásának a megoldása.

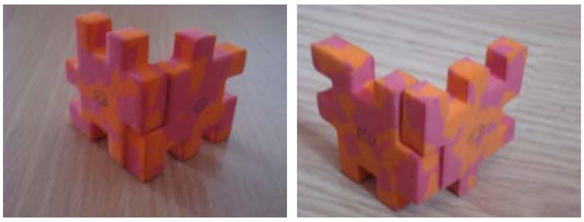
Ha az összerakást egy másik darabból kiindulva kezdjük el, lehet, hogy egy több levelű fát fogunk kapni a lehetőségek ábrázolása során és ez több próbálkozást fog eredményezni. Így természetesen időben is sokkal többet jelenthet, hacsak egy kis szerencsével el nem találjuk (vagy előre nem látjuk) a helyes megoldást. Mindenképpen az előbbi gráf azt mutatja, hogy egy kis elemzéssel és egy kézenfekvő stratégiával a Watt-kocka gyorsan kirakható.

A pozíciók kiválasztására a Greedy algoritmust használjuk, és ha valahol elakadtunk a kirakás során, akkor visszaléptünk egy korábbi állapotba, tehát a kapott gráf gyakorlatilag egyfajta mohó backtracking lehetőségeit tükrözi.

Az ötletek rögzítésének céljából lássuk lépésenként a Watt-kocka gráfjának szerkesztését. Először is keresnünk kell egy olyan puzzle-darabot (és azon egy oldalt), amelyhez a lehető legkevesebb más elem illeszkedhet. Ez a darab a kocka 1. darabja (lásd a 12.20. ábrát), tehát a fa gyökerébe az 1-es kerül.

12.20. Ábra. Gyökér

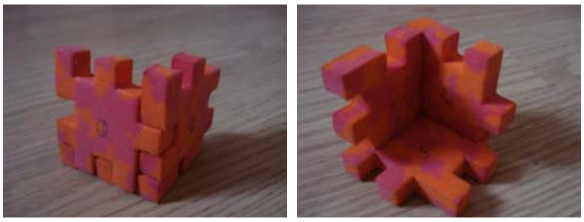
A 12.20. ábrán látható pozíciónak megfelelően a jobb oldalhoz csak egyetlen másik elem illeszthető és ez az elem a 2. elem (a 12.16. ábra szerint a 2. elem bal oldala talál oda). Ezt az illeszkedést mutatja a 12.21. ábra.



12.21. Ábra. Első szint

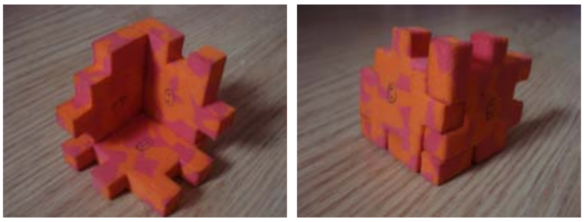
Így tehát a Watt-kocka gráfjának első szintjén a 2. elem lesz. Most meg kell nézn"unk, hogy a már összeillesztett két darabhoz hova tudunk legkevesebb számú elemet illeszteni. A 12.21. ábra első képén látható alakzat tetejére beilleszthetjük a 6. elemet három különböző pozícióban. Ezt követően megnézzük, hogy a másik oldalra, vagyis a második képen látható alakzat tetejére hány elem illeszthető. Végigpróbálva az összes elemet, kiderül, hogy csak a 4. és 5. elem illeszkedik. Tehát ebben az irányban csak két továbblépési lehetőség van. Az alakzat másik két továbbfejlesztési pontja esetén is van legalább két illeszkedési lehetőség, ezért a továbblépéshez azt a pozíciót választjuk, ahová a 4. és az 5. darab illeszthető. Így a gráf második szintjére ezt a két elemet fogjuk betenni.

Innen tehát a gráf két ágra fog szétválni, egy jobboldali és egy baloldali ágra. Mindkét oldalt külün-külön megvizsgáljuk, hogy lássuk, melyik vezet el a megoldáshoz. Kezdjük el vizsgálni először a jobb oldalt, ami azt jelenti, hogy illesszük be az 5. elemet a már meglévő alakzatba. Így a 12.22. ábrán látható alakzathoz jutunk.



12.22. Ábra. Második szint jobb oldala

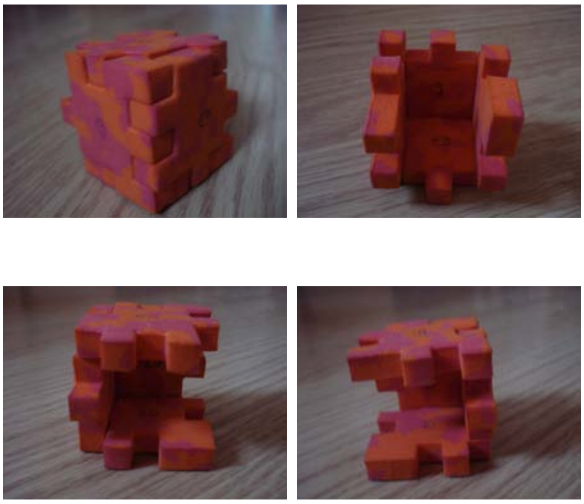
Ahhoz, hogy tovább haladjunk, meg kell néznünk, hogy a meglévő alakzatnak melyik oldalához illeszkedik a legkevesebb elem. Észrevehetjük azonban, hogy a fenti ábra első képén látható alakzat tetejére egyetlen elem sem illeszthető be. Tehát ez az ág egy zsákutcához vezetett, így ezen nem haladhatunk tovább. A kirakás során ez azt jelenti, hogy vissza kell lépnünk, ezért a következő lépésben vissza kell térnünk az előző szintre, vagyis meg kell vizsgálnunk, hogy mi történik, hogyha a bal oldalon indulunk el és az 5. elem helyett a 4.-et illesztjük be. A 4. elemet beillesztése a 12.23. ábrán látható alakzathoz vezet.



12.23. Ábra. Második szint bal oldala

Ebben az esetben is az a cél, hogy megtaláljuk azt az oldalt, amelyikhez minimális számú elem illeszkedhet. Három helyre illeszthetünk be elemeket. Próbálkozással megállapíthatjuk, hogy az egyik helyre beillik a 6. elem három különböző pozícióban, egy másik helyre az

5. elem talál két különböző pozícióban és a 12.23. ábra első képén látható alakzat tetejére csak egyetlen elem illeszthető be, éspedig a 3. elem. Tehát egyértelmű, hogy ezt az utolsó lehetőséget választjuk és így beillesztjük a 3. elemet. Ezáltal a gráf harmadik szintjére is bekerül a 3. elem. A 12.24. ábrán láthatjuk, hogy ezzel az illesztéssel milyen alakzathoz jutunk.

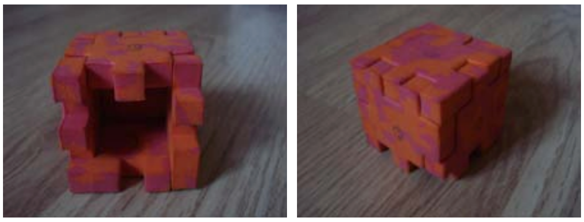


12.24. Ábra. Harmadik szint bal oldal

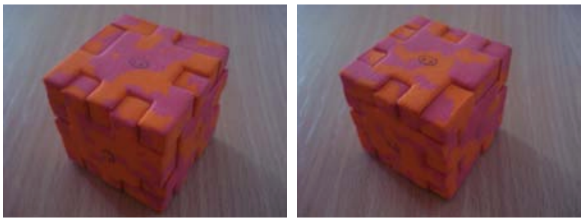
Mostmár csak két hely maradt ahová illesztenünk kell. Próbáljuk meg beilleszteni a 12.24. ábra szerinti harmadik képen látható szemközti helyre a maradék két elemet. Hamar észrevehetjük, hogy az 5. elem nem talál, de a 6. pontosan odaillik, tehát a 6. elemet is egyértelműen beilleszthejük. Ezzel egyidőben a gráf negyedik szintjére is beírhatjuk a 6-ost. Az eddigi kirakás eredménye a 12.25. ábrán látható.

Az utolsó üresen maradt helyre az 5. elem pontosan betalál, tehát a gráf ötödik szintjére beírhatjuk az 5-öst, és így a gráfban megjelenítettük a kirakás során felmerülő lehetőségeket. A 12.26. ábrán tehát megtekinthetjük az utolsó elem beillesztésével kapott alakzatot, vagyis magát a kockát.

Végigkövetve a Watt-kocka gráfja szerinti összes kirakási lehetőséget a levelekig (jelen esetben ez kettő), megállapíthatjuk, hogy ez a



12.25. Ábra. Negyedik szint

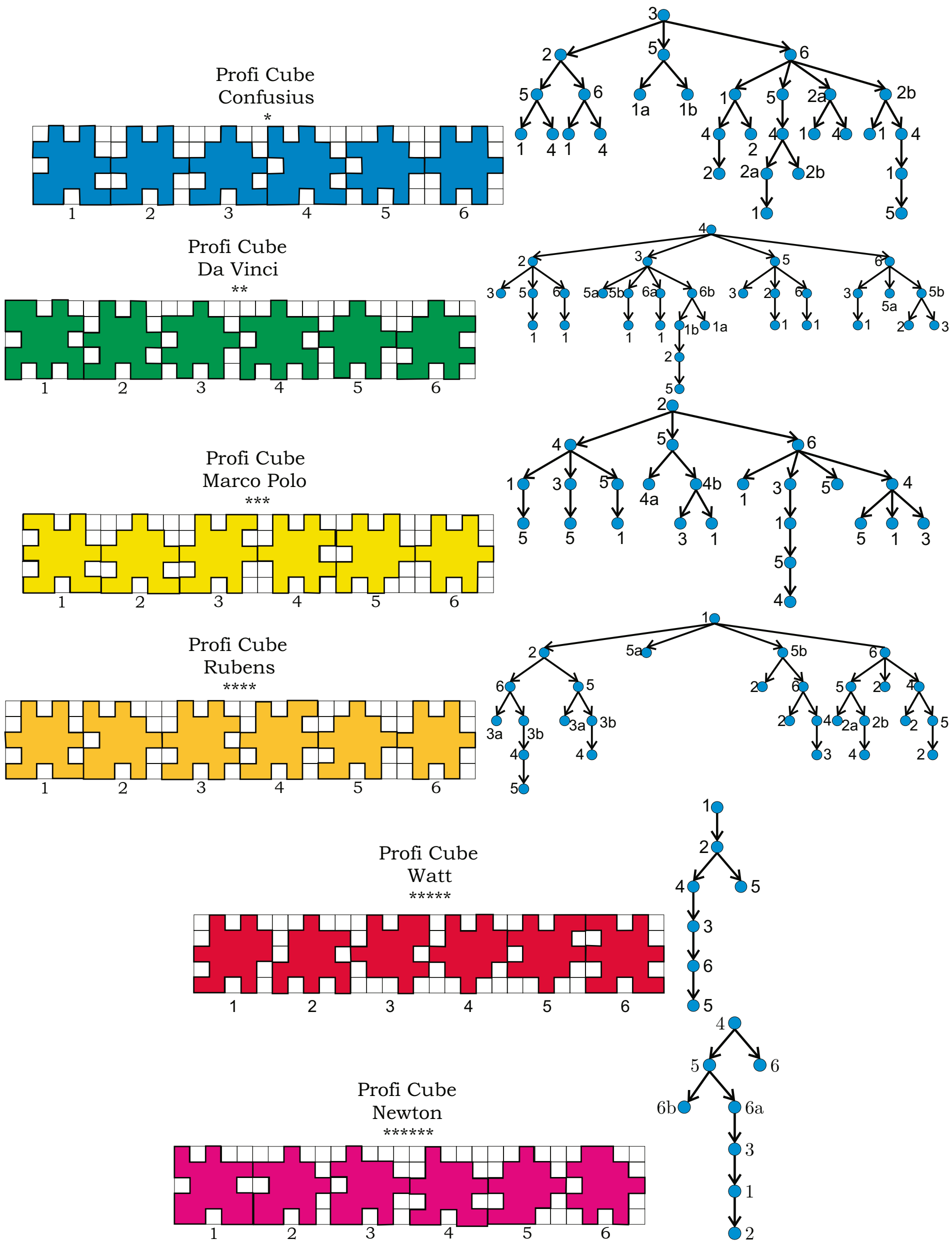


12.26. Ábra. A Watt-kocka

kocka viszonylag könnyen kirakható, hiszen az első szinten történő lépés kivételével mindenik egyértelmű. Azt is megfigyelhetjük, hogy csak az egyik ág vezetett el a megoldáshoz, a másik zsákutcához vezetett, vagyis a Watt-kockának csak egy megoldása létezik.

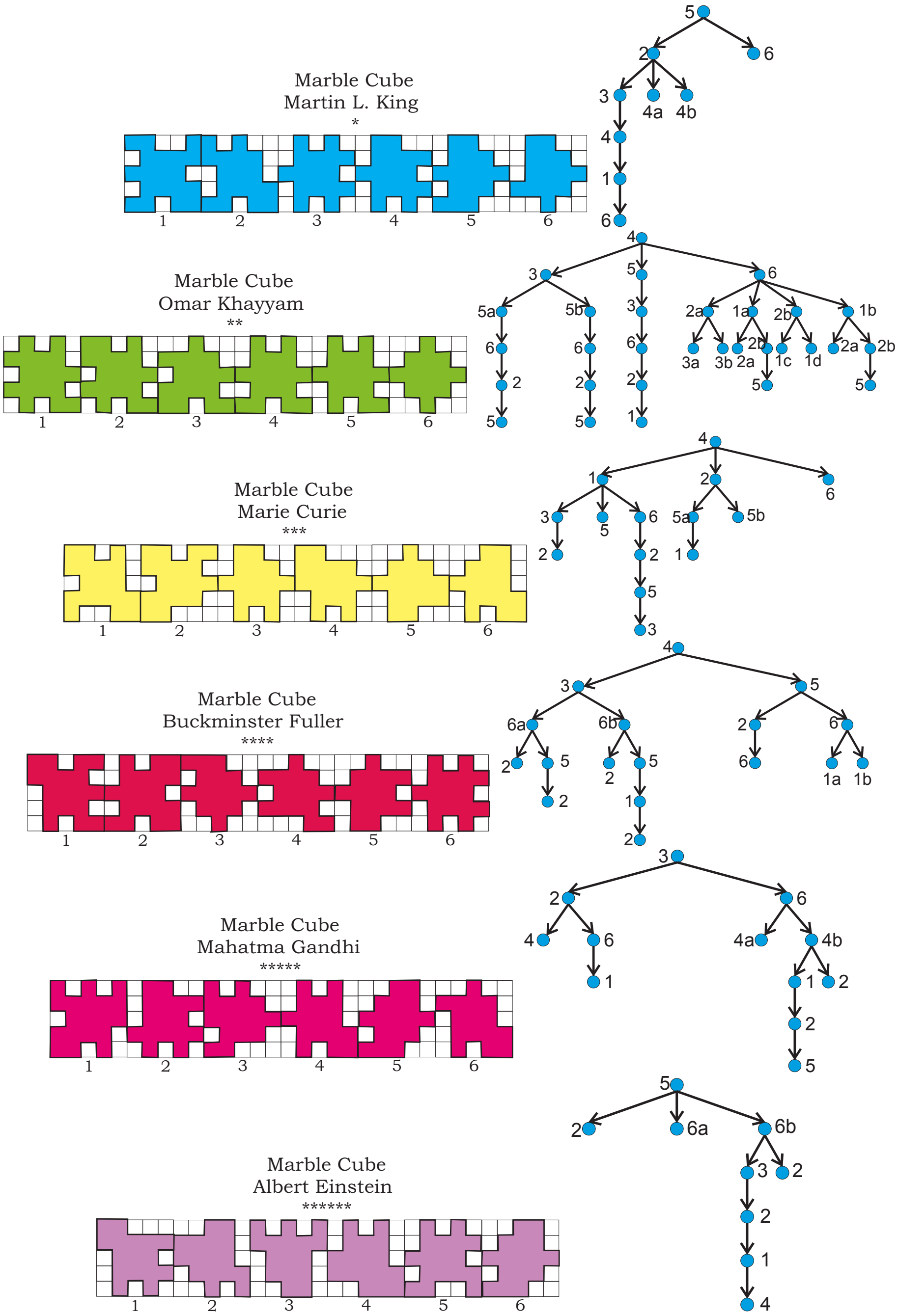
Hasonló gráf szerkeszthető mindenik kockához, ha a fentebb leírt eljárás lépései szerint haladunk a kockarakásban. A 12.27. és 12.28. ábrákon megtekinthetjük az általunk tanulmányozott kockák gráfját.

Egyértelmű, hogy ezek a fák mindig öt szintesek lesznek, mivel egy kockának hat lapja van, ahol a fa gyökere a kiinduló elem és a maradék öt lap felel meg a szinteknek. Ezekben a fákban az első javított összetettségi mutató az első szinten levő csúcsok számának felel meg. Hasonlóképpen mondhatjuk, hogy a k-adik javított összetettségi mutató a cs_k a k-adik szinten levő csúcsok számát adja meg, ahol $1 \leq k \leq 5$. A cs_5 az ötödik szinten levő csúcsok számát adja meg. A legtöbb esetben ez egyben a nemekvivalens megoldások számát jelenti. Az általunk tanulmányozott kockák esetén a Confusius- és az Omar Khayyam-kocka kivételével a cs_5 értéke 1. A Confusius-kocka esetén $cs_5 = 2$, viszont a szimmetrikus elemek miatt a két kirakás ekvivalens. Az Omar Khayyam-kockánál viszont $cs_5 = 3$, ennek a



12.27. ÁBRA. A Profi-készlet kockáihoz tartozó gráfok

kockának három különböző megoldása van. Ezeket a megoldásokat a 12.35. ábrán láthatjuk.



12.28. Ábra. A Marble-készlet kockáihoz tartozó gráfok

A gráfok segítségével a sikertelen próbálkozások számát is meg tudjuk határozni. Hiszen minden olyan ág, amellyel nem jutottunk el az 5-ödik szintig, nem eredményezett megoldást sem, tehát a gráf minden ilyen ága sikertelennek bizonyult a próbálkozásainkban. Jelöljük csak röviden *sp*-vel ezen sikertelen próbálkozások számát. Így például a Watt-kocka esetében $sp = 1$, amint azt a 12.19. ábrán is láthatjuk. Ezt a számot a többi kocka esetében is könnyen meghatározhatjuk a gráfok alapján. A következő táblázatban ezt foglaltuk össze:

Profi	*sp*	**Marble**	*sp*
Confusius	13	King	3
Da Vinci	14	Khayyam	8
Marco Polo	11	Curie	5
Rubens	12	Fuller	6
Watt	1	Gandhi	4
Newton	2	Einstein	3

8. Az elméleti elemzések által kapott rangsorok

Azért, hogy még összetettebb képet alkossunk a kockákról, vizsgáljunk még meg három dolgot minden kocka esetében, a következők szerint:

(1) Annak valószínűségét, hogy tökéletes kockát rakjunk össze, backtracking lépések nélkül, azaz, annak valószínűségét, hogy egyszeri nekifutamodásból kirakjuk a kockát.
(2) A kocka összerakásához szükséges átlagos lépések számát backtracking lépésekkel.
(3) Az utolsó szinten levő levelek számának és az összes levelek számának az arányát (ez fejezi ki a megoldás megjelenésének feltételes valószínűségét arra vonatkozóan, hogy eljutunk egy olyan konfigurációhoz, amelyet nem lehet tovább folytatni).

Kiszámolva mindegyik kockára külön-külön ezeket a mutatókat, három különböző rangsort kapunk. Ezeket a rangsorokat foglalja össze a következő táblázat:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r_7	8	5	6	7	9	12	10	11	1	3	4	2
r_8	6	8	12	5	7	11	9	10	1	3	4	2
r_9	8	5	6	7	12	11	9	10	1	3	4	2

Az $1, 2, \ldots, 6$ a Profi készlet kockáit jelöli a csillagok száma szerint növekvő sorrendben, míg a $7, 8, \ldots, 12$ a Marble készlet kockáit szintén a csillagok száma szerint növekvő sorrendben. A kockákat rangsoroltuk a cs_k, $1 \le k \le 5$ mutatók alapján. Pontosabban a

$$cs_1,\ cs_1 + cs_2, \ldots, \sum_{k=1}^{5} cs_k$$

összegek növekvő sorrendje alapján. Hasonlóan az sp mutató szerint is. Így összesen az r_7, r_8, r_9 rangsorokkal együtt 9 lehetséges elméleti sorrendet értelmezhetünk.

9. A kockák vizsgálata a kirakásukra szervezett tevékenységek által

Azért, hogy ne csak elméleti szinten vizsgáljuk meg a kockákat, hanem lássuk azt gyakorlatban is, kockakirakó tevékenységeket szerveztünk. A cél az elméletileg kialakított nehézségi sorrendek és a konkrét kirakások idejei alapján meghatározott sorrendek közti kapcsolat vizsgálata volt. Kíváncsiak voltunk mennyire fedik egymást, vagy éppen milyen mértékű az eltérés. Összesen több, mint 120 diákkal végeztünk kockakirakó tevékenységet és így sikerült 120 mérési eredményt összegyűjteni. A kockakirakó összejövetelekre több alkalommal került sor. Egyszerre álatlában kb. 10-15 diák vett részt, néha vegyesen középiskolások és egyetemi hallgatók.

Minden diáknak ki kellett raknia a 12 kockát, és közben mértük, hogy külön-külön mennyi idő szükséges az egyes kockák kirakásához. Az időméréses kirakások előtt még mindenki kirakhatott 2 kockát, amelyek nem a vizsgált készéletekből voltak. Ez azért kellett, hogy mindenki megismerkedjen a kockák jellegével, azzal, hogy hogyan is épülhet fel a hat lapból egy kocka, és a legfontossabb, hogy kialakítson mindenki magának valamilyen stratégiát, amelyet a többi kocka kirakásánál felhasználhat. Ezt a bevezetést nevezhetjük akár a kockakirakó tevékenység egy képzési szakaszának is. Ezután pedig egyenként

12.29. Ábra. A kocka kirakó tevékenység

kapták a diákok az általunk tanulmányozott készletek kockáit. Ezeket a kockákat véletlenszerű sorrendben adtuk oda a diákoknak. Természetesen nem mindenki talált magának egyből valamilyen hatásos módszert vagy kiindulási pontot, egyeseknek könnyebben ment, másoknak több idő kellett egy-egy kocka kirakásához. De a siker mindenkinek nagy örömöt okozott. Nem csak azok örültek akiknek már sikerült

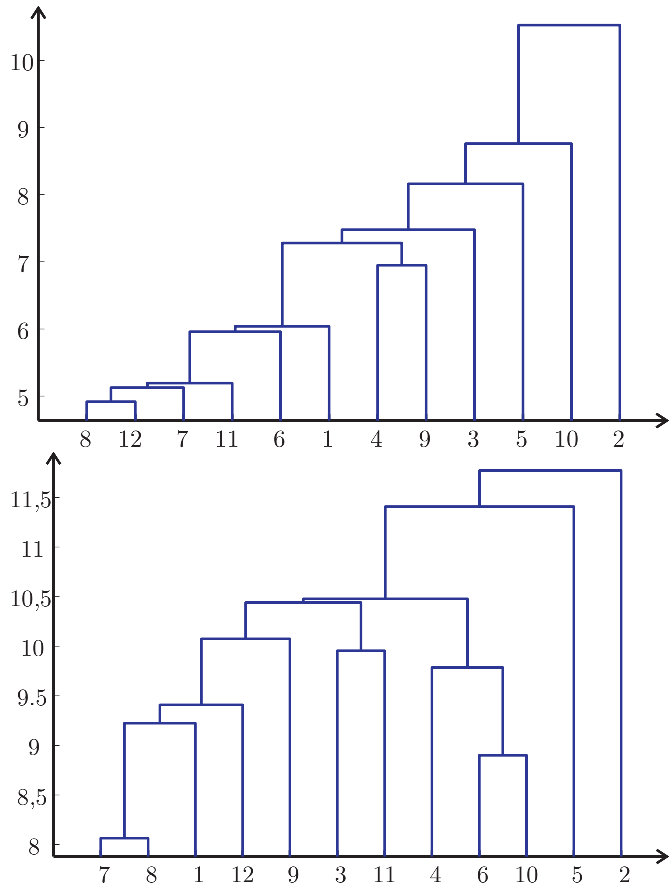
12.30. Ábra. A siker mindenkit boldoggá tett kirakni a kockát, a többiek sem hagyták magukat, még ha nekik nehezebben is jött össze. Hiszen ők is tudták, hogy abból a hat puzzle-elemből mindenképp egy kockának kell összeállnia. Tehát vég-

12.31. Ábra. Ebből előbb-utóbb kocka lesz...

eredményben mind a 120 diáktól származott 12 mérési adatunk. Az első 60 mérési eredmény matematikus és matematika-informatikus egyetemi hallgatóktól, valamint középiskolás diákoktól származik, az utolsó 60 mérési eredmény pedig informatikus és mérnöki-informatikus hallgatóktól. Ezeket a mérési adatokat dolgoztuk fel és elemeztük. Legelőször homogenitásvizsgálatot végeztünk el a 120 mérési eredményen. Ebből kiderült, hogy a teljes adatsor nem homogén. Ezt követően elkészítettünk az első 60 mérési eredmény alapján egy dendrogramot, azután pedig az utolsó 60 alapján is. Ezt a két dendrogramot láthatjuk a 12.32. ábrán. A homogenitásvizsgálatot elvégezve az első 60 mérési eredményre azt kaptuk, hogy ez már egy viszonylag homogén minta. Így nem érdemes az egész adatsorral dolgozni, de az első 60 adat már megfelel. Ezután elvégeztünk néhány számolást a homogén mintánk alapján. A következő rangsorokhoz jutottunk:

(1) Az átlagos kirakási idők szerinti rangsor: a_i.
(2) Az átlagos kirakási idők szerinti rangsor, ha a kiugró adatokat (a legkisebb 10%-ot és a legnagyobb 10%-ot) nem vesszük figyelembe: b_i.
(3) A medián idő alapján kapott rangsor: c_i.
(4) Hierarchikus klaszterezés alapján kapott rangsor: d_i.

Ezeket a rangsorokat a következő táblázatban foglaltuk össze:

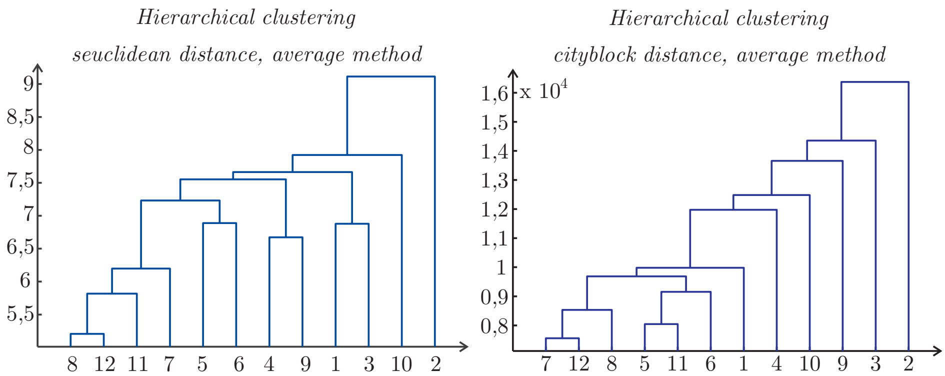


12.32. Ábra. Az első 60 és az utolsó 60 mérési eredményből kapott dendrogramok

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	8	12	7	11	10	1	6	4	5	3	9	2
b_i	8	12	7	11	6	10	4	1	5	9	3	2
c_i	8	12	7	11	5	6	9	10	1	3	4	2
d_i	7	12	8	5	11	6	1	4	10	9	3	2

Láthatjuk, hogy az első két rangsor nem egyezik meg teljesen. Az eltérést a nagyon kiugró mérési adatok okozzák. Voltak diákok akik egy-egy kockánál nagyon sokat időztek (ez jelenthet akár egy óránál is többet) és ezek okozzák a nagy eltéréseket. Észrevehetjük, hogy a Watt-kocka az átlagideje alapján elég hátra került a rangsorban, annak ellenére, hogy a gráfja készítésekor megállapíthattuk, hogy az egy könnyű kocka. Valószínűleg a diákok többsége nem jött rá a kezdőpozícióra és emiatt sokkal több lehetőséget kellett kipróbálnia, ami természetesen időben is hosszabb.

A klaszterezést a Matlab segítségével végeztük el, a 12.33. ábra mutatja a kapott eredményt.



12.33. Ábra. Klaszterezés a mérési eredmények alapján

Végül a megfigyeléseken alapuló a_i, b_i, c_i, d_i rangsorok alapján a következő gyakorlati rangsort állíthatjuk fel:

I. készlet: 8,12,7,11,5,6; II. készlet: 1,4,10,9,3,2.

10. Az elméleti és gyakorlati megfigyelések összehasonlítása

A gyakorlati rangsorok szórásának több, mint 50%-a magyarázható egyetlen elméleti rangsorral, és általában 2-3 elméleti rangsor a gyakorlati rangsorok varianciájának $75 - 80\%$-át magyarázza. Elvégezve a faktoranalízist a következőket állapítottuk meg:

- Az átlagok szerinti rangsor a legjobban a gráfoknál a levelek száma alapján szerkesztett rangsorral korrelál.
- A kiugró értékek elhagyása után az átlagok szerinti rangsor a legjobban az első két összetettségi mutató összege alapján szerkesztett rangsorral korrelál.
- A medián idő kiszámítása által kapott rangsor a legjobban az első összetettségi mutató által kapott rangsorral korrelál.

- A klaszterezés segítségével kapott rangsor a legjobban a kirakásokhoz szükséges átlagos lépésszám (backtracking) által kapott rangsorral korrelál.

10.1. Végső megjegyzések. A Happy Cube puzzle-ek elméleti és gyakorlati elemzése után levonhatunk néhány következtetést:

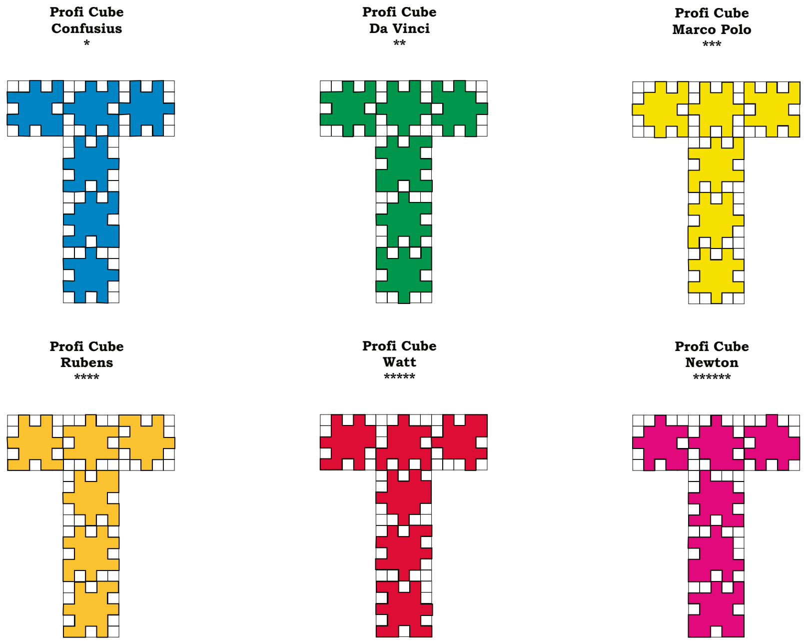
- Megfigyelhettük, hogy a diákok a kockák kirakása során backtracking vagy greedy lépéseket használtak, esetleg voltak akik semilyen előre kigondolt módszert nem alkalmaztak, csak véletlen bolyongáshoz hasonló lépéseket probáltak végrehajtani.
- Bizonyosan kijelenthetjük, hogy a gyártó cég által felállított nehézségi sorrend teljesen hibás. Az is egyértelmű, hogy nem a Marble Cube készlet a legnehezebb. Ugyanakkor a gyártó cég a kockák kirakási bonyolultságát figyelmen kívül hagyta, amikor azokat besorolta a Profi vagy Marble készlet valamelyikébe.
- Mindent összevetve, mi a következő nehézségi sorrendet ajánljuk:

  I. készlet: Omar Khayyam, Mahatma Gandhi, Albert Einstein, Watt, Newton, Martin Luther King;

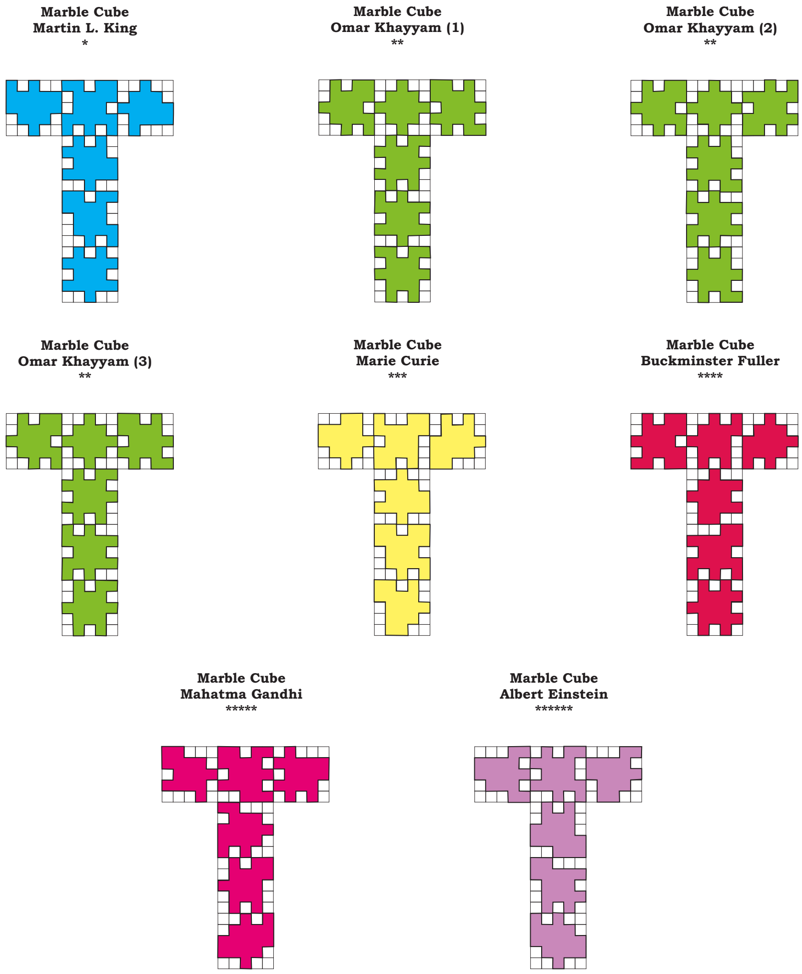
  II. készlet: Marie Curie, Buckminster Fuller, Confusius, Marco Polo, Da Vinci, Rubens.

A kockák vizsgálata gyakorlatilag több éven keresztül tartott és a vizsgálat során egy összehangolt csapatmunkára volt szükség. Így a kockakkirakó tevékenységek nagy részét Bartos Kocsis Andrea irányította és ő készítette el a jelen fejezet első verzióját is, a számítógépes elemzést András Szilárd és Sipos Kinga végezte, a játékprogramokat Sipos István, Sipos Tamás és Máté István írták. Köszönettel tartozunk továbbá dr. Soós Annának és Szilágyi Juditnak, valamint a kirakási tevékenységeken részt vevő több, mint 120 diáknak (illetve egyetemi hallgatónak).

11. A kockák megoldásai



12.34. Ábra. A Profi Cube készlet megoldásai



12.35. Ábra. A Marble Cube készlet megoldásai

Szakirodalom

[1] András Szilárd: *Dinamikus rendszerek*, Editura Didactică şi pedagogică, Bukarest, 2008

[2] András Szilárd, Nagy Örs: *Kíváncsiság vezérelt matematika oktatás*, Új útak és módok az oktatásban - konferencia, 2010

[3] András Szilárd, Nagy Örs: *Measuring with unscaled pots - algorithm versus chance*, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 4(2010):3

[4] András Szilárd, Szilágyi Judit: *Modelling drug administration regimes for asthma: a Romanian experience*, Teaching Mathematics and its Applications 2010 29(1):1-13; doi:10.1093/teamat/hrp017

[5] András Szilárd, Szilágyi Judit: *A modelling experience in Romania*, DQME II report

[6] András Szilárd, Szilágyi Judit: *Tankönyv a X. osztály számára*, Ábel Kiadó, 2003

[7] András, Szilárd, Szilágyi Zsolt: *Geometria II*, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2006

[8] Werner Blum, Peter L. Galbraith: *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study*, Springer, 2007

[9] Spencer Kagan: *Cooperative Learning*, Kagan Cooperative Learning, 2. kiadás, 1994

[10] Werner Blum: *Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht - Herausforderung für Schüler und Lehrer*, 8-23, Franzbecker Verlag, Hildesheim, 2006

[11] Joel M. Cooper: *Cognitive dissonance-fifty years of a classic theory*, Sage Publications, 2007

[12] Kajsa Bråting, Johanna Pejlare: *Visualizations in mathematics*, Erkenntnis 68 (2008), no. 3, 345–358.

[13] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer: *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967

[14] W.L. Curlette: *The Randomized Response Technique: Using Probability Theory to ask Sensitive Questions*, Mathematics Teacher, 73(1980):8, 618-621.

[15] R. Diepgen, W.Kuypers, K.H. Rüdiger: *Mathematik*, Sekundarstufe II. Stochastik, Berlin: Cornelsen 1993, p. 83.

[16] Christoph Drösser: *Csábító számok*, Atheneum Kiadó, Budapest, 2008

[17] Fejes Tóth László: *Regular Figures*, Pergamon Press, 1964

[18] Fodor Ferenc: *The Densest Packing of 19 Congruent Circles in a Circle*, Geometriae Dedicata 74: 139-145, 1999 11.

[19] Marcus Giaquinto: *Visual thinking in mathematics. An epistemological study*, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[20] Peter Galbraith, Werner Blum, George Booker: *Mathematical modelling: teaching and assessment in a technology-rich world*, Horwood Publishing Limited, 1998

[21] Hans-Wolfgang Henn: *Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen oder von guten und von schlechten Modelle*, H. Hischer: Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht, 9-17. old., Franzbecker Verlag, Hildesheim, 2000

[22] Lisei Hannelore, Micula Sanda, Soós Anna: *Probability Theory trough Problems and Applications*, Cluj University Press, Kolozsvár, 2006

[23] K. Krüger: *Ehrliche Antworten auf indiskrete Fragen: Anonymisierung von Umfragen mit der Randomized Response Technik.* - Henn, H.-W., Maaß, K: Materialien für einen realitätsbezogenen MU. Istron-Band 8(2004), 118 - 127.

[24] P. T. Liu, L.P. Chow: *A new discrete quantitative randomized response models for quantitative data*, Journal of the American Statistical Association, 71(1976), 72-73.

[25] Lyn D. English: *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*, Studies in Mathematical Thinking and Learning, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Mahwah, NJ, 1997

[26] Roger B. Nelsen: *Proofs Without Words–Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, 1993

[27] Roger B. Nelsen: *Proofs without words II*, The Mathematical Association of America, 2000

[28] Laura R. Novick, Sean M. Hurley: *To Matrix, Network, or Hierarchy: That Is the Question*, Cognitive Psychology 42, 158-216 (2001)

[29] M. Pantziara, A. Gagatsis, I. Elia: Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems, Educ Stud Math (2009) 72:39-60

[30] Ruszev-Ruszeva: *Matematikai mozaik*, Móra könyvkiadó, Budapest, 1982

[31] Soós Anna: *A valószínűségszámítás elemei*, Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 2001

[32] http://www2.stetson.edu/ efriedma/

[33] Terembecki Csaba: *A Végtelen Világvége Hotel és más történetek*, Kaposvár, 2007

[34] Tuzson Zoltán: *Töltogetéses feladatokról*, Abacus Matematikai Lapok 10-14 éveseknek, 3(1997):6-8

[35] Tuzson Zoltán: *Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat?*, Ábel kiadó, Cluj Napoca, 2005

[36] Stanley L. Warner: *Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias*, Journal of the American Statistical Association, 60(1965), 63- 69.