Coutat, Sylvia; Dorier, Jean-Luc

Comment la corporéité peut-elle intervenir dans l'apprentissage des mathématiques? Quelques références et deux exemples

Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften 38 (2016) 1, S. 23-38

Quellenangabe/ Reference:
Coutat, Sylvia; Dorier, Jean-Luc: Comment la corporéité peut-elle intervenir dans l'apprentissage des mathématiques? Quelques références et deux exemples - In: Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften 38 (2016) 1, S. 23-38 - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-130217 - DOI: 10.25656/01:13021

https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-130217
https://doi.org/10.25656/01:13021

in Kooperation mit / in cooperation with:

Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften
Rivista svizzera di scienze dell'educazione
Revue suisse des sciences de l'éducation

http://www.rsse.ch/index.html

Comment la corporéité peut-elle intervenir dans l'apprentissage des mathématiques? Quelques références et deux exemples

Sylvia Coutat et Jean-Luc Dorier

Malgré la nature formelle et abstraite qui depuis l'antiquité grecque a marqué les mathématiques, le travail du mathématicien n'est pas exempt d'expériences sensibles impliquant la corporéité, qui nourrissent son imagination. Ainsi, dans l'apprentissage de la géométrie, le rapport au monde extérieur à travers le corps est un élément important des expériences spatiales, en particulier chez les très jeunes élèves. Dans cet article, nous développons ce point à travers un exemple de repérage dans l'espace en classe enfantine. Dans un deuxième temps, nous montrons comment le corps et le mouvement, avec la notion de demi-tour peuvent être des éléments essentiels de la conceptualisation des nombres relatifs au secondaire, et aider à comprendre les règles d'addition et de soustraction.

Introduction

Depuis l'âge classique grec, les mathématiques se fondent sur des bases logiques en un système hypothético-déductif, qui se défie de l'illusion des sens. Cette approche axiomatique est au cœur des *Éléments* d'Euclide (3e siècle av. J.-C.), qui ont longtemps représenté l'archétype du traité de géométrie. Cette approche correspond à une façon très profonde de penser le rapport de l'âme au corps. En effet, dans la cosmologie grecque, l'âme représentant la perfection idéale, est pervertie, quand à la naissance humaine elle descend du royaume des dieux dans l'enveloppe charnelle. Ainsi la connaissance vraie, dont la géométrie représente l'exemple le plus abouti, est-elle plus une réminiscence de l'âme, que le fruit d'une expérience sensible.

> Or comme l'âme est immortelle et quelle renaît plusieurs fois, qu'elle a vu à la fois les choses d'ici et celles de l'Hadès [le monde l'Invisible], c'est-à-dire toutes les réalités, il n'y a rien qu'elle n'ait appris. En sorte qu'il n'est pas étonnant qu'elle soit capable, à propos de la vertu comme à propos d'autres choses, de se remémorer ces choses dont elle avait justement, du moins dans un temps antérieur, la connaissance. […] Ainsi le fait de chercher et le fait d'apprendre sont au total, une réminiscence. (Platon – Ménon 81d, trad. 2008, p. 1065)

ISSN 1424-3946

Cependant, malgré l'importance de l'approche axiomatique, croire que le mathématicien n'utilise pas son rapport au sensible pour penser les mathématiques serait une grave erreur. En effet, la prééminence de l'esprit sur le sensible est avant tout une question de légitimité épistémologique et affaire de fondements. L'intuition du monde sensible reste le point de départ de l'entreprise, ce que le mathématicien va traduire en un système de pensée. C'est ce que souligne David Hilbert (1862–1943) en introduction de son fameux traité sur les fondements de la géométrie, qui à l'aube du 20e siècle a permis de parachever l'entreprise euclidienne, en donnant pour la première fois une version complète des axiomes de la géométrie.

> Die Geometrie bedarf — ebenso wie die Arithmetik — zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit Euklid in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Literatur sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus. (Hilbert, 1899, p. 1).[1]

Ainsi aussi abstraits puissent-ils paraître, les axiomes de la géométrie selon Hilbert reflètent des éléments fondamentaux de notre rapport à l'espace et de la façon dont nous percevons et nous mouvons dans la réalité qui nous entoure. L'axiomatique hilbertienne permet de s'assurer de la possibilité «théorique» de pouvoir tout déduire de façon logique d'un petit groupe d'axiomes, mais dans le processus de création mathématique, l'intuition de l'espace reste un moteur essentiel de la pensée.

Il est en effet important de souligner que les mathématiques sont avant tout pensées par des humains dans des contextes précis. Les mathématiques dites modernes ont contribué à véhiculer une image très abstraite des mathématiques, déshumanisées, désincarnées. Sans renier l'importance du formalisme et de la nécessité de fondements logiques, il importe néanmoins de réaffirmer le côté humain des mathématiques et l'importance des intuitions et des expériences concrètes engageant tout notre être dans la production et l'apprentissage des mathématiques. C'est une dimension qui importe à de nombreux chercheurs et praticiens de l'enseignement des mathématiques. Elle a particulièrement été étudiée dans le courant de l'*embodied cognitive science*. Selon cette approche le corps est à la source de toute pensée et de toute conceptualisation, ce que traduit l'idée de l'*embodiement of mind* «The detailed nature and dynamics of our bodies, our brains, and our everyday functioning in the world structure human concepts and human reason. This includes mathematical concepts and mathematical reasons» (Núñez, 2000, p. 5).

Ainsi, Lakoff et Núñez (1997, 2000) en utilisant des outils de linguistique cognitive soutiennent la thèse que les objets mathématiques les plus abstraits ont été créés par l'imagination humaine via des usages spécifiques de mécanismes cognitifs ancrés dans la corporéité (*bodily grounded*), comme les métaphores conceptuelles, les raisonnements analogiques, les mouvements fictifs ou des schémas spécifiques, etc. Un exemple simple de métaphore conceptuelle peut être donné par l'expression «Noël approche» ou «on approche de Noël» qui donne une conceptualisation du temps en termes de déplacement unidirectionnel de l'événement vers nous, ou de nous vers lui. En mathématiques, on retrouve ce genre de métaphore par exemple avec la notion de limite, qui, bien que formellement définie de façon totalement statique, est très fréquemment abordée par des images de mouvement, comme «quand n tend vers l'infini, la suite (u_n) tend vers 2». Núñez, Edwards et Matos (1999) ont ainsi montré que la dualité entre les définitions formelles statiques des notions de limite et de continuité et leur nature fondamentalement dynamique était la source de nombreuses difficultés d'apprentissage.

Selon Lakoff et Núñez, tous les concepts mathématiques seraient le fruit de mécanismes cognitifs «bodily grounded». Núñez (2000, pp.12–15) donne ainsi des exemples liés aux lois de la logique, en lien avec ce qu'il appelle le schéma des récipients (*container schema*):

> In other words, these laws are part of our bodies. Since they do not transcend our bodies, they are not laws of any transcendent reason. The truths of these traditional laws of logic are thus not dogmatic. They are true by virtue of what they mean. (Nunez, 2000, p. 14)

Il donne aussi des exemples de théorie des ensembles. Néanmoins les exemples les plus classiques de référence au corps dans les recherches sur l'enseignement/apprentissage des mathématiques concernent la géométrie (sous divers aspects) et les notions d'analyse. Ainsi dans un numéro spécial de la revue *Educational Studies in Mathematics* intitulé *«Bodily activity and imagination in mathematics»,* publié avec un CD-Rom comprenant des vidéos de classe (Nemirovsky & Borba, 2004), quatre équipes internationales abordent la question de l'utilisation du corps dans l'apprentissage de notions d'analyse mathématique (fonction, limite, dérivée, équation différentielle, etc.) en lien avec la mathématisation du mouvement et les notions de vitesse et d'accélération. Ces différents auteurs font référence à Lakoff et Núñez mais également à d'autres cadres théoriques (que nous ne pouvons pas détailler ici). Dans l'introduction du numéro, les éditeurs soulignent:

> Another reason drawn on to set aside touch, kinesthesia, etc. in mathematics learning is that mathematical entities cannot be «materialized», one cannot touch, say, an infinite series or the set of even numbers. While true, the fact that these entities are imaginable is profoundly connected to perception and bodily action. It is increasingly becoming evident that there is a major overlap between perception and imagination. (Decety, 1996a, b). (Op. cité, p. 304)

Ainsi malgré leur nature souvent abstraite et formelle, les concepts mathématiques peuvent être abordés par le biais d'expériences sensibles engageant le corps et la perception comme support d'une activité cognitive central dans le processus de conceptualisation. Un autre exemple est celui des techniques de comptage sur les doigts, mais aussi la fonction de représentation du numérique par les doigts, y compris comme appui des premières opérations.

La taille de notre article ne nous permet ni d'être exhaustif, ni de trop détailler les quelques exemples que l'on peut aborder. Ce rapide tour d'horizon aura toutefois permis de se faire une idée de la diversité des entrées possibles dans la question du rôle de la corporéité dans l'apprentissage des mathématiques. Dans le peu de place qui nous reste, nous voudrions présenter deux exemples bien distincts pour rendre compte de façon un peu plus détaillée de cette diversité. Le premier exemple présente une expérimentation dans une classe enfantine (élèves de 4-6 ans) et touche à la question de la structuration de l'espace. Ce sera pour nous l'occasion d'aborder succinctement quelques aspects généraux de ce qui est certainement l'endroit où la question de la corporéité est la plus classiquement abordée dans les recherches sur l'enseignement/apprentissage des mathématiques. Au contraire, nous avons choisi un deuxième exemple moins classique, qui ne touche ni à la géométrie, ni à l'analyse, ni à la logique mais aborde la question du négatif, et plus précisément des règles des opérations sur les nombres relatifs. Nous aborderons ce point de façon plus prospective, sans évoquer d'expérimentation, même si nous nous référons à une activité d'un manuel. Notre analyse prendra en compte un lien avec les travaux de Lakoff et Núñez évoqués plus haut. Faute d'avoir pu détailler toute la diversité, nous espérons que nous aurons ainsi pu donner au lecteur quelques références essentielles et deux exemples, un classique et un ouvrant sur une tout autre piste.

Jeux de rôle et repérage dans l'espace un exemple d'apprentissage de la structuration de l'espace dans les classes enfantines

Dans l'intuition du monde sensible, le corps est un élément central, car il est notre premier rapport à notre environnement. Notre corporéité consiste en l'ensemble des relations que nous construisons de notre propre corps au monde.

Depuis les années septante, des travaux de psychologie ont mis en évidence et analysé la complexité du processus d'acquisition de l'espace par l'enfant et le rôle fondamental joué par le corps. Des travaux comme ceux de Lurçat (1976) ont ainsi servi de point d'appui pour penser de nombreuses activités qui déterminent ce qu'on appelle la *structuration de l'espace* dans les classes enfantines (ou maternelles pour reprendre l'expression française).

Le thème de l'espace est un peu «touche-à-tout»: on y trouve les activités qui apprennent à l'enfant à se situer dans l'espace, à prendre progressivement conscience de soi et des autres (schéma corporel, environnement), à se repérer et à repérer des objets en fonction d'indications de localisation (verbalisées

> ou dessinées); on y aborde les représentations socialement valorisées (photos, plans, etc.); on y trouve aussi les activités de préparation à la lecture ou l'écriture, dans la mesure où elles s'appuient sur une maîtrise de l'espace graphique. (Bolon 1983, p. 7)

Toutefois la question du rapport dialectique entre les connaissances spatiales et celles propres à la géométrie n'est pas toujours facile à élucider. Berthelot et Salin (1992, 1993) ont donné un éclairage nouveau à cette question, grâce à leurs travaux de didactique des mathématiques dans l'équipe de Brousseau.

> Ce que la tradition appelle «enseignement de la géométrie» renvoie, à l'école primaire à deux champs de connaissances: d'une part celui des connaissances nécessaires à l'enfant pour contrôler ses rapports usuels à l'espace, champ désigné depuis une dizaine d'années par «structuration de l'espace», d'autre part celui de la géométrie proprement dite. Toutefois, la distinction entre ces deux champs n'est pas très claire […] (Bertelot & Salin 1992-1993, p. 39)

Ainsi ces auteurs distinguent les «connaissances spatiales, nécessaires à la maitrise des problèmes qui se posent à tout individu dans ses rapports avec l'espace», de celles qui relèvent de la géométrie, en tant que savoir mathématique. Dans le paradigme des situations didactiques de Brousseau, la question fondamentale du rapport dialectique entre ces deux types de connaissances apparaît comme le moteur de la construction des ingénieries didactiques pour l'acquisition des connaissances géométriques du primaire. La corporéité est la source première du rapport à l'espace que tout enfant a construit déjà hors de l'école, il s'agit de s'appuyer sur celle-ci pour dévoluer à l'élève un problème qui prend sens dans son rapport à l'espace et le conduit à construire de nouvelles connaissances, qui vont progressivement amener aux savoirs géométriques. L'important est de susciter l'apprentissage de la géométrie par la prise en compte d'une problématique liée au rapport à l'espace, et en retour, de perfectionner le rapport à l'espace des élèves par une meilleure maitrise des connaissances géométriques.

C'est dans cette visée que Masselot et Zin (2008) ont conçu une situation de formation par homologie centrée sur la structuration de l'espace à l'école primaire, dont nous donnons brièvement quelques éléments. Au cours de cette situation, les participants à la formation doivent prendre conscience des connaissances utiles ou des difficultés envisageables à propos de l'orientation et la prise de repérage. La situation met en scène des petits objets de plastique disposés sur un plateau, comprenant une chaise et trois figurines (Image 1). Chaque figurine à un chapeau spécifique. Parmi les participants, trois d'entre eux sont des «acteurs» associés aux personnages en plastiques alors que les autres sont des observateurs. Une chaise en vraie grandeur est associée à la chaise en plastique. Avant de mettre en place la scène des figurines, un participant (P) sort de la salle. Les trois figurines sont placées autour de la chaise en plastique. Chaque participant acteur reçoit une reproduction en vraie grandeur d'un chapeau. La chaise en vraie grandeur est placée au milieu de la pièce dans une orientation différente de celle en plastique. Chaque acteur doit se placer comme la figurine à laquelle il est associé par son chapeau. Une fois que les positions des acteurs sont validées par tous les participants, le plateau de la scène des figurines est tourné pour que les deux chaises soient dans la même orientation. Cela permet de valider les positions des acteurs. Une fois les positions validées, les acteurs gardent leur position, redonnent leur chapeau et le plateau des figurines est placé dans sa position initiale. Le participant (P) entre dans la salle et redistribue les chapeaux à leur propriétaire.

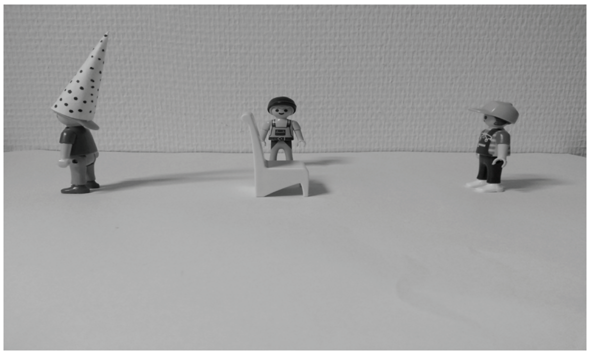


Image 1

Plusieurs repérages sont possibles pour spécifier la position des figurines, nous en illustrons trois à l'aide d'exemples s'appuyant sur des descriptions de l'*Image 1*. Dans un premier temps nous ne considérons pas l'orientation ni de leur bras, ni de leur tête. Une première description peut définir les positions des figurines par rapport à la chaise: la figurine au chapeau blanc est devant la chaise[2], la figurine au chapeau noir est à la gauche de la chaise, enfin la figurine au chapeau pointu est derrière la chaise. Ce premier système de repérage (SR pour la suite) est centré autour de la chaise et tous les objets sont définis par rapport à la chaise (SR-chaise). Il est aussi possible de définir la position de deux figurines par rapport à la troisième, cette dernière étant positionnée par rapport à la chaise. Par exemple, la figurine au chapeau noir est à gauche de la chaise, la figurine au chapeau blanc est à la gauche de la figurine au chapeau noir et la figurine au chapeau pointu, à sa droite. Le système de repérage de cette deuxième description est centré sur une figurine, elle-même positionnée par la chaise (SR-fig-chaise). Une troisième description n'utilisant que les figurines peut être utilisée: la figurine au chapeau noir est dos au mur, la figurine au chapeau blanc est à sa gauche, la figurine au chapeau pointu est à droite de la figurine au chapeau noir. Ce troisième exemple utilise un système de repérage centré sur une figurine (chapeau noir) complété par le mur, un élément extérieur à la scène (SR-fig-ext). En utilisant un élément extérieur, ce système de repérage a une efficacité limitée. En effet dans le cas où la chaise en plastique et la chaise de la classe ont la même orientation, définir la position d'une figurine par rapport à un élément extérieur, comme le mur, permet de reproduire fidèlement la position de la figurine. Cependant, lorsque les deux chaises n'ont pas la même orientation, comme dans la situation de formation, la position de l'acteur dans la scène des participants ne sera pas la même que celle de la figurine associée dans la scène avec les figurines. Un système de repérage qui n'utilise que des éléments appartenant à la scène, a un domaine de validité plus large.

Ces descriptions de l'*Image 1* utilisent un point de vue objectif. C'est-à-dire qu'elles sont indépendantes de la position de la personne qui donne la description. Il est aussi possible d'utiliser le point de vue d'un des objets de la scène. C'est-à-dire en se projetant dans la scène à la place de la chaise ou de l'une des figurines. Un tel point de vu influence le système de repérage utilisé: si on utilise le point de vue depuis la chaise alors on favorise le SR-chaise, le point de vu d'une figurine favorise SR-fig-chaise ou SR-fig-ext.

Nous avons retenu ces éléments du travail original de Masselot et Zin (2008). De notre côté, nous avons expérimenté cette situation directement avec des élèves de 2P et nous avons centré nos analyses plus spécifiquement sur la place du corps du point de vue des élèves. Les objectifs d'apprentissage liés à la structuration dans l'espace pour ces degrés sont présentés dans le Plan d'études romand (PER)[1] dans l'axe thématique *Espace*:

> Détermination de sa position ou celle d'un objet (devant, derrière, à côté, sur, sous, entre, à l'intérieur, à l'extérieur, …) selon différents points de repères. (PER, 2011, p. 14)

Parmi les élèves de la classe, trois sont les acteurs et trois autres élèves sont des costumiers, ils redistribuent les chapeaux aux acteurs (participant P). Les autres élèves sont les juges, ils valident la position des acteurs. La mise en scène de la situation de formation est reprise, avec comme adaptation l'orientation des deux chaises. Les positions relatives des deux chaises (celle des élèves et celle des figurines) correspondent à une variable didactique importante de la situation. En effet, lorsque les deux chaises sont dans la même configuration, les trois systèmes de repérage identifiés plus haut sont tous efficaces. Lorsque les deux chaises ont des orientations différentes, seuls le SR-chaise et le SR-fig-chaise permettent une bonne réponse, le SR-fig-ext devient inefficace. Pour la première séance les deux chaises ont la même orientation, ce qui permet aux élèves de s'approprier l'activité en offrant un large éventail de stratégies de résolution. Lors d'une deuxième séance, on place les deux chaises dans des orientations différentes. Le plateau des figurines ne peut être tourné qu'à la fin pour valider la position des acteurs.

Voici un exemple d'un élève acteur qui utilise un SR-fig-ext. Une fois que les acteurs ont leur chapeau, l'enseignante tourne le plateau des figurines pour que l'orientation de la chaise des figurines soit différente de celle de la chaise de la classe, pendant ce temps les acteurs ajustent leur position. Un des acteurs, nous l'appellerons acteur A, regarde le plateau tourner et reproduit le même mouvement que sa figurine associée. On peut en conclure que pour cet élève-acteur, le système de référence est centré sur sa propre figurine et ses relations avec les éléments extérieurs à la scène (SR-fig-ext). Pendant le mouvement du plateau, les deux autres acteurs ne bougent pas. Ces deux acteurs utilisent un système de repérage qui s'appuie sur les éléments de la scène. Cependant une fois que le plateau est dans sa position finale, l'acteur A se trouve à côté de l'acteur B. Les deux élèves-acteurs partagent la même place… ils chuchotent, regardent le plateau des figurines et, finalement, l'acteur A garde sa position et l'acteur B se déplace en réalisant le même mouvement que celui du plateau. Les deux acteurs ont reproduit la scène des figurines sans prendre en compte l'orientation de la chaise de la classe, mais seulement les relations de leur figurine avec les éléments extérieurs. Le troisième acteur reste silencieux et spectateur de ces déplacements.

Cette difficulté des élèves acteurs dans la mobilisation d'un système de repérage efficace pourrait s'expliquer par le fait que les élèves sont au cœur de l'espace de travail; dans cette configuration, l'espace de travail est ce qu'on appelle le meso-espace (Brousseau, 2000). Le corps des élèves acteurs est lui-même objet d'étude dans l'espace de travail. Au contraire les juges étant spectateurs des deux scènes (figurines et élèves acteurs), l'espace de travail est devant eux, ils en ont une perception globale. Pour les juges, cet espace de travail est donc de l'ordre du micro-espace.

Une deuxième difficulté des acteurs est liée à une double exploration. Les acteurs doivent se positionner dans la scène relativement aux objets de la scène, et ils doivent positionner les éléments de leur corps fidèlement à leur modèle. Dans les exemples de descriptions de l'*Image 1*, nous avons omis volontairement de préciser l'orientation des membres des figurines afin de nous focaliser sur les systèmes de repérage et les différents points de vue. Or, l'identification de l'orientation des membres des figurines est indépendante de la détermination de la position à prendre au sein de la scène. En effet, lorsque l'acteur doit se positionner relativement à la chaise, les autres figurines ou un élément extérieur, il utilise un système de repérage qui s'appuie ou non sur les éléments de la scène. Lorsqu'il doit positionner les éléments de son corps comme ceux de la figurine modèle il doit placer son corps au centre du repère, et ce sont sa tête et ses membres qu'il doit positionner. Dans un cas l'acteur doit identifier la position de son corps relativement à d'autres objets, dans l'autre cas, ce sont les éléments de son corps qui doivent être positionnés relativement à son propre corps. Ces deux composantes dans l'identification de la place de l'acteur nous semblent compliquer la tâche des élèves, c'est pour cela que nous avons choisi des configurations simples des membres des figurines: la tête droite et les deux bras légèrement en avant. Lors de notre observation, les acteurs sont plus focalisés sur leur position dans la scène que sur la position de leurs membres. Les juges étant à l'extérieur de l'espace ont un point de vue global sur l'ensemble des deux scènes et signalent rapidement les différences tant dans la position des membres que dans la position des acteurs dans la scène. En effet, en plus d'être vigilant sur la posture des corps, les juges sont pointilleux sur la position des élèves-acteurs dans la scène: «lui il [montre un acteur] est plus devant et lui il [montre la figurine associée] est moins devant». Cependant ils n'identifient pas toujours des positions invalides, ce qui nous interroge sur leur système de repérage. Le rôle des juges qui pourrait sembler anodin, dans le sens où ils ne sont pas impliqués physiquement dans les mises en scène, peut s'avérer être plus complexe qu'on ne croit, du fait d'un point de vue global impliquant un système de repérage objectif.

Les costumiers ont la liberté de se placer dans l'espace de travail comme les acteurs, ou en dehors des scènes, comme les juges, ce qui leur donne une grande liberté dans le choix d'un SR et d'un point de vue.

Dans cette activité, chaque rôle implique un engagement du corps spécifique. Les acteurs impliqués physiquement dans la scène doivent construire des systèmes de repérage engageant leur corps. Les juges sont à l'extérieur de l'espace de travail et doivent utiliser leur propre point de vue. Si les élèves-acteurs doivent utiliser leurs corps dans l'action, les élèves-juges doivent quant à eux projeter mentalement leur corps dans les scènes. Enfin les costumiers peuvent choisir de se positionner dans l'espace de travail comme les acteurs ou à l'extérieur de l'espace de travail comme les juges. Cette situation d'apprentissage permet de mettre en place les prémisses à l'élaboration de systèmes de repérage en s'appuyant sur des connaissances spatiales et le corps des élèves. Cette première étape impliquant explicitement le corps peut être suivie de situations plus abstraites où le corps est progressivement désengagé au profit de représentations mentales des scènes, comme présenté dans les autres situations de formation de Masselot et Zin (2008).

Nous passons à présent à notre deuxième exemple, qui n'a rien à voir avec ce qui précède. Il vise à analyser comment le concept de négatif peut être lié à une perception corporelle du demi tour, du sens opposé sur une même direction et de la marche arrière, ce qui ouvre sur les concepts de nombres complexes et de vecteurs.

Corporéité et perception du négatif

Dans ce paragraphe nous faisons une analyse épistémologique succincte de la notion de négatif. Puis nous débouchons sur quelques considérations d'ordre didactique que nous appliquerons à l'analyse d'une activité issue du manuel suisse romand de 9e (premier niveau du secondaire 1, élève de 12 ans).

Une certaine idée du négatif est apparue très tôt dans les mathématiques, mais a mis très longtemps à se formaliser par la notion de nombre négatif tel que nous le concevons aujourd'hui. De fait, derrière ce concept, se cachent de dangereux pièges de notre intuition. Ainsi dans son *Algebra* de 1673, le mathématicien anglais John Wallis (1616–1703) utilise une métaphore conceptuelle, au sens de Lakoff et Núñez, en traduisant les opérations sur des nombres en termes de déplacement d'un personnage dans une direction selon deux sens (avant et arrière). C'est ce que Núñez (2000) appelle une métaphore fondatrice «*Grounding metaphors*, which ground our understanding of mathematical ideas in terms of everyday experience. In these cases, the target domain of the metaphor is mathematical, but the source domain lies outside of mathematics.» (Op. cité, p. 9).

Wallis montre la difficulté de rendre compte du déplacement d'un personnage sur une ligne droite, qui après avoir avancé de A à C de 5 yards, reculerait de C à D de 8 yards. En effet la question qui se pose alors est: «De combien est-il plus avancé quand il est à D, ou plutôt de combien plus avant est-il que quand il était en A? Je dis –3 (car +5–8=–3). C'est-à-dire qu'il est avancé de 3 yards moins que rien»[3]. On voit ici la difficulté langagière à rendre compte d'une situation pourtant banale de déplacement rectiligne, mettant en jeu deux sens opposés. Cette difficulté se heurte au modèle dominant du négatif, vu comme «moins que rien», «ce qui est en dessous du zéro», comme les thermomètres, les ascenseurs où les niveaux sous la mer…

> C'est bien cet effort de mobilisation qui constitue la dignité ontologique du négatif, et Kant qualifie d'absurde l'idée selon laquelle «les grandeurs négatives seraient moins que rien». Le nombre négatif n'est pas disposé dans une échelle simplement «en dessous» de celle des positifs. Le zéro, «ce rien relatif», est produit par une expérience de pensée, par un dispositif de compensation capable d'envelopper un Deux de manière minimale. (Châtelet 1993, p. 128)

Dépasser cette difficulté nécessite une petite révolution dans l'usage de la métaphore, qui consiste à se retourner, et donc à faire intervenir le demi-tour. C'est ce que fait Wallis: «Mais si (contrairement à la supposition), la ligne est prolongée de A en arrière, on va trouver D, 3 yards derrière A (qui était censé être devant)[4]».

L'idée essentielle ici est de penser (en terme de métaphore conceptuelle) que le point *A* qui correspond au 0 n'est pas un *point repoussoir* sous lequel on descend mais plutôt un *point d'articulation* autour duquel s'effectue l'opposition.

Dans le même ordre d'idée, dans son passionnant traité philosophique, qui propose une métaphysique des rapports entre mathématiques et physique sur le mobile, Châtelet (1993) fait une analyse fine de l'approche du mathématicien (amateur) genevois Jean-Robert Argand (1768–1822). Celui-ci veut donner une légitimité aux quantités imaginaires (c'est-à-dire aux racines des quantités négatives, ce que l'on appelle aujourd'hui les nombres complexes) et il commence par donner sa vision des «quantités d'un genre susceptible de fournir des valeurs négatives» (dire nombres négatifs ou et encore plus nombres complexes serait un anachronisme). Après avoir montré les limites des modèles cumulatifs, Argand en vient à utiliser la métaphore conceptuelle de la balance, qui comme celle de Wallis a l'avantage de mettre en évidence le rôle de point d'articulation du 0 et ce faisant d'ouvrir l'opposition positif/négatif sur l'étendue de l'espace. Ce que Châtelet appelle «l'offensive de la latéralité».

> L'orientation doit creuser très loin, car ce n'est qu'au début du 19e siècle que se déchaîne l'offensive du latéral. Le négatif, comme inséré et situé, est reconnu en tant que force délivrant en même temps l'algèbre de la successivité et la géométrie du cliché spatial; il brise enfin la frontière qui séparait alors intuition spatiale et entendement déductif, délimitant strictement le domaine de l'algèbre (la science des magnitudes) et de la géométrie (la science des figures). (Chatelet, 1993, p. 122)

En effet partant de là, Argand donne son interprétation de la racine de (–1). En effet (-1) est vu comme le produit (+1)×(–1) dont la racine carrée est la moyenne géométrique de ces deux quantités qui combine une grandeur absolue (ici c'est 1 les deux fois donc la moyenne est clairement 1) et une direction et un sens. Or, les directions des deux étant identiques mais de sens opposés, la direction moyenne est perpendiculaire à la direction de départ, avec les deux sens opposés.

On voit ici toute la productivité comme métaphore conceptuelle du 0 comme point d'articulation, du négatif comme sens opposé moyennant un retournement qui met en avant le caractère involutif du signe «–». Voir le 0 comme point d'articulation c'est bien sortir de la dualité axiale du positif versus le négatif et ouvrir sur l'espace et les dimensions, ce qui est le point de départ de la représentation géométrique des quantités imaginaire, qui débouchera sur la notion de vecteur et de grandeurs extensives chez Grassmann (on renvoie le lecteur intéressé à la lecture de Châtelet).

Du point de vue didactique, la puissance de cette métaphore nous interpelle. Elle permet de donner aux élèves une représentation la plus large possible de la notion de négatif. En particulier elle permet de bien rendre compte des trois significations bien distinctes que le signe «–» revêt:

Tableau 1

Signification du signe «–»	Interprétation dans la métaphore
Le signe négatif attaché à un nombre (–3)	3 pas en regardant vers le négatif
Le signe de la soustraction	Marcher en arrière (reculer)
Le signe de l'opposition: – (–3) = (+3)	Le retournement ou demi-tour

La force des mathématiques c'est d'encapsuler dans un petit trait horizontal à la fois le regard bilatéral, le mouvement avant et arrière et le demi-tour – une corporéité brimée? Ou sublimée?

Il est indispensable que ces trois significations puissent être comprises séparément et se combiner pour pouvoir opérer correctement avec les nombres relatifs.

Dans les moyens d'enseignement romands pour le Cycle d'orientation[5], il existe quelques activités qui proposent d'utiliser avec les élèves un petit bonhomme qui se déplace sur une droite graduée orientée (voir annexe) pour aider à comprendre les règles d'addition et de soustraction des nombres relatifs. On y retrouve exactement tous les ingrédients de la métaphore tels que nous venons de les détailler. Au départ le bonhomme doit regarder vers le sens positif ou négatif de la droite suivant le signe du premier nombre de l'opération (première signification), ensuite il avance de la valeur absolue du nombre, puis il regarde vers le sens positif ou négatif selon le signe du deuxième nombre, et avance ou recule (selon qu'on additionne ou soustrait, deuxième signification du signe) de la valeur absolue du nombre. Tout changement de signe d'un nombre à l'autre donne lieu à un demi-tour du bonhomme (troisième signification du moins).

Nous n'avons jamais fait d'étude expérimentale sur cette activité. Nous savons par les contacts que nous avons eu en formation continue que les enseignants genevois ont en général une opinion très tranchée sur ces activités: ils adorent ou ils détestent. Ceux qui détestent les trouvent chronophages et infantilisantes. Ceux qui les utilisent pour aider les élèves qui ont du mal à opérer avec les nombres négatifs, disent souvent faire une vraie mise en scène dans la classe et donc engager la corporéité comme moyen de transaction dans l'apprentissage du négatif, ou plutôt des trois significations du négatif. En particulier, la fameuse règle du «moins par moins ça fait plus» qui pose tant de difficulté, devient dans cette métaphore: «si je recule en regardant vers le négatif c'est comme si j'avançais en regardant vers le positif!».

La puissance de cette métaphore est aussi liée à son potentiel à se généraliser au-delà dans l'accès aux nombres complexes et aux vecteurs. C'est alors une métaphore de liaison (*linking metaphor* au sens de Núñez, 2000) qui est en jeu: la conceptualisation du vecteur passe par la prise en considération du négatif en géométrie.

Conclusions

Nous avons totalement conscience que cet article n'a pu ni présenter un panorama exhaustif des interventions possibles de la corporéité dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques, ni même creuser les quelques situations abordées. Nous espérons toutefois avoir pu donner une idée de l'étendue des approches possibles, qui ne se limitent pas à la question de la structuration de l'espace, comme le prouve l'exemple du paragraphe précédent.

Pour conclure, nous voudrions soulever quelques questions qui relèvent spécifiquement de cette dimension de structuration de l'espace et touche de façon essentielle à la question de la corporéité.

Les mathématiques participent de la construction sociale du rapport à l'espace, dès le plus jeune âge. Cela prépare non seulement le citoyen, mais aussi des compétences utiles dans de nombreux métiers, comme les métiers du bâtiment, des transports ou de l'industrie. Or, la généralisation des réalités virtuelles que les enfants côtoient très jeunes, avec les jeux vidéos en particulier, ou plus tard avec les GPS, et les représentations en 3 dimensions change totalement le rapport à l'espace et ses représentations. C'est une transformation sociale d'une grande ampleur, qui touche la vie quotidienne mais aussi de nombreux contextes professionnels. La lecture de plans statiques en deux dimensions pour se mouvoir et travailler dans l'espace environnant n'est certainement plus l'accès privilégié à la représentation de celui-ci, ce qui constitue une mutation profonde et sans précédent. Cela remet en cause l'usage de la feuille de papier comme moyen privilégié de représentation de l'espace en géométrie. C'est un chantier immense pour la didactique des mathématiques et la psychologie cognitive, chantier qui, à notre connaissance, n'a pour l'instant été que très peu investigué.

Notes

1 Comme l'arithmétique, la géométrie n'exige pour son élaboration qu'un petit nombre de propositions fondamentales simples. Ces propositions sont les axiomes de la géométrie. Depuis Euclide, l'établissement de ces axiomes et l'étude de leurs relations ont fait l'objet de travaux nombreux et excellents. Ce problème est celui de l'analyse de notre intuition de l'espace. (Traduction française de l'édition commentée de P. Rossier, 1971. Paris: Dunod)

2 La chaise est un objet orienté, l'orientation sous-entendue étant celle d'une personne fictive assise sur la chaise.

3 Notre traduction de la traduction anglaise (ci-après) par J. Smith de l'original latin. «How much he is Advanced when at D, or how much Forwarder than when he was at A: I say -3 Yards. (Because +5 – 8 = – 3.) That is to say, he is advanced 3 Yards less than nothing.» (Smith, 1959, p. 47)

4 But if (contrary to the Supposition) the Line from A, be continued Backward, we shall find D, 3 Yards Behind A. (Which was presumed to be Before it).

5 Nom donné au degré secondaire 1 à Genève, à Fribourg et en Valais, soit les degrés 9-10-11 dans le système suisse HarmoS. Le secondaire 1 accueille des élèves âgés de 12 à15 ans.

Bibliographie

Argand, J.-R. (1806). Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques. *Annales de mathématiques* IV, 134–147.

Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux 1.

Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1992-1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N,* 53, 39–56.

Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1993). *Conditions didactiques de l'apprentissage des plans et cartes dans l'enseignement élémentaire. Espaces Graphiques et Graphismes d'Espaces.* Grenoble: La pensée sauvage.

Bolon, J. (1983). Représentation de l'espace, organisation de l'espace. *Grand N*, 30, 5–25.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. Communication présentée à l'Université de Crète, Rethymnon, Greece. Consulté 17 septembre 2015 dans http://guy-brousseau.com/155/les-proprietes-didactiques-de-lageometrie-elementaire/

Châtelet, G. (1993). *Les enjeux du mobile*. Paris: Seuil.

Decety, J. (1996a). Do imagined and executed actions share the same neural substrate? *Cognitive brain research*, 3, (2), 75–86.

Decety, J. (1996b). The neurophysiological basis of motor imaginary. *Behavioral and brain research*, 77, 45–52

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner.

Lakoff, G. & Núñez, R. (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In L. English (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lurçat, L. (1976). *L'enfant et l'espace–Le rôle du corps*. Paris: Presses Universitaires de France.

Masselot, P. & Zin, I. (2008). Exemple d'une situation de formation pour aborder la structuration de l'espace aux cycles 1 et 2, *Actes du XXXIV[e] colloque COPIRELEM*, IREM, Université Paris 7: Paris.

Nemierovsky, R. & Borba, M. (Ed.) (2004) Bodily activitiy and imagination in mathematics learning – PME special issue. *Educational studies in mathematics,* 57, (3), 301-324.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. Opening plenary address in *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1.1, pp. 3–22). Hiroshima, Japan.

Núñez, R., Edwards, L. & Matos, J.F. (1999). Embodied Cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 45–65.

Platon (2008). Œuvres complètes, traduction française sous la direction de L. Brisson. Paris: Flammarion.

Hilbert, D. (1971). *Les fondements de la géométrie édition critique préparée par Paul Rossier*. Dunod, Paris.

Smith, D. E. (1959). A *source book in mathematics*. New-York: Dover.

Note

1 CIIP (2010). *Plan d'études romand* (PER) Neuchâtel: CIIP. Consulté le 17 septembre 2015 dans https://www.plandetudes.ch

Mots-clés: Mathématiques, nombre négatifs, repérage dans l'espace

Wie kann unsere Körperlichkeit das Lernen von Mathematik unterstützen? Einige Referenzen und Beispiele

Zusammenfassung

Seit der griechischen Antike gehören formale und abstrakte Aspekte zur Mathematik. Dennoch ist mathematisches Arbeiten nicht möglich ohne sinnliche Erfahrungen – und damit unsere Körperlichkeit –, auf die sich unter anderem die Vorstellungskraft stützt. Gerade beim Lernen von Geometrie stellt unser Körper den Bezug zur Außenwelt her und vermittelt damit räumliche Erfahrungen, besonders bei Kindern. In diesem Beitrag entwickeln wir diesen Punkt anhand einer Standortbestimmung im Kindergarten weiter. Im zweiten Teil zeigen wir, was der Körper und seine Bewegung – genauer: die Halbdrehung – für die Begriffsbildung von negativen Zahlen bedeuten kann und dabei hilft, die Regeln für die Addition und Subtraktion zu verstehen.

Schlagworte: Mathematik, Geometrie, räumliches Wissen, Verfolgung, negative Zahl, Standortbestimmung.

In che modo la corporeità può contribuire all'apprendimento della matematica? Alcuni riferimenti e due esempi.

Riassunto

Malgrado la natura formale e astratta che dall'antichità greca ha contraddistinto la matematica, il lavoro del matematico non è esente da esperienze sensibili che implicano la corporeità. Così, nell'apprendimento della geometria, il rapporto al mondo esterno attraverso il corpo è un elemento importante dell'esperienza spaziale, in particolare per il giovane alunno. Nell'articolo svilupperemo questo punto attraverso un esempio di posizionamento nello spazio in allievi di scuola dell'infanzia. In un secondo tempo, mostreremo come il corpo e il movimento, in riferimento alla nozione di mezzo giro, possano essere degli elementi essenziali per la concettualizzazione dei numeri relativi nella scuola secondaria e per aiutare a comprendere le regole dell'addizione e della sottrazione.

Parole-chiave: Matematica, geometria, conoscenza spaziale, posizionamento nello spazio, numeri negativi, mezzo giro.

How can corporeality be involved in learning mathematics? Some references and two examples

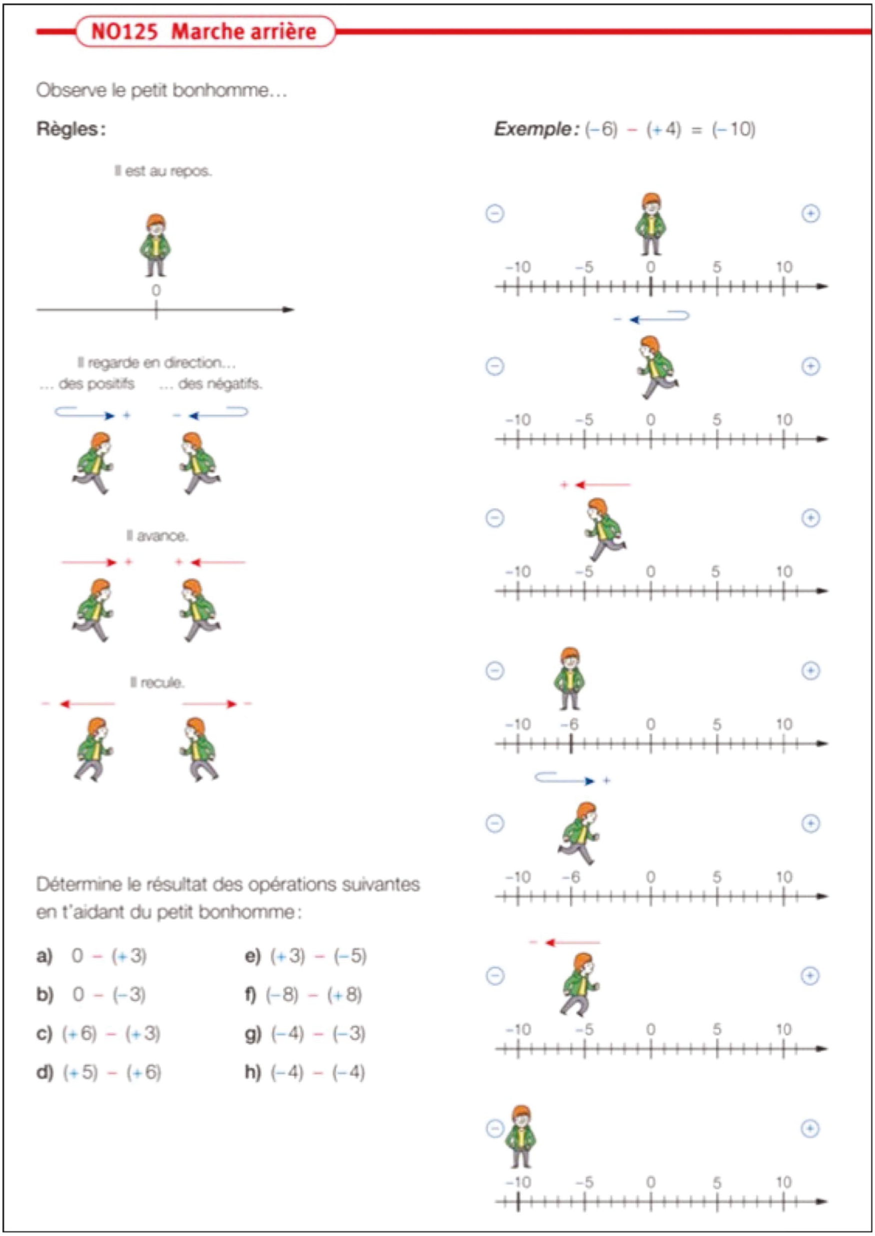
Abstract

Despite the formal and abstract nature that characterises mathematics since antique Greece, the work of mathematicians is not deprived of sensitive experiences involving the body that nourish their imagination. Thus, in the learning of geometry, the relation to the external world through the body is an important element of spatial experiences, in particular with very young students. In this paper, we tackle this issue through a situation of spatial localisation in kindergarten. Furthermore, we show how body and movement in association with the notion of half-turn may be essential components of negative numbers conceptualisation, and might help understanding addition and subtraction rules.

Keywords: Mathematics, geometry, spatial knowledge, spatial localisation, negative number, half turn.

Annexe

Extrait de Mathématiques 9-10-11, moyens d'enseignement romands, livre 9e p. 40.



NO125 Marche arrière

Observe le petit bonhomme…

Règles :

Il est au repos.

Il regarde en direction…
… des positifs … des négatifs.

Il avance.

Il recule.

Exemple : $(-6) - (+4) = (-10)$

Détermine le résultat des opérations suivantes en t'aidant du petit bonhomme :

a) $0 - (+3)$ **e)** $(+3) - (-5)$

b) $0 - (-3)$ **f)** $(-8) - (+8)$

c) $(+6) - (+3)$ **g)** $(-4) - (-3)$

d) $(+5) - (+6)$ **h)** $(-4) - (-4)$