

Leutner, Detlev; Nussbaum, Albert
Lehrstoffstrukturen als Netzwerke
Unterrichtswissenschaft 14 (1986) 1, S. 80-93



Quellenangabe/ Reference:
Leutner, Detlev; Nussbaum, Albert: Lehrstoffstrukturen als Netzwerke - In: Unterrichtswissenschaft 14 (1986) 1, S. 80-93 - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-295935 - DOI: 10.25656/01:29593

<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-295935>
<https://doi.org/10.25656/01:29593>

in Kooperation mit / in cooperation with:

BELTZ JUVENTA

<http://www.juventa.de>

Nutzungsbedingungen

Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen. Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document. This document is solely intended for your personal, non-commercial use. Use of this document does not include any transfer of property rights and it is conditional to the following limitations: All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.

Kontakt / Contact:

peDOCS
DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation
Informationszentrum (IZ) Bildung
E-Mail: pedocs@dipf.de
Internet: www.pedocs.de

Digitalisiert

Lehrstoffstrukturen als Netzwerke

Lehrstoffstrukturen lassen sich häufig als Netzwerke repräsentieren. Zur Analyse solcher Netzwerke eignet sich das Verfahren der Ordinalen Netzwerkskalierung (Feger & Bien, 1982), mit dem sich empirische Ähnlichkeiten in Pfadmetrik-Koeffizienten eines Netzwerkes transformieren lassen, so daß eine perfekte ordinale Übereinstimmung zwischen beiden Mengen besteht. Anhand zweier Beispiele, Kommasetzung und Bruchrechnen, wird gezeigt, wie facettentheoretisch formulierte Hypothesen mit Hilfe dieses Verfahrens überprüft werden können.

Networks of subject matter

The structure of a subject-matter is often represented by a network. Such networks can be analysed by ordinal network scaling (Feger & Bien, 1982), by which empirical proximities can be transformed into path metric coefficients of a network, establishing a perfect ordinal fit between data and model. In two examples, punctuation and fractional arithmetic, it is shown how this procedure can be applied to test hypotheses generated by facet theory.

Seit den grundlegenden Arbeiten von Gagné (1962) haben Ansätze zur Hierarchisierung von Lehrstoffen in der empirischen Unterrichtsforschung großes Interesse gefunden. Dabei hat sich die Einteilung in Transfer- und psychometrische Hierarchien durch Resnick (1973) als nützlich erwiesen. Klauer (1974, 1976) griff diese Einteilung auf und verwendete die etwas weiter gefaßten Begriffe Lern- und Leistungshierarchie. In der vorliegenden Arbeit soll diese begriffliche Erweiterung noch einen Schritt weiter geführt werden, in dem „Hierarchie“ als ein Spezialfall von „Struktur“ verstanden wird. Es wird also von Lehrstoff- und insbesondere von Leistungsstrukturen die Rede sein, wobei gezeigt werden soll, wie Hypothesen über derartige Strukturen gewonnen und empirisch überprüft werden können.

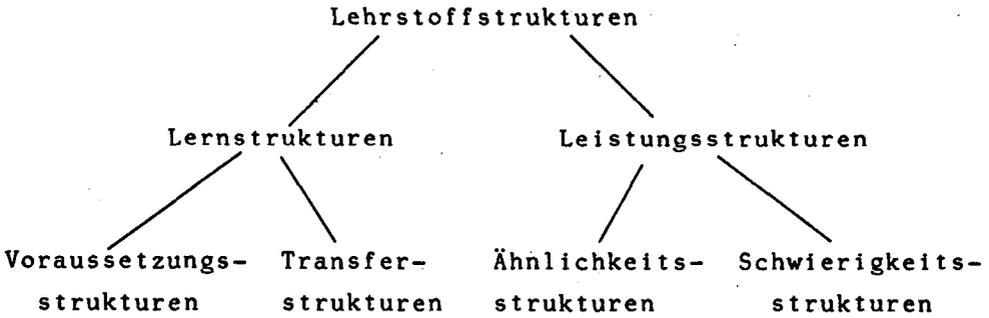
1. Lehrstoffstrukturen

Unter dem Begriff „Struktur“ verstehen wir eine Menge, auf der eine oder mehrere Relationen definiert sind (vergl. Reinhardt & Soeder, 1978). Entsprechend verstehen wir unter Lehrstoffstrukturen eine Menge von Lehrstoffen, wobei sich je nach betrachteter Relation unterschiedliche Typen von Lehrstoffstrukturen unterscheiden lassen.

1.1 Lernstrukturen

Bei Lernstrukturen wird der Lernprozeß im zeitlichen Ablauf betrachtet (Gagné, 1962; Eigler, 1976). Es lassen sich Voraussetzungs- und Transferstrukturen unterscheiden. Bei *Voraussetzungsstrukturen* ist für das Lernen eines Lehrstoffs das vorhergehende Lernen anderer Lehrstoffe Voraussetzung. Dabei kann für zwei belie-

Abbildung 1: Verschiedene Arten von Lehrstoffstrukturen



bige Lehrstoffe A und B die Relation „A ist Voraussetzung von B“ nur die Werte „ja“ oder „nein“ annehmen. Diese Strukturen lassen sich vor allem durch eine logische Analyse des Lehrstoffs ermitteln (s. *Weltner*, 1977). Bei *Transferstrukturen* wird ein Lehrstoff leichter bzw. schwerer gelernt, je nachdem, welche Lehrstoffe vorher gelernt worden sind. Die Relation „A gibt Transfer für B“ läßt sich, da bis dato keine allgemein akzeptierte Transfertheorie existiert, nicht rein theoretisch bestimmen. Zur empirischen Ermittlung der Transferrelationen zwischen mehreren Lehrstoffen ist dagegen ein erheblicher experimenteller Aufwand nötig (s. *White*, 1973). Da es sich bei Voraussetzungs- und meist auch bei Transferstrukturen um Strukturen mit einer asymmetrischen und gleichzeitig transitiven Relation handelt, werden diese Lernstrukturen in der Literatur gewöhnlich als Lern- oder Lehrzielhierarchien bezeichnet (*Klauer*, 1974; *Lühmann*, 1979).

1.2. Leistungsstrukturen

Bei Leistungsstrukturen wird die Leistung von Schülern bezüglich schon gelernter Lehrstoffe betrachtet. Es lassen sich wiederum zwei Strukturtypen unterscheiden: Die symmetrische Relation „Die Art der Leistung in A ist ähnlich der Art der Leistung in B“ erzeugt eine *Ähnlichkeitsstruktur*, während die asymmetrische Relation „Die Art der Leistung in A ist schwieriger als die Art der Leistung in B“ eine *Schwierigkeitsstruktur* definiert, wobei es sich bei der letztgenannten Struktur wegen der asymmetrischen und transitiven Relation um ein *Hierarchie* handelt. Empirische Untersuchungen zu Leistungsstrukturen berichtet z.B. *Lühmann* (1979). Beide Typen von Leistungsstrukturen sollen im folgenden unter Verwendung des *Netzwerkmodells* näher betrachtet werden: Entsprechend dieses weitverbreiteten Modells und Darstellungsart stellen einzelne Lehrstoffe die Knoten eines Netzes dar, die durch Maschen (oder graphentheoretisch: Kanten) verbunden sind. Die oben angeführten Relationen zwischen Lehrstoffen lassen sich dann als Kanten oder Pfade (= Abfolgen von Kanten) in einem solchen Netzwerk von Lehrstoffen identifizieren.

Das Hauptanliegen der vorliegenden Arbeit besteht nun darin, das kürzlich entwickelte Verfahren der *Ordinalen Netzwerkskalierung* (ONS) (*Feger & Bien*, 1982;

Droge, 1983; Droge & Feger, 1983; Feger & Droge, 1984) auf seine Tauglichkeit zur Analyse der Struktur von Lehrstoffnetzwerken hin zu überprüfen. Bezüglich der Struktur derartiger Lehrstoffnetzwerke interessiert vor allem die Frage, welche Kanten zum Aufbau des Netzes notwendig, bzw. welche der insgesamt möglichen Kanten zwischen Lehrstoffpaaren überflüssig sind, so daß die entsprechende Relation durch einen Pfad im Netz repräsentierbar ist. Mit der *Facettentheorie* soll zu diesem Zweck ein Verfahren der Theoriekonstruktion herangezogen werden, welches auf Guttman (1954) zurückgeht und schon 1974 von Bar-On & Perlberg in der Unterrichtswissenschaft erfolgreich verwendet worden ist (siehe auch Gage, 1969; Biddle, 1967; Nußbaum, 1984; Leutner, 1985). Dieses Verfahren erlaubt, ein detailliertes Definitionssystem für empirische Beobachtungen (hier: Schülerleistungen) zu entwerfen, um daraus gut begründete Hypothesen bezüglich der empirischen Struktur (hier: Netzwerkstruktur) dieser Beobachtungen abzuleiten (Guttman, 1977).

Anhand von Lehrstoffen aus dem Deutsch- und Mathematikunterricht soll nun im folgenden gezeigt werden, wie Hypothesen über Leistungsstrukturen facettentheoretisch abgeleitet und mit Hilfe der ONS überprüft werden können.

2. Facettentheoretische Analyse der Struktur von Lehrstoffnetzwerken

2.1 Ähnlichkeitsstrukturen bei ungeordneten Facetten: Beispiel Kommasetzungsaufgaben

Das Grundprinzip *facettentheoretischen* Vorgehens (Bar-On & Perlberg, 1974; Guttman, 1977; Borg, 1979) besteht darin, einen Gegenstandsbereich (hier die möglichen Kommasetzungsaufgaben) unter verschiedenen Aspekten (den sog. *Facetten*) mehrfach klassifikatorisch zu zerlegen, um so einzelne Elemente des Bereichs gezielt definieren und beobachten zu können. So lassen sich Kommasetzungsaufgaben unter Verwendung zweier Facetten klassifizieren:

- Facette A: Art der im Duden enthaltenen Vorschrift
a₁ = Gebot, ein Komma zu setzen
a₂ = Verbot, ein Komma zu setzen
- Facette B: Grammatische Klassen
b₁ = Kommasetzung zwischen Satzteilen
b₂ = Kommasetzung zwischen Mittelwort- und Grundformgruppen
b₃ = Kommasetzung zwischen Sätzen

Jede Facette wird als Menge von einander ausschließenden Unterscheidungsmerkmalen aufgefaßt (z.B. bei der Facette A die Merkmale a₁ und a₂), die auch als *Strukts* bezeichnet werden. Das Kreuzprodukt der Facetten enthält dann die Menge aller Objekte, die durch die verwendeten Facetten im jeweiligen Gegenstandsbereich unterscheidbar sind. So unterscheiden die beiden Facetten der Kommasetzungsaufgaben $2 \times 3 = 6$ verschiedene Typen von Aufgaben, da die Facette A zwei und die Facette B drei Strukts enthält. Jeder Aufgabentyp ist dabei durch ein sog. *Strukturpel* (wie z.B. a₁b₃ für „gebotenes Komma zwischen Sätzen“)

eindeutig gekennzeichnet (siehe auch die Verfahren zur Konstruktion kontentvalider Tests bei Klauer, 1984 a).

Stellt man die Kombinationsmöglichkeiten der beiden Facetten tabellarisch dar (Tabelle 1), dann wird deutlich, daß hier eine Tyler-Matrix (Tyler, 1950) als Spezialfall eines Facettendesigns vorliegt: Die Facette A definiert Verhaltensklassen, während die Facette B entsprechende Inhaltsklassen definiert.

Tabelle 1: Tyler-Matrix der Kommasetzungsaufgaben

		Inhalts-Facette B:		
		Grammatische Klassen		
		b ₁	b ₂	b ₃
Verhaltens-Facette A: Art der Vorschrift	a ₁	a ₁ b ₁	a ₁ b ₂	a ₁ b ₃
	a ₂	a ₂ b ₁	a ₂ b ₂	a ₂ b ₃

Die Facettentheorie ist geeignet, nicht nur Lehrstoffe zu definieren, sondern zugleich Hypothesen über empirisch beobachtbare Relationen zwischen Lehrstoffen zu erzeugen. Verwendet man das *Kontiguitätsprinzip* (Foa, 1958), dann lassen sich Hypothesen über die Ähnlichkeit von Lehrstoffen formulieren: Zwei Lehrstoffe sind sich umso ähnlicher, je mehr sie in der Facettenstruktur (den Struktupeln) übereinstimmen. Als Maß der (Un-)Ähnlichkeit eignet sich somit die Anzahl der Facetten, in denen zwei Lehrstoffe *nicht* übereinstimmen, d.h. unterschiedliche Strukts aufweisen.

Aus der Anzahl nicht identischer Strukts jeweils aller Paare von Lehrstoffelementen ergibt sich bei n Facetten eine symmetrische Unähnlichkeits-Matrix D, indem jedem Lehrstoffpaar ein Zahlenwert d zugewiesen wird mit $d \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Für Nichtübereinstimmung in allen n Facetten ergibt sich $d = n$, also maximale Unähnlichkeit zweier Lehrstoffelemente, während $d = 1$ maximale Übereinstimmung und damit maximale Ähnlichkeit für nicht identische Lehrstoff-Struktupel anzeigt. (Der Fall $d = 0$ soll hier nicht weiter interessieren, da es sich dabei um identische Struktupel handelt, deren Untersuchung im Zusammenhang mit Reliabilitätsfragen interessant wäre.) Zu beachten ist, daß hier zwei implizite Annahmen gemacht werden: (1) Die Facetten wirken hinsichtlich der Ähnlichkeit unabhängig voneinander und (2) die Facetten gehen mit gleichem Gewicht in das (Un-)Ähnlichkeitsmaß ein.

Nach diesem Prinzip ergibt sich für unsere 6 Kommasetzungsaufgaben die in Tabelle 2 dargestellte Unähnlichkeitsmatrix D. Faßt man diese Matrix als durch ein Netzwerk erzeugt auf, dann lassen sich (bei geeigneter Definition einer Zwischenrelation) Aussagen darüber formulieren, welche Kanten als Bestandteil des Netzes notwendig sind. Postuliert man gleichzeitig, daß *inhaltliche* Ähnlichkeit von Lehrstoffen Leistungsähnlichkeit impliziert, dann lassen sich aufgrund des in der Theorie angenommenen Netzwerkes Hypothesen über *empirische* Ähnlichkeitsstrukturen formulieren.

Grundlegend für derartige Hypothesen ist die Definition einer Zwischenrelation auf der Menge der betrachteten Lehrstoffe: Betrachtet man drei Struktupel x, y und z, dann liegt y zwischen x und z, wenn in unserer Unähnlichkeitsmatrix $d_{xz} > d_{xy}$ und gleichzeitig $d_{xz} > d_{yz}$. Existiert ein solches Struktupel y nicht, dann ist die Kante x-z als Bestandteil des Netzes notwendig und kann nicht durch einen Pfad

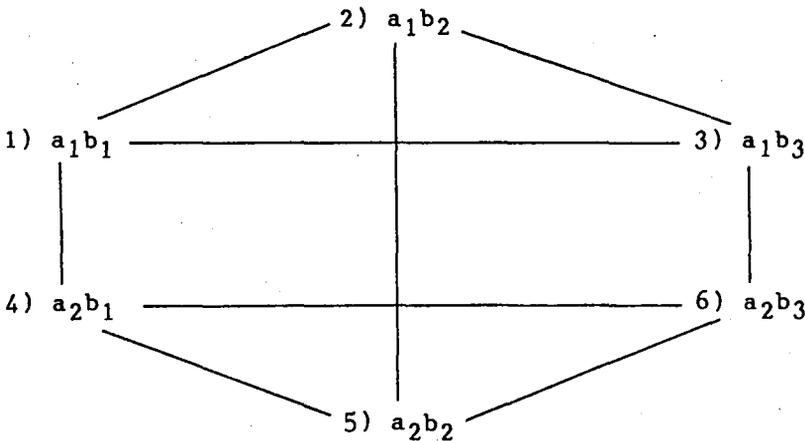
Tabelle 2: Definition und theoretische (Un-)Ähnlichkeitsmatrix der Kommasetzungsaufgaben

Struktupel	Anzahl nicht gemeinsamer Struktus Aufgabe	Anzahl nicht gemeinsamer Struktus					
		1	2	3	4	5	6
$a_1 b_1$	1	0					
$a_1 b_2$	2	1	0				
$a_1 b_3$	3	1	1	0			
$a_2 b_1$	4	1	2	2	0		
$a_2 b_2$	5	2	1	2	1	0	
$a_2 b_3$	6	2	2	1	1	1	0

$x-y-z$ ersetzt werden. Letzteres trifft für alle Paare x, z zu, für die d_{xz} den minimal möglichen Wert 1 annimmt. Sind alle durch die Facetten erzeugbaren Struktupel realisiert, dann sind alle Kanten zwischen Paaren x, z mit $d_{xz} > 1$ ersetzbar, da immer ein Zwischenelement y auffindbar ist. Sind nicht alle möglichen Struktupel realisiert, dann ist für alle Paare x, z mit $d_{xz} > 1$ zu prüfen, ob ein Zwischenelement existiert. Wenn ja, ist die jeweilige Kante durch einen Pfad $x-y-z$ ersetzbar, wenn nein, ist sie nicht ersetzbar. Inhaltlich bedeutet die Existenz eines Pfades $x-y-z$, daß die Ähnlichkeit zwischen den Lehrstoffen x und z vermittelt wird über den Lehrstoff y , da aufgrund der Facettenstruktur x und z sich unähnlicher sind als x und y bzw. y und z .

Für unsere Kommasetzungsaufgaben ergibt sich nach diesem *Zwischenrelations-Prinzip* das in Abbildung 2 gegebene Netzwerk: Alle Relationen, die nicht als Kanten erscheinen, sind also durch Pfade ersetzbar.

Abbildung 2: Theoretisches Netzwerk der Kommasetzungsaufgaben



Die in Abbildung 2 dargestellte Lehrstoffstruktur ist bisher ein Ergebnis rein theoretischer Überlegungen, die sich aus der Facettenstruktur der Kommasetzungsaufgaben ergeben haben. Gesucht ist nun ein Verfahren, welches diese theoretische Struktur überprüft, indem es empirisch ermittelte Leistungsähnlichkeiten zwischen Kommasetzungsaufgaben als Netzwerk repräsentiert. Dabei dient das theoretisch

abgeleitete Netz der Abbildung 2 als Hypothese für das empirisch begründete Netz. Mit der Ordinalen Netzwerkskalierung (ONS, siehe *Feger & Bien, 1982; Droge, 1983; Droge & Feger, 1983; Feger & Droge, 1984*) ist ein Algorithmus gegeben, der genau diese Aufgabe erfüllt: Eine Menge empirisch erhobener Ähnlichkeitswerte (Proximitäten) läßt sich mit diesem Verfahren in eine Menge von Pfadmetrik-Koeffizienten transformieren, so daß eine perfekte ordinale Übereinstimmung zwischen beiden Mengen besteht. Diese Pfadmetrik-Koeffizienten werden durch eine Netzwerkstruktur erzeugt, in der die Knoten Objekte sind, während die Ähnlichkeitsrelationen zwischen diesen Objekten als bewertete Kanten bzw. als Summe bestimmter bewerteter Kanten, also als Pfade erscheinen. Bei k Objekten wäre ein vollständiges Netz mit $k(k-1)/2$ Kanten eine triviale Repräsentation des empirischen Relativs. Daher wird durch die ONS die Netzstruktur gesucht, die mit der minimalen Zahl an Kanten die empirischen Proximitäten perfekt im ordinalen Sinne reproduziert. Eine detaillierte Beschreibung des Algorithmus ist in den angegebenen Literaturstellen zu finden. Uns interessiert hier lediglich, wie die ONS herangezogen werden kann, um unsere theoretische Netzwerkstruktur der Kommasetzungsaufgaben empirisch zu testen.

Im Rahmen einer Generalisierbarkeitsstudie von *Nußbaum (1980)* wurden je 30 Items der oben definierten 6 Itemtypen, also 180 Items, zur Überprüfung der Fähigkeit zur richtigen Kommasetzung von 119 Studenten an zwei Zeitpunkten bearbeitet. Die internen Konsistenzen der 6 Itemklassen waren zufriedenstellend, so daß innerhalb der Itemklassen die Anzahl der richtigen Lösungen über Items und Zeitpunkte zu Lösungswahrscheinlichkeiten aggregiert werden konnten.

Zur Ermittlung der empirischen Leistungsähnlichkeit wurden schwach monotone Korrelationen μ_2 (*Raveh, 1978; Maimon, 1978; Staufenbiel, 1984*) zwischen den Lösungswahrscheinlichkeiten der Itemtypen berechnet (Tabelle 3). Der Koeffizient μ_2 variiert wie die Produktmoment-Korrelation zwischen -1 und $+1$ und erreicht diese Extremwerte, wenn der Zusammenhang der beiden Variablen perfekt schwach monoton ist, wobei die Linearität ein Spezialfall dieser allgemeineren Art von Zusammenhang ist. Wir zogen μ_2 der Produktmoment-Korrelation vor, weil dieser Koeffizient monotone nicht-lineare Zusammenhänge mitefaßt und kein Grund vorliegt, diese durch Verwendung der Produktmoment-Korrelation zu vernachlässigen.

In der Tabelle 3 ist zu sehen, daß die Itemtypen 1–3 und 4–6 jeweils positiv untereinander korrelieren, während alle Korrelationen zwischen diesen beiden Gruppen

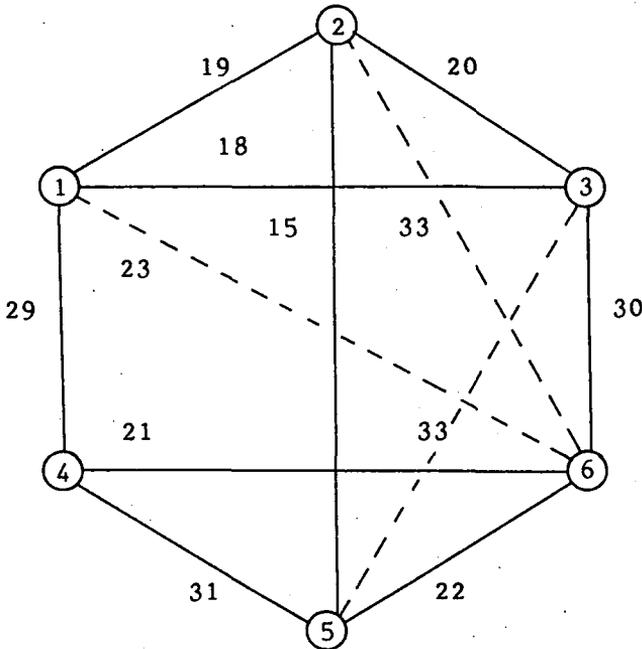
Tabelle 3: Empirische Ähnlichkeiten der Kommasetzungsaufgaben, μ_2 -Koeffizienten $\times 100$, symmetrische Matrix

	1	2	3	4	5	6
1	--					
2	74	--				
3	82	71	--			
4	-52	-36	-31	--		
5	-42	-90	-47	50	--	
6	-53	-43	-51	64	59	--

negativ ausfallen. Dies zeigt, daß es in der untersuchten Stichprobe keine homogene Fähigkeit zur korrekten Kommasetzung gibt. Vielmehr unterscheiden sich die Probanden in der generellen Tendenz, viele oder wenige Kommas zu setzen. Wer sehr häufig Kommas setzt, macht wenige Fehler in Items mit dem Strukt a_1 und viele Fehler in solchen mit a_2 . Für Probanden, die generell wenige Kommas setzen, gilt das Umgekehrte.

Da die Anzahl nicht gemeinsamer Strukts, also die facettentheoretische (Un-)Ähnlichkeit der Itemtypen, keine Aussagen über das Vorzeichen der Korrelationen ermöglicht, sondern nur über deren absolute Höhe (im Sinne gemeinsamer Varianz), wurden die Absolutbeträge der Tabelle 3 mit Hilfe der ONS skaliert. Das heißt also, daß hoch negative Korrelationen (wie z.B. zwischen den Itemtypen 2 und 5, die sich in der Facette A unterscheiden) nicht als hohe Unähnlichkeit, sondern als hohe Ähnlichkeit aufgefaßt werden.

Abbildung 3: ONS-Lösung für die Kommasetzungsaufgaben



Die ONS-Lösung ist in Abbildung 3 dargestellt. Es handelt sich um einen bewerteten Graphen, da den Kanten des Netzes Zahlen zugeordnet sind, welche die Distanzen zwischen benachbarten Knoten des Netzes angeben. Die mit den Daten perfekt ordinal übereinstimmende Matrix der Pfadmetrik-Koeffizienten ergibt sich, wenn man die kürzesten Wege zwischen allen Paaren von Knoten ermittelt und die entsprechenden Kanten-Längen aufsummiert. Als eine Erweiterung des publizierten ONS-Algorithmus wurde diese Bewertung der Kanten unter Verwen-

dung des sog. *Simplex-Algorithmus* (siehe Reinhardt & Soeder, 1978) zur Lösung des linearen Ungleichungssystems aller durch die ONS definierten Kanten und Pfade des Netzes erzeugt.

Wie man in der Abbildung 3 sieht, ist keine der facettentheoretisch als notwendig erwarteten Kanten durch einen Pfad ersetzt worden. Allerdings enthält die ONS-Lösung zusätzlich drei nicht erwartete Kanten, die gestrichelt eingetragen sind. Obwohl also theoretisch z.B. der Lehrstoff 3 zwischen 2 und 6 liegt und wir somit erwarteten, daß die Leistungsähnlichkeit zwischen 2 und 6 über 3 vermittelt wird, ist dieser Pfad nicht Bestandteil des maximal reduzierten Netzes.

An dieser Stelle wird ein gewisser Nachteil der ONS in der bisher vorliegenden Form deutlich: Als deterministisches Modell stellt es hohe Anforderungen an die Qualität der Daten. Geht man davon aus, daß empirische Daten in der Regel fehlerbehaftet sind, dann wäre ein Verfahren wünschenswert, welches (wie Verfahren der nichtmetrischen Multidimensionalen Skalierung) unter Verwendung einer Verlustfunktion das Netzwerk aufbaut. Dieser Prozeß wäre dann abzubrechen, wenn zusätzlich aufzunehmende Kanten nur einen sehr geringen Zuwachs an Datenanpassung bringen würden. Im Rahmen dieses Vorgehens könnte man sogar konfirmatorisch skalieren, indem man vom erwarteten Netz ausgeht und – sofern nötig – bis zu einem bestimmten Grad der Datenanpassung zusätzliche Kanten aufnimmt. Wie Droge & Feger (1983) andeuten, wird an derartigen Verfahren gearbeitet, wobei allerdings die mathematischen Probleme, vor allem bezüglich der Kantenbewertung, recht schwierig zu sein scheinen.

Sieht man die Anzahl der skalierten Nachkommastellen der μ_2 -Koeffizienten als weitgehend willkürlich an und nimmt man an, daß die Abweichung der Abbildung 3 von der Erwartung meßfehlerbedingt ist, dann könnte man heuristisch versuchen, schwächere Daten mit einer größeren Anzahl von Rangplatzbindungen zu verwenden. Skaliert man in dieser Absicht ein neues Netz mit nur einer μ_2 -Nachkommastelle, dann ergibt sich eine erheblich bessere ONS-Lösung, in der nur noch die Kante 1–6 nicht der Erwartung entspricht. Diese Kante würde schließlich verschwinden, wenn die Korrelation der Aufgaben 1 und 6 in der Größenordnung von .4 (statt der empirisch beobachteten .5) vorliegen würde.

Trotz ihres deterministischen Charakters hat sich die ONS also als ein nützliches Verfahren erwiesen, die Netzwerkstruktur von Kommasetzungsaufgaben zu analysieren. Immerhin entsprach das ONS-Netz weitgehend der facettentheoretisch abgeleiteten Netzwerkstruktur: Keine der *erwarteten Kanten* wurde durch einen Pfad ersetzt, während allerdings drei *erwartete Pfade* vom Algorithmus als Kanten beibehalten wurden. Ob dieses partiell unerwartete Ergebnis als Meßfehlereinfluß anzusehen ist, oder ob für diese drei Lehrstoffbeziehungen die theoretisch angenommene Zwischenrelation problematisiert werden muß, ist jedoch an dieser Stelle nicht unmittelbar entscheidbar.

In diesem ersten Beispiel sind die Facetten der betrachteten Aufgaben ungeordnet gewesen, was bedeutet, daß keine Ordnungsrelation zwischen den Strukts innerhalb einer Facette angenommen wurde. Im folgenden sollen nun Facetten betrachtet werden, deren Strukts hinsichtlich der Schwierigkeit der geforderten Leistung zu ordnen sind, so daß sich ganz bestimmte Netzwerk-Typen theoretisch ableiten und empirisch prüfen lassen.

2.2 Schwierigkeitsstrukturen bei geordneten Facetten: Beispiel Bruchrechenaufgaben

Manche Lehrstoffe enthalten Probleme oder Aufgaben als Lehrstoffelemente, zu deren Lösung die n -fache Anwendung bestimmter Operationen aus einer endlichen Menge von Operationen notwendig sind (siehe auch die Arbeiten von *Scandura*, 1973; *Suppes*, 1975; *Klauer*, 1984b; *Leutner*, 1985). Mit Hilfe dieser Operationsfacetten lassen sich nun (in Analogie zu Guttman-Skalen oder Skalogrammen) Schwierigkeitsrelationen zwischen den Lehrstoffen ableiten: Wenn eine Aufgabe x genau dieselben Operationen erfordert wie eine Aufgabe y plus mindestens eine weitere Operation, dann ist x nicht leichter als y . Die Aufgabe x wird in der Regel sogar schwieriger sein, weil x dieselben Anforderungen stellt wie y , plus etwas mehr. Auf diese Weise ergibt sich eine Halbordnung der Aufgaben, die durch Streichen aller transitiv sich ergebenden Ordnungsrelationen als (reduzierte) *Schwierigkeitshierarchie* darstellbar ist. Letzteres geschieht mittels eines Algorithmus zur Suche von Zwischenelementen, vergleichbar mit dem in 3.1.2 dargestellten Verfahren. Die Facetten sind in diesem Fall geordnet, weil eine Aufgabe mit dem Strukt a_n („Die Anwendung der Operation A ist zur Lösung n mal notwendig“) schwieriger ist als eine Aufgabe mit dem Strukt a_{n-1} („Die Anwendung der Operation A ist zur Lösung $n-1$ mal notwendig“). Am leichtesten ist dann eine Aufgabe mit dem Strukt a_0 („Operation A ist zur Lösung nicht notwendig“). Damit besteht innerhalb der Facette A eine Schwierigkeitsordnung der Strukts. Bezeichnend für die partielle Ordnung aller Aufgabentypen ist dabei, daß alle Facetten hinsichtlich desselben Prinzips, nämlich der Schwierigkeits-Induzierung, gleichartig geordnet sind.

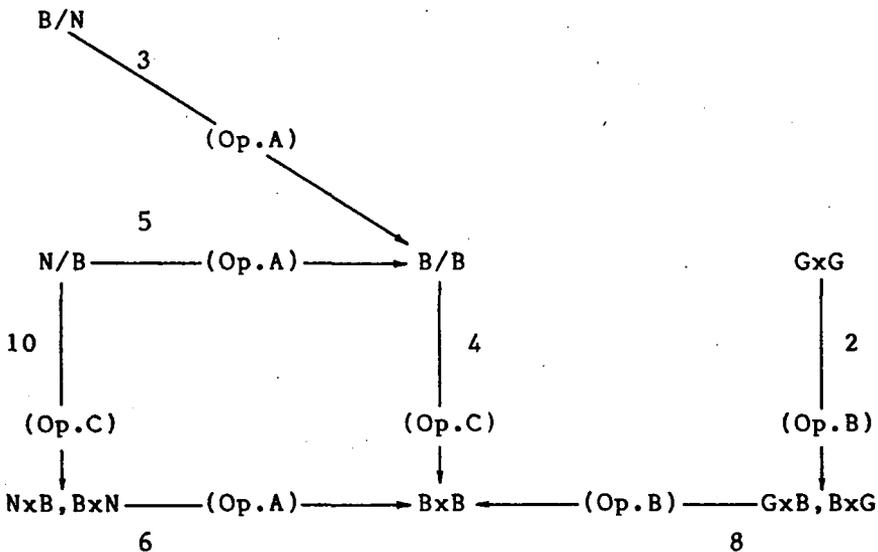
Aus der Schwierigkeitshierarchie lassen sich schließlich – wieder in Analogie zu Guttman-Skalen und Skalogrammen – Ähnlichkeitsrelationen zwischen denjenigen Aufgabenpaaren ableiten, die in der Hierarchie durch einen gerichteten Kantenzug oder Pfad verbunden sind. Solch ein Kantenzug entspricht einer einzelnen Guttman-Skala, wobei die Matrix der entsprechenden Ähnlichkeitsrelationen ein Simplex ist. (Zur Struktur eines Simplex siehe *Borg*, 1981). Es werden also Erwartungen an zwei Aspekte der empirischen Struktur von Lehrstoffen ableitbar: zum einen an Schwierigkeits- und zum anderen an Ähnlichkeitsrelationen. Sind die erwarteten Schwierigkeitsrelationen erfüllt, dann kann man diese heranziehen, und die Teilmenge der empirischen Ähnlichkeitsrelationen, über die Hypothesen bestehen, in die entsprechenden Zellen einer asymmetrischen Matrix einordnen. Einträge in dieser Matrix indizieren damit, daß der Zeileneingang schwieriger ist als der Spalteneingang, wobei diesem Schwierigkeitsunterschied die empirische Ähnlichkeit zahlenmäßig zugeordnet wird. Eine ONS dieser Matrix sollte dann genau die Kanten beibehalten, die Bestandteil der Schwierigkeitshierarchie sind, da aufgrund der Operationsfacetten keine Zwischenelemente existieren. Entsprechend sind alle anderen Kanten prinzipiell durch Pfade ersetzbar.

Als Spezialfall einer Schwierigkeitshierarchie soll im folgenden nun ein Lehrstoff betrachtet werden, bei dem eine Aufgabe x durch die Ausführung einer Lösungs-

operation in eine Aufgabe y transformiert werden kann, welche leichter ist als x und wiederum durch eine weitere Lösungsoperation in eine noch leichtere Aufgabe z überführbar ist. Entsprechend läßt sich eine derartige Schwierigkeitshierarchie als *Transformationshierarchie* bezeichnen. Zu dieser Art von Lehrstoff gehören z.B. Aufgaben der Multiplikation (\times) und Division ($/$) von Brüchen. Diese Aufgaben enthalten natürliche Zahlen (N), Brüche (B) und gemischte Zahlen (G) als Faktoren und lassen sich alle mittels der Operationen A („natürliche Zahl als Bruch schreiben“), B („gemischte Zahl als Bruch schreiben“) und C („Division durch einen Bruch ersetzen durch Multiplikation mit dem Kehrwert des Bruches“) in den Aufgabentyp $B \times B$ transformieren, welcher wiederum durch die hier nicht weiter betrachtete Operation „Multiplizieren von 2 Brüchen“ in die Lösung überführbar ist.

Für eine von *Klauer* (1984b) untersuchte Teilmenge der möglichen Aufgaben mit zwei Faktoren ergibt sich die Schwierigkeitsstruktur in Abbildung 4, in der die gerichteten Kanten inhaltlich den angeführten Operationen entsprechen. Gleichzeitig stellt diese Struktur die Hypothese der entsprechenden ONS-Lösung dar:

Abbildung 4: Theoretisches Netzwerk der Bruchrechenaufgaben



In der Untersuchung von *Klauer* (1984b) bearbeiteten 370 Schüler insgesamt 36 Aufgaben zur Multiplikation und Division von Brüchen, jeweils 6 Aufgaben zu den in Abbildung 4 dargestellten Aufgabentypen. Eine Ausnahme bildeten dabei nur die Typen N/B und B/N , da hier nicht die Kommutativität gilt, so daß diese beiden Aufgabentypen nur jeweils durch 3 Items repräsentiert waren, die nicht zusammenfaßbar sind. Auch hier waren die internen Konsistenzen hoch, so daß die Anzahl der richtigen Lösungen eines Aufgabentyps zu Lösungswahrscheinlichkeiten aggregiert werden konnten.

Als Daten für die ONS interessieren nur Ähnlichkeitskoeffizienten, die Bestandteil der Hypothese sind, also μ_2 -Koeffizienten für Aufgabenpaare, die in der Schwierigkeitsrelation stehen und somit durch einen gerichteten Kantenzug verbunden sind. Diese wurden so in die asymmetrische Ähnlichkeitsmatrix einsortiert, daß der Zeileneingang den Spalteneingang hinsichtlich der Schwierigkeit mit dem entsprechenden Gewicht dominiert. Damit ergibt sich die Datenmatrix in Tabelle 4, in der also nur die Zellen besetzt sind, die Bestandteil der Hypothese sind. Die leeren Zellen haben somit keinen Einfluß auf die ONS-Lösung. Dies ist möglich, da die ONS nicht auf eine vollständige Datenmatrix eingeschränkt zu werden braucht.

Tabelle 4: Empirische Ähnlichkeiten und Schwierigkeiten der Bruchrechenaufgaben

Bei den Ähnlichkeiten handelt es sich um μ_2 -Koeffizienten $\times 100$, asymmetrische Matrix. (Fehlende Werte indizieren Koeffizienten, die nicht Gegenstand der Hypothese sind.)

	NxB		GxB				Schwierigkeit	
	BxN	BxB	BxG	GxG	B/B	N/B		B/N
NxB, BxN	--	63						.89
BxB		--						.93
GxB, BxG		60	--					.68
GxG		53	93	--				.62
B/B		65			--			.85
N/B	53	55			64	--		.65
B/N		63			72		--	.80

Die ONS-Lösung entspricht voll der Hypothese, die Bewertungen der Kanten sind unmittelbar in die Schwierigkeitsstruktur (Abbildung 4) eingetragen. Bei dieser Transformationshierarchie von Bruchrechenaufgaben ergibt sich eine interessante und didaktisch relevante Interpretation der erhaltenen Pfad- und Kantenlängen: Bei Aufgaben des Typs „natürliche Zahl geteilt durch Bruch“ (N/B) gibt es zwei mathematisch gleichwertige Wege, um zu einer Lösung zu gelangen. Beim einen Weg ist als erster Schritt die Operation A anzuwenden („natürliche Zahl in einen Bruch umwandeln“), was die Aufgabe N/B in eine Aufgabe des Typs B/B transformiert. Der zweite Schritt besteht in der Anwendung der Operation C („Division durch einen Bruch ersetzen durch Multiplikation mit dem Kehrwert des Bruches“), womit sich eine Aufgabe vom Typ $B \times B$ ergibt. Der andere Weg besteht darin, die beiden Operationen in umgekehrter Reihenfolge auszuführen. Dabei wird die Aufgabe N/B im ersten Schritt in den Typ $N \times B$ und erst im zweiten Schritt in den Typ $B \times B$ transformiert. Wie der Abbildung 4 zu entnehmen ist, sind diese beiden Lösungswege nicht gleichwertig, d.h. von unterschiedlicher Länge im Netzwerk: Offenbar ist der Pfad über den Aufgabentyp B/B kürzer als über $N \times B$. Diese un-

terschiedliche Pfadlänge stimmt mit der Beobachtung von Klauer (1984b) überein, wonach Schüler, die den Lösungsweg über B/B wählten, mit größerer Wahrscheinlichkeit zu einer richtigen Lösung gelangten, als Schüler, die den Lösungsweg über $N \times B$ versuchten (siehe auch Leutner, 1985).

3. Diskussion

Wie eingangs schon erwähnt, erfreuen sich Netzwerkstrukturen zunehmender Popularität, nicht zuletzt im Zusammenhang mit Lehrstoffstrukturen. Ein geeignetes Verfahren zur Prüfung von Hypothesen über bestimmte Netzwerke ist die hier benutzte Ordinale Netzwerkskalierung, wie in dieser Arbeit anhand von Ähnlichkeitsstrukturen bei Kommasetzungsaufgaben und Schwierigkeitshierarchien bei Bruchrechenaufgaben demonstriert werden konnte.

Ein auf den ersten Blick der ONS sehr ähnliches Verfahren wurde kürzlich von Nenniger (1983) entwickelt: Die Übereinstimmung der beiden Ansätze besteht darin, daß – im Gegensatz zu herkömmlichen Hierarchie-Ermittlungsverfahren (siehe die Diskussion bei Lüthmann, 1979) – die betrachtete Relation zwischen Lehrstoffen sowohl symmetrisch, als auch asymmetrisch sein kann. Entsprechend ergeben sich Netzwerke mit ungerichteten oder gerichteten Kanten und Pfaden, bzw. Ähnlichkeitsstrukturen oder Leistungshierarchien. Ein weiteres Übereinstimmungsmerkmal ist, daß es in beiden Ansätzen um die Reduktion von Netzwerken geht, wobei einer empirisch begründeten und theoretisch relevanten Zwischenrelation eine zentrale Bedeutung zukommt. Während Nenniger jedoch (im Rahmen seiner p-Analyse) bei dieser reinen Reduktion stehenbleibt und als Kantengewertungen die empirischen Zahlenwerte beibehält, geht die ONS einen Schritt weiter, indem sie das reduzierte Netz mit einer Pfadmetrik ausstattet. Diese Metrik bringt den Vorteil, daß Pfade im Netz vergleichbar werden, was sich im Zusammenhang mit den Bruchrechenaufgaben als sehr nützlich zur Interpretation des Netzes erwiesen hat. Allerdings wird der Vorteil, daß Pfade vergleichbar werden, erkauft mit dem Nachteil, daß in der Regel das Netz nicht so stark reduzierbar ist (vgl. die Ausführungen von Feger & Bien, 1982, zum sog. *weak-monotonicity-test*). Völlig andere Verfahren sind weniger im Kontext von Netzwerken, sondern im Kontext der Multidimensionalen Skalierung anzusiedeln. Im Zusammenhang mit Ähnlichkeitsstrukturen lassen sich Skalieralgorithmen der Smallest-Space-Analysis (z.B. SSA 1) von Guttman und Lingoes (Lingoes, 1977) verwenden. Eine erfolgreiche Anwendung auf verschiedene Arten von Lehrstoffen ist z.B. bei Nußbaum (1980), Klauer (1984b) und Leutner (1985) zu finden. Darüber hinaus gibt es auch Ansätze, individuelle Beobachtungsprofile multidimensional zu skalieren, um auf diesem Weg Hypothesen über Hierarchien zu prüfen (Shye, 1980; Marcus & Hans, 1982). Es ist gut denkbar, daß diese Verfahren sich auch auf Leistungshierarchien anwenden lassen.

Gemeinsam ist diesen Verfahren der Multidimensionalen Skalierung, daß ein multidimensionaler metrischer Raum zugrunde gelegt wird, in dem Distanzen über

eine Minkowski-Metrik (siehe *Borg*, 1981) definiert sind. Repräsentiert man nun Lehrstoffe als Punkte in solch einem Raum, dann werden Distanzen zwischen Lehrstoffen (in Abhängigkeit vom jeweiligen Metrik-Parameter) sozusagen „quer“ durch den Raum gemessen, wobei die Interpretation einer Zwischenrelation auf der Menge der Lehrstoffe in der Regel auf ein System von – sehr allgemein formuliert – „raumorganisierenden“ Prinzipien angewiesen sein wird. Meist werden zu diesem Zweck Koordinatenachsen herangezogen; es sind aber auch Strukturierungsprinzipien möglich, die sich facettentheoretisch ergeben.

Das hier in seiner Anwendung für erziehungswissenschaftliche Probleme vorgestellte und benutzte Verfahren der Ordinalen Netzwerkskalierung erscheint insofern vor allem dann angemessen, wenn detaillierte Hypothesen über theoretisch relevante Zwischenrelationen explizit geprüft werden sollen. Diese Relationen sind in Netzwerken in der Regel einfacher zu interpretieren als in multidimensionalen metrischen Räumen. Dies wird vor allem bei Transferstrukturen deutlich, wo Aufgaben *ineinander* transformiert werden: Hier hatte sich das Netzwerkmodell für Bruchrechenaufgaben als besonders gut geeignet erwiesen.

Nachfolgenden Arbeiten mag es überlassen bleiben, die unterschiedlichen Verfahren im einzelnen zu vergleichen und die Vor- und Nachteile detailliert herauszuarbeiten. In dieser Arbeit konnte jedoch schon gezeigt werden, daß facettentheoretisch abgeleitete Hypothesen über Lehrstoffnetzwerke durch die ONS überprüfbar sind.

Literatur

- Bar-On, E. & Perlberg, A.*: Der Facetten-Ansatz bei der Entwicklung einer Unterrichtstheorie. Unterrichtswissenschaft, 1974, 2, 41–60.
- Biddle, B. J.*: Methods and concepts in classroom research. Review of Educational Research, 1967, 37, 337–357.
- Borg, I.*: Some basic concepts of facet theory. In: *J. C. Lingoes, E. E. Roskam & I. Borg* (Eds.): Geometric representations of relational data. Ann Arbor, Mich.: Mathesis Press, 1979.
- Borg, I.*: Anwendungsorientierte Multidimensionale Skalierung. Berlin: Springer, 1981.
- Droge, U.*: Ordinale Netzwerkskalierung. Phil. Dissertation, Universität Hamburg, 1983.
- Droge, U. & Feger, H.*: Ordinal network scaling. Paper presented at the joint meeting of the Classification Society and the Psychometric Society. Paris, 1983.
- Eigler, G.*: Ansatz des Lernhierarchien-Konzepts. Unterrichtswissenschaft, 1976, 4, 287–290.
- Feger, H. & Bien, W.*: Network unfolding. Social Networks, 1982, 3, 494–510.
- Feger, H. & Droge, U.*: Repräsentation von Ordinaldaten durch Graphen: Ordinale Netzwerkskalierung. Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie, 1984, 12, 154–172.
- Foa, U. G.*: The contiguity principle in the structure of interpersonal relations. Human Relations, 1958, 11, 229–238.
- Gage, N. L.*: Teaching methods. In: *R. L. Ebel* (Ed.): Encyclopedia of educational research. London: Macmillan, 1969.
- Gagné, R. M.*: The acquisition of knowledge. Psychological Review, 1962, 69, 355–365.
- Guttman, L.*: A new approach to factor analysis: the radex. In: *P. F. Lazarsfeld* (Ed.): Mathematical thinking in the social sciences. Glencoe, Ill.: The Free Press, 1954.
- Guttman, L.*: What is not what in theory construction. Presented to the 8th Annual Meeting of the Israel Sociological Association. Haifa, Febr. 14–15, 1977. Reprinted in: *I. Borg* (Ed.): Multidimensional data representations: when and why. Ann Arbor, Mich.: Mathesis Press, 1981.
- Klauwer, K. J.*: Methodik der Lehrzieldefinition und Lehrstoffanalyse. Düsseldorf: Schwann, 1974.
- Klauwer, K. J.*: Methodenstudie zur Überprüfung von Lehrstoffhierarchien. Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 1976, 8, 252–262.

- Klauer, K. J.*: Kontentvalidität. Diagnostika, 1984 a, 30, 1–23.
- Klauer, K. J.*: Kognitive Prozesse bei der Multiplikation und Division von Brüchen. Eine Lehrzielanalyse. Zeitschrift für empirische Pädagogik und pädagogische Psychologie, 1984 b, 8, 77–90.
- Leutner, D.*: Lehrstoffstruktur und Leistung. Eine empirische Studie zu Strukturen und Modellen prozeduralen Wissens, dargestellt an Bruchrechenleistungen. Phil. Dissertation, RWTH Aachen, 1985.
- Lingoes, J. C.*: The Guttman-Lingoes nonmetric program series. Ann Arbor, Mich.: Mathesis Press, 1973.
- Lühmann, R.*: Lehrzielhierarchien. Dissertation. Braunschweig, 1979.
- Maimon, Z.*: The coice of ordinal measures of association. Quality and Quantity, 1978, 12, 255–264.
- Marcus, J. & Hans, S.*: A methodological model to study the effects of toxins on child development. Neurobehavioral Toxicology and Teratology, 1982, 4, 483–487.
- Nenniger, P.*: Graphen-theoretische Analysen in Psychologie und Erziehungswissenschaft: die ordinale Ähnlichkeitsanalyse – ein graphentheoretisch begründetes Klassifikationsverfahren. Unveröffentlichtes Manuskript, Universität Freiburg, 1983.
- Nußbaum, A.*: Konstruktion, Planung und Analyse lehrzielorientierter Tests auf der Grundlage der Generalisierbarkeitstheorie. Phil. Dissertation, RWTH Aachen, 1980.
- Nußbaum, A.*: Entdeckendes Lernen: Probleme der Forschung und mögliche Lösungen. Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 1984, 16, 57–76.
- Raveh, A.*: Finding periodic patterns in time series with monotone trend: a new technique. In: *S. Shye* (Ed.): Theory construction and data analysis in the behavioral sciences. San Francisco: Jossey-Bass, 1978.
- Reinhardt, F. & Soeder, N.*: dtv-Atlas zur Mathematik. München: DTV, 1978.
- Resnick, L. B.* (Ed.): Hierarchies in children's learning: A symposium. Instructional Science, 1973, 2, 311–362.
- Scandura, J. M.*: Structural learning I. Theory and research. New York, 1973.
- Shye, S.*: Partial order scalogram analysis of profiles and a related lattice analysis of the items by their scalogram generic roles. The Israel Institute of Applied Social Research, Publication No. SS/789/E. Jerusalem, 1980.
- Staufenbiel, T.*: Monotonizitätskoeffizienten: Merkmale und Normen. Arbeitsbericht Psychologische Methodik, Justus-Liebig-Universität, Gießen, 1984.
- Suppes, P.*: Learning theory for probabilistic automata and register machines. In: *H. Spada & W. F. Kempf* (Eds.): Structural models of thinking and learning. Proceedings of the IPN-Symposium 7. Kiel, 1975.
- Tyler, R. W.*: Basic principles of curriculum and instruction. Chicago, 1950. Dt. Übersetzung: Curriculum und Unterricht. Düsseldorf: Schwann, 1973.
- Weltner, K.*: Information und Struktur von Sachverhalten im Kontext des Lernens und Lehrens. In: *W. Reulecke* (Hrsg.): Strukturelles Lernen. Hamburg: Hoffmann und Campe, 1977.
- White, R. T.*: Research into learning hierarchies. Review of Educational Research, 1973, 43, 361–375.

Verfasser:

Dr. Detlev Leutner, Dr. Albert Nußbaum, Institut für Erziehungswissenschaft der RWTH Aachen, Eilfschornsteinstr. 7, 5100 Aachen.