Kleinbach, Karlheinz

Unterrichtsbeispiel: Anregungen zum Umgang mit dem Kuboeder nach Friedrich Fröbel

Lernen konkret 12 (1993) 3, S. 18-25

Quellenangabe/ Reference:
Kleinbach, Karlheinz: Unterrichtsbeispiel: Anregungen zum Umgang mit dem Kuboeder nach Friedrich Fröbel - In: Lernen konkret 12 (1993) 3, S. 18-25 - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-116932 - DOI: 10.25656/01:11693

https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-116932
https://doi.org/10.25656/01:11693

Karlheinz Kleinbach

Unterrichtsbeispiel: Anregungen zum Umgang mit dem Kuboeder nach *Friedrich Fröbel*

Der erste Abschnitt gibt eine Orientierung darüber, was der Kuboeder ist und in welchem pädagogischen Zusammenhang dieses Material steht.

Im zweiten Abschnitt wird versucht, diese Absicht sowohl in inhaltlicher Weise als auch zielbezogen dem Bildungsplan der Schule für Geistigbehinderte zuzuordnen.

Im dritten Abschnitt werden unsere eigenen Fragestellungen aufgeführt, unter denen wird der Kuboeder unterrichtlich zum Thema gemacht haben.

Der vierte Abschnitt berichtet ausschnitthaft von einigen Unterrichtsversuchen mit zwei unterschiedlich geschnittenen Würfeln. Besonders aus diesem Teil soll ersichtlich werden, welche ganz neuen Möglichkeiten sich in der konkreten unterrichtlichen Situation zuallererst eröffnet haben. Diese 'neuen Möglichkeiten' beziehen sich auf die Art und Weise, wie sich im Umgang mit dem Kuboeder geometrische Problemstellungen im Sinne des einführenden Textes darstellen.

An dieser Stelle ist an zwei unserer Voraussetzungen zu erinnern. Die erste lautet: Geometrie ist konkret, d.h., sie artikuliert sich in ihrer Körperhaftigkeit. So ist der Würfel nicht Visualisierung eines an sich abstrakten Gedankens, sondern in der Konkretheit des (Würfel-) Körpers kommt das Würfelige überhaupt erst zur Anschauung.

(Hier unterscheidet sich unsere Auffassung auch von jener, die jüngst *Hubert Letzgus, Inge Rothfuss* und *Rolf Dieter Wagner* unter dem Titel „Geomet 1" vorgelegt haben (Verlag Dürr & Kessler, Rheinbreitbach 1991). Netzbilder, Abwicklungen und Nachbau von zusammengesetzten Würfelkörpern führen hier zum (körperlosen) Schrägbild.)

Unsere zweite Voraussetzung schließt sich daran an und ist didaktischer Art. Das spezifisch Geometrische kommt in lebenpraktischen Bewandtniszusammenhängen zwar vor, aber ausschließlich in instrumenteller Funktion. Solange der Würfel als Spiel-Würfel 'funktioniert', gibt es keinen Grund, geometrischen Sachverhalten für eben dieses Funktionieren nachzugehen. Deshalb erfahre ich gerade im Würfelspiel nichts über den Würfel!

Was ist der Kuboeder? Was kann man damit machen?

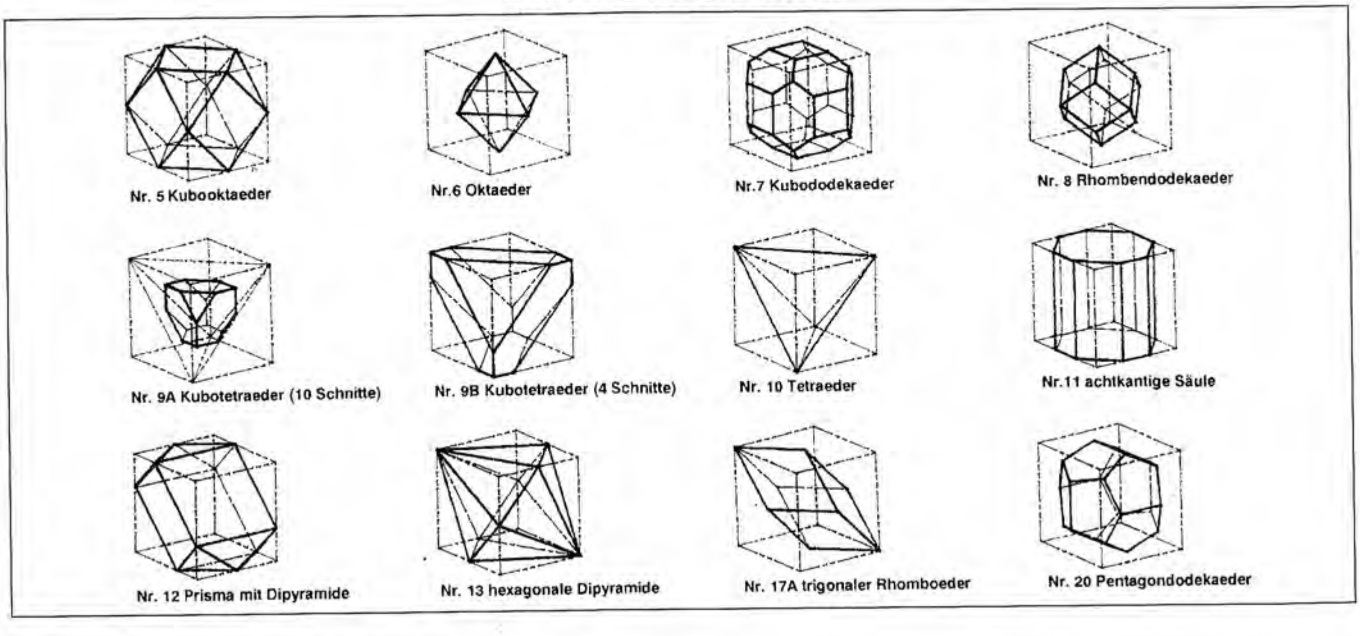
Im ersten Unterrichtsbeispiel ging es um den geteilten Würfel, *Fröbels* dritter Spielgabe. Im Unterschied zur Systematik der Spielgaben faßt *Fröbel* die geometrischen Körper Kugel, Walze, Würfel, geöhrter Würfel sowie zehn geschnittene Würfel unter dem Oberbegriff der Festgestalten zusammen. Was sind nun die geschnittenen Würfel aus den Festgestalten? Es handelt sich dabei um Holz-Würfel mit je 10 cm Kantenlänge. Sie alle sind schräg geschnitten, d.h., der Schnitt erfolgt entweder parallel zur Würfelkante und/oder über die Ecken. Die Würfel sind also unterschiedlich geschnitten. Für jeden einzelnen Würfel ergibt sich durch die Anzahl der Schnitte auch eine bestimmte Anzahl eigener Segmente. Dies sind zum einen die 'abgeschnittenen' Schalensegmente, zum anderen ist es der 'übriggebliebene' Kern.

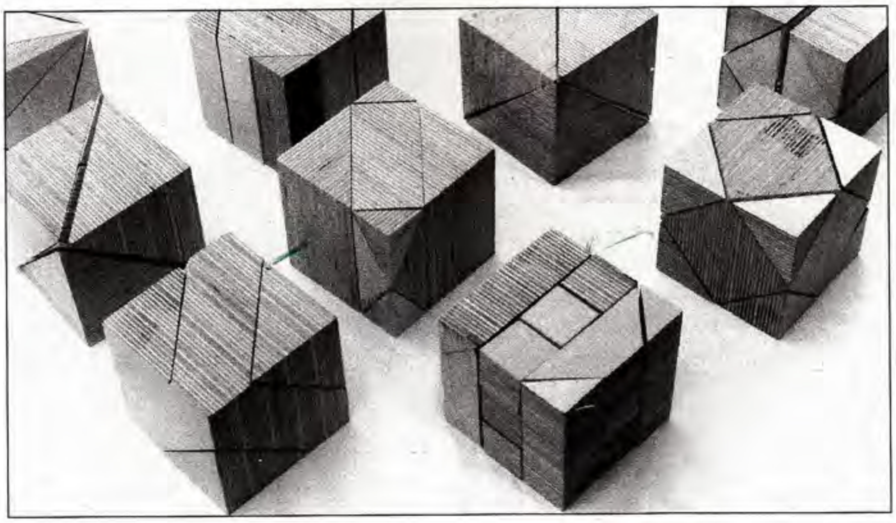
Jeder der geschnittenen Würfel besteht also aus Schale und Kern. An jedem einzelnen Würfel sind solche Schnitte nach einer ganz bestimmten Regel durchgeführt. Entsprechend sind auch Schalensegmente und Kern regelmäßige Körper. An ihnen ist die Regel ablesbar, nach der geschnitten wurde.

Fröbel hat die geschnittenen Würfel gedanklich entworfen und zeichnerisch dargestellt, konnte sie selbst jedoch nicht realisieren. Wahrscheinlich fehlten dazu einfach die technischen Voraussetzungen. Die Realisierung erfolgte erst ab dem Jahre 1989 im Rahmen des Forschungsprojektes 'Praktisches Lernen mit geometrischen Körpern nach *Fröbel*' unter der Leitung von *Dr. Lieselotte Heller*, Tübingen, und *Prof. Dr. Klaus Giel* von der Universität Ulm. Die geschnittenen Würfel erhielten dabei den Namen 'Kuboeder'.

(Das Projekt wurde finanziert aus Mitteln der Robert Bosch Stiftung, Stuttgart. Vom Kuboeder gibt es inzwischen zwölf Schnittvarianten, die von der Firma Holz-Hoerz GmbH, Postfach 1103, 7420 Münsingen/Württ., bezogen werden können. Im Katalog der Firma sind diese zwölf Würfelschnitte (s.a. Abb. in diesem Artikel) mit den Nummern 5 bis 20 versehen, wobei Kugel, Walze, Würfel und geöhrter Würfel die Nummern 1 bis 4 erhalten.)

Die zwölf Würfelschnitte





Einige der Kuboeder in unserer Schule

Mit Schülern der Ober- und Werkstufe war unsere Schule (neben einer Grundschule aus Sindelfingen und einer Hauptschule) an der ersten Erprobung dieses neuen Unterrichtsmaterials beteiligt.

Unserer Schule steht je ein Exemplar der zwölf geschnittenen Würfel zur Verfügung. Vom Würfel Nr. 5 (Kubo-Oktaeder) und Würfel Nr. 10 (Tetraeder) sind je 10 Exemplare vorhanden. Zu jedem geschnittenen Würfel gehört ein Holzkasten.

Wer mit dem Kuboeder im Unterricht arbeitet, sollte sich das Material so bereitstellen, daß tatsächlich jedes Kind einen geschnittenen Würfel samt Holzkasten zur Verfügung hat. Nachfolgend soll u.a. auch deutlich werden, warum darauf so viel Bedeutung zu legen ist.

Unsere eigenen unterrichtlichen Erfahrungen beziehen sich also auf die geschnittenen Würfel Nr. 5 und Nr. 10. Deshalb ist hier ausschließlich von diesen die Rede.

Wie ist der Würfel Nr. 5 geschnitten? Warum heißt er Kubo-Oktaeder?

Es wurde bereits erwähnt, daß jeder geschnittene Würfel seine eigene Schnitt-Regel hat. Beim Würfel Nr. 5 ist der Schnitt jeweils 'über Eck' durchgeführt. Der Schnitt führt jeweils durch die Mitte der Kante. So kann man acht gleiche Schnitte durchführen, d.h. man erhält acht Abschnitte (Schalen-Segmente) und den sogenannten Kern (Kern-Segment).

Weil die Schnitte nach einer bestimmten Regel ausgeführt werden, hat auch der Kern eine bestimmte Form. Er besteht aus sechs Quadratflächen und acht gleichseitigen Dreiecken. Der Kern ist ein Sechs-Achtflächner (= Kubo-Oktaeder). Diesem Polyederkern müssen deshalb auch geometrische Gesetzmäßigkeiten zu eigen sein. Benachbarte Flächen haben jeweils eine andere Form: Eine Quadratfläche wird immer von Dreiecksflächen begrenzt und umgekehrt. Jeweils gleiche Flächen liegen sich gegenüber. Quadratseite und Dreiecksseite sind gleich lang.

Mit diesen 'Eigenheiten' können verschiedene geometrische und algebraische Grundeinsichten erfahren werden.

Die Unterrichtsbeispiele im vierten Abschnitt sollen dazu ein paar Anregungen geben. Wenn hier geometrische und algebraische Grundeinsichten in einem genannt werden, so hat dies seinen Grund: Gerechnet und gezählt wird hier mit Formen. Die Zahl Drei etwa wird anschaulich in der Figur des Dreiecks.

Wie ist der Würfel Nr. 10 (Tetraeder) geschnitten?

Anders als beim Würfel Nr. 5 ist hier ein Diagonalschnitt durch die Ecken durchgeführt. Diesen Schnitt kann man viermal ausführen. Deshalb entstehen auch vier Schalen-Segmente und ein Kern mit vier gleichen gleichseitigen Dreiecksflächen (Tetraeder). Mit dem Kern kann man 'Schritte' ausführen, indem man ihn jeweils über eine seiner Kanten kippt. Wird der jeweils neue Stellplatz markiert, so ensteht eine geschlossene Parkettierung. Die Zahlen Drei und Vier kommen beim Tetraeder in einem anderen Verhältnis vor als beim Kubo-Oktaeder: als vier Dreiecksflächen. Auch hier können die nachfolgenden Beispiele erste Anregungen für eigenes Erproben geben.

Welche unterrichtlichen Schwerpunkte sind möglich?

Nachfolgend sind drei Gesichtspunkte beschrieben, unter denen der Kuboeder unterrichtliches Thema werden könnte.

Dabei kann es nicht um fertige Unterrichtsthemen gehen, sondern um Gesichtspunkte oder Ansichten. Diese Ansichten sind selbstverständlich nicht willkürlich, sondern hängen zusammen mit den tatsächlichen Möglichkeiten des Unterrichts: Wie kommt der Kuboeder 'vor'? Wie sieht er aus? Was kann man damit machen?

Der geschnittene Würfel erscheint zusammengesetzt im Holzkasten. (Evtl. kann man die Segmente mit Klebepunkten fixieren.) Bereits dies erfordert spezifische Umgangsformen: herausnehmen/einräumen, öffnen/schließen.

Vielleicht wird die Form wiedererkannt, vielleicht aber auch der Unterschied zum Spiel-Würfel. Der Würfel bleibt als Ganzes erhalten. Seine Flächen sind durch die Schnittkanten strukturiert, bilden ein Muster, einen Weg auf den Würfelflächen.

Es geht darum zu erfahren, wie durch den Schnitt am Würfel neue Oberflächen geschaffen werden. Dabei ist wesentlich, daß der Würfel nicht 'irgendwie' geschnitten wird. Vielmehr liegt eine Regel zugrunde, nach der jeweils geschnitten wurde, d.h., der Würfel ist mehrere Male geschnitten worden, wobei gleiche Schnitte ausgeführt wurden. Kann man das sehen oder ertasten? Gibt es angemessene Verfahren, die uns helfen, diesen Regeln auf die Spur zu kommen und diese Regeln zu formulieren?

Wichtig ist hierbei, daß jeder der geschnittenen Würfel als ganze, geschlossene Form (im Holzkasten) erscheint und am Ende wieder in seine Geschlossenheit zurückgelangt.

Weiterhin gilt: Auch wenn jeder Schüler mit seinem geschnittenen Würfel hantiert, ist kein Austausch von Teilen beabsichtigt (Man sagt dazu: Der geschnittene Würfel bleibt singulär). Diese Vorgabe ist notwendig, damit für jeden Schüler deutlich bleibt, daß die Körpersegmente des geschnittenen Würfels eindeutig aufeinander bezogen sind. Die Körpersegmente kommen vor als Menge. Die Segmente sind zu ordnen, und zwar nach Ordnungen, die an ihnen selbst vorkommen (gleiche Kantenlänge, gleichgroße Flächen).

Angemessenheit ist ein Ausdruck mit doppelter Bindung, weil darin eine Aussage sowohl über die Schüler als auch über den geschnittenen Würfel enthalten ist. Dies wurde für uns selbst besonders dort deutlich, wo Schüler plötzlich zu Einsichten gelangten, die uns selbst bis dahin als Nebensächlichkeiten galten.

Oft genug wurden unsere Absichten durch völlig neue Einsichten gebremst. Ein Detail konnte zur ärgerlichen Stolperfalle werden und erwies sich als didaktische Herausforderung.

In diesen Unterrichtssituationen war bei den Schülerinnen und Schülern eine große geistige Regsamkeit und eine Wachheit in der Auseinandersetzung mit dem Material zu spüren. Es wurde auch offenbar: Lernen ist anstrengend! In unseren eigenen Unterrichtsversuchen waren solche besonderen Stellen u.a.: Was eigentlich ist ein Würfel-Schritt? Wie markiere ich einen Stell-Platz eines Würfels?

Die nachfolgende Zusammenstellung ist keine durchgängige Dokumentation dessen, was wir gemacht haben. Es handelt sich um eine nachträgliche Zusammenstellung. Dabei wurde das gesammelte Material jeweils auf einen bestimmten thematischen Schwerpunkt ausgerichtet. Aus dieser Zusammenstellung soll auch deutlich werden, daß eine einheitliche und verbindliche Erarbeitungsmöglichkeit nicht sinnvoll ist.

Wichtig erscheint uns allerdings eines: Schüler können nur dann produktiv mit dem Material umgehen, wenn sie jeweils die Regel verstanden haben. So paradox es vielleicht klingen mag, aber die Regel engt Kreativität nicht ein, sondern ein kreativer Umgang wird durch die Regel erst freigesetzt und ermöglicht. Die Regel ist nicht willkürlich und vom Lehrer abhängig, sondern sie ergibt sich in der Körperlichkeit des geschnittenen Würfels.

Man kann dies selbst erproben. Wer mit dem Kuboeder beliebig (d.h. ohne Regel) umgeht, verliert schnell das Interesse. Man kommt so vielleicht an seine eigene Grenzen, aber noch lange nicht an die des Kuboeders! An einer Stelle unserer Unterrichtsversuche wurden uns die Folgen eines regel-losen Umgangs besonders deutlich: Die Schüler sollten aus den Schnitt-Segmenten Spielfiguren zusammensetzen und eine ihnen bekannte Geschichte damit darstellen.

Damit wurde zugedeckt, was es eigentlich zu entdecken gab, nämlich Symmetrien, Formgleichheiten, Reihen o.ä. Das Material wurde für einen außerhalb dieser möglichen Entdeckungen liegenden Zweck verwendet und damit austauschbar. Die Regel war nicht mehr aus dem Material ableitbar, sondern wurde gewissermaßen 'von außen' eingefordert, d.h., die Regeln des Umgangs waren für die Schüler nicht mehr aus dem Material selbst ableitbar und darin begründet, sondern in einem erzählenden Text. Zur Illustration und Bewegungsgestaltung eines erzählenden Textes sollte der Würfel zum Spielrequisit werden.

Und genau in diesen Nutzungszusammenhang läßt sich der Würfel nicht stellen (abgesehen davon, daß es dazu viel geeignetere Materialien gibt und unsere Schüler dies sehr wohl wissen).

Beispiele von regelgeleitetem Hantieren

Unterrichtsversuche

Den nachfolgenden Beispielen liegt regelgeleitetes Handeln zugrunde. Dabei wird der Kuboeder in ganz unterschiedlicher Hinsicht zum Thema: Wie paßt der Würfel in den Kasten hinein? Wo sieht man am Würfel Linien (Schnitte)? Welche Kanten sind gleich lang? Woran kann man zeigen, daß Kanten gleich lang sind?

Unsere Beispiele fügen sich nicht zu einer fertigen Systematik. Diese scheint uns hier nicht so wichtig. Vielmehr soll gezeigt werden, wie sich anschauliches Denken in einzelnen unterrichtlichen Situationen zeigt.

Wir haben diese Situationen nachträglich jeweils unter ein Stichwort gestellt (s.u.). Auch wenn diese Stichworte unsystematisch erscheinen, so sollen sie doch darauf hinweisen, auf was es uns mit unserem Ansatz der konkreten Geometrie ankommt: auf den hantierenden Umgang mit dem Material, der zum Finden von Regeln und deren sprachlicher Formulierung führt.

Wir sprechen deshalb zunächst von 'hantierendem (und nicht 'handelndem') Umgang', weil sich das für den handelnden Umgang vorausgesetzte Handlungskonzept ja erst im Hantieren mit dem konkreten Material ergeben kann.

Der geschnittene Würfel Nr. 5 (Kubo-Oktaeder) und der Holzkasten

Jeder geschnittene Würfel gehört in einen Holzkasten. Schon darin wird die Aufmerksamkeit in ganz bestimmter Weise geweckt.

(In Heilpädagogik und Diagnostik wird der Umstand berücksichtigt, daß nämlich Verpacktes oder Verhülltes von ganz eigener Aufforderung ist. Dosen, Verschlüsse (des Montessori-Materials), russische Steckpuppen, Tastsack sind einige solcher Anwendungen. Was in diagnostischer Terminologie als Explorationsverhalten beschrieben wird, findet nicht allein im Auspacken sein Ziel, sondern kann hineinführen in Handlungbögen, die in sich reversible Struktur haben (und nur so 'spielbar' sind).
Es wäre didaktisch lohnend, diesen Bezügen innerhalb ästhetischer Darstellungsformen nachzugehen. Neben den Arbeiten des Verpackungskünstlers *Christo* wäre hier etwa zu verweisen auf den Ausstellungskatalog 'Wie verpacke ich fünf Eier?' Institut für Auslandsbeziehungen, Stuttgart 1986 und *Roland Barthes* Pakete, in: *Barthes*: Das Reich der Zeichen, dt. Frankfurt 1981, S. 61-67. Unter ganz anderer Perspektive gehören hierher auch die Arbeiten von *F. E. Walther*. *Walthers* Thema ist nicht das Verpackte, das es auszupacken gilt, sondern vielmehr das Lagern als eigenständige ästhetische Werkform; vgl. dazu *Thomas Braun/ Achim Kubinski* Lagerform - Werkform in *Michael Lingner*: Das Haus in dem ich wohne - Die Theorie zum Werkentwurf von *Franz Erhard Walther*, Klagenfurt 1990, 360-375.)

Sind die Kästen voll oder leer? Wie sind sie zu öffnen? Sind alle Kästchen gleich schwer? Sehen alle Kästchen gleich aus? Wie klingt es, wenn man sie schüttelt? Was paßt hinein? Gibt es dafür geeignete und weniger geeignete Lagen? Braucht man dazu Kraft? An welchen Stellen faßt man die Kästchen an zum Öffnen? Brauche ich beide Hände? Geht es leichter, wenn wir zu zweit arbeiten? Wie weit kann/muß der Deckel herausgezogen werden? Was sieht man, wenn der Deckel abgezogen ist? Wie kommt man an den Inhalt heran?

Allerdings haben diese Fragen eher mit Neugierde als mit anschaulichem Denken zu tun. Und wenn diese - häufig sehr oberflächliche - Neugierde gestillt ist, erlischt sofort alle Aufmerksamkeit. Oder die Anforderungen sind für den Schüler plötzlich unerwartet hoch. Das kann dann der Fall sein, wenn der Würfel aus dem Kästchen genommen wird und in seine Schnittsegmente zerfällt. Neugierde ist vielleicht zunächst ein Motiv, aber es trägt überhaupt nicht.

Beginnen und Beenden

Wichtig ist, daß jeder Schüler ein eigenes Exemplar des Kuboeders zur Verfügung hat. Wenn man mit dem Kuboeder in der Gruppe arbeitet, ist es sinnvoll, jedes Kästchen mit dem Schülernamen zu markieren. Beginn und Ende des Arbeitens werden durch das geschlossene Kästchen deutlich markiert.

Darin liegt ein wichtiges Prinzip: Es ist keine 'work in progress'-Arbeitsform. Der entfaltete Würfel erhält immer wieder seine anfängliche Form, wird ein Ganzes (nicht zuletzt deshalb, weil er nur so wieder in das Kästchen paßt). Die geschlossenene, gleichwohl bereits geschnittene Form wird entfaltet/entwikkelt und der entfaltete Zustand wird wieder in den geschlossenen/eingefalteten Zustand zurückgeführt.

Übrigens zeigten die Schüler an keiner Stelle unseres Unterrichtsvorhabens den Wunsch nach Erhalt und Überdauern eines Arbeitsergebnisses. Viel eher schien das Wiederherstellen des Würfelganzen und das Einräumen nahezuliegen.

Bei unserem eigenen Tun hat sich bewährt, den geschnittenen Würfel folgendermaßen aus seinem Kasten zu nehmen: den Kasten mit der Kopffläche nach unten den Tisch legen, Abdeckung herausziehen, Kästchen nach oben abziehen.

Es geht also nicht darum, etwas herzustellen, was den Zeitraum der aktuellen Auseinandersetzung überdauert und was in einem anderen Zusammenhang verwendbar ist.

Der Kasten wird nach oben abgezogen

Häufig überdauert konstruktives Material in solchen fremden Kontexten. Dafür eignet sich der Kuboeder gerade nicht. Die Frage des Überdauerns wurde jedoch in einem ganz anderen Zusammenhang wichtig. Dort nämlich, wo es galt, sich zu erinnern, anzuschließen an Vorangegangens: Was haben wir gestern damit gemacht? Schüler mit geistiger Behinderung brauchen manchmal Hilfen und Unterstützung, einen Anschluß zu zeigen, zu erzählen, zu erinnern usw. Solche überdauernden Spuren (um dem eigenen Tun wieder auf die Spur zu kommen) waren Foto, Dia oder Video, oder Spielpläne.

Ein Körper hat keine Linien, sondern Kanten

Wie lassen sich die Kanten des Kuboeders wahrnehmen? Es macht bereits einen Unterschied, ob der Kuboeder dabei im Holzkasten oder herausgenommen auf dem Tisch liegt. Wird er durch Klebepunkte zusammengehalten, oder liegen die Segmente lose zueinander? Ruht er auf einer Fläche oder steht er labil auf einer Kante? Wird er gleichzeitig mit Augen und Händen wahrgenommen oder nur ertastet?

Die Schalen-Segmente des Würfels Nr. 5 sollen so nach oben geklappt werden, daß auf der obenliegenden Quadratfläche eine Pyramide entsteht. Die Kanten erscheinen als Gelenkstellen oder Scharniere, um die herum die Segmente zueinander bewegt werden können.

Die Pyramide

Benennungen

An verschiedenen Stellen der Erarbeitung wurde den Schülern klar, daß eine eindeutige Benennung erforderlich ist. Einerseits wurden die Schüler durch ihr aktuelles Vorgehen dazu veranlaßt.

So sind z.B. die Schalensegmente größen- und formgleich. Aber wodurch erkennt ein Schüler gleiche Teile? Umgekehrt werden geometrische Beziehungen, Sachverhalte, Orte erst durch und in der Sprache denk-bar. Das ist gemeint, wenn man von einem geometrischen Ausdruck spricht.

Wir haben folgende Bezeichnungen und Formulierungen verwendet:

Würfel (= geschnittener Würfel)
Abschnitte (= Schnittsegment)
Kern (= Kern-Segment)
Kante (entsteht dort, wo zwei Flächen des Würfels oder eines Segments einander berühren)
Dreieck (als Flächen-Form)
Quadrat (als Flächen-Form)
Nachbar (= benachbartes Feld)
Schritt (= Kippbewegung eines Segments auf eine angrenzende Fläche)
Weg (= Folge von Schritten)
Platz (= Schnittfläche am Kern)

Peter nennt den Kern „Mutter".

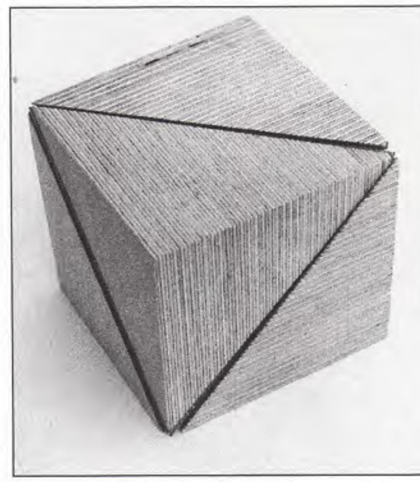
Figen zeigt: „Der Weg fängt hier an. Und da hört er auf."

Peter beim Aufkleben: „Wenn die Seiten genau passen, (dann) wird's erst ein Weg."

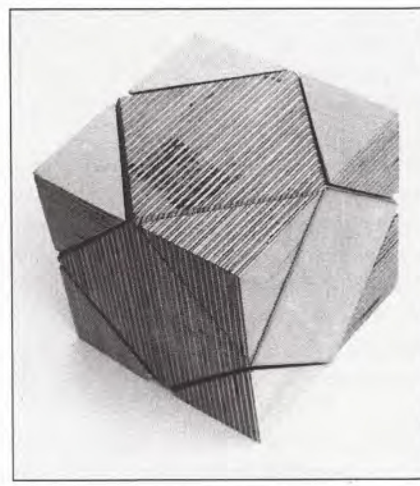
Anita zu Peter: „Du mußt dem (Kern) seinen Weg zeigen."

Sind die Segmente zunächst mit beidseitigen Klebepunkten zum geschlossenen Würfel fixiert, so bleibt der Würfel auch beim Herausnehmen aus seinem Kasten in seiner geschlossenen Form. Der ganze Würfel erscheint so mit einer geschlossenen Lineatur überzogen. Die Linien markieren die Schnitte, d.h. diejenigen Stellen, an denen der Würfel in Segmente (in ein Kern- und mehrere Schalensegmente) zerfällt.

Die Linien der Schnittfugen führen zu zwei grundlegenden geometrischen Betrachtungsweisen, nämlich die figurale und die proportionale. Eine (quadratische) Fläche wird durch einen diagonalen Schnitt ('über Eck') in zwei Dreiecks-Flächen geteilt.



Tetraeder (Nr. 10)



Kubo-Oktaeder (Nr. 5)

Um dies nachzuvollziehen, ist kein Abmessen erforderlich. Vielmehr geht es hier um eine figurale Betrachtung: Wie kann ich aus einer Figur (in unserem Fall eine quadratische Fläche) eine andere machen? Die diagonale Linie teilt die Fläche in zwei gleichgroße Hälften. Dies ist eine proportionale Betrachtung.

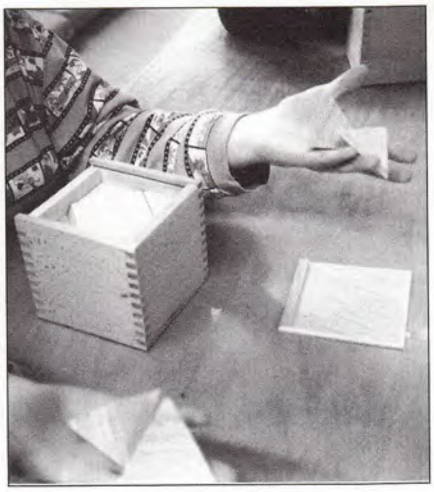
In der Gruppe wurde bereits früher mit quadratischem Faltpapier gearbeitet. An dieser Stelle ergeben sich dazu Anschlußmöglichkeiten (s. Abb. S. 22).

Figurale und proportionale Betrachtungsweisen lassen sich auch beim Arbeiten mit den großen geometrischen Legetafeln nachvollziehen (s. Abb. S. 22).

Die eigentümliche Dimension des Schnitts erschließt sich jedoch nicht in der Fläche, sondern sie ist körperlich. Der Schnitt zerlegt den Würfelkörper in Segmente. Den Regeln des Würfel-Schnitts kann man eigentlich nur 'handgreiflich' auf die Spur kommen. Läßt man Klebepunkte weg, so fallen beim Abziehen des Kastens vier Schalensegmente vom Kern herunter.

Arbeiten mit Faltpapier

Legetafeln in der Turnhalle



Wohin?

Dies ist durch die schräge Schnittlage und das eigene Gewicht der Schalensegmente bedingt. Man könnte auch sagen: Durch die Schräge des Schnitts fallen die oberen vier Abschnitte vom Kern. Die vier unteren Abschnitte bleiben an ihrem ursprünglichen Ort liegen. An welchen Stellen liegen die heruntergefallenen Schalensegmente?

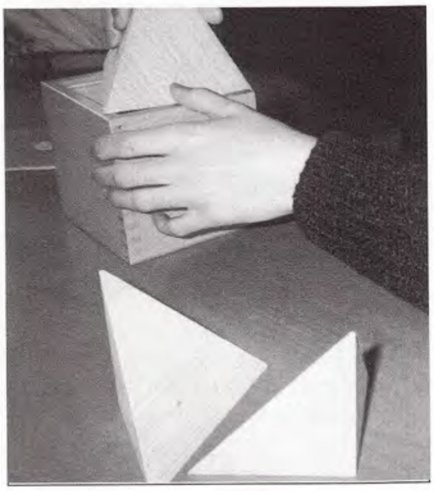
Ingo kommentierte: „Die rutschen ab, die blöden Dinger!" Kann man an den liegenden Abschnitten sehen, von welcher Stelle des Kerns sie heruntergefallen sind? Kann man alle vier Abschnitte wieder an ihren Platz zurückbringen? Ingo versucht zunächst, einen Abschnitt mit Spucke festzukleben, und nimmt dann Klebestreifen. Allerdings führte auch dies für ihn zu keinem befriedigenden Ergebnis. Er versucht deshalb, die vier oberen Abschnitte mit den Hand festzuhalten. Dies gelingt kaum. Dann versucht er eine andere Strategie: er kippt den Kern so, daß eine Schnittfläche in die Horizontale kommt, so braucht er nur drei Abschnitte festzuhalten.

Aufräumen als Wiederherstellen einer Ordnung

Man sollte meinen, der Handlungsablauf beim Aufräumen des Kuboeders sei reversibel im Vergleich zum Herausnehmen (so jedenfalls, wenn man die Lektion der sonderpädagogischen *Piaget*-Nachfolger gelernt hat). Die Bewegungsformen beim Einpassen (Zentrieren des Kerns) unterliegen jedoch nicht diesem Modell, eher geht es dabei um eine Reproduktion des Schnitts.

Beim Würfel Nr. 5 (Kubo-Oktaeder) bestimmt bereits die würfelige Hohlform des Kastens den Platz des Kernsegments. Der Kern kann – jeweils um 90° gedreht – erneut eingepaßt werden. Die Schüler können erfahren, wie die Dreidimensionalität die Reihenfolge bestimmt. Beim Einräumen des Würfels in den Holzkasten 'verschwinden' Schalensegmente, d.h. sie sind nicht mehr sichtbar und gleichwohl vorhanden. Es kann auch passieren, daß Schalensegmente beim Einräumen übrigbleiben. Wo gehören sie hin?

Beim Würfel Nr.10 (Tetraeder) ist es dagegen ganz anders, weil hier das Kernsegment anders im Würfel sitzt.



Der Tetraeder muß zurück

Lineare Reihen und rhythmisierte Ordnungen

Die Segmente lassen sich ordnen und ausrichten. Anita erfindet solche Formen spontan im Spiel mit dem Würfel Nr.5. Sie zählt die Schnittsegmente, gruppiert sie (jeweils vier) und baut damit zwei Pyramiden, legt die Abschnitte zu einem Stern, zu einer Blume.

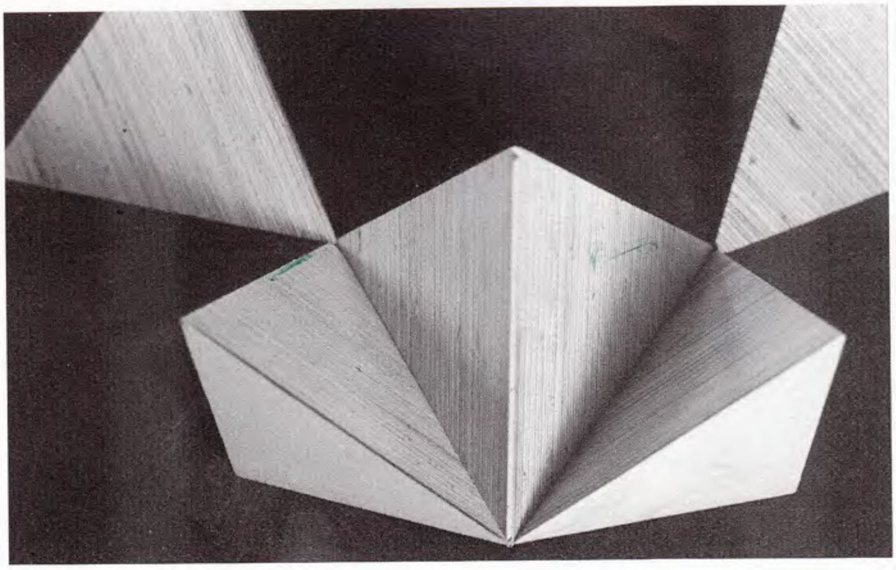
Nicole legt beim Würfel Nr.10 die Schnittsegmente zu ganz anderen Formen.

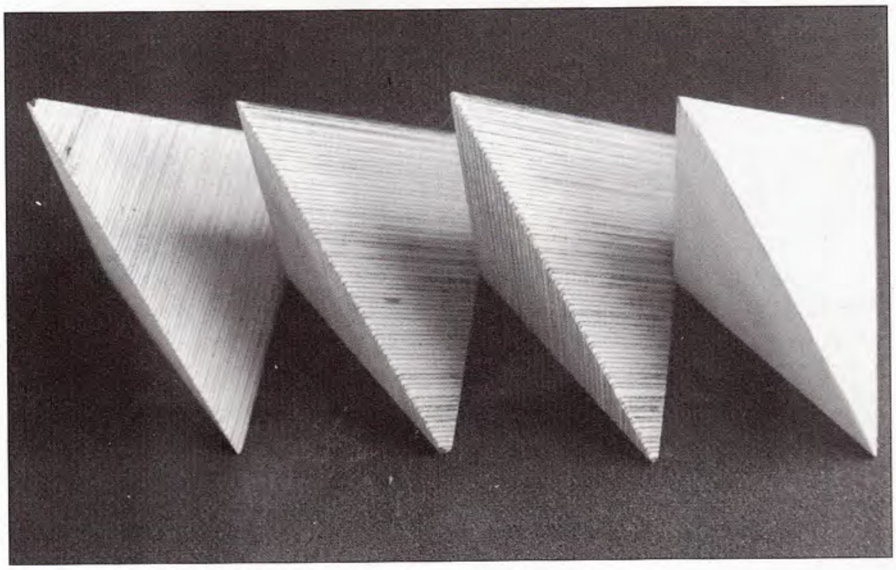
Oben und Unten

Die Schalen-Segmente des Würfels Nr.5 nehmen unterschiedliche Lagen ein: Vier von ihnen liegen unten und bleiben dort liegen, vier weitere haben jeweils einen oberen Platz an dem sie nicht 'von alleine bleiben'.

Spucke . . .

. . . oder Klebeband





Verschiedene Formen

Wann sind Flächen gleich?

Welche Möglichkeiten gibt es für die Schüler festzustellen, daß Flächen, Kanten, Winkel gleich groß sind? Welche Bedeutung hat dabei der Ausdruck 'gleich'? Auch hier geht es um figurale und proportionale Fragestellungen. Für uns selbst gilt es anzuerkennen, daß 'gleichgroß' nicht durch Messen feststellbar/beweisbar ist.

Im Umgang mit dem Kuboeder wird erfahrbar, daß sich gleiche Flächen, sind sie aufeinandergelegt, gegenseitig zum Verschwinden bringen, d.h. sie sind nicht mehr sichtbar. Das aber ist nichts anderes als eine Umkehrung dessen, was der Schnitt bewirkt.

Dazu ein Beispiel: Wir vergleichen die Fläche des Würfels mit seinem Abbild (Fotokopien). Die Flächen sollen ausgeschnitten und aufgeklebt werden auf Kern und Schalensegmente. Worin unterscheiden sich Schnittflächen und Außenflächen?

Stand als unsichtbarer Ort

Wie kann der Platz markiert werden, auf dem der Kern steht? Die Reichweite dieser Frage, ihre Ernsthaftigkeit und ihre Bedeutung innerhalb einer elementaren Geometrie wurde uns erst während der Arbeit mit den Schülern und der weiteren Planung unseres Unterrichts deutlich.

Dies war auch eine der Stellen des Unterrichts, an der uns selbst die Bedeutung von anschaulichem Denken aufgegangen ist. Man kann den Standort eines Körpers als Berührung zweier gleichgroßer Flächen bezeichnen. So steht beispielsweise der Würfel auf einer Fläche, jedoch ist keinesfalls selbstverständlich, welche Form diese Fläche hat. Daß beim Würfel die gleiche Flächenform gegenüber – also obenauf – liegt, war gar nicht selbstverständlich.

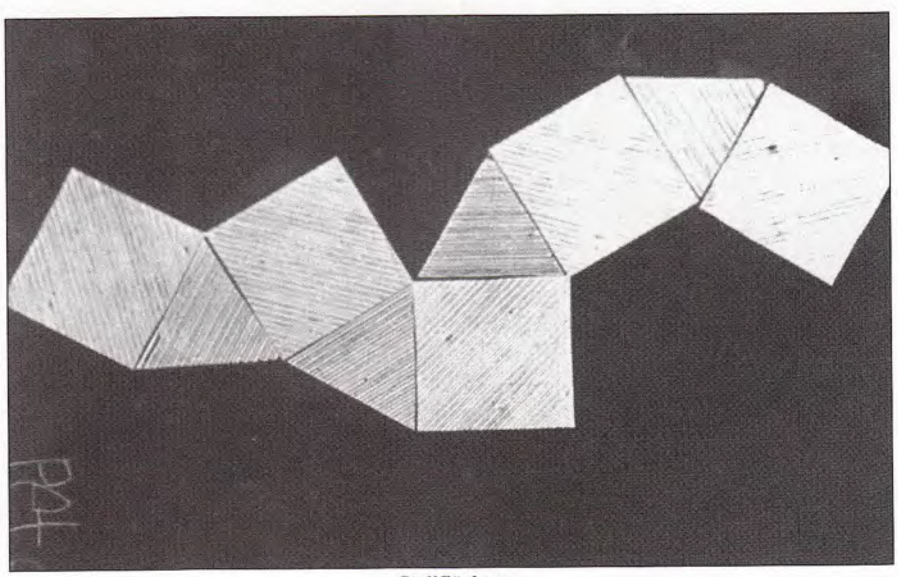
(Diese 'Selbstverständlichkeit' deduktiv abzuleiten, also geometrisch zu beweisen, daß die Flächen identisch in Form und Größe sind, war gar nicht möglich. Bei der Schnittfläche (= Dreieck) diente uns ein Abschnitt als Vergleichsmaß, beim Quadrat waren es vier zur Pyramide zusammengestellte Abschnitte. Dieses Verfahren ist jedoch ein Meßverfahren.)

Michael mußte sich immer wieder durch Anheben des Kerns vergewissern. Den Stand kann man mit einem Stift umfahren. Er ergibt sich auch als Negativ, wenn man das Kernsegment aus den unteren Abschnitten heraushebt.

Was ist ein Schritt?

Was ergibt sich, wenn der Kern gekippt wird und die neue Standfläche markiert wird? Führt man die Kippbewegung des Kerns mehrere Male aus, so ergibt sich ein Weg. Der so entstandene Weg ist die Spur, die der Würfel zurückgelegt hat. Man kann den Weg vorwärts und rückwärts gehen.

Bei Würfel Nr. 5 entsteht ein Weg, bei dem immer ein Dreieck auf ein Quadrat folgt. Beim Würfel Nr. 10 mit seinen Dreiecksflächen entsteht eine vollstän-



Stellflächen

dige Parkettierung. Dieser Kern kann überall hin Schritte machen. Dem Kern von Würfel Nr. 5 gelingt dies nicht.

Rhythmen des Weges

Man kann die einzelnen Wege zu einem großen Weg zusammenfügen. Welche Flächen lassen sich jeweils anschließen? Auf einem solchen zusammengesetzten Feld kann der Kern lange Wege zurücklegen. Mehrere Kerne können darauf Schritte machen.

Figen begleitete die Schritte des Kerns mit einem 'tick-tack-tick-tack'. Bewegung des Kerns und Artikulation des Lauts sind koordiniert. Aus dem von ihr initiierten 'tick-tack', das die anderen Schüler zunächst nachvollzogen, wurden eine ganze Reihe Oppositionspaare ausprobiert:
- schwarz - weiß
- rot - grün
- hoch - tief
- kalt - warm

Die Schüler probieren dann, ob dies auch mit zweisilbigen Wörtern möglich ist:
- Sonnen-brille
- Baum-nest
- Fi-gen usw.

Nähe ist nicht Berührung

Mehrere Kerne können auf dem großen Spielfeld wandern. Dabei entdeckt Anita, daß die Würfelkerne sich zwar annähern, jedoch nicht berühren können.

Das (kleine) Dreieck macht den Kern groß, das (große) Quadrat macht ihn klein

Die Bezeichnungen Dreieck und Quadrat für die beiden unterschiedlichen Flächenformen beim Würfel Nr. 5 wurden erst im Zusammenhang mit dem Sichtbarmachen des Wegs von den Schülern selbst aktiv verwendet. Anita entdeckt bei zwei nebeneinanderliegenden Kernen, daß beide unterschiedlich hoch sind. Wenn der Kern einen Schritt macht „wird er klein". Wie kommt es, daß der Kern einmal groß und dann wieder klein ist?

Die benachbarte Fläche ist anders

Der Kern des Würfels Nr. 5 zeigt Dreieck- und Quadratflächen. Welche angrenzenden, benachbarte (= einander berührende) Flächen gibt es? Welche

Das Wandern des Kerns

Nachbarn hat das Dreieck? Wie viele Nachbarn kann ein Quadrat haben? Wie sehen die aus? Wer sind die Nachbarn des Nachbars? Und wie sehen die aus? Hat jede Fläche gleich viele Nachbarn?

Der Weg ist schon drauf/ Verpackung als Weg

Man kann den Kern mit Quadrat- und Dreiecksflächen 'einpacken'. Mit wie vielen Schnitten läßt sich die Verpakkung zum Netz öffnen? Das offene Netz wird um den Kern gelegt. So läßt sich der Kern wieder verpacken. Weil die Verpackung unterschiedlich geöffnet werden kann, entstehen auch unterschiedliche Netze. Anita: „Das is ja wie 'ne Tür." Figen und Michael gelingt es, das Netz wieder um den Kern zu legen. Michael: „Der Weg ist ja schon drauf."

Der Tetraeder als Kern-Segment beim Würfel Nr. 10

Die vier Flächen des Tetraeders werden mit je einem anderen Farbpunkt markiert. Gerade weil die Flächen gleich sind, ist es notwendig, jede einzelne Fläche zu markieren. Denn wenn Flächen unterschiedlich in Größe/Form/Farbe/ Oberfläche sind, dann ist eine eindeutige Bestimmung bereits durch ein solches Merkmal möglich. Das zeigt sich im übrigen auch beim herkömmlichen Spiel-Würfel: Die auf den Flächen angegebene Augenzahl wird als Bild gelesen. Für die Schüler geben diese Punkte-Bilder nicht die Flächenanzahl wieder.

Warum ist eine Markierung/Bestimmung erforderlich? In welcher 'Situation' taucht diese Frage für die Schüler überhaupt auf?

Als Peter den Würfel Nr. 10 zerlegt, schiebt er die Schalensegmente beiseite, zeigt auf den (Tetraeder-)Kern und sagt: „Das ist ein Dreieck." Figen ergänzt: „Das sind viele Dreiecke." Sie zeigt auf die drei sichtbaren Flächen des Tetraeders, nicht jedoch auf die Standfläche. Darauf weist Nicole hin: „Unten ist auch ein Dreieck."

Was beim Würfel Nr. 5 (Kub-Oktaeder) nicht möglich ist, erproben die Schüler hier spontan: das Zählen der Flächen, wobei die gezählte Fläche jeweils mit einem Finger 'besetzt' wird. Anders als im Bereich der Mengen können hier keine lineare Zählreihen geordnet werden. Die zu zählenden Elemente (in diesem Fall (Flächen) stehen bereits in einer figurierten Ordnung, nämlich der des Tetraeders.

Deshalb sind Zählverfahren an geometrischen Körpern von grundsätzlich eigener Natur. Dies wird insbesondere daran deutlich, daß die Schüler die Tetraeder-Flächen zählend mit jeweils einem Finger abdecken. Im Gegensatz zum Würfel Nr. 5 gelingt dies hier.

Ein weiteres, allerdings von uns nicht genutztes geometrisches Zählverfahren ist das Durchschreiten jeweils benachbarter Flächen. Läßt sich auf der Oberfläche des Kerns ein Weg finden, bei dem jedes Feld (= Tetraeder-Fläche) nur einmal betreten wird?

Zählen (etwa von Kanten oder Flächen) bedeutet hier das Herausfinden der Konstitutionsregel des jeweiligen Körpers. Wir umfahren die Standfläche mit einem Stift und kippen den Tetraeder jeweils um eine Kante seiner Standfläche weiter. Die neue Standfläche wird in gleicher Weise umfahren. Der Tetraeder wird nochmals gekippt usw. Dabei entdecken wir folgendes: Im Gegensatz zum Kern des Würfels Nr. 5 entsteht hier eine geschlossene Parkettierung.

(Vgl. dazu *B. Grünbaum/G. C. Shepard*: Tillings and Patterns, New York , W. H. Freemann & Co., 1986. Einen thematischer Anschluß in unterrichtlicher Hinsicht bietet das Buch von *Doris Schattschneider und Wallace Walker*: M. C. Escher Kaleidozyklen, dt. Berlin, Taco Verlag 1987.)

Mit dem Tetraeder-Kern läßt sich auf einfache Weise ein Flächen-Netz produzieren. Auf diesem so entstandenen Feld kann der Tetraeder nun 'spazierengehen'. Die Schüler erkennen dabei, daß zu jedem Feld verschiedene Wege führen.

Wir haben noch eine andere Möglichkeit ausprobiert: Alle verfügbaren Tetraeder stellen wir so nebeneinander, daß sich die Kanten ihrer Standflächen berühren. Wird die Kantenberührung als Regel beibehalten, so sind daraus nun neue Konstellationen möglich.

Aufgebaut auf der Aufnahmefläche des Kopierers, lassen sich so Fotokopien der Standflächen herstellen. Diese können zu größeren Feldern zusammengesetzt werden.

Nicole möchte die Dreiecksflächen zu einem „riesengroßen Bild" zusammenkleben. Dies erwies sich in kürzester Zeit als äußerst problematisch und gibt deshalb für Figen Anlaß für Verdruß: „Das paßt alles nicht zusammen!" Bereits kleine Toleranzen beim Ausschneiden der Dreiecke und beim Aufkleben machen eine geschlossene Parkettierung unmöglich.

Wir setzen die Untersuchung des Tetraeders fort, indem jede Fläche mit je einem andersfarbigen Markierungspunkt gekennzeichnet wird. Die Schüler haben dazu sieben unterschiedliche Farben zur Auswahl. Werden alle gebraucht?

Der Tetraeder 'stempelt' seine Farbe auf seine jeweilige Standfläche. Hierzu muß der Tertaeder-Kern über eine seiner Kanten auf eine neue Standfläche gekippt werden bzw. im Kippvorgang angehalten werden.

In diesem Zwischenstadium wird nun die Farbe der neuen Standfläche mittels eines farbigen Markierungspunktes auf die Unterlage übertragen, so als würde der Tetraeder-Kern seine jeweilige Standfläche auf die Unterlage stempeln. Wird dieser Vorgang wiederholt, dann entsteht zunächst eine Abfolge von Feld zu Feld als eine Bewegungsspur.

Figen entdeckte, daß auf dem so entstandenen Feld die mit der Spitze aufeinander zeigenden Dreiecke farbgleich sind.

Wird der Kern nicht gedreht (also ausschließlich durch Kippen weiterbewegt), so sind alle Felder eindeutig bestimmt. Es bleibt eine Korrespondenz zwischen Kernsegment und markiertem Feld beibehalten.

Die Schüler probierten immer wieder aus, ob der Tetraeder 'richtig' auf einem weit entfernten gelben, blauen oder grünen Feld zu liegen kommt.

An einem Tetraeder werden die Kanten mit Buntstift nachgezogen: Jede Kante erhält dabei eine andere Farbe. Wir haben den Tetraeder auf einen großen Papierbogen gelegt. Die Standfläche wird so umfahren, daß jede Kante in der ihr eigenen Farbe nachgefahren wird. Danach haben wir den Tetraeder um einen Schritt gekippt und das Verfahren wiederholt. So entsteht eine Rautenparkettierung mit regelmäßig gefärbter Lineatur. In welchem Verhältnis stehen die farbigen Linien zueinander? Welche Linien (= Kantenabdrücke) haben dieselbe Farbe?

Wir brechen an dieser Stelle ab. Unsere Erfahrungen im Umgang mit dem Kuboeder sind noch zu gering, als daß bereits eine unterrichtliche Systematisierung im Sinne eines Lehrganges denkbar wäre.

Aus unserer Sicht ist sie auch nicht notwendig und nur wenig sinnvoll, nicht zuletzt wegen der unterschiedlichen Schülervoraussetzungen. Unsere Erfahrungen im Umgang mit dem Kuboeder bestärken uns vielmehr, die bisher wenig erkannte Fähigkeit geometrischen Denkens unserer Schülerinnen und Schüler durchaus angemessen zu fördern. Es mag irritieren, daß eine solche Förderung häufig neue Fragestellungen für den unterrichtenden Lehrer produziert.

Ein solches geometrisches Denken hat in unterrichtlicher Hinsicht weitreichende Konsequenz. Es ermöglicht nämlich ein rationales Argumentationsschema, das sich und die Schüler nicht vertröstet mit einem ausweichenden „Das ist eben so!"