Rosch, Jens

Mathematik zwischen Dressur und Verstehen. Phänomenologie einer unbehaglichen fachkulturellen Antiquiertheit am Beispiel geometrischer Berechnungen bei PISA

Pädagogische Korrespondenz (2005) 34, S. 52-74

Quellenangabe/ Reference:
Rosch, Jens: Mathematik zwischen Dressur und Verstehen. Phänomenologie einer unbehaglichen fachkulturellen Antiquiertheit am Beispiel geometrischer Berechnungen bei PISA - In: Pädagogische Korrespondenz (2005) 34, S. 52-74 - URN: urn:nbn:de:0111-opus-79797 - DOI: 10.25656/01:7979

https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-opus-79797
https://doi.org/10.25656/01:7979

INHALT

Jens Rosch

Mathematik zwischen Dressur und Verstehen

Phänomenologie einer unbehaglichen fachkulturellen Antiquiertheit am Beispiel geometrischer Berechnungen bei PISA

für J. Marbes

EPIGRAPH

S: Aber wenn ähm wenn ich das so hinschreiben würde, ich glaub dann könnte sie nicht richtig nach verfolgen wie, wie ich darauf komme und äh dann gibt sie mir sie, dann schreibt man den Rechenweg hin, dann gibt sie mir nur die Reste der Punkte für die ( )
L: Echt, ja? Na das sind doch mal ganz andere Probleme. Uns interessiert hier erst mal bloß ob wir das richtige Ergebnis rausfinden können, und ob wir das so aufschreiben können dass wir das selber verstehen, wir beide, jeder von uns beiden, ne? Und das andere ist schon höhere äh Schule, hm. (Zufrieden)?
S: hmhm...
L: Und deine Tränen? Kriege ich ein bisschen schlechtes Gewissen.
S: Mhh.
L: Muss ich die mit ins Bett nehmen, heut?
S: Nein.
L: Gut, beruhigt mich. Haben wir beide was gelernt. Bin stolz auf dich.

(Dialog am Ende einer Lehr-Lern-Sequenz im Rahmen privater Hilfe bei Mathematik)

I

Was ist Mathematik? Was ist Denken? Hat dieses mit jenem etwas zu tun? – Ich weiß nicht mehr, wie das Wetter war, als ich vor fünfundzwanzig Jahren an einem Donnerstag – es muss gerade Frühling gewesen sein – nach der Schule in die Humboldt-Universität fuhr, um dort an einem der wöchentlich stattfindenden Zirkel der Mathematischen Schülergesellschaft teilzunehmen. Ich war damals zwölf. Wir trafen uns seit einem Jahr in regelmäßigen Abständen in einem der intensiv nach altem Holz riechenden Seminarräume Unter den Linden, um uns gemeinsam mit Mathematik zu beschäftigen. Von den anfangs gut zwanzig Kindern kamen nun nur noch zehn bis fünfzehn. Es war Frühling, und ich sollte erstmalig jener Konstellation begegnen, von der ich damals noch nicht wusste, dass sich in ihrem Kontext einst ägyptische

Gottkönige nach dem Abkühlen ihrer Moleküle so bestatten ließen, wie es auf der Berliner Museumsinsel in einigen Schritten Entfernung zu besichtigen war. Mein Zirkelleiter Jürgen Marbes – ein an der damaligen Sektion Mathematik angestellter Hochschullehrer – hatte an die Tafel geschrieben:

»Gleitet ein von einem festen Punkt S des Raumes ausgehender Strahl an den Begrenzungslinien eines ebenen n-Ecks entlang, in dessen Ebene der Ursprung S des Strahls nicht liegt, so beschreibt der gleitende Strahl eine Pyramidenfläche.«[1]

Ich sehe noch lebhaft die Begeisterung der Anwesenden vor mir, das Kreisen der Zeigefinger und die halb verschluckten Laute der Zustimmung. Vor wenigen Minuten noch war die Stimmung im Saal eine ganz andere gewesen, da hatten wir uns mit ratlosen Blicken gefragt, was denn der Marbes eigentlich von uns wolle, ob der noch richtig ticke, ob der etwa noch nie was von Lichtbrechung gehört habe. Zu Anfang der neunzigminütigen Veranstaltung hatte er nämlich an die Tafel geschrieben:

»Gleitet eine Gerade, ohne ihre Richtung zu ändern, im Raum an den Begrenzungslinien eines ebenen n-Ecks entlang, so beschreibt sie eine prismatische Fläche. Schneidet eine Ebene (X1 – Erklärung s.u. – J.R.) diese prismatische Fläche und schneidet eine zur ersten parallele Ebene die Fläche, so entsteht ein Prisma. (Es wird von je einem Stück der parallelen Ebenen und dem dazwischenliegenden Teil der prismatischen Fläche begrenzt.)«[2]

Die ratlose und missbilligende Stimmung wich jedoch einem Staunen, das allmählich in die Ahnung eines Verstehens überging, als einer von uns – mit Namen Georg Hein – anfing, mit Herrn Marbes über die Richtigkeit dieser Sätze zu streiten. Im Ergebnis der recht anregenden Diskussion wurde obiger Text um einen eingeschobenen Nebensatz erweitert, an jener Stelle, die im Text mit X1 markiert ist. Der Einschub lautete:

»X1: die nicht parallel zu einem Flächenstück der prismatischen Fläche ist«[3]

Wenn ich mich recht erinnere, muss es in jenem Frühjahr gewesen sein, dass wir aufhörten, den Betrieb des Motors, durch welchen die schweren Tafeln an der Stirnseite des Seminarraums nach oben oder unten bewegt werden konnten, zu sabotieren: An der Verblendung dieser Tafeln hatte es nämlich zwei Druckknöpfe gegeben – einen für die Bewegung nach oben und einen für die Bewegung nach unten. Drückte man beide Knöpfe gleichzeitig, so flog beim Hausmeister die Sicherung raus.

Nochmals, ganz ernsthaft: Was ist Denken? Und was ist Mathematik?

II

Ein Mathematiker denkt nach: Gegeben sei – knister-knaster, als Sprachfigur – ein Mathematiker, der die mathematisch-konstruktive Begrifflichkeit einer Körperform namens Pyramide in eine Aufgabe zu kleiden versucht. Dann ist folgender Text – klack-klack – denkbar:

»Gegeben seien eine Ebene und ein Punkt P außerhalb dieser Ebene. In der Ebene sei darüber hinaus ein n-Eck fixiert. Gleitet ein Strahl s mit Anfangspunkt P an den Seiten dieses n-Ecks entlang, so heißt der von dem so entstehenden Strahlenbündel und dem n-Eck eingeschlossene Raum Pyramide. Das n-Eck selbst heißt Grundfläche, der gemeinsame Punkt des Strahlenbündels dagegen Spitze der Pyramide.

Außer von der Grundfläche wird eine Pyramide von weiteren Flächenstücken begrenzt. Diese heißen Seitenflächen.

a) Wie viele Seitenflächen hat eine Pyramide?

b) Zeige, dass alle Seitenflächen von gleicher Form sind!

**Zusatzaufgabe[4]: Eine Strecke heißt Kante einer Pyramide, wenn klick ihre beiden Endpunkte Eckpunkte des n-Ecks sind und die Strecke selbst nicht Diagonale dieses n-Ecks oder klack einer der beiden Endpunkte ein Eckpunkt des n-Ecks ist und der andere Endpunkt der Ursprung P des Strahlenbündels {s}. Wie viele Kanten hat eine Pyramide klick-klack ?«*

Folgende Fragen sollen zunächst an diesem Text diskutiert werden:

1. Phänomenologische Annäherung: Ist diese Aufgabe schwer?
2. Aufgabenanalyse: Worin besteht die jeweilige Schwierigkeit der Teilaufgaben a und b?
3. Aufgabenvergleich: Auf welcher Kompetenzstufe wären beide Teilaufgaben im PISA-Mathematiktest jeweils anzusiedeln? Was sind die Kriterien einer solchen Entscheidung?

* Zusatzfrage: Was unterscheidet Zusatzaufgaben von Pflichtaufgaben?

III

In der Therapie mit rechenschwachen Kindern nutze ich von Zeit zu Zeit eine Übung, bei welcher sie einen unsichtbaren geometrischen Körper mit beiden Händen ertasten sollen. Regelmäßig ist da auch eine Pyramide dabei. Ausgehend von ihren Wahrnehmungen sollen die Kinder mit eigenen Worten beschreiben, was ihnen konkret begegnet: Ecken, Kanten, Spitze, Flächen, Rundungen. Sind die Kinder dann sicherer in Bezug auf ihre Worte und Wahrnehmungen geworden, so frage ich auch: Und wie viele Kanten sind es?

Meiner Erfahrung nach haben nach einer gewissen Gewöhnungszeit die meisten Kinder keinerlei Schwierigkeit mehr, diese Frage zu beantworten. Ich kann beobachten, wie sich der Körper für mehrere Sekunden anspannt – manche schließen dabei die Augen – und wie mit den Fingern irgendetwas nicht näher Bestimmbares geschieht: unscheinbare Bewegungen, ein nervöses Zittern (Pappel im Wind). Am Ende eines jeden Durchgangs steht der klar und deutlich ausgesprochene Name. Kommen die Kinder nicht von selbst auf den Namen des Körpers, so stelle ich mich suchend und wiederhole im fragenden Tonfall einer Beschwörung die erste Silbe: »Py-Py-Py« – »Pyramide!« Selbst bei soviel Hilfe ist es für die meisten Kinder noch ein Erfolgserlebnis, wenn sie schließlich den Namen aussprechen können.

Diesen Erfahrungen zufolge sind also am Ende ihrer Grundschulzeit fast alle Kinder in der Lage, in entsprechendem Kontext (meist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche, die sie – für die Augen nicht sichtbar – in den Händen halten) die Frage, in welcher das obige Aufgabenpaket kulminiert, sachgerecht zu beantworten. In Beantwortung der Frage von Aufgabe b würde ein solches Kind – ohne Angst davor, jetzt wieder etwas falsch zu machen – einfach die Pyramide (die immer eine gerade Pyramide ist) ans Licht holen und dann mit Worten oder Gesten auf die Deckungsgleichheit der Seitenflächen verweisen. Na ja, und Aufgabe a ist erst recht »baby-einfach«: Schwerer ist es da schon beim Würfel, da muss man sich nämlich genau merken, welche Flächen man schon gezählt hat und welche noch nicht.[5]

Diese Beschreibung steht wohl in krassem Gegensatz zu dem Eindruck, den die meisten Leser bei einer Erstbegegnung mit der obigen Aufgabe erleiden dürften (oder bereits erlitten haben). Was ist der Grund für diesen Gegensatz?

IV

Der Grund dafür liegt ohne Zweifel in jener zunächst unverständlich erscheinenden Sprache, in welcher die Aufgabe formuliert ist. Das ist die Fachsprache der Mathematik – eine Mischung aus Feststellungen und Bedingungsgefügen: Da gibt es im Prinzip nur Definitionen und Konklusionen. Diese Sprache ist ihrem Selbstverständnis nach streng konstruktiv.[6]

Ein Leser, welcher streng sequentiell an die Interpretation des Aufgabentexts heranginge, hätte schon beim ersten Satz Grund genug, mit seinem pragmatischen Sprachverständnis über das Ausgesagte zu stolpern:

»Gegeben seien eine Ebene und ein Punkt P außerhalb dieser Ebene.«

Da ist etwas gegeben, oder genauer: es soll gegeben sein. (Das ist die optative Bedeutung des Konjunktivs, eine ziemlich komplizierte grammatische Form.) Wer gibt so etwas, und wenn – gibt derjenige es tatsächlich aus der Hand? Etwas aus der Hand geben hieße: es in einen Bereich fremder Verfügbarkeit geben, es freigeben. Da es sich um eine Aufgabe handelt, die wohl mit der vorgefassten Erwartung einer Lösung gestellt wird, so könnte weitergefragt werden: Was kann ich über diese Lösung wissen?

Im vorliegenden Fall müsste ich wissen, dass es sich um eine Mathematikaufgabe handelt. Bei solchen Aufgaben ist oftmals etwas gegeben und etwas gesucht, und um zu der erwarteten Lösung zu gelangen, soll nachgedacht werden.

Zwei Gegenstände also sollen gegeben sein: eine Ebene und ein Punkt. Aber was für eine Ebene, und was für ein Punkt? Und haben die beiden etwas miteinander zu tun? Der am einfachsten vorstellbare Punkt wäre wohl der eigene Standpunkt – da bin ich selbst der Punkt, um den es geht. Die Ebene aber könnte der Boden sein, auf welchem ich stehe – ich schaue mich um: Ist es hier halbwegs eben?

Für den Punkt ist darüber hinaus eine Bedingung gesetzt. (Was ist eine Bedingung? Beispiel: »Gibst du mir deinen Ball?« – »Wenn ich mit deinem Dreirad fahren darf.«)[7] Der Punkt soll sich außerhalb der Ebene befinden, das heißt also: »nicht innerhalb« (Inszenierung eines räumlichen Antonyms: »Bist du im Zimmer?« – »Nein, ich bin draußen.«) Mein Standpunkt und der Boden unter meinen Füßen, aber »außerhalb« – wie kann das sein? Ich lasse den Blick schweifen, blicke beschämt zu Boden, sehe meine Füße – da beginnt es zu dämmern: Wenn ich mir meine eigenen Füße anschauen kann, dann sehe ich ja die Erde von oben. Und meine Augen können sich mit meinen Füßen unterhalten! Ich beginne die Lichtstrahlen zu sehen, die – von meinem Auge ausgesendet – die Füße erreichen, und wenn ich ganz fest an meine

Füße denke, kann ich mir auch die Lichtstrahlen vorstellen, die – von meinen Füßen ausgesendet – zu meinen Augen zurückkehren. (Ein Richtungswechsel: Ich nehme gedanklich den Platz meiner Füße ein, ohne zu vergessen, wo ich als Auge real bin.)[8] Ich bin also mehr als mein Standpunkt. Ich bin zwar immer ich, aber manchmal bin ich auch du. Manchmal.

Nun ist es kein Problem, den Satz folgendermaßen zu interpretieren: »Stell dir vor, du sitzt auf einem Berg. Unter dir liegt ausgebreitet eine Ebene.« Mit diesem Anfang könnten nun auch die folgenden Sätze einen Sinn finden:

»In der Ebene sei darüber hinaus ein n-Eck fixiert.«

Ich ziehe um mich einen Kreis. (Was ist ein n-Eck? Beispiel: ein Quadrat.)[9] Ich stelle mir vor, ich müsste den Kreis schleunigst verlassen, ich sehe eine Fluchtlinie. Doch ich bin noch da, wo ich bin. Ich kann nun also diese Linie auch in meinem Rücken verlängern. Dann sehe ich zwei Schnittpunkte – um den Kreis auf der Fluchtlinie zu verlassen, hätte ich mehr als eine Möglichkeit. Ich werde ruhiger. Ich stelle mich so hin, dass die Linie durch mich hindurch geht: zur rechten und zur linken kann ich die Schnittpunkte sehen. Nun sehe ich vor mir einen weiteren Schnittpunkt, und mit ihm eine zweite Fluchtlinie. Doch ich bin ganz ruhig. Hinter mir weiß ich mit Sicherheit einen vierten Schnittpunkt. (Hoher Aufwand an orientierenden Operationen, um die Symmetrie des als Beispiel gewählten Vierecks zu erzeugen.)[10] Ich bin nun so sicher im Ziehen von Linien und im gedanklichen Aussenden von Strahlen, dass ich das Quadrat, welches die vier Fluchtpunkte in noch unsichtbarer Weise bilden, tatsächlich als Bild vor mir sehe:

»Gleitet ein Strahl s mit Anfangspunkt P an den Seiten dieses n-Ecks entlang, so heißt der von dem so entstehenden Strahlenbündel und dem n-Eck eingeschlossene Raum Pyramide.«

Ich fühle mich wohl in meinem Kreis. Ich bin sicher: Mein Blick vermag quadratisch über den Boden zu gleiten, ohne den Kreis dabei zu verlassen. Ich habe jetzt eine Anschauung. Zugleich habe ich einen mathematischen Begriff davon, was eine (gerade quadratische) Pyramide sein soll: Ich habe eine Definition Schritt für Schritt konstruktiv nachvollzogen.

Mit dieser Anschauung in meinem Erfahrungsschatz kann ich nun ganz sicher sein: Hier wird nicht über Nichts geredet. Der Sinn dieser Worte ist pragmatisch abgesichert. Als Bestandteile der entsprechenden Form, die eine innere und äußere zugleich ist, halte ich begrifflich (im Medium Sprache) wie auch in der Vorstellung (als Raum-Lage-Beziehung) fest:

»Das n-Eck selbst heißt Grundfläche, der gemeinsame Punkt des Strahlenbündels dagegen Spitze der Pyramide.«

Nun hat es mich[11] gepackt: Mathematik als Schöpfung. Ich habe die Kraft, den Dingen Namen zu geben, denn ich kann es sehen: Bam ist ganz unten, Bim ist ganz oben. Ich kann nun aus diesem Kreis heraustreten und mir die Konstellation von der Seite her anschauen, denn ich habe die Fähigkeit erworben, das Dings da anzusprechen: »Bim, Bam!« Und ich verstehe, wenn es mir antwortet: »Von der Spitze zur Grundfläche fällt es schräg ab.« So weiß ich, dass dies noch längst nicht alles ist an sprachlich-konstruktiven Möglichkeiten: O Bem-Bom-Bum! Ich ergreife mit beiden Händen die Spitze des Dinges und lasse mich vorsichtig nach unten gleiten – mit den

Fingern und Ballen meiner Hände drücke ich fest gegen – : den Stein? das Holz? die Tischkante? – das Material. Meine Hände sind beide zwischen Handteller und Fingern abgewinkelt – ich habe Halt, doch gleiten meine Arme auseinander: Das schräge Bem-Bom hängt frei in der Luft und sucht nach – Bum! Aufatmen: endlich wieder festen Boden unter den Füßen.

»Außer von der Grundfläche wird eine Pyramide von weiteren Flächenstücken begrenzt.«

Wenn ich recht drüber nachdenke, so erlöst, mit festem Boden unter den Füßen: Dieses Bem-Bom-Bum war nicht nur einfach schräg, sondern ziemlich schräg – also mindestens doppelt schräg. Ich hatte kurzzeitig das Gefühl, auf die schiefe Bahn ... und ich versuchte, die dramatische Bewegung des Kribbelns (fast eine Pappel im Sturm) mit den Händen in den Griff zu bekommen. Dabei tat sich die erste Schräge auf: Es hat mich so weit auseinander gezerrt, dass ich in der Mitte fast aufgeplatzt wär' – wie'ne reife Schote, zuckersüß! Und eben da bemerkte ich, dass ich mit dem Gesicht auf der Erde liege, fast wie ein Staubfresser (Wechsel der Zeiten und Formen.) Aber ich bin kein Staubfresser, und ich liege nicht auf der Erde. Mein Bauch sagt mir: Das ist nur noch ganz einfach schräg. Ich traf von oben auf Bum, und Bum wird mich von unten halten. Hier stehe ich, aber – es ginge auch anders. Ich lasse mich nach vorn fallen, aber ich falle nicht einfach von oben nach unten – ich falle von hier nach dort. Ich falle ins Bett, und das Bett steht schräg.

Nun sehe ich auch den Geschmack. In meinen Muskeln schlimme Explosionen. Die Pappel ist ein Zuckerbaum, der falsch ernährt wird. Der Sturm kommt aus der Erde, einzig die Bewegung ist eine himmlische Konstellation (Schwung einer Augenbraue). Ich trete zurück und sammle mich. Ich sehe: Dreieckig fällt es vom Himmel herab. Ich beginne das Dings da zu umkreisen – mit meinem nicht auseinander geplatzten Körper messe ich seinen Umfang ab: Aus Bem wird Bom – die passen zusammen wie zwei ausgebreitete Arme, Bum aber ist nur sich selbst gleich – ein Grund (mere).

So kann ich also resümieren: Bim-Bam-Bem-Bom-Bum. Bam ist ganz unten, Bim ist ganz oben. Bim spricht nun (zu Bam.) Und Bim sagt mir, dass wir zu viert das Dings da ganz umfangen könnten: ich und du und du und ich. Aber Bim sagt noch viel mehr. Bim sagt, dass Bam ein Bum-Bum-Bum-Bum ist. O-beo-beo-buh, klack-klick...[12] Das ist die uralte Bam-Bum-Formel vom Ganzen und seinen Teilen: So driften sie durch die Zeiten und Formeln – so umkreiseln sie sich selbst. (Ich bin du wie du ich, aber anders.) Mein Selbst ist ein knisternder knasternder Baum-Zaum. Klick-lick.[13] Bum-beo als die doppelt vierfache Verkörperung alles dessen, was zwischen Bim und Bam ist.

»Diese heißen Seitenflächen.«

Nun mag man von mir sagen: Das ist eine wandelnde Definition. Ich aber bin nur Bim-Bam-beo-Bum. Und beo ist meine Schöpfung, definiert als: Bem oder Bom. Und weil das Definieren so schön ist (ein Schreien, ein Singen), gleich mehr davon: boe ist nicht beo – deshalb hat es Sinn, zu Bem-Bom-Bum klock boe kluck zu sagen. (Kleck-leck, Zunge.)[14] Und auf die Frage nach den Schwierigkeiten darf ich nun antworten:

Weil Bam: Bum-Bum-Bum-Bum, so also Bim-Bam: boe-boe-boe-boe. (Zu viert.)

Weil Bim-Bam: boe-boe-boe-boe. Und jedes boe: Bem-Bom-Bum. So ist boe ein boe in der gleichen Weise, wie boe kein Bam ist. (Bim-Bam-Bum, padam – Edith.)
Verstehst du, was ich meine? (a ist kein b...)

Selbst die Frage der Zusatzaufgabe könnte man nun, ohne sich mit dem definitorischen Vorspann klick und klack allzu sehr abzumühen, aus der hohlen bzw. abgewinkelten Hand heraus schnell und elegant so beantworten:
Bum-Bum-Bum-Bum. Und beo-beo-beo-beo. Das sind zusammen acht. (Akzente.)

V

Vergegenwärtigen wir uns zunächst, was die fünf Kompetenzstufen des PISA-Tests nach Aussage der Testplaner deskriptiv jeweils umfassen sollen:

I Rechnen auf Grundschulniveau,
II Elementare Modellierungen,
III Modellieren und begriffliches Verknüpfen auf dem Niveau der Sekundarstufe I,
IV Umfangreiche Modellierungen auf der Basis anspruchsvoller Begriffe sowie
V Komplexe Modellierung und innermathematisches Argumentieren.

Vergegenwärtigt man sich außerdem den Inhalt, so müssen zu den oben dargelegten Schwierigkeiten für den Spezialfall einer geraden quadratischen Pyramide Überlegungen hinzutreten, die den allgemeinen Fall betreffen. Allgemeiner Fall heißt dabei zweierlei: Erstens muss die Pyramide keine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche sein. Zweitens ist der geometrische Begriff der Grundfläche einer Pyramide an eine Vorstellung von oben und unten gebunden, die nichts mit der Schwerkraft und dem damit in Einklang stehenden Körperschema zu tun hat. Es könnte also im allgemeinen Fall wichtig sein, eine gekippte Pyramide von einer richtig hingestellten zu unterscheiden bzw. jene gedanklich in diese zu überführen.[15]

Damit ist die Schwierigkeit der deskriptiv-analytischen Einordnung eine doppelte: Formal muss bestimmbar sein, was adäquate Reaktionen auf die Anforderung »Zeige...« sein sollen und was nicht. Dieser Entscheidungsaspekt führt auf die logisch gefasste Präskriptivität mathematischen Argumentierens. Dahinter steckt im Kern wohl die Unterscheidung von formalem Aussagen- bzw. Prädikatenkalkül und einer streng pragmatisch zu behandelnden Propositionslogik.[16] Material dagegen ist zu klären, was es bedeuten soll, dass zwei Flächen von gleicher Form sind. Diese Frage wird dann interessant, wenn man nicht nur vom symmetrischen Fall einer geraden Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche ausgeht. Dann nämlich wird die versteckte Unterscheidung von Form- und Deckungsgleichheit produktiv: Obwohl alle Seitenflächen Dreiecke sind, müssen sie nicht paarweise kongruent sein. Zur Gleichheit durch Augenschein tritt ein analytisch-konstruktives Moment hinzu: eine Argumentation.

Man kann hier sehen, dass die Entscheidung darüber, ob beide Teilaufgaben auf der höchsten Kompetenzstufe V oder aber auf einer eher niedrigen Kompetenzstufe (I oder II) eingeordnet werden, stark vom jeweils zugrunde gelegten Handlungskontext der Aufgabe abhängt. Wird der Kontext konkretistisch interpretiert – also unter der Bedingung, die Schüler hätten eine spezielle Pyramide in den Händen – dann lassen sich beide Teilaufgaben auch lösen, wenn der entsprechende Schüler den definierenden Vorspann nicht nachvollzogen[17] hat. Ist bekannt, dass der Schüler schon einmal eine konkrete Pyramide in den Händen hatte, so könnte der Kontext von Aufgabe a sogar in jenem Fall konkretistisch interpretiert werden, da beim Akt des Lösens der Aufgabe gar keine konkrete Pyramide vorhanden ist: dann wäre es nämlich nicht auszuschließen, dass die (subjektive) Erinnerung[18] des Schülers die Rolle des konkreten Gegenstandes übernimmt.

Im Fall der Aufgabe a hinge seine Antwort dann von seinen Vorerfahrungen in Bezug auf die konkrete Gegenständlichkeit und den Begriff einer Pyramide ab. Aus der Antwort »4« könnte geschlussfolgert werden, dass er es bisher nur mit vierseitigen Exemplaren zu tun hatte, was einen Mathematikunterricht gemäß dem Prinzip der Lebensnähe nicht ausschließen muss.[19] Aus einer Antwort der Art »3 oder 4« geht hervor, dass der Schüler bereits über einen allgemeineren Begriff verfügt und auch Tetraeder als Pyramiden erkennen würde. Die letztlich erwartungsgemäße Antwort im Falle der obigen Aufgabe wäre aber »n«. Das ist eine Explikation des allgemeinen Falls. Wie aber wäre folgende Antwort zu beurteilen: »Das hängt von der Grundfläche ab.« – richtig oder falsch? Da die Antwort zweifellos weder falsch noch sinnlos ist, stellt sich hier die Frage nach Kriterien für die Vollständigkeit einer erwarteten Lösung.

Von solchen Kriterien hinge es auch ab zu entscheiden, ob eine konkrete Reaktion auf Aufgabe b richtig (im Sinne von vollständig) ist oder nicht. Spätestens hier lässt sich an der Reaktion ablesen, ob die definierende Einleitung wirklich verstanden wurde. Bei dieser Teilaufgabe handelt es sich fraglos um eine ziemlich anspruchsvolle Aufgabe, deren Lösung wohl v.a. an eine grundlegende Dynamik der Vorstellung (Flexibilität) und der Sprache (Logik) gebunden ist.

Für die Zusatzaufgabe wiederholt sich diese Konstellation im Ganzen. Eine konkretistische Interpretation ist aber hier eher unwahrscheinlich: zum einen, weil Vorspann und Frage nicht deutlich voneinander getrennt sind; zum anderen, weil ein sequentiell vorgehender Leser hier die strukturelle Konstellation der vorangegangenen Aufgaben wiederzuerkennen genötigt wird – allerdings auf höherer Stufe. Die logische Alternative drückt zusätzlich aus, dass es sich um eine kompliziertere formale Struktur handelt.

Da eine Zusatzaufgabe aber keine Pflichtaufgabe ist, wird sich ihr nur nähern, wer bis dahin »ein gutes Gefühl für Pyramiden« entwickelt hat. Die Gefahr einer möglichen Überforderung wird also durch den Anreiz, eine ungewöhnliche Erfahrung zu machen, überlagert. Die letzte Entscheidung über eine pragmatische Unterstellung von Sinn liegt aber beim Rezipienten.

VI

Man kann sich der Frage nach der Bedeutung von Kompetenzhierarchien von zwei Seiten her nähern. Zunächst wurde versucht, den jeweiligen Begriffsinhalt extensional zu bestimmen. Im nächsten Schritt soll versucht werden herauszufinden, was die heuristische (bzw. latente) Logik der Testplaner von PISA bei ihrer Unterscheidung von fünf Stufen gewesen sein muss. Dies wird an einem Aufgabenbündel zur ebenen und räumlichen Geometrie erfolgen, in welchem material nicht nur die Unterscheidung von Körper- und Flächenformen am Beispiel von Quadrat, Rechteck, Dreieck einerseits und Pyramide andererseits zentral ist, sondern formal auch der Unterschied zwischen Sehen und Erklären[20] konstitutiv wird. Danach kann im Gegenzug – ausgehend von der oben vorgestellten Aufgabenanalyse – die Frage nach einem sachlich fundierten Realitätsgehalt der Stufenhierarchie gestellt und ausdifferenziert werden.

In dem vom PISA-Konsortium herausgegebenen Sammelband[21] findet sich für den Fall mathematischer Grundbildung (Kap. 3) eine Explikation der o.g. Kompetenzstufen am Beispiel geometrischer Aufgaben aus dem nationalen und internationalen PISA-Test 2000. Auf Kompetenzstufe V sollen die Schüler über anspruchsvolles curriculares Wissen verfügen und dieses flexibel einsetzen können. Sie sollen in der Lage sein, Begründungen und Beweise zu geben und über Modellbildungsprozesse zu reflektieren.[22] In Abgrenzung zur Kompetenzstufe IV, auf welcher von den Schülern bereits umfangreiche Verarbeitungsprozesse »im technischen Bereich« geleistet werden können und der Anforderung nach Problemlösungen »über mehrere Zwischenschritte hinweg« aufgebaut werden sollen, handelt es sich dabei vor allem um Flexibilität beim Umgang mit Inhalten sowie um die Fähigkeit zum mathematischen Argumentieren und zur Reflexion dessen, was man bei der Verwendung eines bestimmten mathematischen Modells eigentlich getan hat. Im Kern sind das alles Anforderungen im metakognitiven Bereich. Darüber hinaus gehört aber sachlich auch eine Reflexion auf die Gültigkeit getroffener Aussagen hinzu.

Schauen wir uns nun eine Geometrieaufgabe an, die der Kompetenzstufe V zugeordnet ist:

»Pyramide

Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat. Jede Kante der skizzierten Pyramide misst 12 cm. (Rechts neben dem Text findet sich die Skizze einer geraden quadratischen Pyramide in Kavalierperspektive mit jeweiliger Bezeichnung der Eckpunkte der Grundfläche ABCD sowie der Spitze S. Außer dem Hinweis, das Bild sei nicht maßgenau, ist neben drei Kantendarstellungen das Längenmaß 12 cm eingetragen. – Erklärung J.R.)[23] *Bestimme den Flächeninhalt einer der dreieckigen Seitenflächen. Erkläre, wie du deine Antwort gefunden hast.«*[24]

Bereits auf den ersten Blick weist die Formulierung der Aufgabe gravierende Ungenauigkeiten auf. So ist der einleitende indikativische Satz vom textlinguistischen Standpunkt aus missverständlich: Bezieht sich der Satz auf eine konkrete Pyramide oder auf die Pyramide im allgemeinen? Im vorauszusetzenden Sinnbezug zur Überschrift des Textes ist der Kontext als ein allgemeiner zu interpretieren: Es kann sich nicht um eine bestimmte Pyramide handeln, denn die Überschrift lautet nicht: »Eine Pyramide«. Die Grundfläche einer solchen allgemeinen Pyramide ist aber gerade kein Quadrat, sondern ein n-Eck. Nimmt man den Satz im Kontext der Überschrift ernst, so sagt er nichts anderes aus als: Die Grundfläche einer beliebigen Pyramide ist immer ein Quadrat. Diese Lesart entspricht der in der Mathematik als wissenschaftlicher Disziplin üblichen Interpretation indikativischer Sätze als Aussagen mit Wahrheitswert. Dieser vom textlinguistischen Standpunkt aus bereits missverständliche Satz erweist sich also vom mathematischen Standpunkt aus als schlichtweg falsch.

Versuchen wir zu rekonstruieren, wie ein beim (sequentiellen) Lesen des Textes in eine Verständniskrise geratener Interpret mit seiner Verwirrung umgehen könnte. Er könnte angesichts der im Rahmen des Tests streng bemessenen Zeit schnell zur nächsten Aufgabe übergehen und das Gelesene als unverständlich abtun – dann hätte er im Test für die obige Aufgabe empirisch das Ergebnis »nicht gelöst« erzeugt. Er könnte sich aber auch (gleich oder später) das Artefakt der Aufgabe noch einmal vornehmen und versuchen, seine Verwirrung zu objektivieren. Interpretiert er die nicht maßgenaue Skizze im Widerspruch zur Überschrift als Aufforderung, den Kontext statt als mathematisch-allgemeinen konkretistisch nach der Konstellation des Bildes zu interpretieren, so käme er auf der Bedeutungsebene einer linguistischen Tiefenstruktur per Vertauschung der Reihenfolge möglicherweise zur gedanklichen Umwandlung des ersten Satzes in folgende erweiterte Form:

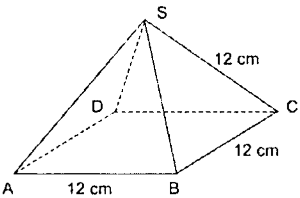
»Gegeben sei eine gerade quadratische Pyramide.«

Die damit unter Beweis gestellte Kompetenz ist aber gerade keine spezifisch-mathematische, sondern eine sprachlich-allgemeine. Auf der Performanzebene ist diese im Rahmen von Chomskys Konzeption als Sprachkompetenz zu interpretierende Fähigkeit dann allerdings an ziemlich spezielle Verhaltensdispositionen gebunden (Frustrationstoleranz, Selbstvertrauen, sachliches Interesse). Zusätzlich zu diesen Dispositionen wäre aber zumindest vorauszusetzen, dass der Interpret nicht nur mit der sprachlichen Form des Konjunktivs in optativer Bedeutung vertraut ist, sondern die entsprechende konjunktivische Verwendung im Kontext von Mathematik als sprachliches Ausdrucksmittel zur Exposition eines Gedankenexperiments interpretieren kann.

Ein Schüler dagegen, der den Aufgabentext so ernst nimmt, wie mathematische Formeln prinzipiell gemeint sind, wird in eine schizoide Konstellation getrieben: Soll ich jetzt die Sprache so ernst nehmen, wie ich es für dieses Sinnmedium in anderen Kontexten gewohnt bin, oder handelt es sich hier (wieder einmal) nur um »diese in ihren Ansprüchen prinzipiell unverständliche« Mathematik? Er geriete in eine Verständniskrise, allerdings im Gegensatz zur auswertenden Interpretation der Testplaner nicht aufgrund mangelnder Fähigkeiten zum innermathematischen Argumentieren, sondern als Ausdruck eines von ihm theoretisch erwarteten, praktisch aber nicht zu leistenden Brückenschlags zwischen logisch konkret gegliederter (und gliedernder) Sprache einerseits und abstrakt gebliebener Mathematik andererseits. Dass die Testergebnisse von PISA in solch einem Kontext der Interpretation dennoch etwas über den zugrunde liegenden Mathematikunterricht aussagen, soll hier nicht bestritten werden. Die Frage ist nur: Was?

Gravierender als die bislang vorgetragenen Argumente zur Kritik einer einzelnen Kompetenzstufe schlägt nämlich ein anderer Umstand zu Buche: Die Aufgaben sind zu Paketen gebündelt. Beispielsweise stammt der bisher analysierte Text aus einem Aufgabenpaket, das unter der bereits gewürdigten Überschrift »Pyramide« zwei Aufgaben kontextuell zusammenschnürt, die unterschiedlichen Kompetenzstufen zugeordnet sind:

Pyramide
Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat.
Jede Kante der skizzierten Pyramide misst 12 cm.



2 Bestimme den Flächeninhalt einer der dreieckigen Seitenflächen. Erkläre, wie du deine Antwort gefunden hast.

1 Berechne den Flächeninhalt der Grundfläche ABCD.

(Bild nicht maßgenau!)

Abb.: PISA-Konsortium, S. 152

Wie man sieht, besteht das ganze Paket nicht nur aus den beiden Aufgabenstellungen selbst, sondern zusätzlich aus einer Überschrift und einem einleitenden Text, der Exposition des übergreifenden mathematischen Kontexts. Genau diesem Textsegment entstammt der bisher als für das Verständnis hochgradig ambivalent aufgezeigte Satz. Wenn aber nun bereits bei der Interpretation dieses einleitenden Satzes Verständnisschwierigkeiten auftreten, wie soll dann zwischen den Schwierigkeiten beim Lösen jeder der beiden Einzelaufgaben unterschieden werden? Verteidiger des Konzepts der Kompetenzstufen dürften an dieser Stelle prüfstatistische Argumente aus der Tasche ziehen, ohne allerdings auf diese Weise das Argument hinter der Frage entkräften zu können, was denn wäre, wenn ein signifikanter Anteil der im Test verwendeten Aufgabenpakete mit genau diesem Mangel behaftet wäre. Streng genommen könnte ein solcher Zweifel erst in jenem Augenblick argumentativ zerstreut werden, da hinreichend viele Einzelaufgaben in ihren entsprechenden Paketen auf dem Tisch liegen und analysiert werden können.

Im vorliegenden Text geht es jedoch zunächst um wenige Einzelaufgaben und die Frage, was ein Schüler zu deren Lösung wissen, können und verstehen muss. Und da bleiben noch einige Unstimmigkeiten aufzuklären. Nehmen wir an, ein nicht nur gutwilliger, sondern darüber hinaus der Sprache und der Mathematik gleichermaßen mächtiger Fünfzehnjähriger (ein Kandidat für Kompetenzstufe V) hätte den ersten Satz in dem oben angegebenen mathematischen Sinne interpretiert. Dann wäre ihm klar geworden, dass einerseits in der Überschrift ein Fehler hinsichtlich der Determination des Substantivs vorliegt[25] und andererseits im ersten Satz nicht eine beliebige, sondern genau die nebenstehend skizzierte gerade quadratische Pyramide gemeint sein muss. Dann könnte er abduktiv weiter lesen:

»Die Grundfläche dieser Pyramide ist ein Quadrat.«

Das ist in der nun auf Probe (also bis zur Falsifikation) verfolgten Lesart redundant. Ein Mathematiker könnte sagen: nicht schön, aber wenigstens nicht falsch. Ein Schüler dagegen mag denken: Ja und? Kommt da jetzt noch irgendeine Information, die ich für das Lösen der Aufgabe brauche, oder handelt es sich (wieder nur) um ein Verwirrspiel?

»Jede Kante der skizzierten Pyramide mißt 12 cm.«

Ah ja: Jede der acht Kanten der Pyramide soll 12 cm lang sein. Aber ist das noch die gleiche Pyramide wie die, an welche ich hier (nach Überwindung der Irritation) denke? Entweder dieses Bild hat den gleichen semiotischen Status zum Zwecke des

Ausdrucks von Realität wie die Sprache oder es hat ihn nicht. Im ersten Fall, auf dessen Voraussetzung meine Krisenlösung ja gerade basierte, kann es keinen Unterschied zwischen der gedachten (idealen) Pyramide und dem Bild geben, so wie es auch keinen Unterschied zwischen dem Wort Pyramide und der gedachten Idealität gibt. Dann wäre aber die Rede von »der skizzierten Pyramide« schlichtweg unsinnig. (Oder soll etwa von mir eine eigene Skizze im Zuge der Lösung angefertigt werden? Dann müsste aber grammatisch von »der zu skizzierenden Pyramide« die Rede sein, was offensichtlich nicht der Fall ist.) Im anderen Fall aber ist meiner wohlmeinenden Lösung der Verständniskrise der sachliche Grund entzogen: Wenn ein Bild im Text keine bedeutungsgenerierende, sondern eine rein illustrative Funktion haben soll, dann kann ich es nicht als konkretisierenden Ausdruck einer gemeinten objektiven Realität dieser Aufgabe interpretieren. So wie Wahrheit in der Mathematik bewiesen werden muss[26], was nach Übereinkunft der Mathematiker im logischen Schema von Voraussetzung, Behauptung und Beweis zu geschehen hat, so wäre auch der Aufgabentext als solcher im Detail – und das heißt, mit der Unterscheidung von illustrierendem Bild und definierender Sprache – ernst zu nehmen.[27]

Es ist wichtig, hier an Fußnote 16 zu erinnern und zwischen der Lesart eines Mathematikers und der eines Schülers zu unterscheiden. Ein Schüler, der im Rahmen eines Tests mit dieser Aufgabe konfrontiert wird, mag sich über die Unsinnigkeit des bisher gelesenen Textes wundern, letzten Endes aber wird er aufgrund eigener Lebenserfahrung genau wissen, dass in einer Situation, in der Leistungen gemessen werden, von ihm etwas anderes erwartet wird als die Artikulation bloßen Missverstehens. Er wird pragmatisch reagieren und aufgrund einer Gestalterwartung für Tests versuchen, die Widersprüche »zu heilen«[28]: Wenn ich den Text nicht verstehe, dann schaue ich mir das Bild an! Was soll denn hier ausgerechnet werden?

In einer sequentiellen Wahrnehmung, welche die Nummerierung der Aufgaben ernster nimmt als die Reihenfolge der Worte und Sätze[29], käme nun:

»Berechne den Flächeninhalt der Grundfläche ABCD.«

Um dies auf der Grundlage der Abbildung zu tun, muss diese Darstellung einer Pyramide als Kavalierperspektive interpretiert werden. Dann könnte aufgrund der Parallelität der gegenüberliegenden Kanten die Vermutung entstehen, dass es sich bei der Grundfläche um ein Rechteck handelt. Die eingetragenen Kantenmaße mögen dann aus diesem Rechteck auf definitorische Weise ein Quadrat werden lassen, dessen Flächeninhalt nach einer Formel als 12 cm * 12 cm = 144 cm^2 bestimmbar ist. Voraussetzung dafür sind aber eine prinzipielle Vertrautheit mit entsprechenden perspektivischen Darstellungen geometrischer Körper sowie ein Begriff von Grundfläche. Als versteckte Erwartung der Testkonstrukteure findet sich, dass visuelle Darstellungen ernster zu nehmen sind als Texte.

Für die Lösung der anderen Teilaufgabe ist dann aber wieder ein größerer Aufwand an sprachlichem Verständnis erforderlich:

»Bestimme den Flächeninhalt einer der dreieckigen Seitenflächen. Erkläre, wie du deine Antwort gefunden hast.«

Hier nun soll nicht nur ein Flächeninhalt berechnet, hier soll einer bestimmt werden. Man müsste sich also zunächst für eine der vier Seitenflächen entscheiden: Berechne ich nun den Flächeninhalt von Dreieck ABS, von Dreieck BCS, CDS oder von Dreieck DAS?[30] Wird keine Seitenfläche spezifiziert, so müsste sich in einer mathematischen Argumentation zumindest ein Hinweis auf die Kongruenz der Seitenflächen finden. Insofern geht es bei dieser Aufgabe formal tatsächlich um Reflexion von Modellbildungsprozessen und material neben Körper- und Flächenformen auch um Kongruenzsätze. Die Modellierungsleistung selbst, die von den Testplanern als komplex bezeichnet wird, besteht dann darin, in einem gleichseitigen Dreieck die Höhe zu bestimmen und nach einer Formel dessen Flächeninhalt auszurechnen.[31] Außerdem soll der beschrittene Denkweg erklärt werden – eine Anforderung, die auf einen gut präparierten Schüler als Adressaten verweist.

Außer der Lesart eines leistungsmotivierten Schülers bleibt indes noch die des Mathematikers. Und da ist zu konstatieren, dass jemand, der trotz logischer Widersprüche in der Formulierung einer Aufgabe – ohne zu stolpern – weiterliest und losrechnet, nicht verstanden hat, was Mathematik ist. Derjenige mag mit Hilfe von auswendig gewussten Formeln Längen oder Flächeninhalte bestimmen bzw. mittels logischer Konjunktionen einen inneren Zusammenhang seines Treibens hinsichtlich der Reihenfolge und Genauigkeit von einzelnen Rechenschritten beschwören, die Gültigkeitsbedingungen seines Tuns aber hätte er nicht einmal im sprachlichen Mikrokontext einer einzelnen Aufgabe auf logisch konsistente Weise reflektiert.

VII

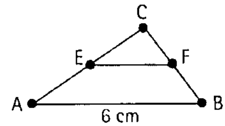
Die bisherige Analyse lieferte bezüglich der Frage, über welche Fähigkeiten ein Schüler verfügen muss, um die PISA-Aufgaben zum Thema »Pyramide« erfolgreich zu bearbeiten, den folgenden grundlegenden Befund: Neben gewissen mathematischen Operationen wie Kennen und Anwenden einer Formel, Ausführen von numerischen (und algebraischen) Berechnungen oder Vorstellen und Darstellen von Handlungs- bzw. Argumentationsketten kommt es bei der Bewältigung der Anforderungen des Tests v.a. darauf an, einerseits Bilder ernst zu nehmen und andererseits Widersprüche zwischen bildlichen und sprachlichen Darstellungen zu ignorieren.

Schauen wir uns nun an, wie weit diese prinzipielle Unterscheidung zwischen formelhaft operierender Mathematik und erklärender Feststellung von Beziehungen per Augenschein für die Analyse weiterer PISA-Aufgaben zur Geometrie trägt. Die folgende Aufgabe ist der Kompetenzstufe IV zugeordnet:

Nach dem bisher Gesagten sind für eine Interpretation der Aufgabenanforderung durch einen Schüler in der Situation eines Leistungstests zwei verschiedene Strategien möglich: Er könnte versuchen, den Text sequentiell zu interpretieren, oder er könnte sich schnell dem Bild zuwenden und versuchen, per Anschauung eine Aufgabe zu erkennen und zu lösen. Im ersten Fall wird der Schüler mit ähnlichen Widersprüchen konfrontiert werden wie bei den Aufgaben zum Thema Pyramide. Versuchen wir, eine mögliche Schülersicht für den anderen Fall zu rekonstruieren.

Ich habe also den Text nur »visuell gescannt« und bin dabei ohne Strukturbildung in der Vorstellung von der Überschrift direkt zum Fragezeichen am Textende gelangt. Als visuelle Gestalt ist dieses Fragezeichen nicht von der sich unmittelbar links von ihm befindlichen Bezeichnung der Länge der Strecke EF getrennt. Da ich diese Kon-

Dreieck
Die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC ist 6 cm lang. Es werden die Mittelpunkte E und F der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eingezeichnet. Wie lang ist $\overline{EF}$?



(Bild nicht maßgenau)

vention kenne, gehe ich sofort zum Bild über und erkenne: Im Innern eines großen Dreiecks ABC sind ein kleines Dreieck EFC und ein Trapez ABFE eingezeichnet. Nun kann ich das Fragezeichen so interpretieren, dass hier wohl die Länge der Strecke EF bestimmt werden soll. Ich bin unsicher, aber ein sich vergewissernder Blick nach links bestätigt mit einer einheitlichen visuellen Wahrnehmung diese Vermutung – ich sehe den letzten Satz des Textes als Gesamtgestalt.

Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten: Ein Schüler, der über »eine gute Beziehung zum Strahlensatz« verfügt oder für den der Begriff »Ähnlichkeit von Dreiecken etwas quantitativ Bestimmbares« bedeutet, könnte aus der visuellen Konstellation, dass E der Mittelpunkt der Strecke AC zu sein scheint und F der Mittelpunkt der Strecke BC, schlussfolgern, dass die Strecke EF dann wohl halb so lang sein muss wie die Strecke AB. Da im Bild auch noch die Länge der letzteren bezeichnet ist, kommt er schnell zum Ergebnis »3 cm«. [32]

Verfügt er nicht über diese Beziehung oder dieses assoziativ aufscheinende Wissen, so könnte er auf dem Wege der Selbstvergewisserung dennoch zu einer Beantwortung der Frage per Augenschein (also in nichtsequentieller Weise – vorausgesetzt, die Frage wurde erkannt) gelangen, wenn er nämlich die folgenden Hilfslinien real oder in der Vorstellung in das Bild einzeichnete:

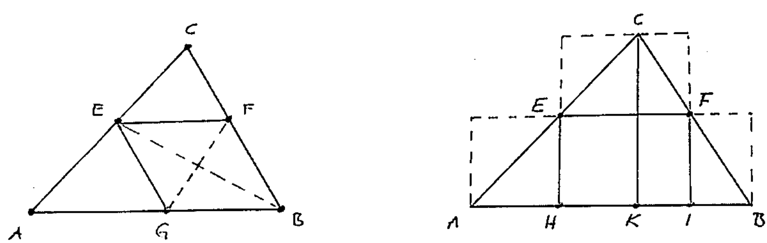


Abb.: bildliche Darstellungen mit einer und mit drei Hilfslinien

Um beispielsweise zu erkennen, dass G der Mittelpunkt der Strecke AB ist, wäre eine Dynamisierung zweier Einzelwahrnehmungen innerhalb einer Gesamtgestalt zu leisten: Das aus dem Trapez ABFE entstehende Parallelogramm GBFE legt eine gedankliche Verschiebung der Strecke GB auf die Strecke EF nahe, und wenn erkannt wird, dass dieser Verschiebungsprozess »um die Ecke herum« weitergeführt werden kann, so dass nämlich die Strecke EF auf der Strecke AG »zu liegen kommt«, dann wäre die Längengleichheit der Strecken AG, GB und EF tatsächlich rein visuell erkannt.[33]

Kommt ein Schüler auf die Idee, mit Hilfe eines (durchsichtigen) Lineals eine parallele Linie wie EG einzuzeichnen (oder sich eine solche Linie auch nur vorzustellen), so liegt für ihn die Intuition der Verdopplung der Strecke EF in der Strecke AB jedenfalls ziemlich nahe. (Eine Gestaltvorstellung.) Das setzt eine prinzipielle Vertrautheit mit Schiefsein voraus. Bevorzugt er dagegen senkrechte Hilfslinien als Grundgestalt, so führte das auf eine Verdreifachung der bildlich-linearen Komplexität in der Vorstellung, wenn die Lösung »gesehen« werden soll. In beiden Fällen aber hätte er die gegebene Konstellation zusätzlich strukturiert.

Ein Schüler, der das gegebene Bild dagegen nicht in der Vorstellung ergänzt, sondern anhand der Ausgangsgestalt versucht, die Länge der Strecke EF intuitiv (in nichtsequentieller Weise) zu bestimmen, z.B. auf der Grundlage einer Schätzung, wird visuell nicht zu der Vermutung geleitet, die Strecke EF sei halb so lang wie die Strecke AB.

Kurz gesagt: Eine primär visuelle Interpretation führt auf vergleichbare Schwierigkeiten wie eine sprachlich-sequentielle Interpretation. (Letztere wird hier nicht entfaltet, da ihr Ergebnis für den weiteren Gang der Argumentation nichts Überraschendes enthält.)

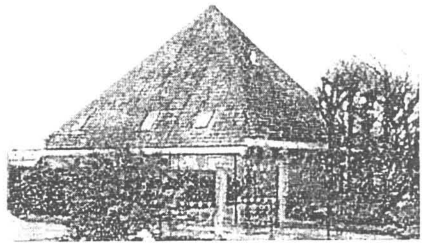
Insgesamt ist festzuhalten, dass es sich bei dieser Aufgabe um eine eher traditionelle Mathematikaufgabe handelt. Um die Lösung zu erkennen, muss man entweder über bestimmtes Wissen verfügen oder aber in der Lage sein, auf komplexe Weise zu sehen.[34] Im Unterschied zur PISA-Aufgabe »Pyramide« spielt sich diese Art des Sehens jedoch nicht im Raum, sondern nur in der Ebene ab. Der in die mathematische Modellierung einbezogene Anschauungsraum ist also nicht der dreidimensionale Raum unserer Körpererfahrungen, sondern »nur« das Blatt Papier als Untergrund geometrischer Konstruktionen.

VIII

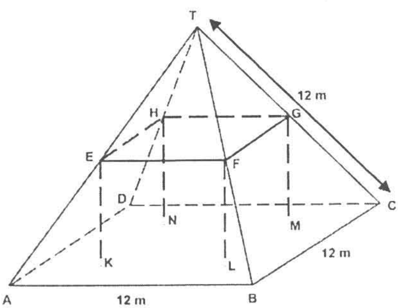
Anders liegen die Dinge im Falle des Aufgabenpakets, welches von den PISA-Planern unter der Überschrift »Bauernhöfe« präsentiert wird:

Bauernhöfe

Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses mit pyramidenförmigem Dach.



Nachfolgend siehst du eine Skizze mit den entsprechenden Maßen, die eine Schülerin vom **Dach** des Bauernhauses gezeichnet hat.



Der Dachboden, in der Skizze ABCD, ist ein Quadrat. Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten des Quaders (rechtwinkliges Prisma) EFGHKLMN. E ist die Mitte von $\overline{AT}$, F ist die Mitte von $\overline{BT}$, G ist die Mitte von $\overline{CT}$ und H ist die Mitte von $\overline{DT}$. Jede Kante der Pyramide in der Skizze misst 12 m.

2 Berechne die Länge von $\overline{EF}$, einer der waagerechten Kanten des Quaders.

Die Länge von $\overline{EF}$ = ______ m

1 Berechne den Flächeninhalt des Dachbodens ABCD.

Der Flächeninhalt des Dachbodens ABCD = ______ m^2

Die Aufgabe wirkt ihrer äußeren Form nach sehr komplex strukturiert. Hier scheint ein Rezipient geradezu dazu aufgefordert zu werden, die für Sprache so typische sequentielle Wahrnehmungsgewohnheit abzulegen und sich einen eigenen Reim auf das Ganze zu machen. Versuchen wir also in Analogie zur PISA-Aufgabe »Dreieck«, auch hier eine möglichst bildbestimmte naive Rezeption des in einem Testkontext angesiedelten Artefakts einer Mathematikaufgabe zu simulieren. Der Fokus der folgenden rekonstruktiven Bemühungen liegt im Versuch, diese Aufgabe möglichst intuitiv, ohne explizite Bezugnahme auf fachlich-mathematische Inhalte oder Argumentationsweisen zu lösen. Das Rekonstruktionsinteresse geht dabei nicht so sehr in die Richtung möglicher Gründe für ein Scheitern an der Aufgabe, sondern zielt auf pragmatische Minimalbedingungen für Erfolg.[35] Vielleicht vermag uns dieses selbstbeschränkende Vorgehen einer Antwort auf die in Fußnote 16 angedeutete Frage näher zu bringen, wo denn die Grenze zwischen Mathematik und Pragmatik zunächst praktisch, in der Perspektive aber natürlich auch theoretisch gezogen werden könnte.

Nach Wahrnehmung der Überschrift wird der Blick sofort von dem daneben befindlichen Photo angezogen: einem Spitzdach ohne Sattel. Dann könnte ein Reiseprospekt mit Cheopspyramide assoziiert werden, kaum erkennbare Bäume würden diese farblich differenzierte Vorstellung nur geringfügig irritieren.[36] Wie zur Bestätigung schweift der Blick sodann weiter und trifft auf die Abbildung einer Pyramide in Kavalierperspektive. Im Innern dieser Pyramide ist ein würfelähnlicher Block zu erkennen. (Hat da jemand ein Zimmer auf dem Dachboden? Vielleicht ein bescheiden gewordener Cheops ...) Worum geht es bei dieser Aufgabe – was soll hier gerechnet werden?

Die Fragen sind wie immer nummeriert. (Was rechne ich heute zuerst, zweitens oder erstens? Ach, ich fange heute einfach mal mit zweitens an!) Ich überfliege den Aufgabentext und stoße auf den entscheidenden Satz:

»Die Länge von EF = _____ m«

Hinterm Gleichheitszeichen ist also wie immer etwas einzutragen: Wie breit ist dieses Zimmer da auf dem Dachboden?

Ich sehe die Zahlen in der Zeichnung: ein Maß von 12 m nach allen Richtungen. Sogar die Schräge mit doppeltem Pfeil soll 12 m lang sein – sieht eigentlich gar nicht so aus. (Kann denn eine schräge Linie länger aussehen als die, auf welche ich gerade von vorn blicke? Ach, was soll's, immerhin stehen ja da Zahlen dran – also die Strecken AB und AT sind definitiv gleich lang! Das ist ja nur eine Zeichnung ...) Die wollen also wissen, wie lang EF definitiv ist. Das soll ich eintragen. Ich würde sagen, das liegt auf halber Höhe. Also muss es ja auch halb so lang sein – sieht man doch! Halbe-Halbe, oder? (Aber ist das wirklich so? Meistens stimmt das ja gerade nicht, in Mathe, wenn's so einfach aussieht. An den anderen Bildern stand extra dran, dass es nicht maßgenau ist, aber hier steht's nun nicht dran.) Hm, ich messe einfach mal nach. (Linien, auf die ich gerade von vorn gucke, werden perspektivisch nicht verkürzt.) Und: es stimmt! Die Strecke AB ist wirklich doppelt so lang wie die Strecke EF. (Tja, es gibt also tatsächlich in Mathetests Aufgaben, bei denen es so ist, wie man zuerst denken würde. Bevor man richtig anfängt.)

Schön, und jetzt noch erstens – da ist wieder dieser Strich, wo etwas eingetragen werden soll:

»Der Flächeninhalt des Dachbodens ABCD = _____ m²«

Wo hier der Dachboden sein soll, ist klar, aber was war nochmal dieser Flächeninhalt? Hm, plus oder mal? (Diese »2« schräg überm »m« bedeutet mal – das hab ich mir gemerkt, als meine Mutter so ewig lang mit mir geübt hat.) Ich rechne einfach mal: 12 * 12 = 144.

Um es kurz zusammenzufassen: Die im Aufgabenpaket »Pyramide« festgestellte Ambivalenz des Einleitungstexts wiederholt sich im Aufgabenpaket »Bauerhöfe« nicht. Der Kontext wird von vornherein konkretistisch eingeführt. Zwei Bilder verweisen figurativ aufeinander und erzeugen mit dem Unterschied zwischen einem Photo und einer Skizze visuelle Redundanz.[37] Möglicher Zweifel hinsichtlich des

Realitätsgehalts der Skizze aufgrund wahrzunehmender Inkonsistenzen zwischen Streckenlängen und Maßangaben wird durch den pragmatischen Status eines Photos als bildlicher Wiedergabe von objektiver Realität in intuitiver (also nicht argumentationshaltiger) Weise ausgeblendet. Dafür aber ist es möglich, die Aufgabe rein intuitiv zu lösen: ohne explizit sprachliche Operationen.

Ist das mathematische Literalität?

IX
Fazit

Eine Erstanalyse von sechs internationalen und nationalen Geometrieaufgaben aus dem PISA-Mathematiktest legt folgende Einschätzung nahe:

Die Aufgaben der Kompetenzstufen I bis III entsprechen einem mathematisch kaum differenzierten Niveau von Verständnis (4 Aufgaben). Auf Stufe III werden vor allem intuitive Strategien visueller Bildverarbeitung getestet. Auf Stufe II dagegen muss ein geometrischer Begriff mit einer bestimmten Rechenoperation verbunden werden können.

Die beiden den Kompetenzstufen IV und V zugeordneten Aufgaben erfordern zu ihrer erfolgreichen Bearbeitung spezifisch-geometrische Operationen. Auf Stufe IV reicht es, über intuitives Spezialwissen zu verfügen. Eine Anwendung dieses Wissens im visuell vermittelten Kontext erfordert jedoch ein strukturiertes Verständnis der Sache.

Doch selbst auf Stufe V kann von strenger Rationalität keine Rede sein. Gravierende Inkonsistenzen in der sprachlichen Formulierung der Aufgabe müssen ausgehalten und ignoriert werden können. Im operativen Bereich ist eine Verbindung von Akten der Vorstellung auf der Basis einer spezifischen visuellen Darstellung mit algebraisch-abstrakten Operationen, wie sie für den curricularen Zielhorizont der Sekundarstufe I typisch sind, erforderlich. Inwieweit für die Lösung der Aufgabe eine mathematische Argumentation erforderlich ist, hängt vom Erwartungshorizont der für die Planung und Auswertung zuständigen Personen ab und ist aus der bloßen sprachlichen Form des analysierten Artefakts nicht ersichtlich.

Auf diese Weise interpretiert, wird im Falle der vorliegenden Aufgaben in der Tat ein völlig neues Verständnis von Bildung sichtbar. Danach käme es im visuellen Zeitalter nicht so sehr darauf an, Aussagen kritisch auf ihre Gültigkeit hin zu befragen – stattdessen ginge es um eine möglichst schnelle numerische Auswertung des unmittelbaren Augenscheins. Dies als »mathematische Grundbildung« zu bezeichnen, ignorierte nicht nur eine ganze und eigene Tradition philosophischen Denkens (in welche sich Mathematik selbst bis vor hundert Jahren noch gestellt sah), sondern dürfte auch so manchem heute lebenden Mathematiker schlechte Träume bescheren.

Nimmt man die Ergebnisse von PISA vor dem Hintergrund obiger Analyse zumindest insoweit ernst, wie es die Daten zu den mathematisch anspruchsvolleren Aufgaben (Stufen IV und V der PISA-Planer) betrifft, so ergibt sich dennoch ein vernichtendes Bild für den Mathematikunterricht in Deutschland. Führt man sich die Zielkataloge der Curricula für Mathematik in der Sekundarstufe I vor Augen, so kann man ziemlich konkret sehen, an welchen Anforderungen mehr als die Hälfte der Schüler scheitern. Lehrplanformulierungen in Bezug auf Wissen, Können und Verstehen erweisen sich dann als selbsthypnotisierende Formeln einer anspruchslosen Praxis zur Aufrechterhaltung des Betriebs.

Dem auf die Veröffentlichung der PISA-Ergebnisse folgenden Aktivismus scheinen keine Grenzen gesetzt. Als einzelnes Beispiel für eine Vielzahl von Fällen mag eine vom Bildungsministerium Rheinland-Pfalz herausgegebene Schrift mit dem Titel »Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht – angeregt durch TIMSS und PISA« dienen, welche eine Aufgabensammlung enthält, die just mit der nur geringfügig veränderten PISA-Aufgabe »Bauernhöfe 1« beginnt.[38] Deshalb soll hier abschließend noch kurz die Frage diskutiert werden, was denn eine Aufgabenkultur im emphatisch verstandenen Sinne sein könnte. Wie müssten Aufgaben beschaffen sein, mit welchen sich tatsächlich auf lange Sicht das mathematische Verständnis einer größeren Zahl von Schülern so verändern ließe, dass für obiges Urteil eine Hoffnung auf Revision besteht?

Dazu muss in Erläuterung der Einleitungssequenz dieses Artikels gesagt werden, dass Mathematiklernen (wie andere den kognitiven Apparat lebendiger Menschen betreffende Entwicklungsprozesse auch) nur als krisenhafter Vorgang gedacht werden kann. Alle anderen Beschreibungen des Geschäfts, in welchem Lehrer und Schüler sich in gemeinsamer Absicht zusammenfinden können, verkennen die Spezifik des Gegenstands: Kumulation von Details wird immer wieder an jenen Punkt führen, wo eine zunächst nicht mögliche Synthese im Begreifen eine interne Veränderung der kognitiven Struktur erzwingt.[39] Hält man sich die Situation einer Schulklasse vor Augen, so ergeben sich für einen Schüler als mögliche Antworten auf die Frage nach (potenziell krisenhaften) Lerngelegenheiten zunächst zwei Formen für Erfahrung: erstens die selbstständige Auseinandersetzung mit einem Problem und zweitens die selbstverantwortliche Verteidigung einer eigenen Meinung gegenüber Zweiflern. Die große Kunst eines Lehrers besteht wohl darin, möglichst vielen Schülern möglichst oft solche Gelegenheiten einzuräumen.

Ob ein konkreter Schüler solche Gelegenheiten nutzt, steht zunächst auf einem anderen Blatt. Bezogen auf konkrete Aufgaben lässt sich jedoch feststellen, dass es einerseits oftmals von der Ausprägung kognitiver Grundfähigkeiten abhängt, ob ein Lernender überhaupt die Möglichkeit hat, die mit einer Aufgabe verknüpften Schwierigkeiten zu bewältigen. Begrifflich gebündelte Vorstellungen und zunächst kontextgebundene, in der Perspektive jedoch auch kontextüberschreitende Orientierungsfähigkeiten sind da als Marken für jene Möglichkeits- bzw. Fähigkeitsbereiche zu nennen, an welche eine Realisierung der Synthese von mathematischem Wissen bzw. Können und allgemeinpragmatischen Kompetenzen gebunden ist. Eine Brückenfunktion dürfte dabei jenem formal-operativen Aspekt der Grammatik zukommen, der von Chomsky als sprachliche Kompetenz beschrieben worden ist.[40]

Und andererseits repräsentieren Aufgaben Sinnzusammenhänge, d.h. eine im Rahmen eines kommunikativen Zusammenhangs erwartungsgemäße Reaktion (ein Lösungsvorschlag) ist an eine Auswahl konkretisierbarer Möglichkeiten aus einem aktuellen Vorstellungsganzen gebunden. In dieser Hinsicht macht es tatsächlich einen

Unterschied, ob ein konkreter Lösungsversuch lediglich eine operativ mehr oder weniger genaue Imitation einer früher zur Kenntnis genommenen Musterlösung darstellt oder eine echte Auswahl. Letztere Variante enthält im Gegensatz zur ersteren eine Operation, die sich auf der Ebene sprachlicher Bedeutung als logische Negation fassen lässt. Reaktionen auf sogenannte Kapitänsaufgaben sind ein empirischer Beleg für die Realitätshaltigkeit dieser Unterscheidung.[41]

Damit sind zwei Seiten der Aufgabenbearbeitung durch einen Lernenden hervorgetreten, die sich in Bezug auf die sprachliche Medialität von aufgabenförmigen Artefakten zueinander verhalten wie Syntax und Semantik im Kontext ihrer phonematischen Realisierung. Der kognitiven Strukturiertheit (von Ganzheiten)[42] in einem internen operativen Prozess korrespondiert die soziale Dimension von grundlegender (vorhandener oder fehlender) Beziehungshaltigkeit.[43]

Der gemeinsame Bezugspunkt beider Seiten aber kann gedacht werden als ein Spektrum bedeutungsunterscheidender Formen. Um solche Formen sollte es im Kern gehen, wenn von produktiven Aufgaben die Rede ist. Man kann nun sehen, dass die oben zitierte PISA-Aufgabe »Bauernhöfe 1« gerade keine in mathematischem Sinne produktive Aufgabe ist.[44] Sicher besteht eine prinzipielle Schwierigkeit darin zu bestimmen, was denn für den Bereich der Sekundarstufe solche Aufgaben sein könnten. Soviel kann allerdings dazu festgehalten werden: Das Produktive an einer Aufgabensammlung drückt sich darin aus, inwieweit sich dort Mathematiklernen als Entwicklungsprozess wiederfindet. Eine in dieser Hinsicht grundlegende, in der mathematikdidaktischen Forschung bislang ungeklärte Frage müsste also lauten: Was sind die kognitionsgenetisch relevanten Bestandteile von Fähigkeiten wie etwa »Umgang mit Variablen und Gleichungen« oder »Modellierungsfähigkeit«? Die Schwierigkeiten bei der Beschreibung dessen, was Bruchrechnung für viele Schüler so unverständlich macht, sprechen für sich. In solchen Feldern ist ohne sprachpragmatische Forschungsmethoden mit Sicherheit nichts herauszufinden, was einer Konfrontation mit den Realien des Schulalltags standhielte.

Was Martin Wagenschein für die Genese grundbegrifflicher Vorstellungen in der Physik angeregt hat, steht für die Mathematik der Sekundarstufe noch weitgehend aus. Auf der kognitiven Seite betrifft das Unterschiede in der Wirkung von Operationen bzw. deren Verkettung in der Vorstellung, auf der sozialen Seite – der Seite von Sinnhaftigkeit – dagegen den Unterschied von reziproken und nichtreziproken Figurationsverhältnissen.[45]

Auf der Grundlage einer solchen theoretischen Beschreibung lässt sich nun die Frage nach der Realitätshaltigkeit der Unterscheidung von Kompetenzstufen neu beleuchten: Solange diesen Unterscheidungen keine anderen Vorstellungen zugrunde liegen als die Alltagstheorien von Lehrern, gemäß denen bestimmte Schüler eben bestimmte Aufgaben bewältigen und andere nicht (bzw. bestimmte Aufgaben von bestimmten Schülern bewältigt werden und von anderen nicht – was mit der formalen Vertauschbarkeit dieser Sichten bereits diejenige Asymmetrie negiert, welche jeder Prädikation und damit wohl auch einem potenziellen Erkenntnisprozess prinzipiell innewohnt), hat das detaillierte professionelle Wissen von Fachdidaktikern keine Chance, in der Tiefe mentaler Operationen jene Momente aufspüren zu helfen, welche echtes Verstehen ausmachen. Denn dieses ist an Sprache gebunden.

Von empirischer Bildungsforschung aber sollte erwartet werden dürfen, dass sie neben dem sicher nicht einfach zu handhabenden Geschäft der Politikberatung jene Reflexivität in den Mittelpunkt ihrer wissenschaftlichen Bemühungen stellt, welche in der Konsequenz eine wirksame Veränderung von Praxis erst ermöglicht.

ANMERKUNGEN

1 zitiert nach eigenen Aufzeichnungen, Berlin 1980.
2 ebd.
3 ebd. – Dieser Einschub löst übrigens immer noch nicht das Problem!
4 Es gibt in der Mathematik eine stille Konvention, wonach Aufgaben, die deutlich schwerer sind als die anderen Aufgaben desselben Kontexts mit einem Sternchen versehen werden. Aus dieser zunächst bloß syntaktischen Festlegung erwuchs irgendwann ein neuer Begriff: Sternchen-Aufgabe.
5 Ein Würfel hat als regelmäßiges Polyeder nicht nur eine Grundfläche.
6 Es gibt Mathematiker, die bereits hier Einspruch erheben würden – im Rahmen innermathematischer Debatten. Insofern handelt es sich bei der oben vertretenen Meinung um eine Beschreibung auf der Basis intuitionistischer (oder konstruktiver) Logik. Entsprechende Debatten werden allerdings erst dann interessant, wenn man über unendliche Mengen – Objekte, die »sich selbst als Teil enthalten« (im Sinne bijektiver Abbildungen) – redet.
7 Eine Bedingung ist einerseits ein Zusammenhang und andererseits eine Ordnung. Im vorliegenden Fall kann sie als ein markiertes Austauschverhältnis bezeichnet werden.
8 Für Blinde ist es komplizierter; vgl. den Vortrag von Sergej Sirotkin zu: Die Rolle der Sprache und der Sprechfertigkeit bei der Entwicklung der menschlichen Psyche, in: Voprosy Filosofii 6/1975. Sirotkin ist einer von vier blinden gehörlosen WissenschaftlerInnen, die in den sechziger und siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts nach der von Ewald Iljenkow entwickelten Lehr-Lern-Methode gebildet und beschult wurden. Vgl. dazu auch die Sicht des Lehrers – Ewald Iljenkow: Die Herausbildung der Psyche und der Persönlichkeit: Ergebnisse eines Experiments. In: Demokratische Erziehung 3 (1977), H. 4, S. 410-419.
9 Der Begriff eines n-Ecks wird zweckmäßigerweise induktiv aufgebaut: »Siehst du die vier Ecken? Das ist ein Viereck.« Dem für die Mathematik der Sekundarstufe grundlegenden Problem, dass n keine bestimmte Zahl, sondern zunächst nur ein bestimmter Buchstabe ist, der aber stellvertretend für bestimmte Zahlen steht und damit eine Menge von Mengen repräsentiert (Begriff der Variablen), ist ein entwicklungspsychologisches Problem aus der Grundschulmathematik logisch vorgelagert: Die Ecken eines Würfels oder die Spitze einer Pyramide kann man anfassen, die Ecken eines Vierecks dagegen nur sehen (bzw. zeichnen). Das verweist auf das Problem, zu verstehen, was eine Ecke in einem Viereck ist: ein Schnittpunkt zweier Seiten (gerader Linien).
10 Dieser Aufwand im Gespräch entspricht sprachpragmatisch der Mühe, die beim Anfertigen einer schriftlichen Konstruktionsbeschreibung nötig ist. Parallel zum medialen Unterschied von mündlicher und schriftlicher Form der Sprachproduktion findet sich dann die Unterscheidung von dialogischen und monologischen Texten.
11 An dieser Stelle erwacht im Leser der Aufgabe, der versucht, einen schreibenden Mathematiker zu verstehen, als zusätzliche metakognitive Instanz ein (vielleicht noch nicht entdeckter) Dichter, der versucht, die Sprache bis auf ihre kleinsten bedeutungsunterscheidenden Einheiten hin zu denken. Das wäre dann ein guter Freund etwa von Paul Klee, Hugo Ball, Jurij Tynjanov und Vladimir Majakovskij oder – noch etwas radikaler – das erste Adoptivkind einer (amtlich erst zu vollziehenden) Ehe von Kurt Schwitters und Velimir Chlebnikov. (Anm.: Gerade letzterer war für einen professionellen Dichter ungewöhnlich mathematisch gebildet – ein Umstand, der auf seine Freundschaft mit dem Ingenieur und Schriftsteller Jevgenij Zamjatin zurückzuführen sein könnte.)

12 Im folgenden Gedicht aus der Feder des ersten russischen Futuristen Velimir Chlebnikov ist diese Bewegung einer Vorstellung zwischen Ohr und Auge inszeniert:

Im Bobeobi sangen die Lippen
Im Wäöomi sangen die Blicke
Im Piääo sangen die Brauen
Im Liäääj sang das Antlitz
Im Gsi-gsi-gseo die Kette sang,
So auf der Entsprechungen Leinwand
Lebt jenseits Erstreckungen das Gesicht.

(Welimir Chlebnikow: Ziehn wir mit Netzen die blinde Menschheit. Gedichte, Versdrama, poetologische Texte. Berlin 1984, S. 17).

13 Im Gegensatz zum deutschen Wort Zaum mit dem bekannten onomatopoetischen Diphthong finden sich im russischen Zaum zwei phonologisch deutlich voneinander separierte Vokale. (Im übertragenen Sinne ist das der – graphische – Unterschied von Saum und Zaum.) Das russische Wort ZAUM ist ein Werk Chlebnikovs und bedeutet in phonosemantischer Detailübersetzung so viel wie Hintersinn. Allerdings ist im deutschen Wort der morphologische Unterschied zwischen Dativ und Akkusativ eingeebnet, so dass der Hörer das Kunstwort in der Rezeptionsgewohnheit eines Nominalstilisten leicht als »hinter dem Sinn« missverstehen kann. Im Russischen ist strukturell klar zwischen beiden Varianten unterschieden: Saum ist nicht Saumom! Ergo: HINTER DEN SINN! (Victor-Vektor...)

14 Hat es Sinn, oder hat es Zaum? Zinn-Saum, Ritter-Zitter...

15 These: Beide Arten von Schwierigkeit führen im Kern auf die in Fußnote 9 angedeutete Unterscheidung. D.h.: Um die Schwierigkeiten genauer zu bestimmen, müsste die Piaget'sche Unterscheidung von konkreten und formalen Operationen weiter differenziert werden.

16 Das sind zwei zunächst zu unterscheidende Beobachterstandpunkte: Mathematik als eigenlogisch formalisierte Fachsprache einerseits und Mathematik als Teil eines sinnstrukturierten Ganzen andererseits. Hier hätte Didaktik die Aufgabe, eine Sinnbrücke zu bauen, doch dazu später ausführlich.

17 Darin sind zwei Aktivitätsmomente zu unterscheiden: Nachvollziehen als bloßes Zur-Kenntnis-Nehmen und Nachvollziehen als Verstehen. Der erste Aspekt wird dann wichtig, wenn man eine Aufgabenlösung im Kontext bemessener Zeit untersucht, während der zweite Aspekt auf die grundlegendere Frage nach der benötigten sprachlichen Redundanz beim Verstehen führt – vgl. dazu Fußnote 10.

18 eine bildliche oder Handlungsvorstellung

19 Bei den ägyptischen Pyramiden handelt es sich um typische Repräsentanten einer solchen Anschauungsweise.

20 bzw. intuitivem und vermitteltem Verstehen, wobei ersteres mittels Operationen des Identifizierens und letzteres mittels Operationen des Realisierens als Verstanden-Haben explizierbar ist.

21 Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen 2001

22 Peter Baptist / Volker Ulm: Stufen mathematischer Kompetenz nach PISA. Materialien zum BLK-Modellversuch, Bayreuth 2002 (dem Autor in Manuskriptform vorliegend).

23 Wir wollen der Einfachheit halber einmal unterstellen, dass es im Testheft so ähnlich aussah wie im Layout der zitierten Quelle.

24 Deutsches PISA-Konsortium, S. 152.

25 Vorausgesetzt, die Autoren hatten beim Formulieren des Textes ein Bewusstsein für die Semantik der grammatischen Unterscheidung von Singular und Plural (wie jeder kompetente Sprecher des Deutschen) und meinten nicht »Pyramiden«.

26 Und zwar sprachlich sequentiell, was spätestens seit Freges Begriffsschrift in objektivierter Weise feststeht!

27 Jacques Derrida hätte dies als Phono-, Logo- und Ethnozentrismus kritisiert, doch änderte auch diese philosophische Sicht auf die Welt im Ganzen nichts am (historisch gewachsenen) mathematischen Begriff der Gültigkeit einer Aussage (bzw. einer Aussagenmenge, also einer Theorie) in einem Kontext von Axiomen.

28 Dahinter steckt eine basale Verdrängungsreaktion.

29 Das ist nun keine Schülersicht, sondern der Autor gesteht (aus Gründen der Fairness) den Gestaltern von S. 152 des PISA-Buchs zu, dass sie die Zuordnungslinien zwischen den Aufgaben einerseits und den Kompetenzstufen andererseits in ihrer Darstellung möglichst »übersichtlich« halten wollten. Diese Deutung wird durch andere Varianten dieser Aufgabe, die im Internet zu finden sind, erhärtet.

30 Wird das Bild als Grundlage möglicher Denkprozesse beibehalten, so besteht allein wegen der Perspektive der Darstellung ein interpretatorischer Unterschied zwischen einer Entscheidung für Dreieck ABS und einer für Dreieck DAS, wobei letzteres im Rahmen einer möglichen Unterscheidung zwischen nur flächiger und auch räumlicher Interpretation des Bildes – ein Unterschied, der sich in der konkretisierbaren Vorstellung auswirkt – von einem »eher flächig sehenden Schüler« als ADS bezeichnet werden würde.

31 Hinter dieser Komplexität steckt gedanklich die einmalige Anwendung des Satzes des Pythagoras' in einem »leicht abgewandelten« Kontext. Diese scheinbare Simplizität von Komplexität führt angesichts der Testergebnisse auf die Vermutung, dass neben diesen noch andere Schwierigkeiten eine Rolle spielen könnten: z.B. die gedankliche Ablösung einer Fläche von einem Körper oder die algebraische Umformung einer Gleichung. Ersteres führt im Kern auf das Ziel innerhalb der Grundschulmathematik hin, begrifflich und in der Vorstellung Körperformen von Flächenformen unterscheiden zu können. Letzteres hat für die Mathematik der Sekundarstufe I insgesamt wohl eine genau so große Bedeutung wie das dekadische Positionssystem für die Grundschule.

32 Dahinter steckt im Kern eine Proportionsvorstellung. Deren visualisierbarer Aspekt fungiert in vielen Intelligenztests als Markierungsaufgabe für die Fähigkeit zur »Analogiebildung«.

33 Auf einem solchen Evidenzprinzip war beispielsweise die alte indische Mathematik aufgebaut. In diesem Sinne wäre Sehen gleichbedeutend mit Erkennen. In der griechischen Tradition ist Erkenntnis jedoch immer an Begründbarkeit, mithin an eine sprachlich-sequentielle Argumentationsstruktur gebunden.

34 Beide Möglichkeiten sind deskriptiv nur dann zu unterscheiden, wenn man einen wie minimal auch immer gehaltenen Lösungsweg – einen Argumentationskeim – in die Analyse einbezieht.

35 Gemäß der extensionalen Bestimmung einer Bedeutung von Kompetenzstufe III durch die PISA-Planer (s.o.) würde eine Antwort implizit deren Vorstellungen vom faktischen Mindestniveau mathematischer Kompetenz im Teilbereich der Geometrie am Ende der Sekundarstufe I wiedergeben.

36 Ein testpragmatisch ausgebuffter Schüler mag sich damit trösten, dass Überlegungen, das Klima betreffend, in den abstrakten Vorstellungsräumen der Mathematik ohnehin keinen Platz finden – »davon kann und sollte abstrahiert werden«.

37 Pejorativ gewendet hieße das: eine heile Welt!

38 http://www.mbfj.rlp.de/Wir_ueber_uns/publikationen/Bildung/weiter_aufg_mathe.doc (zuletzt abgerufen am: 01.05.2005)

39 Oder mit den Worten des wohl berühmtesten deutschen Mathematikers C.F. Gauß: »Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.« (Aber es gibt viele Sackgassen! – J.R.)

40 Dieser Aspekt hat wiederum zwei Seiten. Zum einen geht es zunächst um das bloße Vorhandensein von auf Vorstellungen bezogenen Operationen, v.a. von kontextgebundenen Vertauschungen und Ersetzungen. Zum anderen aber geht es auch um deren Verkettung und damit um Gestaltunterschiede in einem komplexen operativen Möglichkeitsraum.

41 Im Rahmen von Piagets genetischem Strukturalismus sind beide Strategien charakteristisch für das jeweils produktive Moment unterschiedlicher Stadien kognitiver Entwicklung. Insofern liefert der Begriff Verstehen eine Unterscheidung für die Deskription von kognitiven Entwicklungsprozessen.

42 oder in Außenperspektive betrachtet: von Einheiten (eines psychologisch zu beschreibenden Prozesses)

43 Hier wird Beziehung in jenem emphatischen Sinne verstanden, in welchem sich Imitation von Auswahl unterscheidet. Der Unterschied betrifft v.a. die Kontextualität der Vorgeschichte.

44 Man vergleiche diese Aufgabe etwa mit dem Inhalt von – Müller / Wittmann: Handbuch produktiver Rechenübungen (2 Bde), Stuttgart 1994 – einer avancierten Aufgabensammlung für das Rechnen in der Grundschule.

45 Semantische Negierbarkeit setzt eine zumindest implizite Bedeutung voraus, syntaktische Vertauschung dagegen zwei unterscheidbare Positionen in der Vorstellung.