Wittmann, Erich Ch.

Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht

Wittmann, Erich Ch. [Hrsg.]; Müller, Gerhard N. [Hrsg.]: Mit Kindern rechnen. Frankfurt am Main : Arbeitskreis Grundschule e.V. 1995, S. 10-41. - (Beiträge zur Reform der Grundschule; 96)

Quellenangabe/ Reference:
Wittmann, Erich Ch.: Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht - In: Wittmann, Erich Ch. [Hrsg.]; Müller, Gerhard N. [Hrsg.]: Mit Kindern rechnen. Frankfurt am Main : Arbeitskreis Grundschule e.V. 1995, S. 10-41 - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-174959 - DOI: 10.25656/01:17495

https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-174959
https://doi.org/10.25656/01:17495

Erich Ch. Wittmann

Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht

– vom Kind und vom Fach aus

Im vorliegenden Beitrag soll die immer stärkere und breitere Entwicklung des Rechenunterrichts der Grundschule hin zu aktiv-entdeckenden Lehr-/Lernformen einerseits von einem grundsätzlichen Standpunkt aus beleuchtet werden. Andererseits soll dieses Unterrichtskonzept durch eine Reihe von typischen Praxisbeispielen verdeutlicht werden. Leserinnen und Leser sollen m.a.W. ein Bild von der Theorie und Praxis des aktiv-entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht erhalten.

Der Beitrag ist folgendermaßen gegliedert:

Der erste Abschnitt zeigt in Grundzügen auf, wie sich das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens seit der Reformpädagogik in einem historischen Prozeß geformt und allmählich durchgesetzt hat.

Im zweiten Abschnitt wird das Konzept aus psychologischer, fachlicher und gesellschaftspolitischer Sicht als stufenübergreifendes Lehr-/Lernkonzept begründet.

Der dritte Abschnitt beschreibt den fachlichen Rahmen aktiv-entdeckender Lernprozesse im Rechenunterricht in Form von Grundideen der Arithmetik, die sich über die Schuljahre hinweg spiralmäßig entfalten lassen.

In engem Bezug zu den Grundideen der Arithmetik wird im vierten Abschnitt eine Sichtweise von Anschauungs- und Arbeitsmitteln entwickelt, die unter der Devise «Weniger ist mehr» steht.

Im fünftem Abschnitt wird das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens an ausgewählten Unterrichtsbeispielen illustriert.

Den Abschluß bildet eine kurze Einschätzung der weiteren Entwicklung auf der Grundlage der bisher gemachten Erfahrungen.

Der historische Weg zum aktiv-entdeckenden Lernen: Von «Leitung und Rezeptivität» zu «Organisation und Aktivität»

Das Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernens wird für den Mathematikunterricht heute oft als neuartige Strömung empfunden, da es erst seit Mitte der achtziger Jahre Eingang in die Lehrpläne der Grundschule, vereinzelt auch der Sekundarstufe I, gefunden hat. Da andere Fächer die damit verbundene Öffnung des Lernens früher vollzogen haben, hat es darüber hinaus den Anschein, der Anstoß für aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht sei von außen gekommen. Tatsächlich aber ist das Konzept tief in der Mathematik selbst verwurzelt und hat sich in der Didaktik in einem mühsamen historischen Prozeß erst durchsetzen müssen.

Ein wichtiger Schritt wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts zur Zeit der Reformpädagogik von dem Pädagogen und Rechendidaktiker Johannes Kühnel vollzogen, der in seinem epochalen Werk «Neubau des Rechenunterrichts» (1. Auflage 1916) mit voller Präzision und Klarheit das «Lehrverfahren der Zukunft» folgendermaßen beschrieben hat (Kühnel 1954[8], 70, Hervorhebungen im Original, s. auch Selter 1995a):

«Die Hauptfrage, die für die gesamten folgenden Ausführungen maß- und richtunggebend sein soll, mag demnach ihren Ausdruck finden in der Form:

Welches ist das wissenschaftlich und praktisch begründete Lehrverfahren, mittels dessen wir die Entwicklung des Zöglings in der gewünschten Weise fördern?

Diese Formulierung läßt ohne weiteres den Einfluß der neuen Zielbestimmung erkennen. Nicht um ein Lehrverfahren handelt es sich, mittels dessen wir dem Schüler auf möglichst leidlose oder lustvolle Weise etwas beibringen wollen, seien es Kenntnisse, seien es Fertigkeiten. **Beibringen, darbieten, vermitteln** *sind vielmehr Begriffe der* **Unterrichtskunst vergangener Tage** *und haben für die Gegenwart geringen Wert; denn der pädagogische Blick unserer Zeit ist nicht mehr stofflich eingestellt. Wohl soll der Schüler auch künftig Kenntnisse und Fertigkeiten gewinnen – wir hoffen sogar noch mehr als früher -, aber wir wollen sie ihm* **nicht beibringen**, *sondern er soll sie sich* **erwerben**. *Damit wechselt auch des Lehrers Aufgabe auf allen Gebieten. Statt Stoff darzubieten, wird er künftig die Fähigkeiten des Schülers zu entwickeln haben. Das ist etwas völlig anderes, besonders für die Gestaltung des Rechenunterrichts. Denn durch die anders geartete Formulierung der Frage nach dem Lehrverfahren werden dem Lehrer zwei Hilfsmittel aus der Hand genommen, die den meisten bisher als unentbehrlich erschienen und als kennzeichnende Merkmale höchster Lehrkunst: das* **Darbieten** *und das* **Entwickeln [des Stoffs**, *Hinzuf. E.Ch.W.]. Sie gibt ihm aber dafür zwei andere in die Hand, die zunächst unscheinbar, in ihrer Wirkung jedoch ungleich mächtiger sind: die* **Veranlassung der Gelegenheit** *und die* **Anregung [des Schülers**, *Hinzuf. E.Ch.W.]* **zu eigener Entwicklung**.

Und das Tun des Schülers ist nicht mehr auf **Empfangen** *eingestellt, sondern auf* **Erarbeiten**. *Nicht* **Leitung und Rezeptivität**, *sondern* **Organisation und Aktivität** *ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet.»*

Natürlich drängt sich die Frage auf, warum es nach Kühnel noch 70 Jahre gedauert hat, bis sich das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens auf der Ebene der Lehrpläne durchsetzen konnte. Einer der vielen Günde liegt sicher darin, daß Pädagogen und Didaktiker dazu geneigt haben, die didaktischen Möglichkeiten des Lehrers zu überschätzen und das geistige Potential der Schüler zu unterschätzen. Trotz vieler guter Vorsätze, die Lernvoraussetzungen der Schüler aufzunehmen und ihre Eigentätigkeit zu fördern, hat sich die traditionelle Didaktik auf Maßnahmen konzentriert, wie den Schülern etwas **beizubringen** sei, anstatt auf Maßnahmen, wie ihre **Aktivität angeregt und organisiert** werden könne. Ein typisches Beispiel hierfür ist der «Erzvater» der Didaktik, Johann Amos Comenius, selbst. Am Anfang seiner «Großen Didaktik», erschienen 1657, heißt es zwar noch (Comenius 1982, 78):

«Es ist also nicht nötig, in den Menschen etwas von außen hineinzutragen. Man muß nur das, was in ihm beschlossen liegt, herausschälen, entfalten und im einzelnen aufzeigen.»

Wenn aber Comenius gegen Ende seines Buches auf die praktische Lehrmethode zu sprechen kommt, vollzieht er eine totale Kehrtwendung (Comenius 1982, 210):

«Wir wollen an der Ähnlichkeit (der Lehrkunst) mit der Buchdruckerkunst festhalten ... Dabei wird sich zeigen, daß das Wissen beinahe in derselben Weise dem Verstande eingeschrieben wird, wie es äußerlich auf das Papier gedruckt wird. Deshalb wäre es gar nicht unpassend, wenn man – auf das Wort Typographie anspielend – für die neue Lehrmethode den Namen «Didachographie» bilden würde ... Die Buchdruckerkunst hat ihre besonderen Materialien und ihren besonderen Arbeitsgang. Die wichtigsten Materialien sind Papier, Typen, Druckerschwärze und Presse ... In der Didachographie ... verhält es sich folgendermaßen: Das Papier sind die Schüler, deren Verstand mit den Buchstaben der Wissenschaften gekennzeichnet werden soll. Die Typen sind die Lehrbücher und die übrigen bereitgestellten Lehrmittel, mit deren Hilfe der Lehrstoff mit wenig Mühe dem Verstande eingeprägt werden soll. Die Druckerschwärze ist die lebendige Stimme des Lehrers, die den Sinn der Dinge aus den Büchern auf den Geist der Hörer überträgt. Die Druckerpresse ist die Schulzucht, welche alle zur Aufnahme der Lehren bereit macht und ansporn.»

Die Überwindung dieser Unterrichtsauffassung war ein langwieriger Prozeß, der in verschiedenen Fächern unterschiedlich viel Zeit beansprucht hat. Es ist in diesem Zusammenhang interessant, daß die reformpädagogische Bewegung vor etwa 100 Jahren angetreten ist, um den Kunstunterricht zu reformieren. Für heutige Auffassungen von Kunst unvorstellbar war der damalige Unterricht klein- und gleichschrittig aufgebaut. Die Kinder übten zuerst unter minutiöser Anleitung serienweise die «Elemente» des Zeichnens

(Striche, Kreuze, Linien, Kreise, usw.), ehe sie zu komplexeren Aufgaben (z.B. Zeichnen eines Blattes) zugelassen wurden.

Anders als in der Kunst und teilweise auch in Sprache und Sachkunde gelang es der Reformpädagogik aber nicht, den Mathematikunterricht aus seiner Erstarrung zu befreien, trotz schöner Einzelleistungen. Der Grund hierfür liegt in der starken Fachstruktur der Mathematik. Für die Mathematik gilt ein kleinschrittiger hierarchischer Aufbau aus Elementen geradezu als naturgemäß. Es scheint daher für Didaktiker bei allen guten Vorsätzen unmöglich, den Unterricht anders zu organisieren als durch Übersetzung der Fachstruktur in eine methodisch gestufte Folge «kleiner und kleinster Schritte», die unter «Isolierung der Schwierigkeiten» «vom Leichten zum Schweren» und «vom Einfachen zum Zusammengesetzten» durchlaufen wird. Genau so hat es die traditionelle Didaktik seit Jahrhunderten gelehrt.

Der scheinbare Widerspruch zwischen der Forderung nach aktiv-entdekkendem Lernen und den Erfordernissen der Fachstruktur wurde in der Mathematikdidaktik erst in den siebziger Jahren aufgelöst, als neue Erkenntnisse und Entwicklungen in der Wissenschaftsgeschichte, Wissenschaftstheorie und Philosophie der Mathematik (vgl. hierzu LAKATOS 1979 und DAVIS/HERSH 1981) zu einer völlig neuen Beziehung von mathematischer Wissenschaft und Mathematikunterricht führten: Hiernach werden Lernprozesse nicht mehr von den logischen Begriffsstrukturen der Mathematik bestimmt. Maßgebend sind vielmehr die mathematischen Erkenntnis**prozesse**, die in sinnvollen Problemsituationen nach ihrer eigenen Logik ablaufen. Mathematik wird vorrangig als **Tätigkeit** gesehen, die gekennzeichnet ist durch die mathematische Beschreibung von problemhaltigen Situationen, durch das Entdecken und Begründen von Beziehungen sowie durch die mündliche und schriftliche Mitteilung der Lösungswege und Ergebnisse. Systematisch-deduktive Darstellungen entstehen erst durch vielfache Umarbeitung und Neuordnung inhaltlich-anschaulich gewonnener Erkenntnisse auf einer höheren Ebene (FREUDENTHAL 1973, Bd..1, 110-116):

«Es ist richtig, daß man Worte wie Mathematik, Sprache, Kunst in doppelter Bedeutung verwendet. Bei der Kunst ist es ganz klar; es gibt die fertige Kunst, die der Kunsthistoriker studiert, und es gibt die Kunst, die der Künstler betreibt. Daß es mit der Sprache ähnlich steht, scheint nicht so auffallend zu sein. Sprachwissenschaftler nennen es eine Entdeckung de Saussures. Daß es neben der fertigen Mathematik noch Mathematik als Tätigkeit gibt, weiß jeder Mathematiker unbewußt, aber nur wenigen scheint es bewußt zu sein, und da es nur selten betont wird, wissen Nichtmathematiker es gar nicht. Die Mathematik ist bis heute fast nur als Fertigprodukt analysiert worden, und wenn dann auf die Analyse eine formalisierte Synthese folgt, so wird das Erzeugnis als Fertigprodukt präsentiert (S.110) ... Ich habe die Unterrichtsmethode, die von der Auffassung

und der Analyse der Mathematik als einer Tätigkeit ausgeht, die Methode der Nacherfindung genannt … Man darf wohl sagen, daß die Methode der Nacherfindung als Prinzip heute allgemein akzeptiert ist. Daß sie sich in der Praxis noch wenig ausgewirkt hat, kann man wohl verstehen. In der Pädagogik ist die Wirklichkeit dem Ideal, der Forderung die Erfüllung, immer nur zögernd gefolgt, und das hat seine guten Gründe … Was hier Nacherfindung genannt wird, heißt bei anderen Entdeckung oder Wiederentdeckung.» (S. 116)

Wesentliche Beiträge zu diesem tiefgreifenden Paradigmenwechsel in der Mathematikdidaktik haben Hans Freudenthal und die von ihm begründete Forschungsgruppe in Utrecht, die englische Association of Teachers of Mathematics (ATM) und in Deutschland Heinrich Winter geleistet (FREUDENTHAL 1973, STREEFLAND/TREFFERS 1990, ATM 1970, WINTER 1987, 1989).

Von dieser neuen Sichtweise des Faches Mathematik aus wird es möglich, in Pädagogik und Didaktik die unselige Polarisierung zwischen «Kind» auf der einen und «Fach» auf der anderen Seite aufzuheben. «Kindorientierung» und «Wissenschaftsorientierung» können jetzt **als sich ergänzende Aspekte ein und desselben pädagogischen Prozesses** verstanden werden, wie John Dewey in seinem brillianten Aufsatz «The Child and the Curriculum» schon Anfang des 20. Jahrhunderts für die Schulfächer gefordert hat (DEWEY 1976).

Die neue Sichtweise eröffnet auch in der Lehreraus- und -fortbildung neue Möglichkeiten für mathematische Studien. Wenn diese genutzt werden, wird sich die Einstellung von Lehrern und Studenten zum Fach Mathematik positiv verändern.

Dank des neuen Ansatzes bestehen heute gute Voraussetzungen dafür, daß der Mathematikunterricht bei der Entwicklung der Grundschule in Zukunft nicht mehr außerhalb stehen, sondern in stärkerem Bezug zur Pädagogik und den anderen Fächern weiter voranschreiten wird (vgl. hierzu HENGARTNER 1991, MEIERS 1994). Das harte Ringen der Mathematikdidaktiker um eine sinnvolle Wechselbeziehung zwischen offenen Lehr-/Lernformen und klaren fachinhaltlichen Anforderungen sowie um neue Formen des Übens dürfte sich dabei auszahlen, gerade wenn es um die Legitimation und Praktikabilität dieser Unterrichtsformen für die weiterführenden Schulen geht.

In diesem Zusammenhang ist folgende Tatsache von großer Bedeutung: Das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens ist vom Ansatz her **stufenübergreifend** angelegt und schafft so eine **sachliche Grundlage für eine einheitliche Sicht des gesamten Mathematikunterrichts.** Der Grundschule kommt darin ein viel stärkeres Gewicht zu als früher, da sie bei der Umsetzung der neuen Mathematiklehrpläne Erfolge vorweisen kann.

Begriff und Begründung des aktiv-entdeckenden Lernens

Wie im Zitat aus Kühnels «Neubau» deutlich zum Ausdruck kommt, liegt die **Hauptaufgabe des Lehrers** im aktiv-entdeckenden Unterricht nicht in der Vermittlung des Stoffes, sondern in der **Organisation der Schüleraktivitäten**. Die Schüler sollen so weit wie möglich selbst die Initiative ergreifen und sich aktiv mit dem Stoff auseinandersetzen. Der Lehrer hat Voraussetzungen zu schaffen und Hilfe zur Selbsthilfe zu leisten.

Im Lehrplan des Landes Nordrhein-Westfalen ist das aktiv-entdeckende Lernen als Unterrichtsgrundsatz folgendermaßen ausformuliert (KM/NRW 1985):

«Den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts wird in besonderem Maße eine Konzeption gerecht, in der das Mathematiklernen als ein konstruktiver, entdeckender Prozeß aufgefaßt wird. Der Unterricht muß daher so gestaltet werden, daß die Kinder möglichst viele Gelegenheiten zum selbsttätigen Lernen in allen Phasen eines Lernprozesses erhalten:

- *von herausfordernden Situationen ausgehen; die Kinder zum Beobachten, Fragen, Vermuten auffordern*
- *ein Problem oder einen Problemkomplex herausstellen; die Kinder zu eigenen Lösungsansätzen ermutigen; Hilfe zum Selbstfinden anbieten*
- *Ergebnisse mit bisherigem Wissen auf vielfältige Art in Verbindung bringen, Ergebnisse mehr und mehr so klar und kurz wie möglich darstellen; evtl. gedächtnismäßig verankern; die Kinder zum selbständigen Üben ermuntern*
- *über den Wert des neuen Wissens und über die Art seiner Aneignung sprechen (Rückbesinnung), dabei die Kinder auffordern, sich neue, verwandte Sachverhalte zu erschließen.*

Die Aufgabe des Lehrers besteht darin, herausfordernde Anlässe zu finden und anzubieten, ergiebige Arbeitsmittel und produktive Übungsformen bereitzustellen und vor allem eine Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen aller Kinder förderlich ist.»

Die Organisation der Lernaktivitäten beschränkt sich keineswegs nur auf die äußere Steuerung des Unterrichts, sondern schließt auch inhaltliche Beiträge des Lehrers ein. Insbesondere müssen vom Lehrer Informationen eingebracht werden, die von den Schülern prinzipiell nicht entdeckt werden können: konventionelle Regeln, Bezeichnungen, Sprech- und Schreibweisen, Formulierungen sowie prägnante Zusammenfassungen der Ergebnisse. Entscheidend ist und bleibt aber, daß der Lehrer neben diesen notwendigen

Vorgaben gute Aufgaben stellt und den Kindern Zeit läßt, ihre eigene Ideen im Zusammenhang zu entwickeln. Er darf erst dann wieder eingreifen, wenn die Kinder selbst Lösungen oder zumindest Lösungsansätze gefunden haben, und er muß die Beiträge der Kinder für seine weiteren Impulse nutzen.

Insgesamt setzt der aktiv-entdeckende Unterricht auf eine viele größere Selbständigkeit der Schüler als der traditionelle Unterricht, und es stellt sich die Frage, wie diese Akzentverschiebung zu rechtfertigen ist.

Im wesentlichen gibt es drei Begründungen: von der Lernpsychologie, vom Fach Mathematik und von der Gesellschaftspolitik her.

1. Die Entwicklung der Lernpsychologie nach dem zweiten Weltkrieg ist durch einen Paradigmenwechsel gekennzeichnet, an dem der Schweizer Psychologe Jean Piaget (1896-1980) entscheidenden Anteil hat. Die Assoziationspsychologie, auf die sich der belehrende Unterricht noch in der ersten Hälfte des Jahrhunderts stützen konnte, ist für höhere Lernprozesse als unbrauchbar erkannt worden. Lernen wird heute nicht mehr als passive Aufnahme von Wissen, sondern als aktive Aufbauleistung verstanden, die der Lernende in Interaktion mit der physischen und sozialen Umgebung selbst zu erbringen hat. Umfangreiches Forschungsmaterial über Lernvoraussetzungen und Lernprozesse von Kindern zeigt, daß diese von frühestem Alter an produktiv mit ihrer Umwelt umgehen. Musterbeispiele hierfür sind die Sprach- und Zahlbegriffsentwicklung.

   Insbesondere die Zahlkenntnisse von Schulanfängern sind in den achtziger und neunziger Jahren intensiv erforscht worden Dabei hat sich gezeigt, daß die Kinder ein enormes Vorwissen haben, das selbst von erfahrenen Lehrerinnen erheblich unterschätzt wird (SCHMIDT/WEISER 1983, VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 1990, KRAUTHAUSEN 1994, SELTER 1995, HENGARTNER/RÖTHLISBERGER 1994, GRASSMANN 1995). Im Rahmen der mathematikdidaktischen Entwicklungsforschung ist in den letzten Jahren umfangreiches empirisches Material über individuelle und soziale Lernprozesse im Bereich des gesamten Rechenunterrichts der Grundschule gesammelt worden (vgl. STREEFLAND/TREFFERS 1991 und die dort zitierte Literatur, SELTER 1994, RÖHR 1995, SCHERER 1995). Diese Befunde sprechen eindeutig zugunsten des aktiv-entdeckenden, ganzheitlichen Lernens.

2. Das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens ist voll im Einklang mit den Erkenntnis- und Problemlöseprozessen des Faches Mathematik selbst, wie schon im vorhergehenden Abschnitt deutlich wurde. Mathematik entsteht in der Auseinandersetzung mit mathematischen und außermathematischen Aufgaben und Problemen. Die Lösungswege sind dabei grundsätzlich offen. Angestrebt wird sogar eine Vielfalt von Lösungswegen, weil jeder neue Weg die Einsicht in die Struktur vertieft. Der

Problemlöser hat auch die Freiheit, die Probleme zu verändern und zu versuchen, seine früheren Lösungen auf die abgewandelten Probleme zu übertragen. Unsicherheiten, Fehler, Engpässe, vergebliche Versuche gehören wesentlich zum Prozeß des Mathematiktreibens.

Mathematik kann daher nur dann mit Verständnis gelernt werden, wenn die Schüler sie in ihrer wahren Natur, d.h. aktiv-entdeckend, erleben können. Die Mathematik auf ein fertiges System von Definitionen, Lehrsätzen und Regeln zu reduzieren und kleinschrittig zu vermitteln, heißt, ihre wahre Natur zu zerstören und den Unterricht zu entfremden.

3. In der moderen Berufswelt wird die Befähigung zu selbständigem Arbeiten immer stärker gefordert. Die Bedingungen am Arbeitsplatz verändern sich ständig und immer schneller, sodaß lebenslanges Lernen zur Regel wird. Auf diese Anforderungen müssen Kinder frühzeitig eingestellt werden. Das schulische Lernen muß daher ein Modell für lebenslanges Lernen sein. Es kommt heute z. B. nicht nur darauf an, **daß** das Einmaleins gelernt wird, sondern auch, **wie** es gelernt wird. Wenn die Kinder in der Schule nur vorgegebene Rezepte anzuwenden haben, wird die später verlangte Fähigkeit zum selbständigen Herangehen an Probleme nicht entwickelt. Der Unterricht kommt dann einer wesentlichen Pflicht nicht nach.

Diese Gründe sind stichhaltig und werden heute, wenigstens im Prinzip, weitgehend akzeptiert. Die vor Jahren noch geäußerten Zweifel und Vorbehalte gegenüber der Praktikabilität des aktiv-entdeckenden Lernens (WITTMANN 1990) haben sich inzwischen erheblich abgeschwächt.

Was die von Skeptikern häufig angesprochene Problematik der lernschwachen Schüler anbelangt, mehren sich die Befunde dafür, daß die sogenannten «lernschwachen» Schüler weniger Mühe mit dem Lernen als mit dem Belehrtwerden haben, d. h. nicht «lernschwach», sondern «belehrungsschwach» sind, und daß das auf Verständnis angelegte Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens, entgegen manchen Vorurteilen, gerade dieser Schülergruppe besonders entgegenkommt. Hierfür seien fünf Beispiele genannt.

Bereits in den sechziger Jahren hat sich die russische Didaktik kritisch mit dem Problem der lernschwachen Schüler befaßt. ZANKOV (1973, 44-45) kam dabei zu folgendem Schluß:

«[Unser Konzept verlangt], daß der Lehrer zielbewußt und systematisch an der Entwicklung aller Schüler der Klasse, darunter auch der schwächsten, arbeitet. Die besondere Funktion dieses Prinzips ist durch den Umstand bedingt, daß gerade die schwachen Schüler von einer Lawine trainierender Übungen in Russisch und Arithmetik erdrückt werden. Dieses Training wird von der

traditionellen Unterrichtsmethodik als notwendig erachtet, um das Zurückbleiben der nicht erfolgreichen Schüler zu verhindern. Indessen bedürfen die Zurückbleibenden nicht weniger, sondern offensichtlich mehr einer systematischen Arbeit an ihrer Entwicklung. Unsere Erfahrung zeigt, daß eine solche Arbeit zu beträchtlichen Fortschritten in der Entwicklung der schwachen Schüler und damit auch zu besseren Ergebnissen in der Aneignung der Kenntnisse und Fertigkeiten führt. Umgekehrt werden die Zurückbleibenden durch ihre Überlastung mit trainierenden Übungen nicht gefördert, ihr Rückstand vergrößert sich sogar.»

Alina Szeminska, Mitarbeiterin Piagets bei seinen berühmten Experimenten zur Entwicklung des Zahlbegriffs, hat das Problem der rechenschwachen Schüler in den siebziger Jahren eingehend studiert und ihre Erkenntnisse folgendermaßen zusammengefaßt (SZEMINSKA 1981, 131-132):

«Man kann Kindern, auch wenn sie einen bestimmten kognitiven Entwicklungsstand noch nicht erreicht haben, zweifellos die Ausführung bestimmter Operationen und die Lösung bestimmter Aufgabentypen nach vorgegebenen Lösungswegen beibringen, und sie werden diese auch behalten. Dies bedeutet aber nicht, daß ein Kind, das solche Aufgaben lösen oder die entsprechenden Rechenoperationen ausführen kann, dies mit vollem Verständnis tut und aufgrund dieses Verständnisses eine höhere Stufe des operativen Denkens erreicht hat. Überprüfen kann man dies, indem man dem Kind eine strukturgleiche Aufgabe stellt, in der die Bedingungen in einer anderen Form gegeben sind…

Schüler, bei denen mathematisches Verständnis und operatives Denken nicht entwickelt waren, hatten besondere Schwierigkeiten beim Lösen von Textaufgaben. Beispielsweise rechneten sie bei der Aufgabe «Wieviel muß man zu 5 addieren, damit man 13 erhält?» auf den Fingern von 5 nach 13 (5,6,7,8,9, 10,11,12,13), dann zählten sie, wie viele Finger sie dazu verwendet hatten, stellten fest, daß es 9 waren und schrieben die falsche Gleichung 5+9 = 13 auf.

Man kann eine Vielzahl solcher Beispiele anführen, die gravierende Mängel im Verständnis von Zahlen und Zahlbeziehungen bei solchen Kindern dokumentieren.

Untersuchungen über die Mißerfolge im Rechenunterricht, besonders im Anfangsunterricht, zeigen, daß die Wurzel der Schwierigkeiten in der Zurückdrängung des Verständnisses durch die mechanische Anwendung auswendiggelernter Rezepte liegt.

Wenn man diese Schüler jedoch mit neuartigen Aufgaben konfrontiert, stellen sich überraschende Erfolge ein. Absurde Fehler verschwinden völlig, die Kinder führen die Rechenoperationen schneller aus und verstehen sie deutlich besser. Darüberhinaus – und das ist der wichtigste Effekt – beginnen die Schüler, die vorher völlig demotiviert waren, sich für Mathematik zu interessieren, und *ihre Motivation für schulisches Lernen ändert sich grundlegend. Die Kinder bauen Vertrauen in ihre Fähigkeit auf, selbständig Probleme lösen zu können, während sie vorher solchen Problemen völlig ratlos gegenüberstanden.*

Je mehr sich ein Kind allerdings an die mechanische Anwendung von Rezepten gewöhnt hat, desto schwieriger ist das Durchbrechen dieser Einstellung. Deshalb ist es gerade im Anfangsunterricht sehr wichtig, Lernsituationen zu arrangieren, in denen es darauf ankommt, nicht nur Zahlen und Ziffern mechanisch zu manipulieren, sondern Zusammenhänge zwischen Zahlen operativ zu erarbeiten.»

In den achtziger Jahren sind englische Didaktiker im Projekt LAMP (Low Attainers Mathematics Project) zu ähnlichen Schlußfolgerungen gelangt. Bei der Analyse der Schwierigkeiten, die lernschwache Schüler haben, fanden sie folgendes heraus: Genau die Maßnahmen, die im traditionellen, belehrenden Unterricht (in guter Absicht!) gerade für diese Schüler als Hilfe angeboten werden, **verursachen** die Schwierigkeiten: nämlich die Zerlegung des Unterrichts in kleine und kleinste Schritte, das Ausräumen möglicher Stolpersteine sowie die Einübung von Rechenfertigkeiten **vor** der Bearbeitung sinnvoller Sachprobleme (TRICKETT/SULKE 1993).

J.H. Lorenz hat aus seiner jahrelangen intensiven Arbeit mit lernschwachen Kindern ebenfalls gefolgert, daß der Aufbau von Verständnis vorrangige Bedeutung hat. Eine Schlüsselrolle weist er dabei dem Aufbau mentaler (visueller) Vorstellungsbilder zu (LORENZ 1992, 183-184):

«Zahlen und die mit ihnen durchzuführenden Operationen werden bei Schülern in der Regel durch bildhaft vorgestellte räumliche Beziehungen repräsentiert ...Diese internen Bilder... unterscheiden sich von Schüler zu Schüler ... Es handelt sich bei diesen kognitiven Repräsentationen der Zahlen und Zahloperationen um aktive Konstruktionen, die vom betreffenden Schüler jeweils neu aktualisiert werden...»

In jüngster Zeit hat Petra Scherer zeigen können, daß sogar lernbehinderte Schüler vom aktiv-entdeckenden Ansatz profitieren (SCHERER 1994, 772):

«Produktive Übungsformen bieten jedoch auch oder gerade bei lernschwachen Schülern eine Reihe von Vorteilen...Die Schüler haben eher die Möglichkeit zu zeigen, was sie können ... Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten der Kinder lassen sich leichter und früher erkennen...Schwache Schüler sind bei produktiven Übungsformen häufig motivierter: Ihre Leistungen werden nicht nur nach richtig oder falsch bewertet, und Versagensängste können dadurch abgebaut werden.»

Diese Befunde sind insofern zu erwarten, als das aktiv-entdeckende Lernen den Schülern größere Spielräume läßt und dadurch Kräfte freisetzt, die bei einem eng geführten Unterricht nicht zur Entfaltung kommen können.

Daß auch leistungsstarke Kinder durch den klein- und gleichschrittig geführten Unterricht behindert werden und von aktiv-entdeckenden Lehr-/Lernformen profitieren, ist unbestritten. Die Förderung der leistungsstarken Kinder ist ebenso notwendig wie die Förderung der lernschwachen Kinder (RADATZ 1995).

Es ist somit festzuhalten, daß es das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens ermöglicht, Kinder im gesamten Leistungsspektrum zu fördern und in den Unterricht zu integrieren – ein klarer Beweis für die pädagogische Leistungsfähigkeit dieses Konzepts.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen muß betont werden, daß Üben und Automatisieren innerhalb des aktiv-entdeckenden Lernens einen sehr hohen Stellenwert haben. Allerdings sind die traditionellen Übungsformen hier nur sehr beschränkt brauchbar. Parallel zum aktiv-entdeckenden Lernen ist daher die Konzeption des **produktiven Übens** entwickelt worden, bei der das Üben von Kenntnissen und Fertigkeiten mit der Entwicklung allgemeiner Lernziele verbunden wird (WITTMANN/MÜLLER 1990, 1992). Als Abschluß des Lernprozesses bei grundlegenden Wissenselementen und Fähigkeiten muß eine Automatisierung angestrebt werden. Sie hat aber nur dann einen Sinn, wenn vorher durch aktiv-entdeckendes Lernen eine ausreichende Verständnisgrundlage geschaffen wurde. Umgekehrt dienen automatisierte Fertigkeiten als Grundlage für nachfolgende entdeckende Lernprozesse.

Der fachliche Rahmen des Rechenunterrichts: Konzentration auf Grundideen der Arithmetik und allgemeine Lernziele

Nach den allgemeinen Überlegungen des ersten und zweiten Abschnitts wenden wir uns in den beiden folgenden Abschnitten den **Inhalten** des Rechenunterrichts zu.

Die Inhalte der Mathematik lassen sich im aktiv-entdeckenden Unterricht dadurch am sinnvollsten erschließen, daß man sich auf die Grundideen konzentriert und diese über die Schuljahre hinweg konsequent entwickelt.

Im Rahmen des Projekts «mathe 2000» ist für den Rechenunterricht folgende Liste von Grundideen der Arithmetik herausgearbeitet worden, die bis zum Ende des 6. Schuljahrs reicht und organisch in eine entsprechende Liste von Grundideen der Algebra überleitet:

1. **«Zahlreihe»**
   Die natürlichen Zahlen bilden eine Reihe, von der Abschnitte beim Zählen durchlaufen werden.

2. **«Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile»**
   Mit den natürlichen Zahlen kann man nach bestimmten Gesetzen mündlich, halbschriftlich und schriftlich rechnen und dabei Rechenvorteile nutzen. Der Zahlbereich wird später unter Beibehaltung der Rechengesetze erweitert durch Bruchzahlen und negative Zahlen.
3. **«Zehnersystem»**
   Das Zahlsystem ist dekadisch gegliedert, wobei sich die Tausenderstruktur in den Millionen, Milliarden usw. periodisch wiederholt. Außerdem ist der Zehner in zwei Fünfer gegliedert.
4. **«Rechenverfahren»**
   Schriftliche Rechenverfahren führen das Rechnen mit Zahlen auf das Rechnen mit einstelligen Zahlen zurück (Ziffernrechnen). Diese Verfahren sind automatisierbar und können von Rechengeräten übernommen werden.
5. **«Arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster»**
   Mit Zahlen kann man aufgrund bestimmter Eigenschaften und Beziehungen Gesetzmäßigkeiten, Formeln, Muster («Strukturen») erzeugen, deren tiefere Zusammenhänge in Zahlentheorie und Kombinatorik systematisch dargestellt werden.
6. **«Zahlen in der Umwelt»**
   Zahlen lassen sich vielfältig verwenden als Anzahlen, Ordnungszahlen, Maßzahlen, Operatoren und Codes.
7. **«Übersetzung in die Zahlensprache»**
   Sachsituationen lassen sich mit Hilfe arithmetischer Begriffe in die Zahlensprache übersetzen, mit Hilfe arithmetischer Verfahren lösen, und aus der Lösung können praktische Folgerungen gezogen werden.

Wie ersichtlich erfassen die ersten fünf Grundideen den «reinen», die beiden letzten Grundideen den «angewandten» Aspekt der Arithmetik.

Alle Grundideen werden vom ersten Schuljahr an nach dem **Spiralprinzip** entwickelt, d.h. der Unterricht greift sie immer wieder auf, vertieft sie und führt sie weiter. Z. B. wird die Idee «Zahlreihe» im ersten Schuljahr an der «Zwanzigerreihe» aufgezeigt, die sich in den folgenden Schuljahren zur «Hunderterreihe», zum «Tausenderstrahl» und schließlich zum «Zahlenstrahl» erweitert. Entsprechend wird die Idee «Zehnersystem» im ersten Schuljahr durch das «Zwanzigerfeld» angebahnt, im zweiten durch die «Hundertertafel» fortgeführt und im dritten und vierten Schuljahr durch das «Tausenderbuch» und das «Millionbuch» ausgebaut.

Mit der Erarbeitung der arithmetischen Lernziele (insbesondere Einspluseins, Einmaleins, halbschriftliche Rechenstrategien und schriftliche Rechenverfahren) ist die Förderung der folgenden **allgemeinen Lernziele** organisch verbunden:

- Fähigkeit, reale Situationen in die Mathematik zu übersetzen, mathematisch zu lösen und das Ergebnis für die reale Situation zu interpretieren («**Mathematisieren**»)
- Fähigkeit, Situationen experimentierend zu erforschen, Beziehungen und Strukturen zu entdecken, Strukturen zu erfinden («**Entdecken**»)
- Fähigkeit, mathematische Beziehungen und Sachverhalte zu begründen («**Argumentieren**»)
- Fähigkeit, Beobachtungen, Überlegungen, Begründungen, Einschätzungen zu mathematischen Sachverhalten mündlich und schriftlich auszudrücken («**Darstellen**»)

Diese allgemeinen Lernziele beschreiben grundlegende Prozesse der mathematischen Erkenntnistätigkeit. Sie sind stufenübergreifend und bilden die **fachlichen** Anknüpfungspunkte für das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens, wobei das Lernziel «Entdecken» natürlich leitend ist.

Rechnerische Kenntnisse und Fertigkeiten schaffen eine gute Voraussetzung für die Förderung allgemeiner Lernziele. Umgekehrt wirken sich die Fähigkeiten des Mathematisierens, Entdeckens, Argumentierens und Darstellens positiv auf das Erlernen neuer Wissenselemente und Fähigkeiten aus. Inhalte und Prozesse sind daher im aktiv-entdeckenden Unterricht untrennbar verbunden.

Der durch die Grundideen der Arithmetik und die allgemeinen Lernziele gesetzte Rahmen muß durch geeignete Unterrichtseinheiten konkret ausgefüllt werden. Prinzipiell kommen dafür nur ganzheitliche, komplexe Themen in Frage, da es nur in solchen Themen Anlässe zum Mathematisieren, Entdecken, Begründen und Beschreiben gibt.

Die Komplexität des Unterrichts nimmt durch ganzheitliche Themen zu, was aber keine Erschwerung, sondern eine Erleichterung des Lernens bedeutet, wie die englische Psychologin Margaret Donaldson unmißverständlich festgestellt hat (Donaldson 1982, S. 117):

«Es scheint eine weit verbreitete Meinung zu sein, man dürfe Kinder anfangs nicht mit der Komplexität eines Stoffgebietes konfrontieren, da sie derart komplizierte Sachverhalte unmöglich bewältigen könnten. Ich teile diese Ansicht nicht. Die Ursache für diesen Irrtum liegt m.E. darin, daß zwei grundverschiedene Dinge nicht auseinandergehalten werden, nämlich eine ganzheitliche, grobe Übersicht über das Stoffgebiet einerseits und die Beherrschung seiner Einzelheiten anererseits. Die Kinder benötigen natürlich geraume Zeit, um die Einzelheiten zu lernen. Es ist aber keine Frage, daß ihnen das leichter fällt, wenn sie über die Gesamtheit der zu erwartenden Lernaufgaben richtig vorinformiert sind.»

Wie tiefgreifend die Unterschiede zwischen dem belehrenden und dem aktiv-entdeckenden Unterrichtskonzept sind, zeigt sich gerade an dieser Stelle. Für aktiv-entdeckendes Lernen sind ganzheitliche, komplexe Themen notwendig. Diese Themen entziehen sich aber einer methodischen «Kleinarbeitung» und können daher nicht Schritt für Schritt vom Lehrer an die Schüler «vermittelt» werden. Frustration und Mißerfolge wären geradezu vorprogrammiert, wenn man z.B. versuchen würde, die «Einspluseins-Tafel» (vgl. Abschnitt 5.1) im 1. Schuljahr kleinschrittig «durchzunehmen». Genau an diesem Punkt muß man umdenken: Ganzheitliche Themen sind zwar (kleinschrittig) **schwerer zu lehren,** aber (aktiv-entdeckend) **leichter zu lernen** als portionierte Stoffangebote.

Entgegen manchen Befürchtungen bedeutet die Umstellung von «Leitung und Rezeptivität» auf «Organisation und Aktivität» für den Lehrer nach gewissen Anfangsinvestitionen keineswegs eine höhere Belastung. Ganz im Gegenteil: Der Lehrer wird **ent**lastet, falls er bereit ist, sich auf aktiv-entdeckende Lehr-/Lernformen wirklich einzulassen.

Sparsamkeit in Anschauungs- und Arbeitsmitteln: «Weniger ist mehr»

Wie Schipper (1982), Radatz (1986), Lorenz (1992) und Voigt (1993) durch detaillierte Untersuchungen gezeigt haben, sind Anschauungsmittel keineswegs selbsterklärend. Vielmehr müssen sich Kinder mit ihnen wie mit einem zusätzlichen Stoff erst vertraut machen. Dies kostet erhebliche Zeit. Angesichts des engen Zeitrahmens verbietet es sich daher, eine große Zahl von Materialien heranzuziehen. Viel besser ist, eine sorgfältige Auswahl weniger Anschauungsmaterialien zu treffen.

Folgende Kriterien sind für die Auswahl und die Gestaltung von Anschauungsmitteln sinnvoll (Wittmann 1993, 395-396):

Kriterium 1:
Die Zahl der für die Erarbeitung eines Stoffgebietes herangezogenen Anschauungsmittel soll so klein sein, daß sich die Schüler in der verfügbaren Zeit gründlich mit ihnen befassen können. Zur Vermeidung von Brüchen im Lernprozeß sollen diese Anschauungsmittel innerhalb eines Schuljahres kompatibel und über die Schuljahre hinweg fortsetzbar sein.

Kriterium 2:
Die Anschauungsmittel sollen so konstruiert sein, daß sie die mathematischen Grundideen des Stoffgebietes möglichst gut verkörpern. Da sich der Unterricht ständig um die Grundideen dreht, ist sichergestellt, daß die entsprechenden Anschauungsmittel über lange Zeit intensiv genutzt werden und die Verinnerlichung der von ihnen verkörperten Strukturen stützen können.

Kriterium 3:
Anschauungsmittel sollten möglichst übersichtlich strukturiert und möglichst leicht handhabbar sein.

Kriterium 4:
Anschauungsmittel sollten so weit wie möglich als große Version zur Demonstration in der Klasse und als kleine Version für die Hand der Schüler verfügbar sein. Dadurch wird gewährleistet, daß ein möglichst reibungsloser Übergang von einer Arbeitsform zu einer anderen möglich ist. Die Kinder können z.B. Erklärungen des Lehrers oder von Mitschülern an den großen Demonstrationsversionen unmittelbar auf ihre Arbeitsmaterialien übertragen und umgekehrt Überlegungen, die sie an ihren Materialien entwickelt haben, an der Demonstrationsversion vorstellen.

Die Demonstrationsmaterialien sollen im Klassenzimmer möglichst fest installiert und frei zugänglich, die Schülermaterialien schnell griffbereit sein.

Kriterium 5:
Die kleinen Versionen der Anschauungsmittel für die Hand der Schüler müssen jedem einzelnen Schüler zur persönlichen Verfügung gestellt werden können und daher Niedrigpreisprodukte sein. Dies ist, wenn man den Umweltschutz berücksichtigt, in der Regel nur mit dem Rohstoff Papier zu realisieren. Bei der Kostenbewertung von Demonstrationsmaterialien muß die Haltbarkeit mit in Betracht gezogen werden.

Am allerwichtigsten für die Auswahl ist das zweite Kriterium. Es legt folgende auf die Grundideen der Arithmetik zugeschnittene Ausstattung an Anschauungsmitteln für den Rechenunterricht der vier Schuljahre nahe:

Grundidee	**repräsentiert durch**
«Zahlreihe»	Zwanzigerreihe, Hunderterreihe, Tausenderstrahl, Zahlenstrahl
«Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile»	Zwanzigerfeld, Hunderterfeld mit Zahl- und Einmaleinswinkel, russische Rechenmaschine, Tausenderfeld, Wendeplättchen, Wendekarten, Poster zum Einspluseins und Einmaleins
«Zehnersystem»	Zwanzigerfeld, Hundertertafel, Tausenderbuch, Millionbuch, Stellentafel
«Rechenverfahren»	Stellentafel, Malstreifen
«Arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster»	Wendeplättchen, Punktmuster
«Zahlen in der Umwelt»	Maßstäbe, Meterquadrat, Uhren, Kalender, Geld, Gewichte, Meßbecher

Für die 7. Grundidee «Übersetzung in die Zahlsprache» gibt es keine speziellen Anschaungsmittel. Für gewisse Sachaufgaben kann man aber das eine oder andere o.g. Material heranziehen.

Die meisten dieser Anschauungsmittel sind vom traditionellen Unterricht her wohlbekannt. Umso wichtiger ist es, sich bewußt zu machen, daß sie im aktiv-entdeckenden Unterricht ganz anders verwendet werden als früher: Im traditionellen Unterricht standen Anschauungsmittel im Dienst der Lehrmethode. Sie dienten zur Veranschaulichung der vom Lehrer vermittelten Begriffe und der vom Lehrer vorgegebenen Rechenwege. Im aktiv-entdekkenden Unterricht hingegen sind Anschauungsmittel Verkörperungen grundlegender mathematischer Strukturen und fungieren als offene Handlungsfelder (WITTMANN 1993, 394). M. a. W.: **Für den Lernprozeß sind nicht die Anschauungsmittel an sich, sondern die strukturierenden Operationen der Lernenden an den Anschauungsmitteln entscheidend.**

Ausgewählte Unterrichtsbeispiele

Die allgemeinen Überlegungen der vorausgehenden Abschnitte sollen nün an einigen Unterrichtsbeispielen mit Leben gefüllt und verdeutlicht werden. Für jedes Schuljahr werden zwei Beispiele betrachtet, eines zur Einführung eines Themas, das andere zur Übung von Wissenselementen oder Fertigkeiten. Die einführenden Beispiele werden durch Praxisberichte ergänzt.

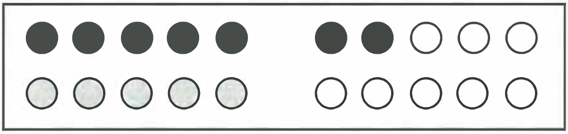
Ganzheitlicher Einstieg in den Zwanzigerraum und Einspluseins

Nach der traditionellen Methode wird im 1. Schuljahr in den Zwanzigeraum und das Einspluseins gestuft eingeführt. Im ersten Vierteljahr wird der Zahlraum bis 5 oder 6 behandelt, im zweiten Vierteljahr der Zahlraum bis 10. Im dritten Vierteljahr wird der Zahlraum bis 20 erweitert, und es wird ohne Überschreitung des Zehners gerechnet. Im letzten Viertel des Schuljahrs wird schließlich der Zehnerübergang nach dem «Teilschrittverfahren» eingeführt.

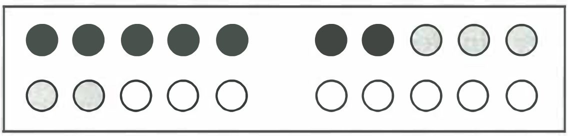
Nach dem Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens werden Zwanzigerraum und Einspluseins hingegen **ganzheitlich** behandelt, wie es den Grundideen der Arithmetik entspricht (WITTMANN/MÜLLER 1990, WITTMANN/MÜLLER U.A. 1994). Der Zwanzigerraum wird am Beginn des ersten Schuljahrs verhältnismäßig schnell eingeführt und in mehreren Durchgängen bearbeitet. Besonderes Gewicht wird auf die Herausbildung einer strukturierten Zahlerfassung unter Betonung der Zahl 5 gelegt («Kraft der Fünf», vgl. hierzu den Beitrag von Krauthausen in diesem Heft). Anschließend wird das Einspluseins, wieder in mehreren Durchgängen, ganzheitlich erarbeitet, wobei neben der Zehnerstruktur auch die Fünferstruktur des Zwanzigerraums, verkörpert im Zwanzigerfeld, eine dominierende Rolle spielt.

Für die Kinder gibt es hier ein reiches Feld für aktiv-entdeckendes Vorgehen: Sie können am Zwanzigerfeld alle Aufgaben des Einspluseins legen und unterschiedlich lösen. Durch systematisches Verändern der Plättchen werden Beziehungen zwischen Aufgaben aufgedeckt, welche das Erlernen des Einspluseins erleichtern.

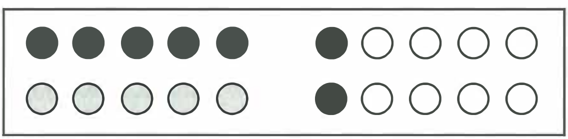
Beispielaufgabe: 7+5
1. Möglichkeit: 7 wird in der ersten, 5 in der zweiten Zeile gelegt. Die zwei übereinander liegenden Fünfen werden zu 10 zusammengefaßt.



2. Möglichkeit: 7 wird in der ersten Zeile gelegt, mit 3 von 5 Plättchen wird dann der Zehner der ersten Zeile gefüllt, 2 Plättchen wandern schließlich in die zweite Zeile. Dies ist das Teilschrittverfahren des traditionellen Zehnerübergangs .

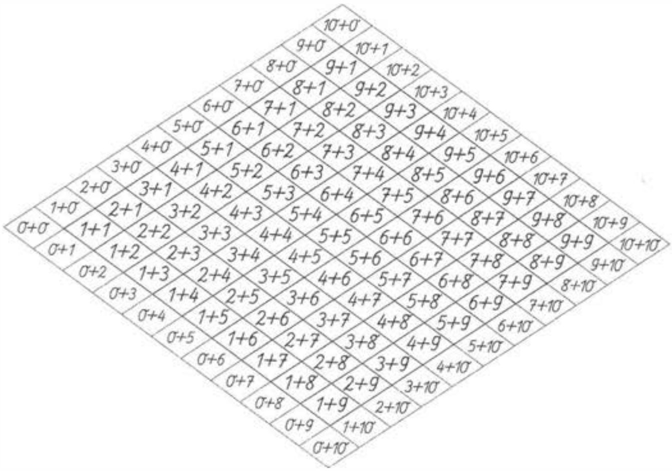


3. Möglichkeit: Von 7 Plättchen in der ersten Zeile wird ein Plättchen zu 5 in der zweiten Zeile geschoben. Das ergibt die (für viele Kinder leichte) Verdopplungsaufgabe 6+6 mit dem gleichen Ergebnis.



Dem Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernens würde eine Festlegung des Zehnerübergangs auf einen einzigen Weg fundamental widersprechen. Die Lösungswege müssen den Kindern grundsätzlich freigestellt werden. Im Laufe der Übung und der Diskussion mit anderen Kindern werden sie selbst herausfinden, welcher für sie jeweils am besten ist. Dies kann von Aufgabe zu Aufgabe unterschiedlich sein.

Nach der ganzheitlichen Methode ist das gesamte Einspluseins (mit Umkehrung) am Ende des ersten Halbjahrs eingeführt, sodaß das volle zweite Halbjahr für Übung und Vertiefung zur Verfügung steht. Eine wichtige Rolle für die Einsicht in Beziehungen zwischen den Einmaleins-Aufgaben spielt die Einspluseins-Tafel (WITTMANN/MÜLLER 1990, S. 43-50)



Die Automatisierung des Einspluseins beginnt am Ende des 1. Schuljahrs und wird im ersten Halbjahr des 2. Schuljahrs fortgesetzt.

Über ihre Erfahrungen mit dem Konzept gibt Sibylle Bösel (Nordmarkt-Grundschule Dortmund) folgenden Bericht:

«Die Schüler meiner Klasse haben [am Ende des 1. Schuljahrs, Anm. E.Ch.W.] keinerlei Schwierigkeiten, sich im Zahlraum bis 20 zurechtzufinden, obwohl ich zu Beginn des Schuljahrs recht unterschiedliche Voraussetzungen angetroffen hatte. Viele Kinder konnten anfangs weder Ziffern noch Mengen mit den richtigen Zahlwörtern benennen, andere hingegen konnten schon bis 100 zählen und einige Plusaufgaben ausrechnen. Aber gerade dieser Klassenzusammensetzung kam das Konzept besonders entgegen.

Da im 1. Schulhalbjahr die Orientierung und Einführung im Vordergrund standen, hatten Kinder ohne Vorerfahrung genügend Zeit, sich zurechtzufinden. Den anderen Kindern stand der Zahlenraum bis 20 offen, und es gab für sie genug zu entdecken. So hatten wir das ganze 2. Halbjahr Zeit, die Rechenoperationen im Zahlenraum bis 20 zu vertiefen und zu ergänzen, was sich für alle als großer Vorteil erwies.

Während zu Ostern Kolleginnen aus den Parallelklassen über die noch zu bewältigende Stoffülle klagten – sie mußten noch den Zahlenraum von 10 bis 20 erweitern und den 10er-Übergang durchnehmen – ergaben sich diese Probleme bei uns erst gar nicht. Alle Kinder der Klasse konnten bereits Aufgaben im Zahlenraum bis 20 lösen. Der 10er-Übergang war kein Problem, vielleicht gerade weil er nicht problematisiert worden war. Zu keiner Zeit wurde den Kindern vorgeschrieben, welche Rechenwege sie bei bestimmten Operationen einschlagen sollen. Im Vordergrund stand vielmehr das Auffinden verschiedener Wege.»

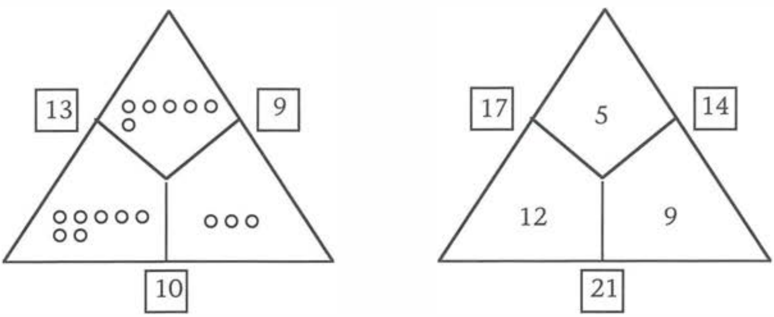
Rechendreieck

Das «Rechendreieck» ist eine Übungsform, die im zweiten Halbjahr des 1.Schuljahrs zur Übung des Einspluseins und zur Förderung der allgemeinen Lernziele herangezogen werden kann (WITTMANN/MÜLLER U.A. 1994, S.54)

Ein Rechendreieck hat drei Felder, in die Plättchen gelegt oder Zahlen geschrieben werden können. Den Seiten des Rechendreiecks werden ebenfalls Zahlen zugeordnet. Die einfache Regel lautet: Jede Seite trägt die Summe der Zahlen in den angrenzenden Feldern (vgl. Beispiel 1).

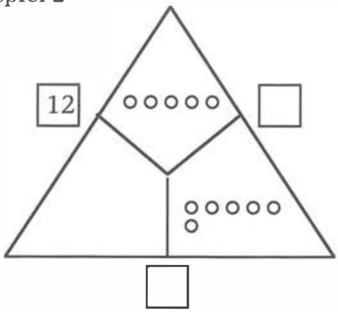
Dieser schlichte mathematische Rahmen erlaubt eine Fülle unterschiedlicher Aktivitäten, da man gewisse Kombinationen von drei Zahlen vorgeben und die drei anderen Zahlen berechnen lassen kann.

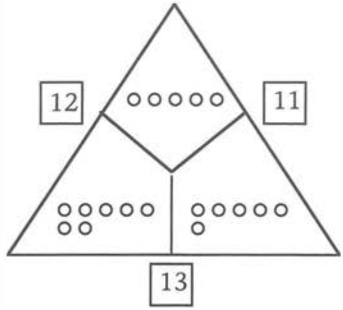
Beispiel 1



1. Wenn die drei inneren Felder gegeben sind, lassen sich die Randzahlen durch Addition berechnen.
2. Wenn eine Randzahl, ein angrenzendes und das nicht angrenzende Feld oder wenn ein Feld und zwei Randzahlen gegeben sind (Beispiele 2 und 3) führen Subtraktionen und Additionen schrittweise zur Lösung. Bei beiden Aufgabentypen können Kinder, die möchten, mit Plättchen arbeiten.

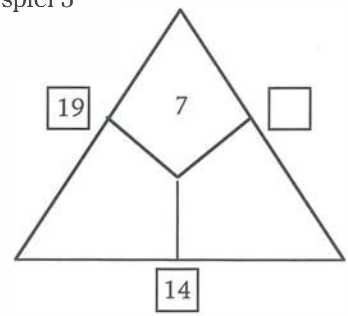
Beispiel 2

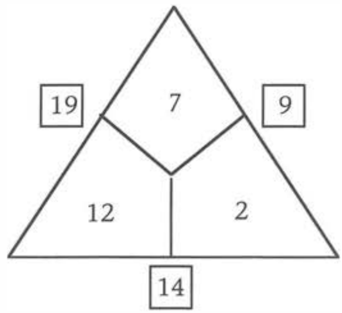




Lösung

Beispiel 3

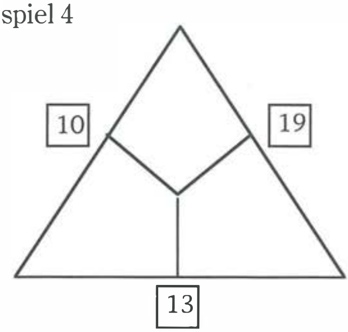




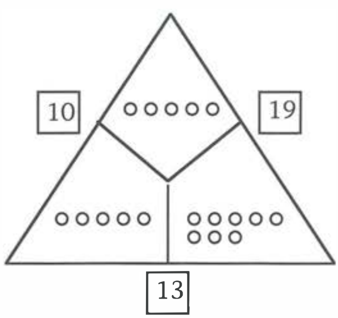
Lösung

3. Sind dagegen die drei Randzahlen gegeben, dann ist ein gezielter Lösungsweg zunächst nicht erkennbar (Beispiel 4). Die Kinder müssen sich systematisch an die Lösung herantasten.

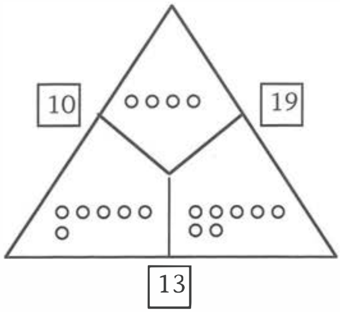
Beispiel 4



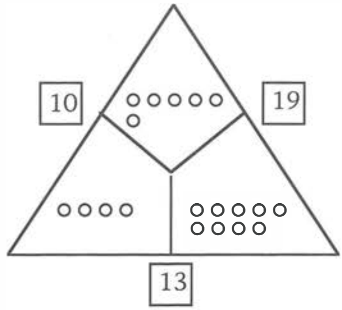
Aufgabe



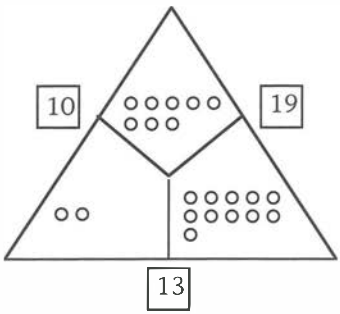
1. Lösungsversuch



2. Lösungsversuch



3. Lösungsversuch



Lösung

Z. B kann ein Kind etwa damit beginnen, das obere und das linke Feld so mit Plättchen zu belegen, daß sich die Summe 10 ergibt, wie es die linke Randzahl verlangt, also etwa mit 5 und 5. Um die untere Randzahl 13 zu erfüllen, muß es dann in das rechte Feld 8 Plättchen legen. Die Summe des rechten und des oberen Feldes ist dann aber ebenfalls 13 – und nicht wie verlangt 19. Das Kind kann nun die Belegung im oberen Feld verändern und beobachten, wie sich das auswirkt. Wird in das obere Feld 4 statt 5 gelegt, muß links 6 statt 5 liegen. Ins rechte Feld gehören dann nicht 8, sondern nur 7 Plättchen, um die untere Randzahl 13 zu erhalten. Die Summe des rechten und des oberen Feldes ist jetzt aber nur noch 11 – eine noch größere Abweichung von 19 als zuvor! Diese Beobachtung kann das Kind anregen, es im oberen Feld mit einer Erhöhung, z.B. auf 6, zu versuchen. Dann muß ins linke Feld nur 4 und ins rechte Feld 9 gelegt werden, was auf der rechten Seite zur Summe 15 führt – ein Fortschritt, der dazu ermutigt, das obere Feld weiter zu erhöhen, schließlich zu 8. Dann muß nämlich in das untere Feld 2, in das rechte 11 gelegt werden. 11 und 8 ergeben 19, wie es verlangt war.

Mit Plättchen können sich **alle** Kinder probierend an die Lösung herantasten, wie umständlich ihr Weg auch immer sein mag. Daher sind Rechendreiecke eine bei Kindern sehr beliebte Übungsform.

Das probierende Herangehen an Aufgaben ist für den gesamten Mathematikunterricht außerordentlich wichtig und muß für Kinder zu einer selbstverständlichen Lösungsmethode werden.

Halbschriftliche Addition im Hunderterraum

Traditionell wird auch die halbschriftliche Addition im Hunderterraum gestuft behandelt: zuerst Addition von Einern ohne Zehnerüberschreitung (z.B. 42+5, 68+2), dann Addition reiner Zehner (z.B. 42+50, 68+30), dann Addition von Einern mit Zehnerüberschreitung (z.B. 42+9, 68+5) und schließlich Addition beliebiger Zahlen im Hunderter.

Der aktiv-entdeckende, ganzheitliche Weg (WITTMANN/MÜLLER 1990,85-89, WITTMANN/MÜLLER U.A. 1994, 30) startet hingegen mit einer sogenannten «Standortbestimmung»: Den Kindern wird der neue Aufgabentyp zuerst an repräsentativen Aufgaben vorgestellt, und sie werden aufgefordert, selbst «solche» Aufgaben zu wählen, die sie schon rechnen können. Auf diese Weise erhält die Lehrerin sehr wichtige Informationen über die Lernvoraussetzungen. Die eigentliche Behandlung der Addition beginnt dann mit einer komplexen Aufgabe (z.B. 38+25). Die Kinder versuchen, diese Aufgabe zu lösen, und stellen ihre Lösungen bzw. Lösungsansätze vor. Unter Mithilfe der Lehrerin werden auf dieser Grundlage unterstützt durch geeignete Anschauungsmittel die grundlegenden Rechenstrategien für die halbschriftliche Addition erarbeitet: «Zehner plus Zehner, Einer plus Einer» und «Zehner dazu,dann Einer dazu». Im weiteren Unterricht folgen dann sowohl einfachere als auch komplexere Aufgaben.

Der folgende Erfahrungsbericht von Gertrud Mollenhauer (GGS Steinstraße, Mönchengladbach) ist sehr lehrreich, weil er auch die widerstreitenden Gefühle der Lehrerin bei der Umstellung auf die neue Methode beschreibt:

«Ich muß zugeben, daß ich der ganzheitlichen Einführung der Addition doch recht skeptisch gegenüberstand und mit dem Gedanken spielte, zuerst einige «leichtere Plusaufgaben» mit den Kindern zu rechnen (32+4 = , 42+10 =) oder zumindest das Überschreiten erst einmal wegzulassen. Gespräche mit meinen Kollegen und dem Schulleiter bestärkten mich darin.

Ich habe dann aber noch einmal die entsprechenden Seiten im Lehrerkommentar und im «Handbuch produktiver Rechenübungen» nachgelesen und bin dann zu dem Ergebnis gekommen:«Das will ich einfach einmal ausprobieren!»

Es hat ganz prima geklappt!

Ich bin wie beschrieben vorgegangen. Bei der Standortbestimmung haben die Kinder viele Aufgaben geschrieben, die schwächeren ohne Zehnerübergang oder mit einstelligem zweiten Summanden, die leistungsstärkeren Schüler auch entsprechend schwierige Aufgaben mit Zehnerübergang und zweistelligen Summanden.

Bei der Demonstrationsaufgabe [38 + 25 , Anm. E.Ch.W.] haben wir als erstes mit Geld gearbeitet. Auch die schwächeren Schüler konnten dies gut nachvollziehen. Ich habe alle angegebenen Materialien eingesetzt und zusätzlich noch das Hunderterfeld von Oehl/Schreiber «Spiele und rechne» aus dem Turm-Verlag. Bei den Aufgaben mit zweistelligem zweiten Summanden habe ich die Schüler noch mit Anschauung arbeiten lassen, da mir das sicherer schien. Ich habe bei allen Aufgaben frei wählen lassen, wie das Ergebnis (ob mit oder ohne Zwischenschritt) notiert werden sollte, und festgestellt, daß die Schüler kein Zwischenergebnis aufschrieben. Die Lösungen waren immer richtig.

Ich habe danach Übungsaufgaben mit Zwischenergebnis und Zwischenrechnung aufschreiben lassen und festgestellt, daß dies etlichen Schülern schwerfiel. Sie schrieben oft das richtige Ergebnis zuerst hin, um die Nebenrechnung im Nachhinein auszuführen.»

Differenz von Umkehrzahlen

Das Unterrichtsbeispiel dient zur Übung der halbschriftlichen Subtraktion im zweiten Schuljahr (WITTMANN/MÜLLER 1992, 99-102). Es ist eine typische strukturierte Übung, weil die einzelnen Aufgaben nach einem bestimmten System erzeugt werden: Minuend und Subtrahend sind «Umkehrzahlen», d. h. sie bestehen jeweils aus den gleichen Ziffern, aber in unterschiedlicher Reihenfolge:

52 – 25 = , 94 – 49 = , 72 – 27 = , usw.

Das Besondere an diesen Aufgaben ist, daß als Ergebnisse nur 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, d.h. Vielfache der Zahl 9, herauskommen können. Dies zeigt sich z.B. , wenn man die Ergebnisse nach der Strategie «Zehner minus Zehner, Einer minus Einer» berechnet:

52 – 25 = 30 – 3 = 27	94 – 49 = 50 – 5 = 45	72 – 27 = 50 – 5 = 45
50 – 20	90 – 40	70 – 20
2 – 5	4 – 9	2 – 7

Da $30 - 3 = 10 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 9 \cdot 3$, $50 - 5 = 10 \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 9 \cdot 5$ usw., sind alle Ergebnisse tatsächlich Neunerzahlen.

Wenn man die Struktur durchschaut hat, läßt sich das Ergebnis einer Aufgabe schnell ermitteln: Man braucht nur die Differenz der beiden Ziffern in der Aufgabe mit 9 zu multiplizieren: $5 - 2 = 3$, $3 \cdot 9 = 27$; $9 - 4 = 5$, $5 \cdot 9 = 45$, usw. Dies gibt der Lehrerin und den Schülern eine gute Kontrollmöglichkeit an die Hand.

Für den Unterricht bieten sich folgende Möglichkeiten an:

1. Klassengespräch: Man schreibt einige Aufgaben des Typs an die Tafel und fordert die Kinder auf, weitere «solche» Aufgaben zu nennen. Wenn die Struktur erfaßt ist, werden einige Aufgaben gemeinsam gerechnet.
2. Stillarbeit: Die Kinder denken sich selbst weitere Aufgaben aus und rechnen sie im Heft.
3. Gemeinsames Ordnen der Aufgaben nach gleichen Ergebnissen im Klassengespräch: Die Kinder lesen aus ihrem Heft die errechneten Ergebnisse vor. Dabei fällt auf, daß sich bestimmte Ergebnisse wiederholen. Ergebnisse, die keine Neunerzahlen sind, werden sofort überprüft und als falsch erkannt. Die möglichen Ergebnisse 9, 18, 27, usw. werden mit Zwischenraum an die Tafel geschrieben. Unter jedem Ergebnis werden anschließend jeweils zugehörige Aufgaben notiert.
4. Klassengespräch: Entdecken von Mustern, Finden weiterer Aufgaben
   Die Kinder äußern sich frei zu den Beziehungen, die sie zwischen den Ergebnissen und den Aufgaben entdecken und überlegen, welche Aufgaben es zu vorgegebenen Ergebnissen noch geben müßte.
5. Klassengespräch: Begründung der Struktur

Unter Anleitung der Lehrerin können die Kinder mit Hilfe der Strategie «Zehner minus Zehner, Einer minus Einer» begründen, warum als Ergebnisse nur $10 - 1 = 9$, $20 - 2 = 18$, usw. herauskommen können.

Es ist keinesfalls notwendig, daß im Unterricht alle fünf Etappen behandelt werden. Je nach Situation in der Klasse kann man nach jeder Etappe guten Gewissens einen Abschluß herstellen. Wenn man nur die ersten beiden Etappen behandelt, wird die Subtraktion geübt. Wenn man zu den Etappen 3 oder gar 4 vordringt, wird das allgemeine Lernziel «Entdecken» gefördert. Die Etappe 5 schließlich fördert das allgemeine Lernziel «Argumentieren».

Natürlich bietet sich diese Flexibilität des Unterrichtsbeipiels auch für eine Differenzierung an.

Einführung der schriftlichen Addition

Die Einführung der schriftlichen Rechenverfahren gilt als eine scheinbar uneinnehmbare Bastion des methodisch bis in die Einzelheiten aufgebauten und geführten Unterrichts. Trotzdem eröffnet das aktiv-entdeckende Lernen auch hier neue Möglichkeiten.

Der folgende Unterrichtsvorschlag für die Einführung der schriftlichen Addition im 3. Schuljahr stammt von Margarete Zehnpfennig (GGS Rosenzweigweg, Köln).

Mitte des 3. Schuljahrs beherrschen die Kinder die halbschriftliche Addition und Subtraktion im Tausenderraum (Schreibweisen: 476+388=, 821–536=) und sie kennen die Stellentafel.

Die Lehrerin schreibt nun Zahlen untereinander an die Tafel und fordert die Kinder auf, sie zu addieren:

$$\begin{array}{cccc} & H & Z & E \\ & 6 & 2 & 2 \\ + & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Die Kinder rechnen diese Aufgabe (ohne Übertrag) mühelos.

Dann schreibt die Lehrerin die Aufgabe

$$\begin{array}{cccc} & H & Z & E \\ & 7 & 3 & 8 \\ + & 1 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$$

an die Tafel. Die Kinder erkennen ein Problem, und die Lehrerin fordert sie auf zu versuchen, es ohne Hilfe zu lösen.
Frau Zehnpfennig faßt ihre Erfahrungen am Ende der in dieser Weise gestalteten Stunde folgendermaßen zusammen:

«5 Kinder finden (oder können schon) den Lösungsweg, den auch ich vorgeschlagen hätte. Sie können ihr Vorgehen auch gut erklären. 11 weitere Kinder finden individuelle Lösungen.

5 Kindern helfe ich später bei ihren Lösungsversuchen. Ich bediene mich dabei der mir vorliegenden Modelle der Kinder.»

Nach der Unterrichtsstunde wurden die Kinder zu dem Unterrichtsstil befragt: *«Ihr habt lange überlegt, nachgedacht und ausprobiert, bis Ihr herausgefunden habt, wie man solche Aufgaben lösen kann. Ich hätte es auch leichter* *machen können, wenn ich es Euch – oder jedem einzelnen extra – gezeigt hätte. Wie soll ich es beim nächsten Mal machen? Soll der Lehrer erklären – oder der Schüler selbst einen Weg herausfinden?»*

Der überwiegende Teil der Kinder sprach sich bei Einzelbefragung für «selbst herausfinden» aus, mit unterschiedlichen Begründungen:

- *Weil, – da kann man bessere Noten bekommen!*
- *Weil, – wenn der Lehrer was erklärt, dann ist es komplizierter. Und so alleine – da darf man auch Fehler machen. Und es macht auch mehr Spaß und man lernt außerdem auch mehr*
- *Weil, – sonst geht es manchmal zu schnell und dann weiß man gar nicht, was passiert.*
  Wenn man das allein macht, hat man Ruhe und kann langsam über das Problem nachdenken – sonst weiß man nicht was passiert.
- *Erfinden macht Spaß.*
  Wenn der Lehrer was erklärt und man versteht es und andere haben es noch nicht kapiert – das macht Streß!
- *Mit eigenen Worten versteht man eben alles besser.*
- *Man lernt mehr.*
  Alleine drauf kommen ist besser, dann braucht man auch später nicht mehr zu fragen, weil man's ja verstanden hat.
- *Es ist nicht so langweilig.*
  Wenn der Lehrer was an der Tafel erklärt, muß man meistens gähnen.
  Außerdem macht es Spaß, wenn das Gehirn angestrengt wird. Und außerdem wird einem, wenn man selbst nachdenkt, nichts vom anderen ins Gehirn reingeschickt.

Rechnen mit Ziffernkärtchen

Für die Übung der schriftlichen Addition bietet es sich an, mit Kärtchen für die neun Ziffern von 1 bis 9 unterschiedliche Aufgaben legen zu lassen und die Veränderung des Ergebnisses bei Veränderung der Aufgabe zu untersuchen.

Ergiebig sind die folgenden beiden Aufgabenstellungen (WITTMANN/ MÜLLER 1992, 36-37):

- Mit 6 beliebig ausgewählten Kärtchen werden zwei dreistellige Zahlen gebildet und schriftlich addiert.

Beispiel:

$$\boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{6}$$
$$\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{7}$$

$$\begin{array}{r} 396 \\ +247 \\ {\scriptstyle 1} \\ \hline 643 \end{array}$$

– Mit allen 9 Ziffernkärtchen werden drei dreistellige Zahlen gebildet und schriftlich addiert.

Beispiel:

$$\boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{6}$$
$$\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{7}$$
$$\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}$$

$$\begin{array}{r} 396 \\ 247 \\ +135 \\ {\scriptstyle 1\,1} \\ \hline 778 \end{array}$$

Ziel ist es, vorgegebene Ergebnisse zu erreichen bzw. ihnen möglichst nahezukommen. Die Schüler können auch überlegen, welche minimalen und maximalen Ergebnisse möglich sind.

Besonders spannend ist die Aufgabe, mit drei dreistelligen Zahlen der 1000 möglichst nahezukommen. Dabei müssen die Schüler überlegen, wie sie durch Platzveränderung der Kärtchen größere oder kleinere Ergebnisse erhalten können. Es stellt sich heraus, daß 999 der beste Wert unter 1000 und 1008 der beste Wert darüber ist (Wittmann/Müller 1992, S. 36).

Durch diese Übungen wird das Gefühl für die unterschiedliche Wertigkeit der einzelnen Stellen geschult, und die Kinder werden zum denkenden Rechnen angeregt.

Große Summen

Martina Röhr, Mitglied der Projektgruppe «mathe 2000», hat im Rahmen ihrer Untersuchungen zum kooperativen Lernen von Schülern des 4. Schuljahrs die Summe aller Ergebnisse der Einspluseinstafel (s. oben) bestimmen lassen. Dazu wurden mehrere Gruppen von je drei Schülern gebildet, die sich in einem separaten Raum jeweils allein mit der Aufgabe befaßten und dabei von einer Videokamera beobachtet wurden. Es war keine Lehrperson anwesend, an die sich die Kinder hätten wenden können. Es zeigte sich, daß die Kinder mit dieser Situation sehr gut zurechtkamen:

Zwei Gruppen verrechneten sich zwar bei der Addition der Zwischenergebnisse, fanden aber interessante Lösungswege. Sechs Gruppen berechneten in unterschiedlichen gruppendynamischen Prozessen und auf unterschiedlichen Wegen das richtige Resultat 1210. Eine Gruppe z.B. summierte die Ergebnisse mit dem Streifen rechts unten beginnend streifenweise. Infolge eines Rechenfehlers erhielten die drei Mädchen für den ersten Streifen nicht die richtige Summe 165, sondern 163. Die nächsten Streifen berechneten sie richtig zu 154, 143 und 132. Sie stellten dann fest, daß die Teilsummen immer um 11 kleiner werden, daß aber die zuerst berechnete Zahl 163 nicht zu diesem Muster paßt. Die Teilsumme im ersten Streifen wurde daraufhin nochmals nachgeprüft und zu 165 berichtigt – ein sehr schönes Beispiel für Selbstkontrolle aus der Sache heraus.

«Kredite kosten Geld»

Abschließend für diesen Abschnitt sei ein Beispiel für eine strukturierte Übung skizziert, bei der die Struktur nicht aus dem Fach Mathematik kommt, sondern von einer Sachsituation geliefert wird.

Die Grundlage bildet eine vereinfachte Tabelle, wie sie von Kreditinstituten herausgegeben wird. Man kann daraus ablesen, wie viele Raten welcher Höhe bei einer bestimmten Kreditsumme und einer bestimmten Laufzeit zurückzuzahlen sind. Durch schriftliche Multiplikation, Addition und Subtraktion läßt sich leicht ausrechnen, wieviel der Kunde mehr zurückzahlen muß, als er sich geliehen hat: Kredite kosten Geld!

Kreditsumme	**Laufzeit**	**monatliche Rate**
10 000 DM	12 Monate	902,00 DM
10 000 DM	18 Monate	618,60 DM
10 000 DM	24 Monate	477,00 DM
10 000 DM	30 Monate	392,00 DM
10 000 DM	36 Monate	335,30 DM
10 000 DM	42 Monate	294,85 DM
10 000 DM	48 Monate	264,50 DM

Beispiel: Kreditsumme 10 000 DM, Laufzeit 36 Monate (wie viele Jahre?)

$$\begin{array}{r} \underline{335{,}30 \bullet 36} \\ 100590 \\ \underline{201180} \\ 12070{,}80 \end{array} \qquad 12\,070{,}80\text{ DM} - 10\,000\text{ DM} = 2\,070{,}80\text{ DM}$$

Die Bank verlangt also über 2000 DM mehr zurück, als sie gegeben hat.

An diesem Thema lassen sich also nicht nur Rechenverfahren üben, sondern auch wichtige Sachinformationen für das praktische Leben vermitteln («Hände weg von Konsumkrediten!»).

Perspektiven

Zum Schluß möchte ich eine persönliche Einschätzung der weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in der Grundschule versuchen, wobei ich mich auf Erfahrungen unseres Projektes «mathe 2000» stütze.

Bei unserer Forschungs- und Entwicklungsarbeit haben wir von Anfang an eine Richtung eingeschlagen, deren Vorteile Alan Bell klar beschrieben hat (Bell 1983, Übers. E.Ch.W.):

«Man könnte allgemein die Frage stellen, ob wir uns bei dem gegenwärtigen Wissensstand in der Mathematikdidaktik eher auf das Sammeln «harter» Daten bei kleinen Forschungsproblemen oder das Sammeln «weicher» Daten bei großen Fragen konzentrieren sollten. Mir scheint, daß nur solche Ergebnisse eine Chance haben, verstanden und akzeptiert zu werden, die auf relevante Praxisprobleme bezogen sind. Die sich entwickelnde Theorie des mathematischen Lehrens und Lernens muß eine Verfeinerung, Erweiterung und Vertiefung des Berufswissens von Lehrern sein, nicht ein abgehobener Bereich. Spezielle Forschungsergebnisse, die nicht auf zentrale Praxisfragen bezogen sind, werden sich im Schulsystem nicht verbreiten. Auf der anderen Seite haben «weiche» Ergebnisse zu relevanten Themen des Unterrichts, wenn sie Lehrern nur interessant und provokativ erscheinen, die Chance, in der Myriade winziger Unterrichtsexperimente erprobt zu werden, die Lehrer tagtäglich durchführen, wenn sie etwas ausprobieren und prüfen, ob es «funktioniert». Durch diesen Prozeß verschwinden einige Unterrichtsideen, andere treten in den Vordergrund. Natürlich müssen wir auf Modeerscheinungen gefaßt sein. Die Geschichte des Mathematikunterrichts der letzten 30 Jahre liefert hierfür genügend Anschauungsmaterial. Wir können uns vor Modeerscheinungen nur schützen, indem wir versuchen, die Natur mathematischer Lernprozesse besser zu verstehen, geeignete Unterrichtsmethoden entwickeln – und dieses Wissen im weiten und komplexen System von Schule und Schulverwaltung verbreiten.»

In diesem Sinn haben wir in unserem Projekt durch Kontakte mit Schulen, Studienseminaren und der Schulaufsicht die Grundlage für einen kontinuierlichen Austausch von Ideen und Erfahrungen gelegt. Das zweibändige «Handbuch produktiver Rechenübungen», das eigens für dieses «Theorie-Praxis-Netzwerk» verfaßt wurde, hat eine große Zahl von Lehrerinnen und Lehrern zu Unterrichtsexperimenten ermuntert. Die Erfahrungen aus diesen Experimenten haben sich verbreitet und andere zum Nachmachen angeregt.

Die Möglichkeit, zuerst in kleinem Maßstab überschaubare Versuche durchführen zu können, ohne sogleich den gesamten Unterricht umstellen zu müssen, hat sich dabei als großer Vorteil erwiesen. Viele Informationen aus diesen Unterrichtsversuchen sind auf unterschiedlichen Kanälen an die Projektgruppe zurückgeflossen. Der aktiv-entdeckende Ansatz ist dabei im Grundsatz bestätigt worden. Konstruktive Verbesserungsvorschläge aus der Praxis haben der weiteren Arbeit wichtige Impulse gegeben.

Eine gute Basis für einen langjährigen Theorie-Praxis-Kontakt bietet uns ein vierjähriger Schulversuch mit über 1500 Kindern in etwa 60 Erprobungsklassen (40 Klassen in Nordrhein-Westfalen und 20 Klassen in den Schweizer Kantonen Aargau, Basel-Stadt und Solothurn), der im Schuljahr 1992/93 mit der 1.Klasse begonnen hat und im Schuljahr 1995/96 mit der 4. Klasse enden wird. Dabei wird das Konzept des ganzheitlichen, aktiv-entdeckenden Lernens im Zusammenhang getestet und im Detail verbessert.

Nach der Erprobung in den drei ersten Klassen läßt sich eine positive Bilanz ziehen. Die Erproberinnen und Erprober haben im Laufe der Zeit Sicherheit in der neuen Lehrerrolle gewonnen und gelernt, den Kindern immer mehr zuzutrauen. Viele berichten auch, daß ihnen der Unterricht geholfen habe, das Fach Mathematik von einer ganz anderen Seite zu sehen und Negativerfahrungen aus Schulzeit und Ausbildung zu überwinden. Übereinstimmend wird berichtet, daß nach einer Phase der Einarbeitung der Aufwand für die Vor- und Nachbereitung des Unterrichts bei dem neuen Konzept eher geringer sei als bei dem alten.

Weiter zeigt die Erprobung, daß Eltern dem neuen Konzept anfangs manchmal skeptisch gegenüberstehen, durch die offensichtlichen Lernerfolge der Kinder aber überzeugt werden, insbesondere, wenn sie ältere Kinder haben und so einen Vergleich mit deren Lernerfahrungen herstellen können.

Diese überwiegend positiven Erfahrungen werden sich in den kommenden Jahren weiter verbreiten und andere Lehrerinnen und Lehrer anregen, in ihrem Mathematikunterricht selbst Unterrichtsexperimente mit aktiv-entdekkenden Lehr-/Lernformen durchzuführen. Gute Erfahrungen mit diesem Konzept in anderen Fächern werden hier Schrittmacherdienste leisten. In vielen Lehrerzimmern wird es kontroverse Diskussionen geben, da die ersten Erfahrungen naturgemäß unterschiedlich ausfallen werden und alte Gewohnheiten oft nicht ohne innere Konflikte abgelegt werden können. In dem Maß, in dem sich die Lehrer aber auf die neuen Methoden einstellen und sie praktikabel finden, werden sie ihren Unterricht ändern. Die Aufgabe der Lehrerfortbildung im Fach Mathematik liegt m. E. hauptsächlich darin, Lehrerinnen und Lehrern Mut zu Unterrichtsexperimenten zu machen.

Aktiv-entdeckende Lehr-/Lernformen im Mathematikunterricht der Grundschule werden zweifellos auf die weiterführenden Schulen ausstrahlen.

Dafür gibt es erste deutliche Signale. In Nordrhein-Westfalen setzt z.B. der neue Mathematiklehrplan der Realschule den Grundschullehrplan konsequent fort. Wie schnell sich die weiterführenden Schulen umstellen werden, wird aber entscheidend von der Entwicklung geeigneter Unterrichtsmaterialien abhängen. Hier wartet auf die fachdidaktische Entwicklungsforschung eine gewaltige Arbeit.

Literatur

Association of Teachers of Mathematics: Modelle für den modernen Mathematikunterricht in der Grundschule. Stuttgart 1970

BELL, A.: Review of Lesh, R./Landau, M. (eds.), Acquisition of Mathematical Concepts and Processes. New York 1983. In: Educational Studies in Mathematics 16 (1985), 103-110

COMENIUS, J.A.: Große Didaktik. (Hrsg. Andreas Flitner). Stuttgart 1982

DAVIS, Ph./Hersh, D.: Erfahrung Mathematik. Basel 1981

DEWEY, J.: The Child and the Curriculum. In: Dewey, J.: The Middle Works 1899-1924, vol. 2, ed. by Jo Ann Boydston, Carbondale 1976, 272-291

DONALDSON, M.: Wie Kinder denken. Bern 1982

FREUDENTHAL, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe (2 Bde.). Stuttgart 1973

GRASSMANN, M. u.a.: Was können Schulanfänger bereits vor ihrer ersten Mathematikstunde? In: Grundschulunterricht 42 (1995), H. 6, 23-24, 49

HENGARTNER, E.: Für ein Recht des Kindes auf eigenes Denken. Die neue Schulpraxis, 1991, H. 7/8, 15-27

HENGARTNER, E./RÖTHLISBERGER, H.: Rechenfähigkeit von Schulanfängern. In: Brügelmann, H. u.a.: Am Rande der Schrift. Zwischen Sprachenvielfalt und Analphabetismus. Jahrbuch der deutschen Gesellschaft für Lesen und Schreiben 6. Lengwil 1995, 66-86

HEUVEL-PANHUIZEN, M. van den: Realistic Arithmetic/Mathematics Instruction and Tests. In: Gravemeijer, K. et al. : Contexts, Free Productions, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education, Utrecht 1990, 53-78

KM – Der Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen: Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Köln 1985

KRAUTHAUSEN, G.: Arithmetische Fähigkeiten von Schulanfängern. Wiesbaden 1994

KÜHNEL, J.: Neubau des Rechenunterrichts. Bad Heilbronn/Düsseldorf 1954[8]

LORENZ, J.-H.: Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen 1992

MEIERS, K.: Grundschulpädagogische Positionen und ihre Relevanz in den zentralen Lernbereichen Sprache und Mathematik. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe. Heft 12, S. 554-558

RADATZ, H.: Anschauung und Sehverstehen im Mathematikunterricht der Grundschule, Beiträge zum Mathematikunterricht 1986. Bad Salzdetfurth 1986, 239-242

RADATZ, H.: Leistungsstarke Grundschüler im Mathematikunterricht fördern, erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1995. Hildesheim 1995

RÖHR, M.: Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe. Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden 1995

SCHERER, P.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. Heidelberg: Edition Schindele 1995

SCHERER, P.: Fördern durch Fordern – aktiv-entdeckende Lernformen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Zeitschrift für Heilpädagogik 45 (1994), 761-773

SCHIPPER, W.: Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangsunterricht. Journal für Mathematik-Didaktik, H. 2, 1982, 91-120

SCHMIDT, S./WEISER, W.: Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. Journal für Mathematik-Didaktik, H. 3/4 1982, 227-263

SELTER , Ch.: Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe, Wiesbaden 1994

SELTER, Ch.: Zur Fiktivität der Stunde Null im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Heft 2/1995, S. 11-19

SELTER, Ch.: Hilfe für ein Denken über den Tag hinaus. Zur Aktualität des Werks Johannes Kühnels. Bochum 1995a

STREEFLAND, L./TREFFERS, A.: Produktiver Rechen-Mathematik-Unterricht. Journal für Mathematik-Ddiaktik, H. 4, 1990, 297-322

SZEMINSKA, A.: Kozwój pojec matematycznych u dziecka. In: Semadeni, Z. (Hrsg.): Nauczanie poczatkowe Matematyki, tom 1, Warszawa 1981, 112-251

TRICKETT, L./SULKE, F.: Mathematikunterricht mit schulschwachen Kindern: Fördern heißt Fordern. In: Grundschulzeitschrift, H. 68/1993, S. 35-38

VOIGT, J.: Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In: Lorenz, J.H. (Hg.): Mathematik und Anschauung. Köln 1993, 147-166

WINTER, H.: Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Mathematikunterricht in der Grundschule, Frankfurt a.M. 1987

WINTER, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig/ Wiesbaden 1989

WITTMANN, E.Ch.: «Weniger ist mehr»: Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. Beiträge zum Mathematikunterricht 1993, Bad Salzdetfurth 1993, 394-397

WITTMANN, E.Ch./MÜLLER, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Stuttgart, Bd. 1: 1990, Bd. 2: 1992

WITTMANN, E.Ch./MÜLLER, G.N. u.a.: Das Zahlenbuch. Mathematik für das 1. Schuljahr (Schülerbuch und Lehrerband). Düsseldorf 1995

ZANKOV, L.: Didaktik und Leben. Hannover 1973