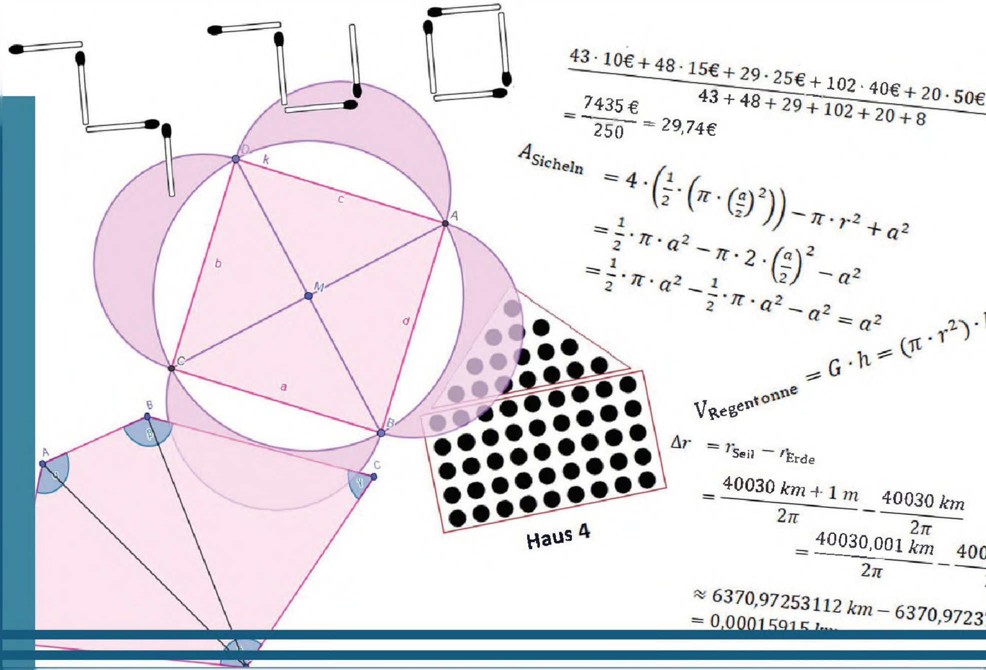
Camin, Michaela

Denkstile als Herausforderung im Mathematikunterricht. Eine Studie zur Vorgehensweise von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I bei der Bearbeitung von match- und mismatch-Aufgaben

Kassel : kassel university press 2019, XVI, 245 S. - (Dissertation, Universität Kassel, 2018)

Quellenangabe/ Reference:
Camin, Michaela: Denkstile als Herausforderung im Mathematikunterricht. Eine Studie zur Vorgehensweise von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I bei der Bearbeitung von match- und mismatch-Aufgaben. Kassel : kassel university press 2019, XVI, 245 S. - (Dissertation, Universität Kassel, 2018) - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-318133 - DOI: 10.25656/01:31813; 10.19211/KUP9783737607315

https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-318133
https://doi.org/10.25656/01:31813



Denkstile als Herausforderung im Mathematikunterricht

Eine Studie zur Vorgehensweise von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I bei der Bearbeitung von *match*- und *mismatch-Aufgaben*

Michaela Camin

kassel university press

Michaela Camin

Denkstile als Herausforderung im Mathematikunterricht

Eine Studie zur Vorgehensweise von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I bei der Bearbeitung von *match*- und *mismatch*-Aufgaben

kassel university press

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Geistes- und Kulturwissenschaften der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Philosophie (Dr. phil.) angenommen.

Gutachter: Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri
Prof. Dr. Björn Schwarz

Tag der mündlichen Prüfung: 04. Juli 2018

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2018
ISBN 978-3-7376-0730-8 (print)
ISBN 978-3-7376-0731-5 (e-book)
DOI: http://dx.medra.org/10.19211/KUP9783737607315
URN: https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0002-407310

www.upress.uni-kassel.de

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einleitung

> „Mostly school books are very formal oriented and this is a perfect match for pupils with a preference for the anaytic thinking style. This also means that those students have an advantage, because they perhaps better fit in this formal way of learning and teaching mathematics than the visual thinkers.“
>
> (Borromeo Ferri 2015, S.163)

Die Bedeutung der Mathematik liegt nicht nur in ihrer Funktion als Sprache für Wissenschaften wie Physik und Chemie, sondern auch in ihrer grundlegenden Struktur einer regelgeleiteten und logischen Disziplin. Doch besonders in der Sekundarstufe I polarisiert das Fach wie kein zweites (vgl. Henn/ Kaiser 2001). Schülerinnen und Schüler lieben es oder sie hassen es, eher selten findet sich eine neutrale Einstellung zur Mathematik.

Eine mögliche Erklärung könnte hierbei die Theorie der Denkstile liefern, die Schülerinnen und Schülern Präferenzen für eine bestimmte Art und Weise Dinge zu tun zuschreibt. Und auch wenn sich das von Sternberg etablierte Konstrukt des Denkstils auf alle Bereiche des Lebens bezieht, zeigt die mathematikdidaktische Forschung, dass darüber hinaus in der Mathematik mathematikspezifische Präferenzen existieren, die die Art Inhalte zu verstehen und Probleme zu lösen prägt (vgl. Burton 1997; Schwank 2003; Borromeo Ferri 2004). Doch welchen Einfluss kann dies für die Schule und ihre Akteure haben?

Insbesondere die Forschung von Borromeo Ferri auf dem Gebiet der mathematischen Denkstile und ihre Unterscheidung zwischen analytischem, integriertem und visuellem Denkstil macht deutlich, welchen Einfluss der Denkstil auf das Mathematiktreiben von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe hat. So konnte sie nachweisen, dass Schülerinnen und

Schüler mit unterschiedlichem Denkstil ihren Fokus bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben auf unterschiedliche Phasen des Modellierungsprozesses legen (vgl. Borromeo Ferri 2010).

Für die Lehrperson bedeutet dies, dass sie ihren Mathematikunterricht bewusst gestalten müssen, um so alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen zu unterrichten. Borromeo Ferri konnte ebenfalls zeigen, dass insbesondere der analytische und der visuelle Denkstil der Lehrperson die Art der Hilfestellung sowie die Art der Gesprächsführung innerhalb der Lösungsdiskussion prägen (vgl. Borromeo Ferri 2012).

Für den Unterricht bedeutet dies, dass Lehrpersonen für ihren eigenen Denkstil sensibilisiert sein müssen, um so auf die unterschiedlichen Bedürfnisse von Schülerinnen und Schülern mit unterschiedlichem Denkstil eingehen zu können. Dabei beschränkt sich die Sensibilisierung nicht nur auf das eigene Lehrerhandeln und den damit verbundenen Verhaltensweisen, sondern genauso auf die Auswahl von Aufgaben. Denn die Folgerung aus den oben genannten Ergebnissen von Borromeo Ferris Untersuchung des Modellierungsprozesses legt nahe, dass auftretende Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler in ihrer Bearbeitung in Abhängigkeit des Denkstils ebenfalls in unterschiedlichen Phasen des Modellierungsprozesses auftreten.

Doch gerade in Bezug auf Aufgaben im Mathematikunterricht stellt sich die Frage, wie Schülerinnen und Schüler Aufgaben bearbeiten, die in ihrer Bearbeitung weniger offen sind als Modellierungsaufgaben, insbesondere solche Aufgaben, deren Bearbeitung einen Lösungsweg vorgeben. Dabei umfassen Aufgaben mit vorgegebenem Lösungsweg in diesem Kontext sowohl Aufgaben, die eine explizite Arbeitsanweisung beinhalten, aber auch solche, deren Problemstellung mithilfe einer spezifischen Bearbeitungsweise leichter zu lösen ist bzw. diese sogar erfordern. Doch auch wenn verschiedene Studien darauf verweisen, dass es Aufgaben gibt, deren Bearbeitung einen bestimmten Denkstil nahelegt, so ist bislang nicht untersucht, wie Schülerinnen und Schüler mit Aufgaben umgehen, die eine Bearbeitung erfordern, die nicht ihrer bevorzugten Art des Denkens entspricht. Die grundlegenden Fragen in dieser Arbeit sind dementsprechend:

- Wie empfinden Schülerinnen und Schüler Aufgaben, die eine Bearbeitung erfordern, die nicht ihrem Denkstil entspricht?
- Welche Lösungsstrategien wenden Schülerinnen und Schüler an, wenn sie Aufgaben bearbeiten, die nicht ihrem Denkstil entsprechen?
- Inwiefern sind Unterschiede zwischen Schülerinnen und Schülern mit analytischem oder visuellem Denkstil in den zuvor genannten Fragen beobachtbar?

Mit der vorliegenden Arbeit wird ebendiesen Fragen nachgegangen, um auf diese Weise dafür zu sensibilisieren, inwiefern Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit Aufgaben haben, die nicht ihrem Denkstil entsprechen. Eine entsprechende Sensibilität für die Auswahl und den Einsatz von Aufgaben scheint dabei essentiell in Anbetracht einer fairen Leistungsmessung.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile:

Im theoretischen Teil dieser Arbeit werden in Kapitel 1 zunächst die grundlegenden Begriffe und das hier vorliegende Verständnis von Denken, den spezifischen Eigenheiten des mathematischen Denkens sowie des Denkstils dargelegt. Dabei wird aus kognitionspsychologischer Perspektive der Begriff des Denkens zunächst grundsätzlich erklärt und auf seine Untergliederung in logisches Schließen, Wahrscheinlichkeitsurteile, kreatives Denken und Problemlösen eingegangen. Von der grundsätzlichen Unterteilung des Begriffs ist das mathematische Denken abzugrenzen, das in der Mathematikdidaktik als spezifische Art des Denkens verstanden wird und Einfluss auf die kognitiven Prozesse hat. Das Kapitel schließt mit der kognitionspsychologischen Perspektive auf den Denkstil.

In Kapitel 2 wird ein grundlegender Überblick über die unterschiedlichen Modelle zur Beschreibung des mathematischen Denkstils gegeben, wobei die unterschiedlichen Modelle grundsätzlich nach ihrem Aufbau differenziert werden. Auf diese Weise werden trichotome Modelle mit ihrer Unterteilung in drei verschiedene mathematische Denkstile von Gegensatzmodellen, hier ausgeführt an Skemps Modell, und schließlich Mehrdimensionenmodellen unterschieden. Die vorliegende Studie stützt sich hierbei auf Borromeo Ferris Mehrdimensionenmodell, das mit den Kombinationen seiner beiden Dimensionen schlussendlich drei Denkstile hervorbringt.

Der Überblick über verschiedene Studien zum Denkstil sowie zum mathematischen Denkstil wird in Kapitel 3 dargestellt, ebenso wie die Gegenüberstellung der Bearbeitung einer Mathematikaufgabe in den beiden Denkstilen analytisch und visuell. Abschließend wird in Kapitel 3 das Forschungsdesiderat herausgestellt, das sich auf das Bearbeitungsverhalten von Schülern bezieht, die Aufgaben mit inhärentem Denkstil lösen.

Entsprechend wird in Kapitel 4 die Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht hervorgehoben sowie verschiedene Analysemodelle auf die Analyse des inhärenten Denkstils hin untersucht.

Im zweiten Teil der Arbeit werden die Methodologie und das Design der Studie offengelegt.
Dabei werden in Kapitel 5.1. zunächst die Forschungsfragen ausgeführt, die für das Design der Studie richtungsweisend waren. Die Verortung in der Forschungstheorie erfolgt anschließend in Kapitel 5.2.
Die unterschiedlichen Teile des hier entwickelten Fragebogens werden in den folgenden Kapiteln genauer dargelegt. Hierbei wird in Kapitel 5.3. zunächst auf die Erhebung des Denkstils mittels des von Borromeo Ferri entwickelten Tests zur Erhebung des Denkstils (vgl. Borromeo Ferri 2012) eingegangen, während in den Abschnitten des Kapitels 5.4. die Aufgaben des Fragebogens analysiert werden. Die Analyse erfolgt dabei in drei Schritten, zunächst werden die Aufgaben auf ihre Bearbeitungsschritte hin analysiert, um so sicherzustellen, dass die Aufgaben vergleichbar sind zu denen, deren Bearbeitungen den jeweils anderen Denkstil nahelegen. Anschließend wird herausgearbeitet, warum es sich bei den Aufgaben um solche handelt, die zur Lösung einen bestimmten Denkstil nahelegen, und schlussendlich werden die Aufgaben auf ihren Inhaltsbereich hin untersucht. Kapitel 5.6. bezieht sich auf die begleitenden Fragen, die neben den Aufgaben einen weiteren Teil des Fragebogens bilden, während die beiden nachfolgenden Kapitel die Stichprobe und die Durchführung sowie die Auswertungsrichtlinien offenlegt.
Der dritte Teil der vorliegenden Studie bezieht sich auf die Ergebnisse, wobei diese in Kapitel 6 zunächst ausführlich dargestellt werden. In Abschnitt 6.1. wird entsprechend der Vergleich zwischen Schülerinnen und Schülern mit ana-

lytischem Denkstil und solchen mit visuellem Denkstil anhand der statistischen Daten zur Korrektheit der Lösungen sowie die des Aufgabenempfindens dargelegt. Anschließend verdeutlichen die Ausführungen einiger Fallbeispiele die Unterschiede der in dieser Studie identifizierten Bearbeitungstypen.

Kapitel 7 enthält neben der Zusammenfassung der Untersuchungsergebnisse Ansätze für die weitere Forschung und verweist weiterhin auf die Bedeutung dieser Arbeit für die Schulpraxis.

1. Grundlegende Begriffsbestimmungen aus kognitionspsychologischer Perspektive und ihre Bedeutung für die Mathematik

> „[Mathematical thinking] is mathematical not because it is thinking about mathematics but because the operations on which it relies are mathematical operations. Its field of application is general.“
>
> (Burton 1984, S. 36)

Mit dem Fokus dieser Arbeit die Aufgabenbearbeitungen von Schülerinnen und Schülern[1] in Bezug auf ihr Denken, genauer ihres Denkstils, hin zu analysieren, ist zunächst die Frage verbunden, welche Aspekte des Denkens allgemein spezifische Problemlöseprozesse beeinflussen. Aus dieser Perspektive ergibt sich damit die Notwendigkeit, zunächst einige Grundbegriffe der Kognitionspsychologie und ihre Auffassung in der hier vorliegenden Arbeit darzulegen. Dabei sind hier die Begriffe Lernen, vor allem aber Denken und Problemlösen von zentraler Bedeutung, bezüglich derer in der Literatur eine Vielzahl unterschiedlicher Auffassungen existiert (vgl. Beller/ Bender 2010; Hussy 1984; Eysenck 1993).

Beispielsweise beschreiben Friedrich & Mandl Denken ganz allgemein als ein Prozess, bei dem vorhandenes Wissen, unter Einbezug neuer Erkenntnisse, in neue Sinnzusammenhänge gebracht wird. Sie grenzen davon Problemlösen als dasjenige Denken ab, das sich auf ein konkretes Ziel richtet, für welches keine Handlungsroutinen vorliegen (vgl. Friedrich/ Mandl 1992, S.4ff). Die vorangestellten Definitionen von Denken und Problemlösen scheinen zwar zunächst umfassend die beiden Begriffe zu beschreiben, doch insbesondere in Bezug auf die Abgrenzung zu dem Begriff Lernen, der ebenfalls als „Erwerb und Veränderung von Wissen und Fertigkeiten“ (Friedrich/ Mandl 1992, S.5) aufgefasst wird, offenbaren sich Überschneidungen.

Dementsprechend wird sich in den folgenden Abschnitten zunächst um eine detailliertere kognitionspsychologische Beschreibung des Denkens mit seinen grundlegenden Teilaspekten bemüht. Weiterhin soll in den anschließenden Abschnitten die für die vorliegende Studie bedeutenden Begriffe des mathemati-

[1] Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit der geschlechtsspezifische Ausdruck „Schüler“ stellvertretend für „Schülerinnen und Schüler“ verwendet.

schen Denkens ausgeführt sowie das grundsätzliche Verständnis von Denkstilen aufgebaut werden.

1.1. Denken

Der Gebrauch des Begriffs Denken geht häufig auf ein intuitives Verständnis zurück. Dabei fällt es im Allgemeinen nicht schwer den Begriff richtig zu verwenden und bestimmte kognitive Tätigkeiten dem Denken zuzuschreiben bzw. jene Tätigkeiten zu identifizieren, die nicht dem klassischen Denkbegriff zuzuordnen sind. Wird jedoch nach einer Definition von Denken gefragt, so fällt dies häufig schwer. Deshalb soll an dieser Stelle der Arbeit zunächst der Versuch unternommen werden, zu klären, was in der vorliegenden Studie unter Denken zu verstehen ist. Hierzu wird sich auf eine Vielzahl unterschiedlicher Quellen gestützt (Funke 2006; Graumann 1971), die das Konstrukt Denken allgemein aus kognitionspsychologischer Perspektive beschreiben. Hierzu werden zunächst einige Definitionen aus der Kognitionspsychologie angeführt, die ihren Anteil an dem hier verstandenen Begriff von Denken und Problemlösen haben. In Abschnitt 1.1.2. wird dann in Abgrenzung dazu das mathematische Denken aus mathematikdidaktischer Perspektive dargelegt, bevor abschließend auf das Konstrukt Denkstil und seinen Einfluss eingegangen wird.

1.1.1. Grundlegende Begriffsbestimmung

Grundsätzlich lässt sich sagen, dass Denken ein kognitiver Prozess ist, der auf die mentale Manipulation von Informationen zurückzuführen ist. Es handelt sich folglich um einen subjektiven Prozess, der „vor allem ein *Analysieren* und ein *Synthetisieren* dessen [ist], was die Analyse ergeben hat; er ist ferner *Abstraktion* und *Verallgemeinerung*, die sich aus Analyse und Synthese ableiten“ (Rubenstein 1971, S.76). Das heißt, ein Denkprozess vollzieht sich durch das mentale Zerlegen eines Gegenstandes und die Ergründung seiner Teile bzw. Elemente sowie ihrer Zusammenhänge innerhalb des Gegenstandes. Es handelt sich folglich um das Umstrukturieren von mental abgebildeten Elementen und ihren Beziehungen[2] (vgl. Rubenstein 1971, S.77). Und auch bei Graumann lässt sich das Verständnis von Denken als Prozess der Umstrukturierung wiederfinden, wobei er jedoch verschiedene Merkmale des Denkens ergänzt. So expliziert er die Merkmale durch Begriffe wie *Vergegenwärtigung, Ordnungsleistung durch Begriffsbildung, Innerlichkeit, Selektivität, Urteil und Entscheidung* sowie *Reflexivität* (vgl. Funke 2006, S.XXIII)[3].

Dabei emanzipiert sich die denkende Person im Prozess der *Vergegenwärtigung* vom sinnlich Erfahrbaren, um sich Nicht-Gegenwärtiges vorzustellen, wobei das Nicht-Gegenwärtige sowohl Vergangenes wie Zukünftiges als auch grundsätzlich Mögliches einschließt. Das damit verbundene Ablösen vom konkret Vorliegenden ist für Graumann die Grundlage für Abstraktion und führt schließlich zur *Begriffsbildung*. Die Rolle des Denkens ist dabei, Objekte zu Klassen zusammenzufassen und entsprechend zu ordnen, um so Begriffe auszubilden. Weigand bringt diese Darstellung auf den Punkt, indem er von einem Begriff spricht, „wenn damit nicht nur ein einzelnes Objekt oder ein Gegenstand, sondern eine Gesamtheit oder Kategorie gemeint ist, zu der der Gegenstand gehört“ (Weigand 2012, S.4).

Darüber hinaus betont Graumann die *Innerlichkeit* sowie die *Selektivität* vom Denken und macht dabei deutlich, dass auch wenn sich die Ergebnisse des Denkens nach außen richten und von außen beobachtet werden können, die eigentliche Denktätigkeit ein innerer Vorgang ist. Die *Selektivität* des Denkens zielt hingegen darauf ab, dass, anders als beim sinnlichen Wahrnehmen, die denkende Person frei in der Wahl des gedachten Objekts, der damit verbundenen Assoziation sowie der bewusst gezogenen Beziehung ist.

Als den wichtigsten Aspekt des Denkens nennt Graumann das *Urteilen* und Wählen und bezeichnet damit die zielgerichteten *Entscheidungen* für gezogene Verbindungen und Schlüsse sowie deren Bewertung und gegebenenfalls Korrektur.

Unter *Reflexivität* fasst er die Rückbeziehung auf das denkende Subjekt und spricht damit die Fähigkeit an, sich selbst zum Gegenstand des Denkens zu machen und den damit verbundenen Möglichkeiten, Gedankengänge auch

---

[2] Rubenstein bezeichnet die „Umstrukturierung von mental abgebildeten Elementen und ihren Beziehungen“ als Synthese.

[3] Bevor die Autorin zu dieser Auffassung von Denken Stellung nimmt, sollen zunächst Graumanns angeführte Merkmale genauer dargestellt werden.

bewusst zu lenken. Allerdings sieht er die Reflexivität nur als Teil der Personalität, die für ihn zusätzlich das Moment der Subjektivität beinhaltet. Das heißt „jedes Denken ist mein Denken; was ich denke, sind meine Gedanken“ (Graumann 1971, S.21).

Funke expliziert zusätzlich noch die Gerichtetheit des Denkens und beschreibt vorwärtsgerichtetes Denken als das Vorbereiten und Planen von Handlungen, das gegenwartsgerichtete Denken als eine Notwendigkeit für das Verständnis einer gegebenen Situation und das rückwärtsgerichtete Denken als Beitrag zur Bewertung von vergangenen Situationen (Funke 2006, S.XXI).

Aus den aufgeführten Merkmalen und den für ihn zentralen Aspekt der Gerichtetheit konstituiert sich der von dem Psychologen Funke verwendete Begriff des Denkens. Dieser versteht Denken als zielgerichtete Tätigkeit mit einer höheren kognitiven Funktion, die einem Handeln vorausgeht und sich auf einfachere kognitive Funktionen wie Wahrnehmung, Lernen oder Gedächtnis stützt (vgl. auch Funke 2006, S.XXI). Um zu prüfen, inwieweit die von Funke etablierte Definition ausreicht, werden im Folgenden einige Unterteilungen von *Denken* in seine Erscheinungsformen vorgestellt, um anschließend begründet Stellung zu nehmen.

Auch wenn Hussys Unterteilung nicht primär auf seiner Auffassung vom Denken fußt, gliedert er jedoch die Denkpsychologie in drei Forschungsgebiete mit dem Gegenstand Denken. Indirekt verweist er damit auf unterschiedliche Erscheinungsformen des Denkens und führt dazu folgende Bereiche an (vgl. Hussy 1984, S. 17):

- *Begriffsbildung* als der Bereich, der sich mit der Abstraktion von konkret Gegenständlichem und der damit einhergehenden Bildung von Begriffen beschäftigt, wobei ein *„Begriff [...] eine mentale Repräsentation einer Kategorie von Entitäten* [ist]. Unter ‚Entitäten‘ werden [hier] Gegenstände der Wahrnehmung, wie z.B. konkrete Objekte, Ereignisse oder Personen, verstanden [und mit] ‚Kategorie‘ ist eine bestimmte Menge von Entitäten gemeint." (Eckes 1996, S.273),
- das Teilgebiet, welches das *Problemlösen* als die Überwindung einer mentalen Barriere betrachtet, um von einem Ausgangszustand zu einem gewünschten Zielzustand zu kommen und

- der Bereich *Schlussfolgern und Urteilen*, der sich auf Formen des logischen Schließens, unabhängig von der Richtigkeit des Schlusses, und des Bewertens bezieht.

Wird die von Hussy vorgenommene Unterteilung in Beziehung zu den zunächst gegebenen Definitionen von Denken gesetzt, so ist erkennbar, dass die drei von ihm angeführten Erscheinungsformen des Denkens durchaus als eine Manipulation von Informationen angesehen werden kann. Deutlich wird dies, wenn das *Problemlösen* als ein Prozess verstanden wird, bei dem von einem gegebenen Ausgangszustand, durch Entwickeln, Planen und Ausführen einer Strategie, auf ein Ziel hingearbeitet wird. Und auch mit Bezug auf Funkes Fokus auf die Gerichtetheit, lässt sich das Problemlösen als eine Erscheinungsform des Denkens halten. Darüber hinaus ist vom *Schlussfolgern und Urteilen* die Rede, wenn eine gegebene Situation anhand bestimmter Erinnerungen bewertet und entsprechende Konsequenzen gezogen werden, was einer „gerichteten Manipulation" gleichkommt.

Und obwohl die angeführten kognitionspsychologischen Auffassungen des Denkbegriffs zunächst umfassend erscheinen, findet zumindest ein Aspekt des Denkens in den aufgeführten Definitionen keine Berücksichtigung. So entfällt in der Begriffsauffassung von Hussy das für das Denken charakteristische Merkmal der Bewusstheit, in dem Sinne, dass sich der Denkende stets darüber bewusst ist, dass er denkt. Zwar klingt die Bedeutung von Bewusstheit auch bei Graumann (vgl. *Selektivität*) an, erhält jedoch nicht den Stellenwert, den sie einnehmen muss, wodurch insbesondere die *Begriffsbildung* meines Erachtens keinen Denkprozess darstellt. Aber gerade im Hinblick auf die Bewusstheit und der ansonsten in weiten Teilen mit Funkes kognitionspsychologischen Verständnis von Denken übereinstimmenden Auffassung, wird die *Begriffsbildung* nicht als Teil des Denkens gesehen. Denn auch, wenn es sich um einen Ordnungsprozess – und im Sinne der zunächst aufgeführten Definitionen durchaus um eine mentale Umstrukturierung – handelt, ist sie jedoch im Allgemeinen lediglich „Mittel zum Zweck" und somit eher Basis für das Denken (im Sinne von Lernen).

Dementsprechend liegen die Untergliederungen des Psychologen Joachim Funke und Hans Jürgen Eysenck, als einem der bedeutendsten Psychologen des zwanzigsten Jahrhunderts (vgl. Haggbloom et al. 2002, S.146), dem hier zugrunde liegenden Konzept näher. Und auch wenn es einige Überschneidungen mit dem oben angeführten Bereichen der Denkpsychologie von Hussy gibt, wird hier detaillierter auf die Untergliederung von Eysenck und Funke eingegangen, dessen ausgeführte Denkprozesse in weiten Teilen die Basis für die vorliegende Arbeit bilden.
Dabei bezieht Eysenck sich auf die Unterscheidung von „problem solving, reasoning, and decision making and judgement“ (Eysenck 1993, S.131), während Funke bei seiner Gliederung vom *logischen Schließen*, *Wahrscheinlichkeitsurteilen*, *kreativen Denken* und *Problemlösen* spricht (vgl. Funke 2006, S.XXIff). In den folgenden Abschnitten wird jedoch deutlich, dass, trotz der unterschiedlichen Bezeichnung, es eine Vielzahl von Überschneidungen bei beiden gibt.
Logisches oder auch *deduktives Schließen* bedeutet in diesem Zusammenhang aus einem gegebenen Sachverhalt eine Folgerung zu ziehen und so zu einer widerspruchsfreien und folgerichtigen Konklusion zu kommen (vgl. auch Beller/ Bender 2010, S.50), wie sie so auch in der Aussagenlogik der Mathematik wiederzufinden ist. Dementsprechend unterscheiden Funke und seine Co-Autoren zwischen konditionalem Schließen, relationalem Schließen und syllogistischem Schließen. Knauff expliziert die verschiedenen Formen des Schließens, indem er die Nähe zur Mathematik herausstellt, sodass sich das konditionale Schließen durch die Verwendung von Junktoren bzw. Konnektiven („nicht“, „und“, „oder“, „wenn“, „dann“) auszeichnet, das relationale Schließen auf Beziehungen zwischen Objekten oder Sachverhalten und ihrer Transitivität beruht und das syllogistischen Schließen die Verwendung von Quantoren („alle“, „einige“ etc.) beinhaltet (vgl. Knauff 2006, S.169ff). Eysenck ergänzt zudem, dass „it is very important to note that the validity of a given conclusion is based solely on logical principles, and is not affected in any way by whether or not that conclusion is actually true“ (Eysenck 1993, S.145).
Entgegen der Annahmen, dass es sich bei Funkes Begriff der *Wahrscheinlichkeitsurteile* um mathematisch begründbare Vorhersagen von Sachverhalten handelt, werden darunter Inferenzen verstanden, die sich auf die Vereinfa-

chung eines Sachverhalts und dem damit verbundenen Ableiten einer Regel beziehen. Das heißt, dass sich zum Fällen eines Urteils bzw. dem Treffen einer Entscheidung auf den Einsatz spezieller Heuristiken berufen wird (vgl. Gigerenzer/ Gaissmaier 2006, S.330ff), obwohl diese durchaus auch fehlerhaft sein können. Ebendiese angewandten Heuristiken finden sich auch in Eysencks Ausführungen zum *judgement*, sodass auch die Begriffe des *decision making and judgement* deutlich Überschneidungen mit Funkes *Wahrscheinlichkeitsurteilen* aufweisen. Allerdings ergänzt Eysenck das *decision making*, wobei es nicht (nur) darum geht, Entscheidungen auf Basis von rationalen Gegebenheiten zu treffen, sondern vor allem darum, wie Menschen im Alltag zu Entscheidungen kommen[4] (vgl. Funke 2006, S.XXII).

Unter kreativem Denken fasst Funke erfinderisches und schaffendes Denken zusammen, ohne dabei zu explizieren, wie sich dieses konkret ausgestaltet. Doch insbesondere in Anbetracht der Zielsetzung und Ausgestaltung der vorliegenden Arbeit wurde dieser Teilsaspekt des Denkens zwar der Vollständigkeit halber aufgeführt, es wird jedoch nicht tiefer auf die damit notwendigen Begriffsklärungen eingegangen.

Problemlösen lässt sich wiederum sowohl bei Funke als auch bei Eysenck als Aspekt des Denkens unter kognitionspsychologischer Perspektive finden, worunter beide Autoren grundsätzlich die „Suche nach einem Mittel [...] zur Überwindung einer Barriere bzw. Lücke zwischen Ist- und Soll-Zustand“ (Funke 2006, S.XXII) verstehen.

Darüber hinaus herrscht in der Literatur darüber Konsens, dass die Besonderheit beim *Problemlösen* darin liegt, dass zur Überwindung der Barriere keine Routinehandlungen zur Verfügung stehen, sondern ein Durchdenken der Situation und der Möglichkeiten erforderlich ist (vgl. Duncker 1935, S.1; Dörner 1976, S.10 etc.).

Unter dem Gesichtspunkt, dass das Problemlöseverhalten zentral für die Bearbeitung der in dieser Studie verwendeten Mathematikaufgaben ist, wird der Problemlöseprozess detailliert dargestellt. Hier wird jedoch zunächst nur

[4] Er führt dazu zum einen die von Tversky (1972) etablierte *elimination-by-aspects*-Theorie an, in der, für die Entscheidung relevante Aspekte nach und nach zum Ausschluss der Möglichkeiten führen, bis nur noch eine mögliche Entscheidung bleibt. Zum anderen beruft er sich auf Simon (1978) *satisfacing*-Theorie, wobei vorab ein System von Minimal-Anforderungen erstellt wird und schließlich eine positive Entscheidung für die erste Situation, die die Anforderungen erfüllt, getroffen wird. (vgl. Eysenck 1993, S.131ff)

auf die kognitionspsychologische Beschreibung des Problemlöseprozesses und erst in Abschnitt 1.1.2. auf die mathematikdidaktische Perspektive auf den Problemlöseprozess eingegangen.

Um die notwendigen Anforderungen an das Problemlösen beschreiben zu können, haben Bransford & Stein (1993) die einzelnen Bearbeitungsschritte des Problemlöseprozesses mit dem Akronym IDEAL[5] bezeichnet:

- I Identifikation eines Problems
- D Definition der Ziele und Repräsentation des Problems
- E Explorieren möglicher Strategien
- A Antizipieren von Ergebnissen und Vorgehensweisen
- L Lernen aus der Rückschau (vgl. Bransford/ Stein 1993, S.20ff)

Etwas detaillierter findet sich der Prozess des Problemlösens bei Sternberg, der ein Modell entwirft, das in seiner Struktur dem Modellierungskreislauf ähnelt. Die Bearbeitungsschritte des Problemlösens werden im Folgenden näher erläutert und an einem Beispiel expliziert. Um dabei die Unbeschränktheit des Modells zu unterstreichen, bezieht sich die hierfür entworfene Situation, bewusst nicht auf Problemstellungen aus der Mathematik (siehe Kapitel 1.1.2.), sondern allgemein aus dem schulischen Kontext, wobei hier auf das Verstehen eines literarischen Textes Bezug genommen wird. Der Autorin ist dabei durchaus bewusst, dass die hier kreierte Problemsituation und der entworfene Lösungsprozess über die Maße vereinfacht wurden. Dennoch scheint dies Beispiel hier sinnvoll, da es die theoretischen Ausführungen und ihre Allgemeingültigkeit verdeutlicht.

[5] Aufgrund der großen Überschneidung mit dem Modell von Sternberg soll die von Bransford & Stein entworfene Gliederung hier zunächst nur genannt werden, während die einzelnen Bearbeitungsschritte genauer in dem *problem-solving cycle* von Sternberg ausgeführt werden.

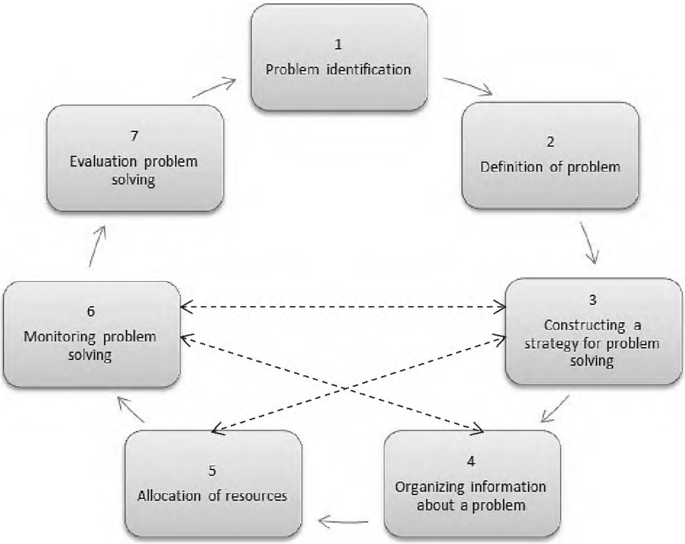


Abb. 1.1.: The steps of the *problem-solving cycle* (Sternberg 2009, S.431)

Identisch mit dem von Bransford & Stein entworfenen Bearbeitungsschritten des Problemlöseprozesses führt auch Sternberg an, dass die grundsätzliche Bearbeitung von Problemen zunächst mit der *problem identification* beginnt. So mag es zunächst seltsam anmuten, dass ein Problem in einer Situation nicht erkennbar ist, doch tatsächlich ist das nicht immer der Fall. Dies kann darauf zurückzuführen sein, dass bestimmte Gegebenheiten in der Fülle von Informationen der (Problem-)Situation übersehen oder anders eingeschätzt werden. In dem entworfenen Beispiel scheint es zunächst kein Problem mit dem Verstehen des Textes zu geben, wenn von Begrifflichkeiten abgesehen wird. Betrachtet man die Situation jedoch genauer, so kann festgestellt werden, dass ein potentielles Problem darin besteht, dass der literatische Text eine Metapher ist, die zum Verständnis eine andere Lesart notwendig macht. Entsprechend des Modells bedarf es demnach zunächst der Identifikation des Problems, indem eine zweite Ebene des Textes in Betracht gezogen wird. Erst nachdem die Situation als Problemsituationen erkannt worden ist, kann das Problem als solches formuliert werden (*Problem definition and representation*). Das heißt für das Beispiel, dass derjenige, der das Problem entdeckt hat, das Problem als solches formuliert, sprich: „Der gegebene Text bezieht sich nur vordergründig auf das, was er beschreibt.“, und daraus ein entsprechendes Ziel erkennt. Folglich enthält dieser Bearbeitungsschritt nicht nur die Formulierung des eigentlichen Problems, sondern ebenso eine entsprechende Zielausarbeitung. Dabei kann es äußerst hilfreich sein, die Formulierung des Ziels möglichst klar zu umreißen, um so die Bearbeitung entsprechend handhabbar zu machen. In dem Beispiel heißt das Ziel, den Text im Sinne des Autoren zu verstehen.

Es folgt der Schritt *strategy formulation*, bei dem es darum geht eine Strategie zu entwerfen, die bei der Problemlösung hilft. Dabei können sich laut Sternberg die Strategien auf die Paarungen *analyses & synthesis* oder auch auf *divergent & convergent thinking* beziehen. Die Strategie im Sinne der ersten Paarung beinhaltet das komplexe Problem als Ganzes in handhabbare Einzelteile zu zerlegen (*analysis*) oder umgekehrt, verschiedenste Elemente neu zu arrangieren, um ein gebräuchliches Gesamtbild zu entwerfen (*synthesis*). Hierbei sind beide Aspekte nicht zwingend ausschließlich zu betrachten, sondern es ist durchaus möglich, dass beide wechselseitig angewandt werden. In dem Beispiel kann das heißen, dass als Strategie zur Lösung verschiedene Zugänge gesucht werden, z.B. über die Epoche, in der das Werk entstanden ist oder über die Lebensumstände des Autoren (*analysis*) in der anschließenden umfassenden Betrachtung kann entsprechend analysiert werden, wie die einzelnen Perspektiven auf den Text miteinander in Beziehung stehen (*synthesis*).

Divergent & convergent thinking beinhaltet dabei zunächst verschiedene Strategien zu entwickeln (*divergent thinking*) und aus diesen die endgültige zu wählen (*convergent thinking*). Dementsprechend ist in dem Beispiel ebenfalls denkbar, die Verwendung der verschiedenen Metaphern in der Literatur auf das vorliegenden Werk zu übertragen (*divergent thinking*). Aus dieser Vielzahl von Strategien muss nun „die beste“ ermittelt werden (*convergent thinking*).

Anschließend gilt es alle notwendigen Informationen strategisch zu organisieren (*organization of information*). Für das Beispiel kann das bedeuten, dass Wissen über die Epoche, über die Lebensumstände des Autors sowie die Zeitgeschehnisse gesammelt und organisiert werden.

Der Bearbeitungsschritt *resource allocation* zielt darauf ab, wie viel Mittel, Zeit und Aufwand auf die Bearbeitung eines Problems verwandt wird. Dabei

bezieht sich dieser Schritt nicht nur auf die konkrete Durchführung der Problemlösung, sondern ebenso auf die Planung sowie Informationsbeschaffung und -organisation. Für die Aufgabe zum Textverstehen kann das heißen, dass eine zeitliche Begrenzung der Aufgabe vorliegt oder aber die zugänglichen Informationen beschränkt sind.
Den gesamten Problemlösungsprozess begleitend findet ein *monitoring* statt, wobei das ein permanentes Prüfen sowohl der eigenen Planung als auch des eigenen Vorgehens beinhaltet. Auf diese Weise ist es dem Problemlöser möglich frühzeitig auf eventuelle Irrwege bzw. Fehlentscheidungen zu reagieren und entsprechend andere Lösungswege einzuschlagen. Der Rezipient muss sich also immer wieder bewusst machen, welche Auswirkungen die gewählten Perspektiven haben können und inwiefern sie die Lesart stützt.
Als abschließende Phase führt Sternberg *evaluation* an, welche sich in Abgrenzung zum Monitoring darauf bezieht, die Lösung des Problems zu reflektieren und zu bewerten. Für das Textverstehen bedeutet das, dass nach der neukonstruierten Bedeutung des Textes neue Perspektiven dazu führen können, dass der Sinn des Textes erneut überdacht werden muss.
Und obwohl hier, auch in Bezug auf das angeführte Beispiel, der Eindruck entstehen könnte, dass der Problemlöseprozess linear durchlaufen wird, ist aus Abb. 1.1. ersichtlich, dass Sternberg nicht davon ausgeht. Vielmehr zeigt er deutlich auf, dass von bestimmten Phasen auf andere Phasen zurückgesprungen bzw. einige Phasen übersprungen werden können (vgl. Sternberg/ Williams 2002, S. 319ff).
Nachdem die vorangegangenen Abschnitte des Kapitels verschiedene Auffassungen von Denken sowie die involvierten Merkmale und Ausprägungen herausgestellt hat, wird von der Autorin

> Denken als bewusster und zielgerichteter kognitiver Prozess verstanden, der durch Umstrukturierung von mental abgebildeten Elementen und ihren Beziehungen (Begriffen) neue Sinnzusammenhänge schafft.

Dabei sind insbesondere Problemlösen, logisches Schließen sowie Urteilen und Entscheiden spezifische Ausprägungen des Denkens. Auf Basis der hier vertretenen Auffassung, gilt es nun im Hinblick auf die Ausrichtung der vorliegenden Arbeit zu klären, inwieweit sich mathematisches Denken vom Denken im Allgemeinen unterscheidet.

1.1.2. Besonderheiten mathematischen Denkens

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die für diese Arbeit relevanten Erscheinungsformen des (allgemeinen) Denkens genauer dargelegt und es könnte leicht der Eindruck entstehen – und ein intuitives Begriffsverständnis stützt diese Auffassung – dass *mathematisches Denken* lediglich ein Nachdenken über und ein kognitives Arbeiten in der Mathematik ist. Der Auffassung eines entsprechend gerichteten Denkens und der damit verbundenen eingeschränkten Sicht auf mathematisches Denken wird hier jedoch nicht gefolgt.

So zeigen insbesondere die Ausführungen zum logischen Schließen eine ausgeprägte Nähe zur Mathematik, was darauf schließen lässt, dass bekannte kognitive Strategien aus dem Mathematikunterricht derart grundlegend sind, dass sie, über den Gegenstand Mathematik hinaus, Bedeutung für das Denken haben. Wie die Ausführungen in Kapitel 1.1.1. allerdings auch zeigen, handelt es sich beim mathematischen Denken nicht um einen der grundlegenden kognitiven Prozesse. Es handelt sich vielmehr um eine spezifische Art des Denkens. Harel expliziert diese Differenz, indem er zwischen allgemeinen Denkhandlungen (*mental acts*) und bereichs- oder disziplinspezifischen Ausprägungen des Denkens (*way of thinking*) unterscheidet (vgl. Harel 2008, S.489). Hierbei finden die *mental acts* in allen Bereichen des täglichen Lebens Anwendung und sind vergleichbar mit den oben angeführten grundlegenden Erscheinungsformen des Denkens, während sich *the way of thinking* auf die konkrete Ausgestaltung des Denkprozesses bezieht. Die Konsequenz aus einer derartigen Differenzierung, und die Autorin erachtet dies als sinnvoll, ist, dass mathematisches Denken grundsätzlich ein *way of thinking* ist, der durch seine Ausgestaltung jedoch die *mental acts* entsprechend beeinflusst.

Reyes-Santanders & Soto-Andrades Verständnis von mathematischem Denken bedient sich dementsprechend nicht nur der Mathematikdidaktik, sondern auch Teildisziplinen der kognitiven Psychologie. Aus diesem Grund beschreiben sie das mathematische Denken als kognitiven Prozess, der auf Kenntnisse und Fähigkeiten zurückgreift, die sich in herausfordernden Situationen, „die mit mathematischen Inhalten verbunden sind“ (Reyes-Santander/ Soto-Andrade 2011, S.684), entwickelt haben. Dabei identifizieren sie die folgenden vier Faktoren des mathematischen Denkens:

- *Wahrnehmung des Objekts*, wobei sich der von ihnen verwendete Begriff von Wahrnehmung nicht auf das sinnliche Aufnehmen der Gegebenheiten, sondern auf die Annäherung des Mathematiktreibenden an die Situation bezieht, im Sinne einer beispielsweise dynamischen Wahrnehmung, Wahrnehmung der Gemeinsamkeiten etc.,
- *(mathematik-) inhaltsbezogenes Denken*, das auf Inhalte des schulischen Lernens zurückgreift und somit aus numerischem-, algebraischem-, geometrischen-, stochastischen- und funktionalem Denken besteht,
- *Strategien oder Prozeduren* als kognitive Prozesse, die im Problemlöseprozess Anwendung finden, wobei es sich bei Prozeduren um automatisierte Prozesse handelt, während Strategien sich aus einer größeren Anzahl kognitiver Prozesse, wie beispielsweise Umstrukturierungen, Modellierungen oder bestimmten Prinzipien, zusammensetzen und
- *Nicht-rationale Prozesse*, die Fähigkeiten wie Intuition, Kreativität, Flexibilität, Sensibilität, Fantasie etc. einschließen (vgl. Reyes-Santander/ Soto-Andrade 2011, S.684f).

Und obwohl Leone Burton grundsätzlich ein anderes Konzept von Denken, als „way of improving understanding and extending control over the environment“ (Burton 1984, S.36) hat, sieht sie mathematisches Denken als spezielles Mittel dies zu erreichen und vertritt damit eine ganz ähnliche Auffassung wie Reyes-Santander & Soto-Andrade. Dabei entwirft Burton mit ihrem Konstrukt ein Modell, das dem mathematischen Denken ein sehr viel breiteres Anwendungsfeld zugesteht als nur die Mathematik selbst. Für ihr Modell zur Beschreibung mathematischen Denkens unterteilt sie die Mittel, die beim mathematischen Arbeiten Anwendung finden, in „the operations, processes and dynamics of mathematical thinking“ (Burton 1984, S. 36).

Operations[6] beziehen sich hierbei auf offensichtliche, aber auch auf verdeckte mathematische Operationen, die bei allen Gegebenheiten aktiviert werden und zum Denken anregen. Dabei muss es sich nicht zwingend um mathematische Gegebenheiten handeln, es führt bereits die Planung eines Kindergeburtstags zu mathematischen Operationen, wie beispielsweise das Abzählen von Geschirr oder auch die Festlegung der Reihenfolge von Spielen.
Auf diese Weise differenziert Burton *operations* in *enumeration*, *iteration*, *relation*[7] und *transformation* (siehe Abb. 1.2.) und beschreibt damit verschiedene mathematische Tätigkeiten, die durchaus auch in Alltagssituationen genutzt werden.

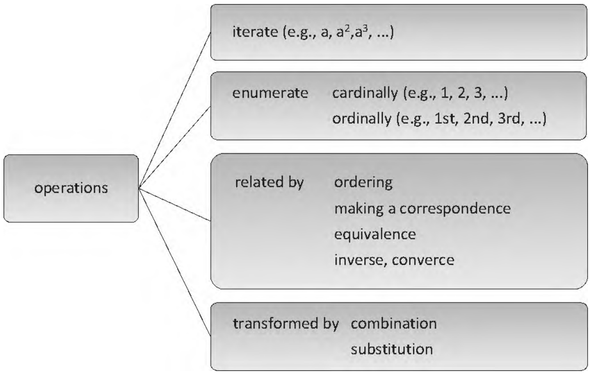


Abb. 1.2.: Burton's mathematical thinking as operation on elements (vgl. Burton 1984, S.37)

Daneben identifiziert Burton vier *processes* in mathematischen Tätigkeiten, die sich in anderer Paarung ebenfalls bei Stacey (2006) wiederfinden. Anders als Burton reduziert Stacey jedoch das mathematische Denken auf eben diese vier für ihn fundamentalen Prozesse:

[6] Vergleichbar mit Reyes-Santanders & Soto-Andrades *(mathematik-) inhaltsbezogenem Denken*, das gegenüber Burtons *operations* auf ein breiteres Spektrum mathematischer Inhalte referiert.
[7] Findet sich indirekt in Reyes-Santanders & Soto-Andrades Wahrnehmung des Objekts als das Erkennen von Gemeinsamkeiten oder allgemeiner der Beziehung zwischen den Objekten.

- *Specializing and generalizing*
  Dabei bezieht sich das Spezialisieren darauf, dass die Problemsituation zunächst soweit vereinfacht wird, dass es möglich ist, sie an Einzelfällen zu durchdringen, indem die vorliegende Gegebenheit an Beispielen durchdacht und überprüft wird. Im Sinne des mathematischen Handelns werden dabei die Beispiele so gewählt, dass sie weder Ausnahmen noch Sonderfälle darstellen.
  Wechselseitig damit einhergehend vollzieht sich im mathematischen Denken die Analyse der Einzelfälle und dem damit verbundenen Erkennen von Mustern und Beziehungen. Das heißt, dass zunächst an einem konkreten Beispiel die Problemsituation auf ein mögliches Muster untersucht wird, sollte jedoch keines gefunden werden, werden weitere Einzelfälle betrachtet, bis sich ein Muster ergibt, das schlussendlich zur Generalisierung der Einzelfälle führt.
  Damit ist offensichtlich, dass beide Aspekte beim mathematischen Denken eng miteinander verknüpft sind und nicht separat betrachtet werden können.
- *Conjecturing and convincing*
  Ähnlich eng sind das Mutmaßen und das Überzeugen miteinander verbunden. So bezieht sich das Mutmaßen zum einen darauf, Voraussagen darüber treffen zu können, welche Beziehungen dem Problem inhärent sind und zum anderen darauf, wie Lösungen für das Problem aussehen können. Demgegenüber bezieht sich das Überzeugen darauf, Begründungen dafür zu finden, warum entsprechende Voraussagen zutreffen bzw. allgemeiner, warum etwas wahr ist (vgl. Stacey 2006, S.41).

Entsprechend ihrer Auffassung von Denken und der damit verbundenen Auffassung von mathematischem Denken, bezieht sich Burton auf die *dynamics of thinking mathematically*. Es geht dabei darum, dass mathematisches Verständnis zunächst durch *manipulating* einer Situation oder eines Gegenstandes angestoßen wird, bis ein Muster, eine Gesetzmäßigkeit oder eine Regel erkannt bzw. genutzt wird (*sense of pattern*). Diese neu gewonnenen Erkenntnisse werden im weiteren Verlauf artikuliert (*articulating that pattern symbolically*) und können im fortlaufenden Verständnisprozess erneut auf-

gegriffen bzw. verwendet werden. Dabei bezieht sich die Artikulation nicht zwingend auf eine verbale Äußerung, sondern kann ebenso als andersgeartete Darstellung des, durch Manipulation des Gegenstandes, Erkenntnisgewinns vorliegen.
Wie angedeutet, handelt es sich nicht um einen einmal zu durchlaufenden Zyklus, sondern um einen fortlaufenden Prozess, in dessen Verlauf auf immer neue Grundlagen zurückgegriffen werden kann, um so immer neue Erkenntnisse zu gewinnen (vgl. Burton 1984, S.39ff).

Ein abschließender Vergleich der beiden Positionen von Reyes-Santander & Soto-Andrade sowie Burton lässt eine beinahe identische Auffassung erkennen, deren Unterschied lediglich in ihrer jeweiligen Struktur sowie Reyes-Santanders & Soto-Andrades Ergänzung der *(mathematik-) inhaltsbezogenen Denkens* vorliegt. Ausgehend von Burtons Charakterisierung mathematischen Denkens im Allgemeinen, stellt sich jedoch die Frage, inwieweit spezifische Auffassungen spezieller Gebiete der Mathematik Einfluss auf das mathematische Denken haben. So impliziert die Komponente eines *(mathematik-) inhaltsbezogenen Denkens*, dass Unterschiede zu erwarten sind. Und es scheint einsichtig, dass die unterschiedlichen Bereiche mit ihren spezifischen Vorgehensweisen beim Aufgabenlösen und den damit einhergehenden Perspektiven auf Probleme Einfluss auf das grundlegende mathematische Denken haben.
Zu diesem Zweck soll hier exemplarisch auf das algebraische Denken eingegangen werden, um die Notwendigkeit einer thematischen Komponente, wie sie Reyes-Santander & Soto-Andrade vorschlagen, zu prüfen bzw. zu belegen, dass die oben dargelegten „allgemeinen Charakteristika“ von Burton genügen.
Hefendehl-Hebeker beschreibt die Algebra grundsätzlich als innermathematische Kultur und fasst diese als eine verallgemeinerte Arithmetik auf (vgl. Hefendehl-Hebeker 2007, S.150). Es handelt sich folglich um ein Fachgebiet der Mathematik, in dem arithmetische Muster gefunden und allgemeingültig beschrieben werden, wobei Fischer & Hefendehl-Hebeker das algebraische Denken auf folgende Komponenten zurückführen:

- *Strukturieren* von Sachverhalten als das symbolisches Beschreiben von Rechenschemata und Gesetzmäßigkeiten,
- *Abstrahieren und Generalisieren* ziel darauf ab, jene Eigenschaften, Gegenstände und Sachverhalte zu identifizieren, die allen gemeinsam sind,
- *Darstellen* spezieller mathematischer Objekte (Zahlen, Größen etc.) in einem hoch konventionelleren und regelgeleiteten Darstellungssystem,
- *Konstruieren*, indem Strukturen und Gesetzmäßigkeiten erkannt werden, bzw. neue Zusammenhänge hergestellt werden und
- *Argumentieren und Beweisen*, wobei Beweisen als schlüssige Argumentation angesehen wird (vgl. Fischer/ Hefendehl-Hebeker 2009, S.191ff)

Vergleicht man diese Auffassung von algebraischem Denken nun mit dem grundsätzlichen Verständnis von mathematischem Denken, wie es bei Burton der Fall ist, so lässt sich die Mehrzahl der oben aufgeführten Komponenten von Fischer & Hefendehl-Hebeker durchaus auch in dem grundlegenderen Modell von Burton wiederfinden:

Komponenten algebraischen Denkens, wie sie bei Fischer/ Hefendehl-Hebeker zu finden sind	Entsprechende Komponenten der von Burton vertretenen Auffassung mathematischen Denkens
Strukturieren	*operations,* speziell das Anwenden von Relationen (vgl. Abb. 1.2.)
Abstrahieren und Generalisieren	*processes:* speziell *generalizing*
Darstellen	*dynamics of thinking* mathematically beinhaltet neben dem grundsätzlichen Finden von Mustern auch *articulating that pattern symbolically*
Konstruieren	*spezializing,* wobei die Betrachtung von Einzelfällen Muster sichtbar macht und mithilfe der *dynamics of thinking mathematically* neue Zusammenhänge hergestellt werden
Argumentieren	*processes: convincing*

Tab. 1.1.: Überprüfung von algebraspezifischen mathematischen Denken in Bezug auf die hier verwendete allgemeine Beschreibung mathematischen Denkens

Es zeigt sich folglich, dass die von Reyes-Santander & Soto-Andrade eingeführte Dimension des *(mathematik-) inhaltsbezogenen Denkens*, zwar für die Strukturierung des Konstrukts mathematischen Denkens durchaus sinnvoll ist, jedoch durch die nicht weiter ausgeführten spezifischen Ausprägungen des Denkens in den entsprechenden Bereichen nur schwer handhabbar ist. Demgegenüber finden sich die entsprechenden Komponenten durchaus auch im Modell von Burton, das durch die allgemeingehaltenen Aspekte durchaus auch auf die unterschiedlichen Bereiche der Mathematik anwendbar ist. Aus diesem Grund kann hier dem burtonschen Begriffsverständnis von mathematischem Denken uneingeschränkt gefolgt werden, bedarf aber insofern einer Anpassung, als dass die von Reyes-Santander & Soto-Andrade etablierte *Wahrnehmung des Objekts* keine Berücksichtigung findet. Die *Wahrnehmung* im Sinne einer mathematischen Wahrnehmung einer Situation ist es, die es grundsätzlich erlaubt auch außermathematische Phänomene als mathematisch zu erkennen und entsprechend zu handeln.

Der hier vertretenen Auffassung von mathematischem Denken folgend finden sich in der mathematikdidaktischen Diskussion eigene Modelle zum Problemlösen, sodass einige Darstellungen des Problemlöseprozesses hier genauer beleuchtet werden sollen. Denn bei den Bearbeitungsphasen des Problemlösens wie sie in Kapitel 1.1.1. dargestellt wurden, handelt es sich um die kognitionspsychologische Sicht, welche nicht primär auf Mathematik ausgerichtet ist. Da mathematisches Denken jedoch ein spezifisches Vorgehen mit sich bringt, wird hier auf einige Modelle verwiesen, die in einer entsprechend mathematikdidaktischen Tradition mit Bezug auf das mathematische Denken entworfen wurden.
Eine Vielzahl Mathematikdidaktiker entwerfen ihre Problemlösemodelle in Anlehnung an Pólya (vgl. Schoenfeld 1985; Mason/ Burton/ Stacey 2010, Pólya siehe Kapitel 5.4.1.), sodass in diesem Abschnitt lediglich auf die Modelle von Wilson, Fernandez & Hadaway sowie Mason, Burton & Stacey eingegangen wird. Dabei berufen sich Wilson et al. in ihrem Modell vom mathematischen Problemlösen auf Pólya, betonen durch ihre Darstellung jedoch den nichtlinear verlaufenden Prozess. Darüber hinaus ergänzen sie Managerprozesse sowie das Formulieren der Aufgabe (*problem posing*). Die Managerprozesse beziehen sich dabei auf die metakognitive Tätigkeit der

Selbststeuerung und der damit einhergehenden Selbstkontrolle, die die Bewegungen durch das Problemlösemodell steuern (vgl. Wilson/ Fernandez/ Hadaway 1993). Auf diese Weise ergibt sich folgendes Modell:

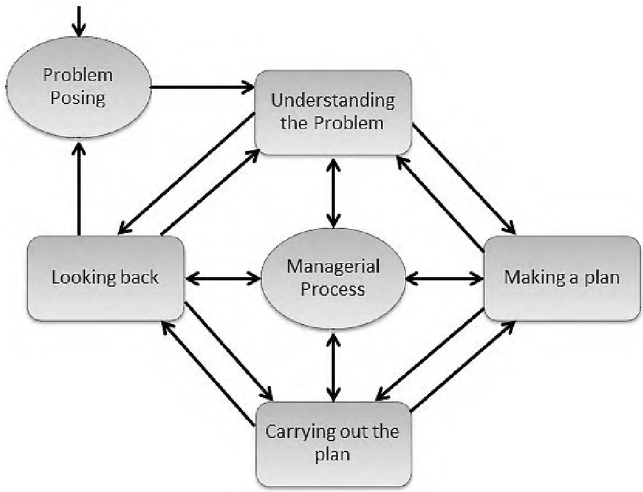


Abb. 1.3.: Nichtlineare Darstellung des Problemlöseprozesses nach Wilson, Fernandez & Hadaway (vgl. Wilson/ Fernandez/ Hadaway 1993, S.60)

Auf die einzelnen Bearbeitungsschritte des Prozesses soll aus dem Grund hier nur kurz eingegangen werden, da sie denen von Pólya entsprechen und diese in Kapitel 5.4.1. ausführlich dargestellt werden:

- Nachdem zunächst das Problem als solches formuliert wurde, gilt es weiterhin die *Aufgabe zu verstehen*, wobei sich dieser Schritt nicht auf den Anfang der Bearbeitung beschränken lässt, sondern während des gesamten Prozesses immer wieder geprüft wird.
- Beim *Ausdenken eines Plans* werden fortlaufend Rückbezüge auf den Verstehensprozess und die Formulierungen gemacht, sodass die Entwicklung des Plans zielführend ist.
- Und auch während der *Ausführung des ausgedachten Plans* wird durch die metakognitive Betrachtung des Problemlöseprozesses die konkrete Durchführung überprüft und mit den anderen Phasen abgeglichen.

– Die *Rückschau* bezieht sich dementsprechend nicht nur darauf, das ermittelte Ergebnis zu prüfen, sondern vielmehr ist ein fortlaufendes Rückversichern (vgl. Pólya 1967, Wilson/ Fernande/ Hadaway 1993).

Demgegenüber behalten Mason, Burton & Stacey Pólyas linearen Prozess bei, verkürzen ihn jedoch auf die Phasen *Planung, Durchführung* und *Rückblick.* Es zeigt sich, dass sich in den drei Phasen des Modells durchaus die von Burton angeführten Aspekte *processes* und *dynamics of thinking mathematically* identifizieren und entsprechend in dem Problemlöseverhalten von Mathematiktreibenden wiederfinden lassen (siehe Abb. 1.4.).

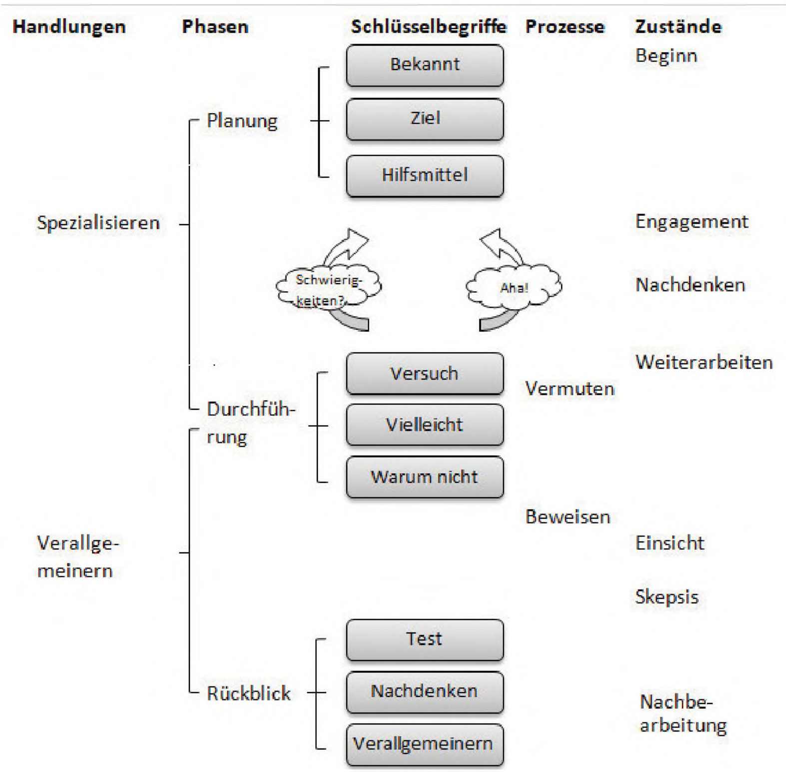


Abb. 1.4.: Problembearbeitungsprozess nach Mason et al. (vgl. Rott 2013, S.56)

Zwar verweist das Modell von Mason et al. nicht explizit auf Burtons *manipulating,* es findet sich aber durchaus in der Kombination der verwendeten Begriffe *Planung* und *Durchführung*. Denn bereits in der *Planungsphase* findet ein Nachdenken über die entsprechende Ausgangssituation und damit eine mentale Manipulation derselben statt, welche dann in der *Durchführung* (lediglich) ausgeführt wird. Während Burton weiterhin erläutert, dass die durch diese Manipulation gewonnenen Erkenntnisse die Basis für erneute Manipulationen bilden, findet sich ein äquivalentes Spiralprinzip bei Mason et al., die sowohl von der Durchführung immer wieder Rückbezüge auf die Planungsphase anführen, als auch den Rückblick auf die Bearbeitung anbringen. Auf diese Weise ist der Lernende in der Lage Fehler zu entdecken, „es sei aber auch durchaus möglich und wünschenswert, im *Rückblick* eine Verallgemeinerung des Problems, eine ähnliche oder weiterführende Aufgabenstellung zu finden, und dadurch einen neuen Arbeitsprozess einzuleiten" (Rott 2013, S.57).

Der Vergleich der beiden mathematikdidaktischen Modelle und dem kognitionspsychologischen Modell zum Problemlösen zeigt, dass sie unterschiedlich stark auf die charakteristischen Merkmale des mathematischen Denkens eingehen. Insbesondere das Modell von Mason, Burton & Stacey beschreibt den Prozess des mathematischen Problemlösens unter Berücksichtigung mathematischer Eigenheiten.

1.2. Die kognitionspsychologische Perspektive auf den Denkstil

Nachdem vorangehend dargelegt wurde, wie Denken hier gefasst wird und welche spezifischen Ausprägungen dem mathematischen Denken anhaften, gilt es im Weiteren zu klären, welche Einflussfaktoren auf das Denken wirken. Denn es ist unstrittig, dass unterschiedliche Personen identische Reize bzw. Sinneseindrücke teilweise sehr unterschiedlich aufnehmen und diese dementsprechend zu einer Vielzahl von reaktionalen Verhaltensweisen führen. Darüber hinaus zeigt sich jedoch auch, dass einzelne Personen in unterschiedlichen Situationen eine ähnliche Reaktion zeigen und somit von einer relativen Stabilität der Verhaltensweise ausgegangen werden kann. Ähnliche

Beobachtungen lassen sich auch in der Mathematik machen, in der Schüler mit ähnlichen Fähigkeiten im Fach unterschiedliche Zugänge zum Inhalt benötigen, um ihren Fähigkeiten entsprechende Leistungen zeigen zu können (vgl. Borromeo Ferri 2014, S.16).
Zur Erklärung dieser Phänomene berufen sich Kognitionspsychologen auf das theoretische Konstrukt eines oder mehrerer kognitive Stile (vgl. Goldstein/ Blackman 1978, S.3). Dabei verorten sie kognitive Stile an der Schnittstelle zwischen Persönlichkeit und Kognition, wobei Kogan darauf aufmerksam macht, dass kognitive Stile, „if not directly part of the personality, are at the very least intimately associated with various noncognitive dimensions of personality“ (Kogan 1976, S.1). Weiter beschreiben die Kognitionspsychologen kognitive Stile als „characteristic ways individuals conceptually organize the environment [...] the way an individual filters and processes stimuli“ (Goldstein/ Blackman 1978, S.2). Folglich zielt das Konstrukt der kognitiven Stile darauf ab, die Unterschiede in Wahrnehmung, Erinnerung und Denken etc. zu beschreiben und mithilfe der Identifikation bestimmter kognitiver Strukturen zu erklären. Dabei betonen Goldstein & Blackman den Unterschied zwischen kognitiven Strukturen (*structure*) und gedanklichem Inhalt (content of thought), wobei „structure refers to *how* cognition is organized; content refers to *what* knowledge is available“ (Goldstein/Blackman 1978, S.3).
Es wird dementsprechend von einem kognitiven Stil gesprochen, wenn ein für das Individuum charakteristischer Zugang vorliegt, sich Probleme oder Informationen zu erschließen. Wobei dann von einem charakteristischen Zugang gesprochen werden kann, wenn eine „stabile und situationsübergreifende individuenspezifische Art [...] der Informationsverarbeitung“ (Seel 2003, S.74) vorliegt. In der Literatur wird dabei von einer Vielzahl vordergründig konkurrierender Stilkonzepte, wie beispielsweise Lern- oder Denkstile, gesprochen, die jedoch bei näherer Betrachtung durchaus unter dem Oberbegriff kognitiver Stil subsumiert werden können (vgl. Kogan 1976; Miller 1987; Riding/ Rayner 2012).
Sternberg begründet dabei die Einführung des Konzepts *Denkstil* damit, dass verschiedenste Personen mit vergleichbaren Fähigkeiten trotzdem in unterschiedlichen Situationen unterschiedlich erfolgreich sind. Dies führt er darauf zurück, inwieweit die Fähigkeiten, die jeder einzelne hat, in der entsprechenden Situation eingesetzt werden. So zielt Sternbergs verwendeter Be-

griff des Denkstils auf die Organisation und den Einsatz von Verarbeitungsprozessen ab und bezieht sich dabei explizit auf Denken und den damit verbundenen Einsatz der Fähigkeiten. Um dies zu verdeutlichen, führt er seine Beobachtungen bezüglich dreier Mitbewohner an, die zwar in ihrer Intelligenz und ihren Fähigkeiten nahezu identisch, jedoch durch ihren individuellen Einsatz der entsprechenden Fähigkeiten unterschiedlich erfolgreich in identischen Situationen sind (vgl. Sternberg 1994, S.171f). Aus diesen und ähnlichen Beobachtungen folgert er, dass Fähigkeiten nicht die einzige Ursache für Erfolg sein können, und dass „how people prefer to think might be just as important as how well they think" (Sternberg 1997, S.9). Dabei spricht er dann von Stil, wenn es um die Organisation und die Art des Denkens geht und prägt in diesem Zusammenhang den Begriff des *mental self-government*. Dementsprechend bezieht sich der Denkstil in dem von Sternberg etablierten Konstrukt unter anderem darauf, die persönlichen Ressourcen bzw. Möglichkeiten einzuteilen und freizusetzen, Prioritäten selbstständig festzulegen sowie auf Veränderungen in der Umwelt zu reagieren. Aufgrund dessen beschreibt er Denkstil auch als „an interface between intelligence and personality" (Sternberg 1994, S.169) und grenzt weiterhin den Begriff des *style* explizit vom Begriff Fähigkeiten ab, indem er ihn beschreibt als

> „way of thinking. It is not an ability, but rather, a preferred way of using the abilities one has. The distinction between style and ability is a crucial one. An ability refers to how well someone can do something. A style refers to how someone likes to do something" (Sternberg 1997, S.8).

Ergänzend macht Sternberg darauf aufmerksam, dass die Vorliebe einer Person für einen bestimmten Denkstil nicht zwingend mit den Fähigkeiten einer Person übereinstimmt. Er führt als Beispiel jemand an, der zwar herausragende Fähigkeiten in einem Bereich hat, sich jedoch bei der Ausübung nicht wohlfühlt (vgl. Sternberg 1994, S.174).

Darüber hinaus führt Sternberg in Bezug auf seine Denkstil-Theorie insgesamt 15 Prinzipien an, die die Grundlage seines Konstrukts bilden, wobei er nochmals den Denkstil als Präferenz und die damit verbundenen Grundsätze betont. Im Folgenden sollen jedoch nicht alle Prinzipien aufgeführt, sondern sich lediglich auf die beschränkt werden, die für die vorliegende Arbeit als wichtig erachtet werden.

„Styles are variable across tasks and situations" (Sternberg 1997, S.84).
Entsprechend der Theorie zum Fällen von Entscheidungen (vgl. Mazur 2006), beeinflussen bestimmte Gegebenheiten, inwieweit entsprechend der eigenen Präferenz gehandelt wird. So kann es durchaus vorkommen, dass eine Person in einem Bereich seines Lebens einen bestimmten Denkstil aufweist, der sich jedoch in einem anderen Lebensbereich nicht zeigt, so zum Beispiel Experimentierfreude (vgl. Legislative Style bei Sternberg/ Zhang 2005, S.247) beim Kochen, nicht jedoch bei der Arbeit. Aber auch die Begleitumstände in einer bestimmten Situation können beeinflussen, ob im Sinne des eigenen Denkstils gehandelt wird oder nicht. So ist es durchaus denkbar, dass entgegen der Experimentierfreude beim Kochen ein traditionelles Weihnachtsessen zu den Festtagen zubereitet wird.

„People differ in the strength of their preferences" (Sternberg 1997, S.84).
Grundsätzlich lässt sich über allgemeine Vorlieben bzw. Präferenzen im Alltag sagen, dass sie in unterschiedlichem Maße ausgeprägt sind. Dies lässt sich ebenso auf die Grundsätze der Denkstil-Theorie übertragen. So lässt sich immer wieder der Unterschied zwischen solchen Personen beobachten, die es in einem ausgeprägten Maße bevorzugen alleine zu arbeiten, während es für andere keinen großen Unterschied macht, ob sie im Team arbeiten oder alleine, ihre Präferenzen für das Alleinarbeiten oder das Arbeiten im Team folglich nur geringfügig ausgeprägt sind.

„People differ in their stylistic flexibility" (Sternberg 1997, S.85).
Die grundsätzliche Bedeutung der Flexibilität für das Denken und damit einhergehend den Denkstil wird dann deutlich, wenn sie nicht vorhanden ist. Umgekehrt bedeutet das, dass sich ein guter Lehrer auch durch eine gewisse Flexibilität in seinem Denkstil auszeichnet, um entsprechend Schüler mit einem anderen Denkstil geeignet zu unterstützen und wertzuschätzen.

Wie Eingangs in diesem Abschnitt dargelegt, hat der Denkstil Auswirkungen auf das Verständnis von Sachverhalten und Zusammenhängen. Und gerade im

schulischen Alltag erscheint dies von besonderer Bedeutung, da die Konsequenz aus einer derartigen Betrachtung eine Erklärung dafür liefern kann, dass Schüler mit großem Potenzial dies in bestimmten Situationen nicht zeigen. Dementsprechend plädiert Sternberg dafür, dass im Unterricht zwischen den unterschiedlichen Aufgabentypen variiert wird, um so den Schülern auf der einen Seite ihr Potenzial zu verdeutlichen, um ihnen jedoch auf der anderen Seite auch zu zeigen, dass „the world does not always provide us with a perfect match to our preferred ways of doing things" (Sternberg 1997, S.115).
Inwieweit der Denkstil Einfluss auf die Aufgabenbearbeitung hat, insbesondere auf das Lernen von Mathematik und mathematische Denken, soll in den nächsten Kapiteln genauer erörtert werden. Dabei werden die von ihm verwendeten Termini *match* und *mismatch* zunächst in ihrer Bedeutung als Passung zwischen Aufgaben und Denkstil übernommen, für die vorliegende Studie jedoch angepasst.

2. Historische Entwicklung mathematischer Denkstiltheorien

> „There seem to be many different ways in which different people think and even in which different mathematicians think about their mathematics."
>
> (Penrose, zit. nach Burton 1995, S.523)

Wie aus dem Zitat des Mathematikers Sir Roger Penrose entnommen werden kann, herrscht durchaus ein Bewusstsein für die Unterschiede im mathematischen Denken, selbst wenn sich nicht näher mit der Forschung auseinandergesetzt wird. Inwieweit dieses „different thinking" jedoch auf das Konstrukt Denkstile zurückgeht, lässt sich erst mit entsprechender Forschung darlegen. Es wurden im vorangegangenen Kapitel bereits die Grundlagen des mathematischen Denkens erläutert und darauf verwiesen, dass das Konstrukt Denkstile Einfluss auf Wahrnehmung, Erinnerung sowie unser Denken hat. Mit der Frage wie dieser Einfluss konkret aussehen kann, haben sich im Laufe der Denkstilforschung diverse Studien aus unterschiedlichen Perspektiven beschäftigt und zur Modellbildung geführt. Dabei zeigt sich in den verschiedenen Ergebnissen, dass es zwar durchaus Gemeinsamkeiten gibt, allerdings auch Unterschiede. So variieren die entwickelten Modelle in der Anzahl der Denkstiltypen, aber auch in dem Unterschied zwischen Kategorien und Kontinuum.
Im Folgenden soll nun eine Auswahl von Modellen zum mathematischen Denkstil dargelegt werden, wobei die Auswahl aufgrund von Bedeutung sowie methodischer Haltbarkeit getroffen wurde. So findet sich beispielsweise Felix Kleins Modell in der folgenden Darstellung, da seine eher intuitiven Schlussfolgerungen zu Beginn der Denkstil Forschung später von Leonie Burton bestätigt werden konnten (siehe Kapitel 2.1.). Und Skemps Gegensatzmodell (siehe Kapitel 2.2.) konnte als ein Element des Denkstils auch in den Modellen von Riding und Borromeo Ferri (siehe Kapitel 2.3.) bestätigt werden.

2.1. Trichotomische Vorstellungen bei Felix Klein und Leonie Burton

Bereits zu Beginn der Denkstilforschung in der letzten Hälfte des 19. Jahrhunderts, als der Begriff als solches noch nicht geprägt war, ließ sich bei Felix Klein eine Kenntnis über ein unterschiedliches mathematisches Arbeiten ausmachen. So zeigte sich bereits während seines Studiums (1865 – 1868) seine Vorliebe für ein visuelles Mathematiktreiben, wobei nicht gesagt werden kann, ob er sich dieser Vorliebe bzw. ihrer Bedeutung bereits damals bewusst war. Dennoch drückt Klein seine Anerkennung in Bezug auf das Vorgehen seines Professors aus, indem er über Plückers Arbeit schrieb:

> „In der Plückerschen Geometrie wird die bloße Kombination von Gleichungen in geometrische Auffassung übersetzt und rückwärts durch letztere die analytische Operation geleitet Rechnung wird nach Möglichkeit vermieden, dabei aber eine bis zur Virtuosität gesteigerte Beweglichkeit der inneren Anschauung, der geometrischen Ausdeutung vorliegender analytischer Gleichung ausgebildet" (Klein 1926, S.122).

Nach der Zusammenarbeit mit Plücker sowie dessen visuellen Arbeitsweise, wird Kleins weiterer Bildungsweg von Clebsch beeinflusst, der ihn 1868 auf Arbeiten von Battaglini hinweist, an die er sein Promotionsthema anknüpft. Später räumt er ein, dass ihm die Auseinandersetzung mit Battaglinis Arbeit mit seiner algebraischen Ausrichtung „nicht ganz leicht" (Klein 1921, S.3) fiel. Im Laufe seines Wirkens bezieht sich Klein immer wieder auf die visuelle Darstellung des Sachverhalts und so wundert es nicht, dass in all seinen Arbeiten, einschließlich der algebraischen, der anschauliche, geometrische Ausgangspunkt spürbar ist (vgl. Tobies 1981, S.44).
In Kleins Autobiografie wird zudem deutlich, dass er sich durchaus bewusst ist, dass seine Vorliebe für geometrisches Vorgehen auf seine Art des Denkens und Verstehens von Mathematik zurückzuführen ist, indem er schreibt , er „habe … das Wort Geometrie nicht einseitig … als Lehre von den räumlichen Objekten, sondern als eine Denkweise aufgefasst, die in allen Gebieten der Mathematik von Vorteil zur Geltung gebracht werden kann" (Klein zit. nach Tobies 1981, S.50). Ebendiese Auffassung spiegelt sich auch im Grundsatz seiner Berufungspolitik wider, die darauf abzielt, die Studierenden allsei-

tig mathematisch auszubilden. Dabei bezieht sich die von Klein verwendete Allseitigkeit nicht nur auf die umfassende Kenntnis der mathematischen Inhalte, sondern auch auf unterschiedliche Annäherung an mathematische Problemstellung und Gegenstände. Dementsprechend betonte Klein in seinen Berufungsvorschlägen immer wieder die Wichtigkeit der unterschiedlichen „Denktypen“ und der damit einhergehenden unterschiedlichen Betrachtungsweise des gleichen Gegenstands. In einem Brief von 1892 betont er die Bedeutung, indem er eine

> „normale Vertretung der Mathematik an einer grossen Universität eine Dreizahl von Ordinarien [vorschlägt], die nicht sowohl nach dem Spezialgebiet, über welches sie arbeiten, als nach der inneren Verschiedenartigkeit ihres mathematischen Denkens ausgesucht sein sollte. Bei der Mannigfaltigkeit der Individualitäten kann man ja nicht schematisieren, aber im großen und ganzen sollten folgende Typen vertreten sein:
>
> A) Der Philosoph, der von den Begriffen aus construirt
> B) Der Analytiker, der wesentlich mit der Formel operiert,
> C) Der Geometer, der von der Anschauung ausgeht.“
>
> (Klein zit. nach Tobies 1987, S.44)

Trotz dieser sehr differenzierten Sichtweise auf Mathematiktreiben, beruht Kleins Differenzierung der unterschiedlichen Denkstile auf einem intuitiven Verständnis, basierend auf eigenen Beobachtungen, nicht jedoch auf einem empirisch abgesicherten Ergebnis.

In einer über 100 Jahre später durchgeführten interpretativen Studie konnte Burton Kleins Dreiteilung jedoch bestätigen. Dabei zielte die Studie nicht vorrangig auf Denkstile, sondern untersuchte, inwieweit ihr konzipiertes Modell beschreiben konnte, wie Mathematikerinnen und Mathematiker sich die Mathematik erschließen. Zudem war es ihr Ziel einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Verständnis von Mathematik bei Mathematikern und dem Lernen von Mathematik zu identifizieren. Das von Burton verwendete Modell bezog sich dabei auf insgesamt fünf Kategorien, von der jedoch eine explizit den Denkstil betrifft.

Sie interviewte für ihre Studie Probanden, die in der wissenschaftlichen Forschung an Universitäten in England, Schottland, Nord und Süd Irland tätig waren, wobei sie 35 Frauen interviewte und diese bat jeweils einen männlichen Gegenpart für die Studie zu benennen. Dabei wählten die Frauen mehrheitlich in der Struktur der Universität gleichgestellte Partner bzw. Personen, die im gleichen mathematischen Fachgebiet tätig waren. In Anlehnung an die damals in der Literatur dominierenden dichotomen Modellen zur Beschreibung des Denkstils ging Burton zunächst von einem analytischen und einem visuellen Denkstil aus, konnte schlussendlich jedoch einen weiteren Denkstil Typ ausmachen und bestätigt damit die von Klein angenommenen Denktypen als

> „Style A: Visual (or thinking in pictures, often dynamic),
> Style B: Analytic (or thinking symbollically, formalistically) and
> Style C: Conceptual (thinking in ideas, classifying)"
> (Burton 1997, S.95)

Die von ihr identifizierten Denkstile erhob sie mithilfe von audiographierten Interviews und daraus entnommenen Äußerungen der Probanden. Bemerkenswert ist dabei, dass Burton nicht jedem Probanden eindeutig ein Denkstil zuordnet, sondern sie durchaus die Möglichkeit einräumt, dass eine Person mehrere Denkstile besitzt. So zeigen für sie die folgenden Äußerungen Elemente zweier Denkstile:

> „I think very visually and I mostly only have recourse to algebra when I have to work out rigorously." (Burton 1997, S.95) → Style A/B

> „I cannot imagine thinking in a way that is completely non-visual... Depending on what the problem is but usually I am trying to count how many different orbits there are so things fall into classes so you can move within a class." (Burton 1997, S.95) → Style A/C

> „I am not a very visual person. I think in terms of equations but I think it is problem driven." (Burton 1997, S.95) → Style B/C

Mit ebendieser Interpretation der Äußerungen der Interviewten ergibt sich die Verteilung von 25 Mathematikern, die nur einem Stil angehören, davon sind 15 *visual thinkers*, drei präferieren *Style B* und bei sieben handelt es sich um konzeptionelle Denker. Den Großteil der Mathematikerinnen und Mathematiker sieht sie jedoch in einer Kombination aus zwei Denkstilen. Lediglich drei Mathematiker nutzen alle drei Denkstile.

2.2. Skemps Gegensatzmodell

Dagegen basiert die von Skemp gemachte Unterscheidung Anfang der 1970er Jahre auf verschiedenen Bedingungen mathematischen Lernens als Basis für mathematisches Denken. Als Grundvoraussetzung für mathematisches Lernen führt er dabei eine Reihe aufeinander aufbauender psychologischer Konstrukte (*schema*, *concept*) an, die bei näherer Betrachtung eine Nähe zur Begriffsbildung ausweisen. Die für ihn mit der Gesellschaftlichkeit einhergehende Notwendigkeit des Austauschs von Gedankeninhalten, macht schließlich die Verwendung von Symbolen (*symbols*) erforderlich. Dies erklärt er damit, dass, um auf das eigene Denken zugreifen und es reflektieren zu können, es eines Übertragungsmittels in Form von *symbols* bedarf, um eine Kommunikation möglich zu machen. Er unterstreicht dabei die Notwendigkeit die verwendeten Symbole mit den entsprechend zugrunde liegenden Ideen zu verknüpfen (vgl. Skemp 1986, S.65). Ihm zufolge ist ein Symbol also „a sound, or something visible, mentally connected to an idea. This idea is the *meaning* of the symbol. Without an idea attached, assembles empty, meaningless“ (Skemp 1986, S.69).
Bei seinen weiteren Ausführungen verweist Skemp auf Galtons Befragung zu der mentalen Präsentation seiner wissenschaftlich tätigen Kollegen von 1880. In jener bat Galton sie „think of some definite object“ (Galton zit. nach Richardson 1999, S.11) und schlägt als Repräsentationsobjekt den Frühstücktisch vor, an dem die Probanden den Morgen gesessen hatten, um daran einige Frage zu der konkreten Ausgestaltung der mentalen Repräsentation anzuschließen. Diese insgesamt zwölf Fragen betrafen unter anderem die Definiertheit (*definition*), die Farbigkeit (*colouring*) und den Vergleich zwischen Realität und mentalem Bild (*extent of the field*, *comparison to reality*). Aber

auch nach der Vorstellung von abstrakteren Objekten (*numerals and dates*) sowie artverwandten Gegebenheiten (*music, different ages*) wurde gefragt. Als Ergebnis formuliert Galton:

> „To my astonishment, I found that the great majority of the men of science to whom I first applied, protested that mental imagery was unknown to them, and they looked on me as fanciful and fantastic in supposing that the words „mental imagery" really expresses what I believed everybody supposed them to mean." (Galton zit. nach Richardson 1999, S.10)

Er folgerte aus seinen Ergebnissen, dass Wissenschaftler generell schwach ausgebildete Fähigkeiten der visuellen Repräsentation haben und darüber hinaus die Bereitschaft, mentale Bilder wahrzunehmen, dem hochgradig verallgemeinernden und abstrakten Denken entgegensteht. Als Folge erweiterte er den Personenkreis und konnte so beobachten, dass

> „many men and a yet larger number of women, and many boys and girls, declared that they habitually saw mental imagery, and that it was perfectly distinct to them and full of colour." (Galton zit. nach Richardson 1999, S.10)

Galtons Erkenntnisse als Basis, unterscheidet Skemp zwischen *visual symbols* und *verbal symbols*, wobei „by ‚verbal' we shall mean both the spoken and written word. Visual symbols are clearly exemplified by diagrams, particularly geometrical figures" (Skemp 1971, S.94). In seiner Unterscheidung zeigt sich Skemps direkter Bezug auf die Mathematik und so ist es nicht weiter verwunderlich, dass er explizit auf algebraische Symbole Bezug nimmt und ihre Gemeinsamkeiten mit den *verbal symbols* herausstellt (vgl. Skemp 1971, S.95).

Die Analyse von mathematischen Ausarbeitungen bestätigte Skemp, dass in der Mathematik beide Arten von Symbolen genutzt werden, dies jedoch in unterschiedlichem Umfang und Verteilung. So lassen sich, unabhängig vom thematischen Inhalt, Ausarbeitungen finden, die auf Diagramme zurückgreifen, häufig in Verbindung mit verbalen Explikationen, oder auch solche, die sich nur auf verbale sowie algebraische Symbole stützen. Es scheint demnach, dass *verbal symbols* zum Ausdruck vom Denken unabdingbar sind, während *visual symbols* nicht den gleichen Stellenwert einnehmen. Dies führt er darauf zurück, dass in einem sozialen Gefüge ein Bedarf an einem Austausch von Gedanken an Bedeutung gewinnt und sich die Kommunikation mithilfe mentaler Bilder als schwieriger erweist, obwohl *visual symbols* ihrer Art nach grundlegender erscheinen. So ist es für eine gelungene Äußerung visueller Repräsentationen nötig, dass Gedanken skizziert oder gemalt werden bzw. sogar einen Film nötig machen. Trotzdem lässt sich nicht bestreiten, dass visuelle Symbole oft äußerst hilfreich sind, um verbal-algebraische Repräsentationen zu verdeutlichen und zu erklären (vgl. Skemp 1971, S.95ff).

Dabei bezieht sich die visuelle Repräsentation eines Objekts in einer bestimmten Situation nicht allein auf ein konkret wahrgenommenes Objekt aus der Vergangenheit, sondern vielmehr auf die vorangegangenen Erfahrungen mit diesem Objekt, sodass auf diese Weise das mentale Bild das Konzept dieses Objekts veranschaulicht. Dennoch ist „the associated concept (that of the object) […] of lower order than those used in mathematics“ (Skemp 1971, S.96). Was jedoch nicht heißt, dass keine Abstraktion in der visuellen Repräsentation möglich ist.

Bei einer geordneten Gegenüberstellung beider Arten von Symbolen, ergibt sich für ihn folgendes Bild:

visual	*verbal-algebraic*
Abstracts spatial properties, such as shape, position.	Abstracts properties which are independent of spatial configuration, such as number.
Harder to communicate.	Easier to communicate.
May represent more individual thinking.	May represent more socialized thinking.
Integrative, showing structure.	Analytic, showing detail.
Simultaneous.	Sequential.
Intuitive.	Logical.

Tab. 2.1.: Skemps Gegenüberstellung von visual symbols und verbal-algebraic symbols (Skemp 1971, S.111)

Demnach sieht er die Unterschiede in der mentalen Repräsentation nicht allein in der Schwierigkeit diese mitzuteilen, sondern auch in ihrer grundlegenden Struktur, wie sich an der Unterscheidung zwischen gleichzeitig und sequenziell zeigt.
Ergänzend zu diesen Beobachtungen schließt sich für Skemp die Frage an, ob es neben der allgemeinen Erwartung an eine mathematische Ausarbeitung „also intrinsic advantages in the verbal-algebraic kind of symbol" (Skemp 1971, S.99) gibt. Er kommt jedoch zu dem Schluss, dass „since individuals differ in their preferences for visual, or verbal-algebraic, symbolism, there may be no general answer for this question" (Skemp 1971, S.107).

2.3. Mehrdimensionenmodelle von Richard Riding und Rita Borromeo Ferri

Nachdem hier bereits einige ausgewählte Modelle zur Beschreibung des Konstrukts Denkstil vorgestellt wurden, erklärt sich Ridings & Cheemas Vorgehen bei der Bildung eines eigenen Modells. Für den Aufbau ihres eigenen Verständnisses verglichen sie zunächst eine Vielzahl von Studien und den dort enthaltenen Auffassung von kognitiven Stilen. Als Ergebnis dieses Vergleichs stellten die beiden Autoren fest, dass sich jede Studie auf eine eigene Auffassung und eigene Ausprägungen stützt, sodass jede vorangegangene Studie eigene Instrumente zur Erhebung entwickelt hat. Besonders auffällig war zudem, dass die einzelnen Studien wenig Bezug auf vorhandene bzw. vorangegangene Studien nahmen, sodass die Konsequenz daraus war, dass es scheinbar eine Vielzahl von Stildimensionen gab, die keinerlei Zusammenhang aufwiesen.
Durch die diversen Stildimensionen und der damit verbundenen Konsequenz, dass das Konstrukt eines kognitiven Stils mit seinen jeweiligen Ausformungen für Unterrichtsforschung in keinster Weise handhabbar war, untersuchten Riding & Cheema mehr als 30 Stildimensionen genauer. Es ließ sich feststellen, dass es sich um lediglich drei Gruppierungen handelt, die Riding & Cheema als eine *wholist-analytic group*, eine *verbaliser-imager group* und eine *group of models of style in the field*, die sie als Lernstil (Riding/ Rayner 2012, S.18) klassifizierten. Aufgrund ihres eigenen Verständnisses von

Lernstil als Lernstrategien fußt ihr Konstrukt zum Denkstil sowie ein zugehöriges Modell lediglich auf den Dimensionen *wholist-analytic* und *verbaliser-imager*.
Grundsätzlich vertreten sie jedoch die allgemeingültige Auffassung des Konstrukts kognitiver Stil als an „individual's preferred and habitual approach to organizing and representing information" (Riding/ Rayner 2012, S.8). Riding betont dabei, dass

> „an individual's style is the automatic way they respond to information and situations. It is constant for them and not something that appears to change. They cannot switch on and off since it represents the way they are" (Riding 2002, S.23).

Auf diese Weise grenzen sie einen kognitiven Stil deutlich von einer Strategie ab, indem sie, ebenso wie Sternberg (vgl. Kapitel 1.2.), auf die relative Stabilität eines Denkstils verweisen und implizit die Unbewusstheit des Prozesses mit anführen. Deutlicher findet sich der Unterschied zwischen bewussten und unbewussten Informationsverarbeitung in der Ausführung, dass

> „strategies are ways that may be learned and developed to cope with situations and tasks, and particularly methods of using styles to make the best of situation for which they are not ideally suited." (Riding 2001, S.28)

Auf der anderen Seite grenzen Riding & Rayner den Begriff des kognitiven Stils dadurch von Fähigkeiten ab, dass, obwohl beides Einfluss auf die Performanz hat, sich zwar die Leistung bei zunehmenden Fähigkeiten steigert, wohingegen der Effekt von Stilen lediglich positiv oder negativ ist, je nach Ausgestaltung der Aufgaben. Das heißt im Umkehrschluss, dass Aufgaben, die einem der kognitiven Stile entsprechen von jenen als leichter empfunden werden, die die gleiche Ausrichtung des Denkens haben (vgl. Riding/ Rayner 2012, S.11).

Wie bereits weiter oben angeführt, unterscheidet Riding zwischen den beiden Dimensionen *wholist-analytic* und *verbaliser-imager*. Nun sei noch geklärt, was unter den einzelnen Dimensionen verstanden werden soll und wie sich die einzelnen Ausprägungen in kognitiven Prozessen manifestieren:

> „The wholist – analytic dimension „influences the structural way in which individual think about, view, and respond to information and situations" (Riding 2001, S.31).

Dementsprechend bezieht sich diese Dimension darauf, wie Personen ihre Umfeld, Situationen und Aufgaben wahrnehmen und äußert sich in den gegensätzlichen Ausprägungen ganzheitlich - zergliedert.
Dabei nehmen *Wholists* die Situation als Ganzes auf und beziehen nicht nur das Augenscheinliche sondern den gesamten Kontext der Situation mit ein. Eine derartige Informationsverarbeitung bzw. Einschätzung der Situation erlaubt, den Überblick zu behalten und folglich ein ausgeglichenes Gesamtbild zu konstruieren. Das bringt den Vorteil mit sich, dass sich nicht in Kleinigkeiten verloren oder in extreme Ansichten und Auffassungen verfallen wird. Auf der anderen Seite ergibt sich daraus allerdings der Nachteil, dass sich die Unterscheidung zwischen den einzelnen Aspekten einer Situation schwer gestaltet und es somit zu Schwierigkeiten kommt, wenn aus einer Gesamtsituation die Einzelheiten bzw. Einzelteile herausgelöst werden müssen.
Demgegenüber richten *Analytics* ihren Fokus eher auf ein oder zwei Aspekte und betrachten eine Situation als eine Sammlung von Einzelteilen bzw. einzelnen Gegebenheiten. Das führt dazu, dass *Analytics* sehr gut in der Lage sind Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu identifizieren und den Kern eines Problems zu erkennen. Dennoch führt die Konzentration auf Einzelheiten und der damit einhergehenden Ausklammerung der übrigen Aspekte dazu, dass eine übersteigerte oder verzerrte Beurteilung vorgenommen und somit die wahre Bedeutung in dem Gefüge verkannt wird.
Zwischen diesen beiden Polen sieht Riding die *Intermediates*, die sowohl in der Lage sind den Überblick zu behalten, als auch sich auf einzelne Aspekte zu fokussieren. Sie vereinen demzufolge die Vorteile beider Ausprägungen auf sich (vgl. Riding 2001, S.32).

Die zweite Dimension bezieht sich auf die Repräsentation der aufgenommenen Inhalte und eigenen Gedanken, wobei auch hier zwischen zwei konträren Ausprägungen unterschieden wird.

> The „verbal – imagery dimension [...] has two fundamental effects that have implications for behavior: the way information is represented and the external – internal focus of attention" (Riding 2001, S.32).

Werden kognitive Prozesse entsprechend durch Worte bzw. mithilfe verbaler Assoziationen repräsentiert, so handelt es sich laut Riding um den sogenannten *Verbalizer*. In Bezug auf die mentale Vorstellung des Begriffs „Adler" zeichnet sich der *Verbalizer* dadurch aus, dass er den Adler als Greifvogel mit seinen spezifischen Eigenschaften und schließlich als Repräsentant des Oberbegriffs Vogel mit entsprechenden Attributen kategorisiert. Aber auch in komplexeren Situationen, wie dem *two-string problem* von Richard E. Mayer[8] (vgl. Sternberg 2009, S.429), beruft sich der *Verbalizer* auf die Lösung des Problems mittels Worten. Dies äußert sich, indem die einzelnen Schritte zur Lösung des Problems „verbal gedacht" werden, sie jedoch nicht umgearbeitet werden in einen entsprechend „ablaufenden Film".
Demgegenüber zeichnet sich der *Imager* dadurch aus, dass die Repräsentation von Gedankeninhalten vor allem in mentalen Bildern erfolgt. Für das angeführte Beispiel am Begriff „Adler" heißt das, dass auf ein Bild bzw. eine Abbildung zurückgegriffen wird oder eventuell sogar eine konkrete Situation, in der eine Begegnung mit einem Adler stattfand, herangezogen wird. Und auch im *two-string problem* zeigt sich eine entsprechend bildliche Lösung, bei der der Problemlösende die konkret für die Lösung notwendigen Schritte „visuell erdenkt" und mithilfe dieser „Vorschau" plant.
Neben den unterschiedlichen Arten Informationen zu repräsentieren, beeinflusst diese Dimension auch die Gerichtetheit des Denkens, wobei sich dies auf den *internal – external focus* bezieht. Riding geht hierbei davon aus, dass

[8] Die Situation zeigt einen Raum, in dem von der Decke zwei Seile herabhängen, die es zu verknoten gilt. Jedoch sind beide Seile so kurz, dass es nicht möglich ist, das zweite Seil zu ergreifen, während man das erste in der Hand hält. Die einzigen weiteren Gegenstände in dem Raum sind einige saubere Malerpinsel, ein kleiner Eimer Farbe sowie eine schwere Plane.

der Fokus bei Verbalizern nach außen gerichtet ist, während Imagers zu einem internen und eher passiven Fokus tendieren. Dies hat vor allem Auswirkungen auf das Verhalten in der Umwelt und insbesondere in sozialen Gefügen, der sich durchaus damit begründen lässt, dass mentale Bilder schwerer zu kommunizieren sind und somit ein entsprechender Austausch besondere Anstrengungen bedarf.
Und ähnlich der *wholist-analytic* Dimension sieht Riding dazwischen Personen, die Elemente von beiden Polen auf sich vereinen. Eine derartige mentale Repräsentation bezeichnet Riding als *bimodal*.

Grundsätzlich geht Riding allerdings davon aus, dass die unterschiedlichen Dimensionen nicht als Kategorien vorliegen, sondern es sich bei seinem Modell um ein Kontinuum handelt, in dem Personen unterschiedlich zwischen den jeweiligen Enden der Skalen verortet werden können (siehe Abb. 2.1.).

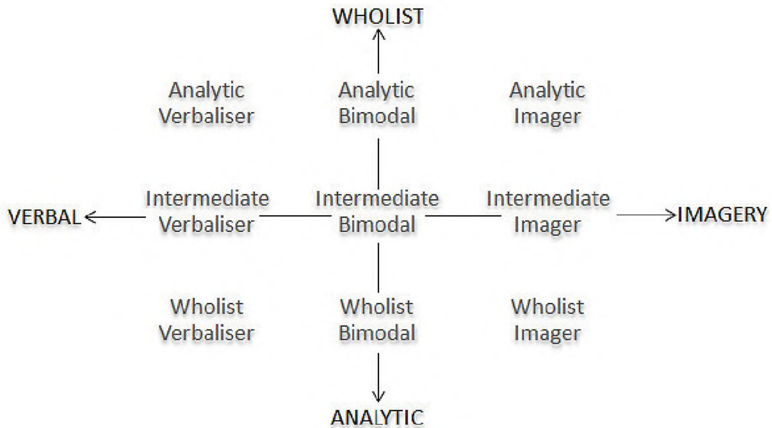


Abb. 2.1.: Modifikation der Darstellung von Ridings Modell zur Strukturierung der beiden Dimensionen kognitiven Stils (vgl. Riding 2001, S.29)

Entsprechend der beiden Dimensionen des kognitiven Stils und unter den folgenden Prämissen:

- „unrelated to one another
- independent of intelligence
- distinct from ability

- separat from personality
- related to physiological measures“ (Riding 2001, S.29)

entwarf Riding zur Erhebung den computerbasierten Test *cognitive style analysis*, kurz CSA, der mithilfe von drei Subtests beide Enden der *wholist-analytic* und der *verbal-imagery* Dimension misst, aber auch erhebt, wenn ein Proband sich zwischen beiden Polen befindet und demnach als *intermediate* bzw. *bimodal* charakterisiert wird.
Der erste Subtest besteht dabei aus insgesamt 48 Statements, wobei dieser 24 konzeptuelle Aussagen und 24 Aussagen zur Erscheinung von Phänomenen enthält, von denen nur je die Hälfte wahr ist. Die Probanden hatten nun die Aufgabe zu entscheiden, welche der nacheinander präsentierten Aussagen richtig oder falsch ist, während die benötigte Zeit gemessen wurde, die sie zur Beurteilung der einzelnen Aussagen benötigten.
Die grundsätzliche Annahme war dabei, dass *Imagers* Aussagen, die auf die Erscheinung abzielten, schneller bewerten, da ihre internen Repräsentationen als mentales Bild vorliegt und sie deshalb den Wahrheitsgehalt direkt mit ihrer Vorstellung vergleichen können. Auf der Gegenseite wurde angenommen, dass *Verbalizer* schneller auf jene Äußerungen reagieren, die die konzeptuellen Kategorien betreffen. Hier stützt sich die Annahme darauf, dass eine konzeptuelle Auffassung, durch ihre abstrakte Natur, auf einer verbalen Struktur aufbauen muss.
Sowohl der zweite als auch der dritte Subtest zielten auf die Organisation von Informationen und der Unterscheidung zwischen *wholist-analytic* ab. Im zweiten Subtest sollten die Probanden darüber urteilen, ob zwei komplexe geometrische Figuren identisch sind (*wholist*). Im dritten Subtest wurden die Probanden dazu aufgefordert zu beurteilen, ob der gezeigte Umriss einer relativ einfachen geometrischen Figur in einer komplexeren Figur enthalten war (*analytic*). Auch in diesen beiden Tests wurde die Reaktionsgeschwindigkeit als Indikator für die entsprechende Ausprägung herangezogen, indem grundsätzlich davon ausgegangen wurde, dass ein *Analytic* schneller in der Lage ist „Teile des Ganzen zu erkennen“, während sie mehr Zeit benötigen, Figuren in ihrer Gesamtheit miteinander zu vergleichen als *Wholists*.

Die Vorzüge es Tests sieht Riding darin, dass er für Kinder genauso wie für Erwachsene geeignet ist, da kein bestimmter Kontext bzw. kein kulturelles Wissen nötig ist, um am Test teilzunehmen.

Gegenüber Ridings Mehrdimensionenmodell zur Analyse von kognitiven Stilen, bezieht sich Borromeo Ferri in ihrer Konzeption eines Modells auf die spezifisch mathematikdidaktischen Anforderungen. Dabei arbeitet sie die Konzeption von Riding in ihr Modell mit ein und ergänzt dies durch ihre eigenen empirischen Ergebnisse.

Borromeo Ferri berücksichtigt in ihrem Modell sowohl die Repräsentation von Informationen (Komponente 1) als auch die Vorgehensweise beim Bearbeiten einer Aufgabe bzw. beim Verstehen von Inhalten (Komponente 2). Zentralen Gegenstand der ersten Komponente bildet dabei die Art, wie mathematikspezifische Informationen repräsentiert sind und somit sowohl Einfluss auf das Verstehen von mathematischen Sachverhalten als auch auf das Lösen mathematischer Aufgaben hat. Hierunter wird sowohl die Art der *internen Vorstellung* als auch die Art der *externen Darstellung* subsumiert, wobei unter interner Vorstellung „jegliche Art entstehender interner Repräsentationen verstanden [wird], die eine Person individuell bevorzugt und benötigt" (Borromeo Ferri 2004, S.46). Demgegenüber umfasst die *externe Darstellung* jegliche Eigenproduktion einer Person und beinhaltet damit sowohl Zeichnungen, Rechnungen oder andersgeartete Aufgabenbearbeitungen. Borromeo Ferri differenziert in ihrem Modell unter Komponente 1 zwischen *verbal-algebraischen* und *visuellen Symbolen*, womit sie grundsätzlich Ridings und Skemps Unterscheidung aufgreift, sie jedoch im Sinne der mathematikdidaktischen Auffassung anpasst. Dementsprechend bezieht sich, anders als bei Skemp und Riding, die in Komponente 1 gemachte Unterscheidung nicht primär auf Kommunikationseigenschaften, sondern auf jede Form der zum mathematischen Arbeiten notwendigen Repräsentation von Informationen. Darüber hinaus grenzt sie innerhalb Skemps verbal-algebraischen Symbolen zusätzlich Zahlen, Variablen und andere mathematische formale Zeichen als *symbolisch-formal* von Wörtern und Sätzen als *symbolisch-verbal* voneinander ab. Demgegenüber versteht sie unter *visuellen Symbolen* Zeichnungen, Diagramme, Skizzen etc. (vgl. Borromeo Ferri 2004, S.47).

Aus der individuellen Präferenz sowie der grundsätzlichen Unterscheidung zwischen interner Vorstellung und externer Darstellung ergeben sich zum einen *intern orientierte* sowie *extern orientierte Typen*. Dabei bevorzugen Erstere eine interne Verarbeitung mathematischer Inhalte, während *extern orientierte Typen* auf eine externe Darstellung angewiesen sind. Doch obwohl sie eine externe Darstellung benötigen, nutzen extern orientierte Typen diese, um ihre mentalen Vorstellungen zu stützen und aufzubauen. Auf diese Weise lassen sich jedoch theoretisch sowohl Kongruenzen als auch Inkongruenzen zwischen interner Vorstellung und externer Darstellung rekonstruieren, die sie in ihrer empirischen Studie bestätigen konnte.
Die Aufgliederung der Vorgehensweise in *ganzheitlich* oder *zergliedernd* bildet bei Borromeo Ferri die zweite Komponente. Dabei bezieht sich eine *ganzheitliche Vorgehensweise* auf Bearbeitungsprozesse, die, in Abgrenzung zu Riding, die Situation bzw. den Lösungsweg als Ganzes berücksichtigen und den vollständigen Kontext beachten. Davon zu unterscheiden ist die *zergliedernde Vorgehensweise*, bei der sich die Situation als Kollektiv von Einzelteilen darstellt und sich der Bearbeitungsprozess zunächst auf zwei oder drei Einzelaspekte fokussiert, wodurch der Lösungsweg schrittweise erfolgt. Zusätzlich führt sie die *kombinierende Vorgehensweise* ein, bei der der Bearbeitungsprozess bzw. das Verstehen mathematischer Sachverhalte Elemente enthält, die sowohl auf ein ganzheitliches und als auch auf zergliederndes Vorgehen referieren (Borromeo Ferri 2004, S.49f).
Aufgrund der von ihr angeführten Beschreibung des Konstrukts mathematischer Denkstil als Mehrdimensionenmodell mit den Komponenten

> „Komponente 1: interne Vorstellung und externe Darstellung
> Komponente 2: ganzheitliche und zergliederte Vorgehensweise" (Borromeo Ferri 2004, S.45)

ergeben sich damit theoretisch die folgenden Denkstil Typen:

	Intern orientierter Typ			Extern orientierter Typ				
				kongruent			*inkongruent*	
	Bild	Symbol	gemischt	Bild-Bild	gemischt	Symbol-Symbol	Bild-Symbol	Symbol-Bild
Ganzheitlich								
Kombinierend								
Zergliedernd								

Tab. 2.2.: Modell zur theoretischen Beschreibung des Konstrukts mathematische Denkstil und seiner Denkstil Arten (Borromeo Ferri 2004, S.52)

In ihrer empirischen Studie von 2004 konnte Borromeo Ferri die theoretisch möglichen Präferenzen bei 15- und 16-jährigen Schülern auf die Kombinationen bildlich-ganzheitlich, symbolisch-zergliedernd sowie gemischt-kombinierend eingrenzen. Allerdings räumt sie auch ein, dass es bei einer größeren Stichprobe durchaus möglichst sei, dass weitere Kombinationen bestätigt würden.
In diesem Zusammenhang unterscheidet Borromeo Ferri folglich drei idealtypische mathematische Denkstile:

- Der *visuelle Denker* (bildlich-ganzheitlicher Denkstil) zeichnet sich durch seine ausgeprägte bildliche Repräsentation von mathematischen Sachverhalten sowie dem damit verknüpften Rückgriff auf existierende anschauliche Darstellungen und Assoziationen zu erlebten Situationen aus. Daneben bevorzugt der visuelle Denkstil eine ganzheitliche oder aber kombinierende Vorgehensweise, wodurch nicht nur die Situation selbst, sondern auch der Kontext in seinen Bearbeitungsprozessen Berücksichtigung findet.
- Der *analytische Denkstil* (symbolisch-zergliedernd der Denker) zeigt Präferenzen für eine symbolisch-formalen Verarbeitung mathematischer Sachverhalte, was sich darin zeigt, dass er für seinen Lösungsweg sowie seinen Verstehensprozess formale oder verbale Repräsentationsformen heranzieht. Darüber hinaus ist ein bevorzugt zergliederndes Vorgehen beobachtbar.

- Der *integrierte Denker* (gemischt-kombinierender Denkstil) kombiniert Elemente beider Denkstile miteinander, sodass eine höhere Flexibilität bei ihrem Lösungsprozess auszumachen ist. Auf diese Weise werden sowohl visuelle als auch symbolische Zugänge zu mathematischen Sachverhalten gewählt, die sich außerdem auf eine kombinierende, d. h. eine Vorgehensweise mit sowohl ganzheitlichen als auch zergliedernden Elementen, stützt (vgl. Borromeo Ferri 2004, S.95).

Damit ergibt sich insgesamt folgende Übersicht:

		Repräsentationsform (intern wie extern)	
		visuell	symbolisch-formal/verbal
Informations-organisation	Ganzheitlich	Visueller Denkstil	Integrierter Denk-
	Zergliedernd	Integrierter Denkstil	Analytischer Denk-

Tab. 2.3.: Übersicht der von Borromeo Ferri rekonstruierten mathematischen Denkstile

Die von Borromeo Ferri entworfenen Denkstiltypen bilden hierbei die Basis für die vorliegende Arbeit. Die Entscheidung dafür gründet sich auf mehrere Aspekte aus Borromeo Ferris Arbeit:

- Die Charakterisierung des Konstrukts *mathematischer Denkstil* als eine „bevorzugte Art und Weise […] mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge durch gewisse interne Vorstellungen und/oder externe Darstellungen zu repräsentieren und durch gewisse Vorgehensweisen zu verarbeiten“ (Borromeo Ferri 2004, S.168), liefert eine tragfähige Begründung für die unterschiedlichen Zugänge zum selben mathematischen Gegenstand.
- Die grundsätzliche Unterscheidung der entgegen gerichteten Denkstiltypen visuell und analytisch bieten zudem eine grundlegende Beschreibung, wie Gedankeninhalte repräsentiert sein können (vgl. Skemp 1971, Galton nach Richardson 1999).
- Und nicht zuletzt, weil die Denkstiltypen sowohl qualitativ als auch quantitativ bestätigt werden konnten, scheint das Konstrukt hin-

reichend empirisch gesichert, sodass in dieser Arbeit auf eine fundierte Theorie und ihre Instrumente zurückgegriffen werden kann (vgl. Borromeo Ferri 2004, Borromeo Ferri 2014).

2.4. Modelle zur Beschreibung der kognitiven Strukturen am Beispiel von prädikativem und funktionalem Denken

Die von Schwank (2003) aufgebrachte Zerlegung in prädikatives Denken und funktionales Denken bezieht sich auf kognitive Strukturen, welche sich durch entsprechende Begriffsbildung und mentale Modelle auszeichnen und damit nicht dem Denkstil entspricht. Dennoch gibt es eine gewisse Ähnlichkeit, insofern, als dass sich Auswirkungen für das Verständnis von und das Arbeiten in der Mathematik ergeben, weshalb es hier mit eingebracht wird.
Eine prädikative Struktur konstituiert sich aus einer Wissensrepräsentation, die auf Beziehungen und Urteile zurückzuführen ist. Dabei beinhaltet ein derartiges Begriffsgefüge die Organisation in hierarchisch geordnete Begriffe, Relationen, die zwischen verschiedenen Begriffen oder auch innerhalb eines Begriffs existieren sowie logische Verknüpfungen. Zudem wird die Identifikation von Ähnlichkeiten und Verwandtschaften genutzt, „um Elemente in einen systematischen, strukturellen Zusammenhang zu bringen" (Schwank 2003, S.70), wobei die entsprechenden Relationen als Ordnungskriterien gelten.
Demgegenüber baut eine funktionale Struktur auf Handlungsfolgen und Wirkungsweisen auf, sodass die Annäherung an mathematische Grundbegriffe über deren Konstruktion sowie ihren Verkettungen erfolgt. Dabei werden Differenzen genutzt, „um Elemente durch einen diese Unterschiedlichkeiten bewirkenden Konstruktionsprozess" (Schwank 2003, S.70) zusammenzuführen. Darüber hinaus liegt der Fokus auf ihren Verallgemeinerungen als Werkzeuganwendung sowie ihren Umkehrungen.
Studien zur Erforschung mathematischer Denkprozesse ergaben, dass Schüler bei ihrer Wahl der äußeren Repräsentationsform relativ stabile Vorlieben zeigten, was Schwank als Ausgangspunkt für die eigene Studie zur Explikation eines entsprechenden Vorgehens nahm. Mit den beiden Grundannahmen, dass ein Resonanzeffekt zwischen der inneren kognitiven Struktur und den

entsprechend geprägten mathematischen Begriffen sowie der äußeren Repräsentationsform existiert, entwickelte Schwank das Design ihrer Studie zur Unterscheidung von prädikativen und funktionalen Denken. Hierfür bekamen Schüler der 7. Jahrgangsstufe Aufgaben, die das Konstruieren, Analysieren und Korrigieren von Algorithmen in verschiedenen Repräsentationsformen erforderten. Eine derartige Unterscheidung begründet sich für Schwank darin, dass es bestimmte mathematische Sachverhalte gibt, die einen prädikativen bzw. funktionalen Zugang nahelegen, da sie in ebendem Vorgehen „‚natürlicher' dargestellt werden können“ (vgl. Schwank 1990, S.37) als dem anderen. Allerdings macht sie auch deutlich, dass das nicht heißen soll, dass zum Beispiel eine funktional gestellte Aufgabe von einer prädikativ denkenden Person nicht gelöst werden kann. Erst in ihrer Nachfolgestudie räumt sie ein, dass beobachtbar ist,

> „dass eine Aufgabenstellung nicht die für ihre Bearbeitung vorteilhafte oder gar notwendige kognitive Sichtweise erzwingen kann. Ein ausgeprägtes prädikatives bzw. funktionales Talent / Defizit liegt entscheidend auf die kognitive Repräsentation und damit das Verständnis eines Problems sowie die Strategie während der Lösungssuche durch“ (Schwank et al. 2003, S.83f).

Trotzdem bedeutet das nicht, dass die eine oder andere kognitive Struktur besser ist, auch wenn sie funktionale Erklärungen insofern als schwierig zu realisieren erachtet, als dass sie einen Prozess beschreiben, der zur Lösung herangezogen wurde. Eben diese Prozessbeschreibungen sind gerade in schriftlichen Arbeiten nur schwer darzustellen, da das dynamische und handelnde Moment fehlt (vgl. Schwank 2003, S.71). Zur Verdeutlichung der unterschiedlichen Bearbeitung von Aufgaben soll hier exemplarisch eine Aufgabe aus der Studie von Schwank herangezogen werden, die das Vorgehen von prädikativ und funktional denkenden Schülern bei Musterergänzungsaufgaben verdeutlicht. Insgesamt wurden in der QuaDiPF-Studie 36 Schülern der zehnten und elften Klasse die Augenbewegung[9] beim Lösungsprozess

[9]Die in der QuaDiPF-Studie zum Einsatz kommende Kamera zur Messung der Augenbewegung wies eine Genauigkeit von 0,01° auf und zeichnete die Blickrichtungsänderungen mithilfe von Linien und Kreisen auf. Die so erhaltene Darstellung gibt durch die Kreise den Fokus des Blickes an, während die Größe der Kreise die Verweildauern aufzeigt.

von zehn Musterergänzungsaufgaben erfasst und anschließend zu ihrem Vorgehen befragt (vgl. Schwank 2003, Schwank et al. 2003, Cohors-Fresenburg/ Brinkschmidt/ Armbrust 2003).

Die nachfolgende Beispielaufgabe zur Musterergänzung besteht aus einer 3x3-Matrix und ist auf unterschiedliche Weise lösbar (siehe Abb. 2.2.).

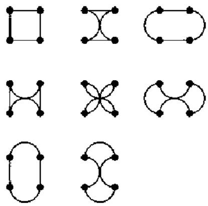


Abb. 2.2.: Aufgabe zur Musterergänzung aus der Untersuchung von Schwank et al. (Schwank 2003, S.71)

Ein prädikatives Vorgehen lenkt den Fokus auf die vorliegenden Gemeinsamkeiten, wobei zwei Arten von Vorgehen denkbar sind. Zum einen kann die fehlende Figur dadurch ermittelt werden, dass zunächst entsprechende Gemeinsamkeiten innerhalb der Zeilen ermittelt werden. Dadurch sind Vorhersagen über die horizontalen Verbindungen zwischen den Eckpunkten möglich, welche durch die ermittelten Gemeinsamkeiten der Seitenwände, wie in der spaltenweisen Betrachtung ersichtlich, ergänzt werden. Zum anderen können jedoch auch Gemeinsamkeiten ausgemacht werden, die sich nicht auf Zeilen oder Spalten beschränken, sondern die gesamte Abbildung einbeziehen. Ein derartiges Vorgehen lässt erkennen, dass die Abbildung unterschiedliche Figuren paarweise gedreht, um einen Mittelpunkt () herum anordnet. Folglich muss jene Randfigur ergänzt werden, die nur einmal vorliegt. Demgegenüber betrachtet ein funktionales Vorgehen die dynamischen Veränderungen innerhalb einer Zeile bzw. Spalte, sodass die Beschreibungen der Lösungsstrategien von funktionalen Denkern der Studie auf die Vorstellung zurückgreifen, dass die Seiten nicht starr, sondern durch Zieh- und Drückbewegungen veränderbar sind (siehe Abb. 2.3.).

Abb. 2.3.: Visualisierung der funktionalen Beschreibungen zur Lösung der oben abgebildeten Mustergänzungsaufgabe (Schwank 2003, S.71)

Die unterschiedlichen Vorgehensweisen deuten sich auch in den Augenbewegungsmessungen der Schüler an. Trotzdem ist es anhand der Augenbewegungen allein nicht möglich, auf die kognitive Struktur einer Person zu schließen. Cohors-Fresenburg et al. sehen hierfür einen Grund darin, dass die Kamera zwar durchaus in der Lage ist, die Figur zu bestimmen, die der Aufmerksamkeit der Person gilt, jedoch nicht genau aufzuzeigen, welche Stelle innerhalb der Figur betrachtet wird. Dies liege nicht allein an der Präzision der Kamera, sondern auch daran, „dass die Aufmerksamkeit einer Versuchsperson nicht immer genau auf dem Ort liegen muss, den sie gerade anblickt" (Cohors-Fresenburg/ Brinkschmidt/ Armbrust 2003, S.88). Doch trotz dieser Einschränkungen lassen sich auch für das jeweilige Vorgehen typische Augenbewegungen aufzeigen (siehe geteilte Abb. 2.4.).

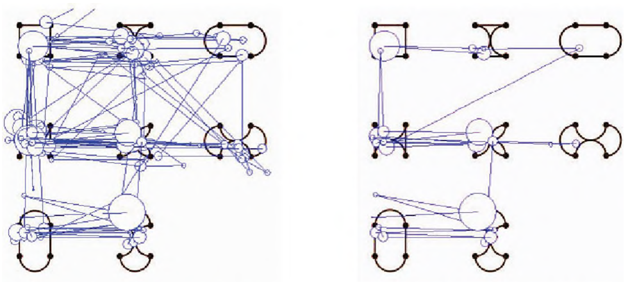


Abb. a): VP (funktional), Gesamtblickpfade bis zur Lösung nach 44 Sekunden

Abb. b): VP (funktional), Blickpfade für 10 Sekunden ab Sekunde 34

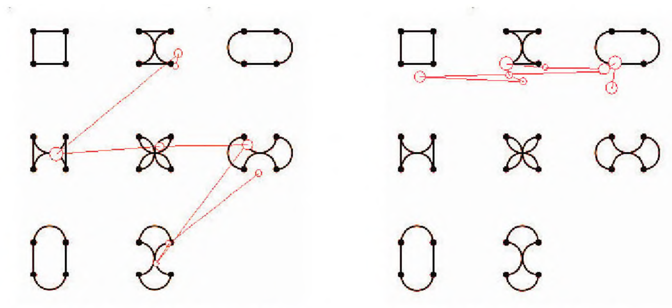


Abb. c): VP (prädikativ), Blickpfade zum Erfassen von Paaren im Gesamtbild für 3 Sekunden

Abb. d): VP (prädikativ), Blickpfade entlang der ersten Zeile für 2 Sekunden

Abb. 2.4.: Gegenüberstellung der Augenbewegungen bei unterschiedlichen Vorgehensweisen der Musterergänzung (vgl. Cohors-Fresenburg/ Brinkschmidt/ Armbrust 2003, S.88)

Die Abbildung a) (oben) zeigt den gesamten Blickpfad bei einem funktionalen Vorgehen, während es sich bei Abbildung b) um eine Sequenz innerhalb der Gesamtblickpfade handelt, die für ein funktionales Lösungsverhalten bezeichnend ist. Bei den beiden unteren Abbildungen handelt es sich um die Darstellung der Blickrichtung verschiedener prädikativer Vorgehensweisen. Dabei zeigt Abbildung c) ein Lösungsverhalten, das sich auf eine Gesamtbetrachtung der Abbildung sowie der damit verbundenen Paarbildung der einzelnen Figuren bezieht, während Abbildung d) anscheinend die Blickpfade bei der Ermittlung der Gemeinsamkeiten innerhalb der ersten Zeile zeigt.

Die Gegenüberstellung der unterschiedlichen Vorgehensweisen lassen sich laut Schwank (1990) auf die kognitiven Strukturen einer Person zurückführen, die sie unterscheidet in prädikatives bzw. funktionales Denken. Und obwohl Schwank in ihrem Erklärungsmodell nicht explizit vom Denkstil Konstrukt spricht, zeigen sich einige Übereinstimmungen zwischen ihren kognitiven Strukturen und dem Konstrukt eines Denkstils:

- Als Erklärung entsprechender Verhaltensmuster führt Schwank in Anlehnung an Cohors-Fresenburg die Vorliebe für ein bestimmtes Lösungsvorgehen von Schülern an (vgl. Schwank 1990, S.45) und beruft sich damit indirekt auf die von Sternberg formulierte „Präferenz Dinge zu durchdenken“ als kognitiven Stil.

- Die Abgrenzung von kognitiven Strukturen zu kognitiven Strategien, wobei sie in Bezug auf das prädikative und funktionale Denken explizit von einer Struktur spricht und den Unterschied zu (ähnlich gelagerten) Strategien herausstellt (Schwank 1990, S.47). Ebendiese Unterscheidung findet sich auch bei der Beschreibung des Denkstils.
- Ausgehend von den Ergebnissen ihrer eigenen Untersuchungen räumt Schwank ein, dass es neben den Schülern, die über die gesamte Zeit der Studie ein stabiles Verhalten zeigten, auch Schüler gibt, die ein ähnlich stabiles Verhalten nicht zeigten (vgl. Schwank 1990, S.51). Diese Beobachtung stützt die Vermutung über eine dritte Kategorie, wie sie in Borromeo Ferris kombinierender Informationsrepräsentation zu finden ist.

Diese Ähnlichkeiten sind durchaus nachvollziehbar, da Schwanks Modell die „äußere Repräsentation mathematischer Begriffe sowie innere mentale Modelle“ (Schwank 1990, S.31) zur Erklärung heranzieht, welche das Denken maßgeblich beeinflussen, wie die hier vertretenen Auffassung zum Zusammenhang von Begriffsbildung und Denken verdeutlicht (vgl. Kapitel 1.1.). Und auch, wenn Schwank die Beobachtungen in ihren Studien nicht explizit auf die Dimension *verbal-imagery* verweist, gibt es Hinweise darauf:

> „Während sich beim prädikativen Denken eine besondere Leichtigkeit im Umgang mit Wörtern als nützlich heraus stellt, ist beim funktionalen Denken bemerkenswert, dass die Wörter durchaus in den Hintergrund treten können, die Sprache also nicht das zentrale kognitive Werkzeug ist, mittels dessen sich Ideen herausbilden“ (Schwank 2003, S.73).

3. Bedeutung des Denkstilkonstrukts und seiner unterschiedlichen Ausprägungen

> „Styles matter. […] Especially in teaching, one needs to take into account students' styles of thinking if one hopes to reach them. This means differentiating instruction in a way that helps students, at least some of the time, capitalize on their stylistic preferences"
>
> (Sternberg/ Zhang 2005, S.252)

Nachdem das vorangegangene Kapitel verschiedene Theorien zum Denkstilkonzept thematisiert und einen Überblick über die verschiedenen Modelle zur Beschreibung des Denkstilkonstrukts gibt, stellt das folgende Kapitel den Denkstil als Erklärungsversuch für bestimmte Phänomene heraus. Hierzu wird der Bearbeitungsprozess einer problemhaltigen Aufgabe gezeigt, der sich an dem Problemlöseprozess von Mason orientiert. Um die Bedeutung des Denkstils und den damit verbundenen Vorlieben für den jeweiligen Bearbeitungsweg hervorzuheben, werden das visuell-bildliche sowie das formal-analytische[10] Vorgehen einander gegenübergestellt und verglichen.

Darüber hinaus werden unter diesem Kapitel einige Studien vorgestellt, die das Konstrukt Denkstil zum Gegenstand haben, wobei zunächst einige kognitionspsychologische Studien benannt werden, die sich auf den von Sternberg geprägten Begriff des Denkstils stützen. Daran anknüpfend wird exemplarisch auf ausgewählte mathematikdidaktische Studien genauer eingegangen, die sich explizit auf den mathematischen Denkstil beziehen. Es sei jedoch bereits hier darauf hingewiesen, dass die angeführten Forschungen sich nicht auf das gleiche Denkstilmodell beziehen, wobei dies hier bewusst in Kauf genommen wurde, da es Folgendes verdeutlicht:

[10] Die Anpassung der von Borromeo Ferri geprägten Begrifflichkeiten zur Bezeichnung des Denkstil bezieht sich lediglich auf die gezeigten Bearbeitungsweise und nicht auf das dahinterstehende Denken soll hier zur Verdeutlichung des entsprechenden Vorgehens beitragen. Zum einen wird auf diese Weise der Unterschied zwischen Denken und Bearbeitung verdeutlicht und zum anderen wird hiermit die Vorgehensweise mithilfe von Formeln betont.

- Der Forschungsgegenstand bisheriger Studien bezieht sich auf das spezifische Vorgehen in dem jeweiligen Denkstil
- Die Fragestellungen zum mathematischen Denkstil legen ihren Schwerpunkt auf den Bearbeitungsprozess von spezifischen Aufgabentypen

Die angeführten Beobachtungen lassen jedoch auch erkennen, und in der Studie von Schwank und Mitarbeitern (vgl. Schwank et al. 2003, siehe Kapitel 3.2.) wird dies besonders deutlich, dass die Bedeutung von Aufgaben, die eine bestimmte, denkstilnahe Vorgehensweise erfordern, bisher ein Forschungsdesiderat darstellt. Ebendiese Beobachtung wird abschließend in diesem Kapitel unter 3.3. genauer herausgearbeitet.

3.1. Exemplarische Aufgabenbearbeitung in den von Borromeo Ferri geprägten Denkstilen

Im Folgenden sollen die visuell-bildliche und formal-analytische Bearbeitung nach Borromeo Ferri einer problemhaltigen Aufgabe einander gegenüber gestellt werden. Gewählt wurde dabei eine realitätsnahe Aufgabe, die durchaus unterschiedliche Bearbeitungsweisen zulässt, jedoch auch verdeutlicht, inwiefern das angekündigte Forschungsdesiderat von Bedeutung ist.[11] Vorab ist jedoch anzumerken, dass hier, wie auch in Schulbüchern mit solchen Aufgaben von der Bearbeitung gefordert, bei der Bearbeitung eine entsprechende Vereinfachung vorgenommen wird. So wird zur Lösung der Aufgabe von einer konstanten Geschwindigkeit während der gesamten Fahrt ausgegangen, was ebenfalls der Vernachlässigung von Zwischenhalten entspricht.

[11] Es ist jedoch anzumerken, dass hier, wie auch bei der Bearbeitungsanforderung von ähnlichen Aufgaben in diversen Schulbüchern gefordert, bei der Bearbeitung eine entsprechende Vereinfachung vorgenommen wird. So wird zur Lösung der Aufgabe von einer konstanten Geschwindigkeit während der gesamten Fahrt ausgegangen, was der Vernachlässigung von Zwischenhalten sowie Beschleunigungsprozessen am Start und Ziel entspricht.

Treffpunkt zweier Züge

Zug A startet um 8:15 Uhr in Hamburg und ist nach 1 Std und 42 Min in Berlin.
Eine halbe Stunde später als Zug A startet Zug B aus Berlin und kommt um 9:57 Uhr in Hamburg an.
Die Entfernung von Hamburg nach Berlin beträgt 282 km.

Wann rasen die beiden Züge aneinander vorbei und wo treffen sie sich?

Die Grundidee für eine visuell-bildliche Bearbeitung dieser Aufgabe ist die Darstellung der Streckenverläufe beider Züge in einem Koordinatensystem und dem Ablesen des sich ergebenden Schnittpunkt, während der formal-analytische Zugang die Streckenverläufe als Funktionsterme auffasst, für die es den Schnittpunkt zu berechnen gilt. Um im Weiteren sehr unterschiedliche Bearbeitungsprozesse wiederzugeben, dies aber dennoch so vergleichbar wie möglich zu halten, wird sich an dem bereits in Kapitel 1.1.2. vorgestellten Problemlöseprozess von Mason et al. orientiert.

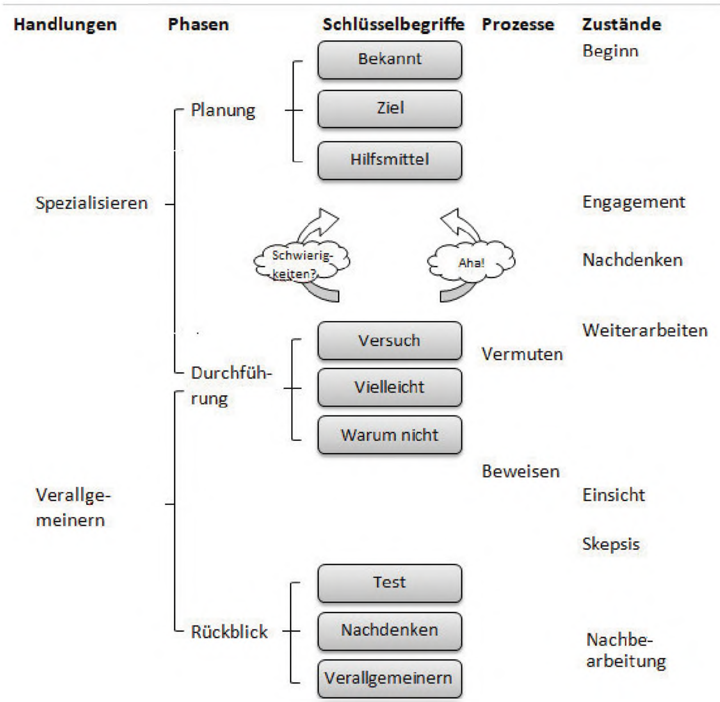


Abb. 3.1.: Problembearbeitungsprozess nach Mason et al. (Rott 2013, S.56, vgl. Kapitel 1.1.2., Abb. 1.4.)

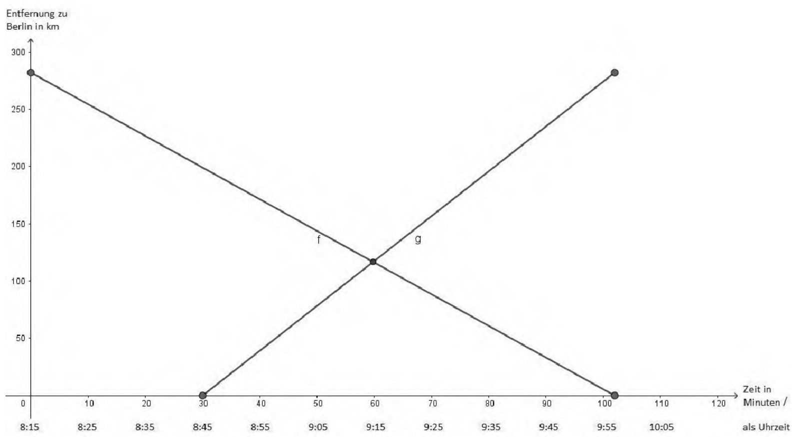
Die Planung

Für ein visuell-bildliches Vorgehen sind die Grundüberlegungen zunächst, dass sich das Problem mit einem Koordinatensystem als bildliches Hilfsmittel darstellen lässt und die spezifischen Vorgaben eines Koordinatensystems zu einer entsprechenden Ausgestaltung führt. So wird die gefahrene Strecke in Abhängigkeit von der Zeit angegeben, was als Konsequenz dazu führt, dass die Zeit auf der Abszisse und die Strecke auf der Ordinate abgetragen werden. Darüber hinaus ist zu beachten, dass die Strecke nicht als ‚zurückgelegte km' angegeben wird, sondern als ‚Entfernung zu einem bestimmten Punkt', hier die Entfernung zu Berlin. Dies ist deshalb von Bedeutung, da nur auf diese Weise eine negative Steigung realitätstreu erklärt werden kann.

Nach diesen strukturellen Vorüberlegungen sind nun die Streckenverläufe der beiden Züge zu bestimmen. Zunächst für Zug A: Der Zug startet um 8:15

Uhr in Hamburg. Da Zeitpunkte vor 8:15 Uhr für den Streckenverlauf der beiden Züge irrelevant sind, kann diese Zeit als $x = 0$ angenommen werden, während sich der y-Wert aus dem Startort selbst ergibt. Dementsprechend startet die darzustellende Strecke in dem Punkt $(8{:}15; 282)$ bzw. $(0; 282)$ und verläuft direkt zum Endpunkt bei $(9{:}57; 0)$ bzw. $(102; 0)$, der sich dabei aus $0\ km$ Entfernung zu Berlin ergibt.
Da Zug B eine halbe Stunde später in $0\ km$ Entfernung zu Berlin startet, sind die Koordinaten für den Startpunkt $(8{:}45; 0)$ bzw. $(30; 0)$ und mit einer entsprechend angepasster Ankunftszeit in Hamburg um 10:32 Uhr ergibt sich der Punkt $(9{:}57; 282)$ bzw. $(102;\ 282)$.

Die Durchführung
Die Bearbeitung erfolgt, indem alle Punkte in dasselbe Koordinatensystem gezeichnet und jeweils zueinander gehörigen Start- und Endpunkte verbunden werden. Um abschließend den Ort und die Zeit zu bestimmen, an dem sich beide Züge treffen, gilt es nun die Koordinaten des Schnittpunkts abzulesen:



Auf diese Weise kann die Angabe von $(60; 117)$ bestimmt werden.

Die Rückschau

Der Punkt $(60; 117)$ bedeutet, dass sich die Züge $60\ Min$ nach dem Start des ersten Zuges, folglich um $9{:}15\ Uhr$ treffen, und in Bezug auf den Ort des Treffens ergibt sich ein Ort, der $117\ km$ von Berlin entfernt liegt. Bezüglich der Genauigkeit lässt sich hier anmerken, dass diese insofern gewährleistet werden kann, als dass die Zeichnung mit einer entsprechenden Genauigkeit belegt ist.

Neben der visuell-bildlichen Bearbeitung kann diese Aufgabe auch formal-analytisch gelöst werden.

Die Planung

Ausgehend von ähnlichen Grundüberlegungen wie beim visuell-bildlichen Vorgehen, behalten die Start- und Endpunkte ihre Gültigkeit. Das heißt, Zug A startet zum Zeitpunkt 0 bei einer Distanz zu Berlin von $282\ km$, sodass der Startpunkt $(0; 282)$ ist, während der die Ankunft $102\ Min$ später in Berlin zum Endpunkt $(102; 0)$ führt. Daneben ergeben sich durch ein entsprechendes Vorgehen der Start- und Endpunkt (30; 0) und $(102; 282)$ für Zug B.
Mit ihrer Hilfe gilt es nun zwei Geradengleichungen aufzustellen, um abschließend den Schnittpunkt zu errechnen.

Die Durchführung

Zu der linearen Funktion $f(x)$, die den Streckenverlauf des Zuges A abbildet, können der Startpunkt $(0; 282)$ und der Endpunkt $(102; 0)$ angegeben werden. Aus ebendiesen Punkten ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$f(0) = m \cdot 0 + b = 282 \quad \Leftrightarrow \quad b = 282$$

$$\begin{aligned}
& f(102) = m \cdot 102 + b = 0 && |\ b\ einsetzen \\
\Leftrightarrow\quad & f(102) = m \cdot 102 + 282 = 0 && |-282 \\
\Leftrightarrow\quad & m \cdot 102 = -282 && |:102 \\
\Leftrightarrow\quad & m = -\frac{282}{102} = -\frac{47}{17} && |\ Verallgemeinerung \\
\Leftrightarrow\quad & f(x) = -\tfrac{47}{17} \cdot x + 282 &&
\end{aligned}$$

Für die lineare Funktion $g(x)$ für den Zug B können entsprechend der Startpunkt $(30; 0)$ und der Endpunkt $(102; 282)$ für das Gleichungssystem herangezogen werden.

$$\begin{aligned} & g(30) = m \cdot 30 + b = 0 && | -30m \\ \Leftrightarrow\quad & b = -30m && \end{aligned}$$

Nachdem b in Abhängigkeit von m bestimmt wurde, wird nun m bestimmt:

$$\begin{aligned} & g(102) = m \cdot 102 + b = 282 && | \, b \; einsetzen \\ \Leftrightarrow\quad & 102m - 30m = 72m = 282 && |: 72 \\ \Leftrightarrow\quad & m = \frac{282}{72} = \frac{47}{12} && \end{aligned}$$

Damit kann b ohne Abhängigkeit von m bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & b = -\tfrac{47}{12} \cdot 30 && |Verallgmeinerung \\ \Leftrightarrow\quad & f(x) = \tfrac{47}{12} \cdot x - \tfrac{47 \cdot 30}{12} && \end{aligned}$$

Um abschließend den Schnittpunkt zu ermitteln, werden beide Funktionsterme gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} & g(x) &=\;& f(x) && \\ \Leftrightarrow\quad & -\tfrac{47}{17} \cdot x + 282 &=\;& \tfrac{47}{12} \cdot x - \tfrac{47 \cdot 5}{2} && | + \tfrac{235}{2} + \tfrac{47}{17} \cdot x \\ \Leftrightarrow\quad & 282 + \tfrac{235}{2} = \tfrac{799}{2} &=\;& \tfrac{47}{12} \cdot x + \tfrac{47}{17} \cdot x = \tfrac{1363}{204} x && |: \tfrac{1363}{204} \\ \Leftrightarrow\quad & x &=\;& \tfrac{799}{2} \cdot \tfrac{204}{1363} = \tfrac{1734}{29} \approx 59{,}79 && \end{aligned}$$

Mit der Angabe $x \approx 60$ ist die Zeitspanne benannt, nach der sich die beiden Züge treffen. Um den Treffpunkt zu ermitteln, wird $x \approx 60$ in eine der Funktionsgleichungen eingesetzt:

$$f\left(\tfrac{1734}{29}\right) = -\tfrac{47}{17} \cdot \tfrac{1734}{29} + 282 = \tfrac{-47 \cdot 102 + 282 \cdot 29}{29} \approx 116{,}69$$

Die Rückschau
Die entsprechende Interpretation der Ergebnisse gibt an, dass sich die Züge etwa $60\ Minuten$ nachdem der erste Zug gestartet ist, in einem Ort treffen, der etwa $116{,}69\ km$ von Berlin entfernt ist.

Die Gegenüberstellung der beiden Lösungswege verdeutlicht, dass selbst Aufgaben, die auf unterschiedliche Weise lösbar sind, durchaus eine Bearbeitungsweise innehaben können, die einem der Denkstile näher liegt als dem anderen. Ebendieses Phänomen wird im folgenden Abschnitt noch weiter herausgestellt, indem auf einige Studien Bezug genommen wird, die die Frage nach dem Einfluss des Denkstils auf das Verhalten aufwerfen. Dabei sei jedoch bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass insbesondere die mathematikdidaktischen Studien darauf abzielen, einen uneingeschränkten Vergleich der jeweiligen beiden Denkstile zu machen. Im Hinblick auf die vorliegende Studie wird dementsprechend direkt anschließend das Forschungsdesiderat herausgestellt (siehe Kapitel 3.3.).

3.2. Überblick über verschiedene Studien zur Denkstiltheorie

Die Bedeutung einer Denkstiltheorie zeigt sich allerdings auch in einer Vielzahl von kognitionspsychologischen und lerntheoretischen Studien, die zu diesem Thema erschienen sind (vgl. Meyers 1980, Dikici 2014, Emir 2013 etc.). Aber auch in einer Vielzahl von Studien mit mathematikdidaktischer Ausrichtung wurden die Auswirkungen des Denkstils auf den mathematischen Bearbeitungsprozess untersucht (vgl. Radatz 1975, Krutetzki 1976 etc.). Einige Ergebnisse aus ausgewählten Studien sollen in diesem Abschnitt kurz vorgestellt werden, um so zu verdeutlichen, welchen Einfluss der Denkstil auf unterschiedliche Bereiche des schulischen Lebens hat. Für eine handhabbare Struktur wird sich im Folgenden zunächst auf die Studien beschränkt, an denen Sternberg mitgewirkt hat bzw. seine Theorie des *mental self-government* die Basis bildet. Im weiteren Verlauf werden dann auch einige mathematikdidaktisch ausgerichtete Studien aufgeführt, die die Bedeutung einer Denkstiltheorie aus mathematikdidaktischer Perspektive unterstreichen.

Ein Zusammenhang zwischen dem Lernprozess und dem Denkstil wurde 2000 von Zhang & Sternberg bestätigt. Hierzu erhoben sie an den Universitäten von Hongkong und Nanjing den Lernprozess und den Denkstil von insgesamt 854 Studierenden mithilfe von Biggs SPQ (Study Process Questionaire) und von Sternbergs TSI (Thinking Style Inventory). Bei der in der Studie zugrunde gelegten Unterscheidung des Lernens[12] zeigt sich, dass Studierende, deren Lernen sich (lediglich) auf das Memorieren des Gelernten bezieht, einen *executive*, *local* und *conservative thinking style* bevorzugen, wohingegen Studierende, deren Lernen auf ein tieferes Verständnis abzielt, einen *legislative*, *judicial* und *liberal thinking style* präferieren. Der Unterschied in diesen beiden Ausprägungen bezieht sich auf den Umgang mit Regeln und Verfahren, wobei ein executive thinking style es bevorzugt, Regeln zu folgen, während ein *executive* und *judicial thinking style* Regeln infrage stellt, sie großzügig auslegt sowie über entsprechende Regeln und Verfahren hinausgeht (*liberal*) (vgl. Zhang/ Sternberg 2000).
Eine 1997 durchgeführte Studie von Grigorenko & Sternberg befasst sich mit der Frage, ob Schüler in jenen Klassen besser sind, in denen ein *match,* also eine Übereinstimmung zwischen dem Denkstil der Lehrperson und dem eigenen vorliegt als in solchen, mit einem *mismatch*. Es zeigte sich, dass unabhängig von den Fähigkeiten der Schüler und der damit verbundenen Leistung, die Schüler mit einem *match* zwischen Lehrerdenkstil und dem eigenen Denken engagierter mitarbeiteten und positiver von der Lehrperson wahrgenommen wurden (vgl. Grigorenko/ Sternberg 1997).
Eine 1995 von Grigorenko & Sternberg mit insgesamt 124 Schülern zwischen 12 und 16 Jahren konnte eine signifikante Übereinstimmung zwischen dem Denkstil der Schüler und des Lehrers (*match*) festgestellt werden (vgl. Grigorenko/ Sternberg 1995).
Darüber hinaus untersuchte eine weitere Studie von Grigorenko & Sternberg (1995) die Denkstile von 85 Lehrern aus vier Schulen unterschiedlicher Ausrichtungen. Dabei bezogen sich die Ergebnisse auf das von Sternberg etab-

[12] Unterschieden wurde hierbei nach der Motivation für das Lernen in *surface*, *deep* und *achieving*, wobei sich *surface* auf einen Minimalaufwand beim Lernen bezieht, sodass lediglich die Reproduktion des Gelernten möglich ist, während *deep* echtes Verständnis des Gelernten beinhaltet und *achieving* zudem einen Leistungsanspruch hat, sodass neben dem Verstehen auch eine möglichst gute Note erzielt werden will.

lierte Modell, sodass sich Unterschiede in der *function of mental self government* bestimmen ließen. Diese Unterschiede gestalten sich in der Art, dass Lehrpersonen der niedrigeren Klassenstufen stärker *legislative* ausgerichtet sind und dementsprechend „like to create their own rules and to do things in their own way“ (Sternberg 1994, S.175), wohingegen Lehrkräfte der höheren Klassenstufen eher *executive* agieren und entsprechend Aufgaben bevorzugen, die vorgefertigt und vor strukturiert sind (vgl. Grigorenko/ Sternberg 1995).
Zu einem ähnlichen Ergebnis kam auch die Studie von Moutsios-Rentzos & Simpson (2010), die jedoch nicht auf die Untersuchung von Lehrkräften ausgerichtet ist, sondern die Denkstile von Mathematikstudierenden und dem Vergleich von Bachelor- und Masterstudierenden. Ebenfalls auf die Theorie des *mental self-government* aufbauend zeigen die Ergebnisse, dass die Präferenz für Offenheit, welches sich in der Originalität und Freiheit des Denkens sowie einem komplexeren Informationsprozess zeigt (vgl. Moutsios-Rentzos/ Simpson 2010, S.7) umso höher ist, je höher sich die Studierenden im Studiengang befinden. Demgegenüber zeigen Bachelorstudierende des zweiten Studienjahrs eine Vorliebe für „conformity, structured tasks, authority and straightforward information processing“ (Moutsios-Rentzos/ Simpson 2010, S.7).

Die Vielzahl der Studien stellt die Bedeutung einer Denkstiltheorie heraus und auch in Bezug auf die mathematikdidaktische Perspektive gibt es zahlreiche Studien, die die Auswirkungen des Konstrukts Denkstil auf bestimmte Teilgebiete der Mathematik untersuchen. Insbesondere der Denkstil als Einflussfaktor auf den Modellierungsprozess stellt einen Schwerpunkt in der aktuellen Forschung von Borromeo Ferri dar.
Die auf die Untersuchung des Einflusses mathematischer Denkstile auf den Modellierungsprozess angelegte Studie aus dem COM^2-Projekt umfasst insgesamt 65 Schüler aus drei zehnten Klassen. Hierzu wurden Schülergruppen mit maximal fünf Personen, bestehend aus mindestens einem Schüler in jedem Denkstil, 3 × 90 Minuten bei ihrem Modellierungsprozess videografiert und ihre Modellierungsverläufe dokumentiert (vgl. Borromeo Ferri 2010). Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass der Denkstil Einfluss auf die individuel-

len Modellierungsverläufe[13] der Schüler hat. So zeigt sich, dass Schüler mit einem analytischen Denkstil ihre Bearbeitung direkt in die Mathematik verlegen und sich dementsprechend sehr schnell auf das mathematische Modell fokussieren. Sie überspringen damit sowohl die mentale Situations-Repräsentation[14] als auch das reale Modell, was jedoch dazu führt, dass die Schüler häufig nachträglich auf die Realsituation zurückkommen müssen, um sich die Situation zu vergegenwärtigen. Anschließend kehren sie jedoch recht zügig zum mathematischen Modell zurück und bearbeiten die Aufgabe vorwiegend formal (vgl. Borromeo Ferri 2009, Borromeo Ferri 2012).

Demgegenüber beschreiten Schüler des visuellen Denkstils, gerade zu Beginn, eher einen idealtypischen Modellierungsprozess, dadurch, dass sie mehr Zeit auf die mentale Situations-Repräsentation verwenden. Und auch ihre Argumentationen innerhalb des mathematischen Modells weisen eine große Nähe zur realen Situation auf. Darüber hinaus verwenden sie in der mentalen Situations-Repräsentation unterstützende Zeichnungen, um die Situation besser handhabbar zu machen (vgl. Borromeo Ferri 2009, Borromeo Ferri 2012).

In der Studie wurde ebenfalls untersucht, welchen Einfluss der Denkstil der Lehrperson auf die Umsetzung von Modellierungsaufgaben im Unterricht beikommt. Als Ergebnis dieser Frage ließ sich feststellen, dass Lehrpersonen, die einem der Denkstile folgten, sich auf bestimmte Vorgänge im Modellierungsprozess fokussierten. Dies zeigte sich sowohl bei angebotener Hilfestellung als auch während der Lösungsdiskussionen. Und obwohl die Lehrkräfte durchaus selbst reflexives Verhalten zeigten, waren sie sich selten bewusst, inwieweit ihr Denkstil zu einem bestimmten Lehrmuster führt (vgl. Borromeo Ferri 2009, Borromeo Ferri 2012).

Borromeo Ferri konnte in einer Studie zur Entwicklung des Denkstils außerdem zeigen, dass bereits zu Beginn der vierten Klasse der Denkstil Einfluss auf das Lösen mathematischer Probleme hat. Hierzu wurden insgesamt 40

[13] Unter einem individuellen Modellierungsverlauf versteht Borromeo Ferri den Modellierungsprozess eines Individuums sowohl auf interner als auch externer Ebene. Dies beinhaltet den individuellen Beginn des Modellierungsprozesses in einer beliebigen Phase sowie den gesamten Prozess, der sowohl in der Intensität der einzelnen Phasen als auch in ihrer Reihenfolge variieren kann.

[14] Um den Fokus auf die individuellen Prozesse herauszustellen, spricht Borromeo Ferri von der mentalen Situations-Repräsentation anstatt von einem Situationsmodell.

Schüler aus zwei Klassen zwei Wochen während des Mathematikunterrichts beim Problemlösen videografiert und anschließend interviewt. Dabei konnten sowohl analytische Denker als auch visuelle Denker anhand der Denkstilerhebung, der videografierten Problemlöseprozesse sowie den Interviews identifiziert und ihre spezifische Vorgehensweise analysiert werden (vgl. Borromeo Ferri 2012).
Darüber hinaus untersucht das MaTHSCu-Projekt den kulturellen Einfluss auf den Denkstil, indem sie den westlich geprägten Kulturkreis dem östlich geprägten gegenüberstellt. Die zugrundeliegende Frage ist dabei, inwieweit die nachgewiesenen Unterschiede (vgl. Vollstedt 2011; Nisbett/ Masuda 2003) in beiden Kulturen „concerning education as well as learning and teaching" (Borromeo Ferri 2015, S.162) tatsächlich den mathematischen Denkstil prägen, obwohl dieser als individuelle Präferenz durchaus unabhängig vom kulturellen Hintergrund sein kann.
Entsprechend der großangelegten Studie wurden die Denkstile von insgesamt 907 Schülern aus Japan, Süd Korea und Deutschland mithilfe eines von Borromeo Ferri entwickelten Fragebogens erhoben.
Die Ergebnisse der Studie belegen einen kulturellen Unterschied insofern, dass Schüler aus Deutschland den analytischen und/oder den visuellen Denkstil bevorzugen, während Schüler aus Süd Korea und Japan eine starke Präferenz des integrierten Denkstils zeigten (vgl. Borromeo Ferri 2015, S.163). Doch vor allem die signifikanten Ergebnisse zur Korrelation zwischen Performanz und Denkstil scheinen bemerkenswert. Hierbei wurde deutlich, dass Schüler mit einer formalen Repräsentation bessere Noten im Fach Mathematik erzielen, wobei Borromeo Ferri deutlich macht, dass Noten abhängig sind vom jeweiligen Curriculum, der Lehrmittel und der Lehrperson und damit vom entsprechenden Kulturkreis (vgl. Borromeo Ferri 2015, S.163).

Gerade in Bezug auf die mathematikdidaktische Perspektive zeigt sich anhand der Ergebnisse, welchen Einfluss eine Theorie zu mathematischen Denkstilen auf das Bearbeiten von mathematischen Aufgaben und das Verstehen von Mathematik hat. Es zeigt sich darüber hinaus aber auch, dass noch weitere Untersuchungen nötig sind, um mathematische Denkstile in ihrer Gänze zu erfassen und die Konsequenzen eines einseitigen Unterrichts zu ermitteln.

3.3. Herausstellung des Forschungsdesiderats

Die im vorigen Abschnitt aufgeführten Studien verdeutlichen die Bedeutung des Denkstils, insbesondere für das Mathematiktreiben. Hierbei machen die verschiedenen Studien deutlich, dass Schüler, werden sie nicht in ihrem Denken eingeschränkt, vorrangig auf ihren eigenen Denkstil zurückgreifen und diesen für die Lösung von Mathematikaufgaben nutzen.

> Doch was, wenn Mathematikaufgaben einen spezifischen Lösungsweg erfordern? Was, wenn die Aufgaben eine andere Bearbeitungsweise erschweren? Und was, wenn dieses Vorgehen nur einem der Denkstile entspricht?

Mit der Vielzahl an mathematikdidaktischen Studien, die die Bedeutung einer Denkstiltheorie herausstellen, wundert es nicht, dass mit den Ergebnissen der jeweiligen Studien häufig auch die Forderung nach einer Auswahl von Aufgaben gestellt wird, die jeden Denkstil einbezieht. Es wird jedoch nicht weiter darauf Bezug genommen, welche Konsequenz eine einseitige Auswahl von Aufgaben hat oder darauf, wie Schüler agieren, wenn sie Aufgaben zu lösen haben, die nicht ihrem bevorzugten Denken entsprechen. Zwar wird in Studien darauf verwiesen, dass Aufgaben des anderen Denkstils durchaus auch von Personen gelöst werden können, die den anderen Denkstil bevorzugen (vgl. Schwank 1990, Borromeo Ferri 2014), dies ist jedoch mit einer besonderen Anstrengung verbunden. Eine erste Idee dafür, welche Anstrengung es für Schüler bedeuten kann, „entgegen ihres natürlichen Denkens“ zu arbeiten, lässt sich in einem Fall der dargestellten Augenbewegungen beim Bearbeiten von Musterergänzungsaufgaben rekonstruieren (vgl. Schwank et al. 2003, Kapitel 2.4.). Es sei jedoch deutlich darauf hingewiesen, dass die Studie, auf die hier Bezug genommen wird, den Fokus auf die unterschiedlichen Bearbeitungsweisen im funktionalen und prädikativen Denken legt. Dementsprechend können die hier dargestellten Schwierigkeiten weder als Ergebnis von Schwanks Studie angenommen werden, noch kann der Anspruch auf Verallgemeinerung erhoben werden, da es sich bei den angeführten Fällen um Beobachtungen von Einzelfällen handelt.

Dennoch deuten sich bei der nachfolgenden Mustergänzungsaufgabe Schwierigkeiten beim funktionalen Lösen der Aufgabe an, da sie einen prädikativen Lösungsweg nahelegt. Dies soll im Folgenden genauer erläutert werden.

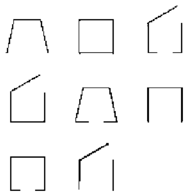


Abb. 3.2.: Aufgabe zur Komplettierung einer 3x3-Matrix aus der Untersuchung von Schwank et al. (Schwank 2003, S.72)

Bei einem prädikativen Lösungsansatz werden die einzelnen Abbildungen auf ihre Gemeinsamkeiten hin analysiert und so zunächst drei verschiedene Figurentypen ausgemacht (quadratartig, hausartig und trapezartig) welche im weiteren Verlauf je zu einer Menge zusammengefasst werden (□ ⊓ □). Nachdem die unterschiedlichen Merkmale der Elemente einer Menge identifiziert wurden (Boden: ⊔ ǀ ǀ ⌊ ⌋), werden mögliche Übereinstimmungen der Merkmale mit einer weiteren Menge abgeglichen, um übergeordnet Gemeinsamkeiten zu identifizieren (□ ⊓ □, ⌂ ⌂ ⌂). Abschließend wird die Struktur komplettiert, indem die fehlende Figur zur dritten Menge hinzugefügt wird (die trapezartige Figur mit geschlossenem Boden). Ein derartiges Vorgehen scheint auch anhand der Augenbewegungserfassung bestätigt zu werden, die zunächst die Menge der quadratartigen Figuren analysiert (Abb. b) in Abb. 3.3.) und daraufhin mit den übereinstimmenden Merkmalen der Menge der hausartigen Figuren abgleicht (Abb. c) in Abb. 3.3.).

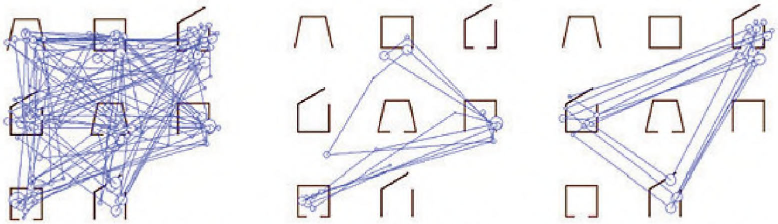


Abb. a): VP (prädikativ), Gesamtblickpfade bis zur Lösung nach 1 Min 11 Sek

Abb. b): VP (prädikativ), Blickpfade für 5 Sek ab der 22. Sek

Abb. c): VP (prädikativ), Blickpfade für 7 Sek ab der 28. Sek

Abb. 3.3.: Augenbewegungserfassung eines Probanden mit prädikativen Strukturen, in der der Äquivalenzabgleich erkennbar ist (Schwank et al. 2003, S.84)

Bei dieser 3x3-Matrix lässt sich eine funktionale Lösung schwerer realisieren, da die funktionale Wahrnehmung auf Veränderungsprozessen beruht und damit die Figuren als Zwischenprodukte in einem Prozess interpretiert werden (vgl. Schwank et al. 2003, S.84). Das heißt, der Proband sucht nach einer einheitlichen Vorschrift bezüglich der Konstruktion der einzelnen Elemente innerhalb einer Zeile (oder Spalte), um diese anschließend auf die übrigen Zeilen (oder Spalten) zu übertragen. Ein derartiges Vorgehen ist in dieser speziellen Matrix jedoch nur durch eine Erweiterung der Matrix möglich (vgl. Schwank et al. 2003, S.84), indem die drei Figuren einer Zeile (oder Spalte) hintereinandergelegt werden. Auf diese Weise ist erkennbar, dass sich die Merkmale von Deckel ( ) und Boden ( ) sequenziell wiederholen. Erst mithilfe dieser Erweiterung lässt sich die fehlende Figur schließlich ergänzen.

Die Gesamtblickpfade des Probanden (siehe Abb. a) in Abb. 3.4.) deuten derartige Probleme beim Lösungsprozess an, indem zum einen erheblich mehr Zeit zur Lösung benötigt wird, zum anderen aber auch im Vorgehen selbst. Die Abbildungen lassen darauf schließen, dass sich darum bemüht wird, zunächst einen Prozess aus den Figuren um den Mittelpunkt zu generieren. Die in Abbildung b) (in Abb. 3.4.) enthaltenen Sprünge aus der Struktur der zugrunde gelegten Figuren heraus zu anderen Figuren lassen sich so interpretieren, dass keine Regel ausgemacht werden konnte und deshalb weitere Figuren einbezogen wurden. Ebenso in Abbildung c) (in Abb. 3.4.) scheint der Proband einen Prozess für die erste Zeile ermitteln zu wollen, deren Scheitern zu dem Einbezug von Figuren außerhalb der gewählten Zeile führt. In der Begründung der Lösung zeigt sich schließlich, dass letztlich eine „Zerlegung der einzelnen Figuren in ihre Bestandteile Deckel, seitliche Wände, die zeilen- und spaltenweise gleichmäßig vorkommen müssen“ (Schwank et al. 2003, S.84) die Lösung gebracht hat.

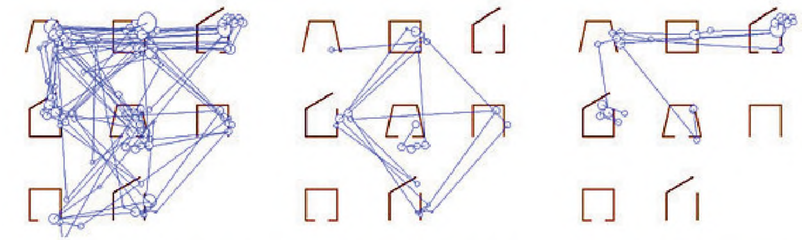


Abb. a): VP (funktional), Gesamtblickpfade bis zur Lösung nach 1 Min 53 Sek

Abb. b): VP (funktional), Blickpfade für 5 Sek ab der 22. Sek

Abb. c): VP (funktional) Blickpfade für 7 Sek ab der 28. Sek

Abb. 3.4.: Augenbewegungserfassung eines Probanden mit funktionalen Strukturen, in der der eine Prozesskonstruktion erkennbar ist (Schwank et al. 2003, S.84)

Das von Schwank angeführte Fallbeispiel zeigt, dass die intuitive Annahme, dass Aufgaben, die nicht dem eigenen Denken entsprechen, im Folgenden als *mismatch*-Aufgaben bezeichnet, zu Schwierigkeiten in der Bearbeitung bei Schülern mit dem „falschen“ Denkstil führen, (wahrscheinlich) seine Berechtigung hat. Doch wie bereits benannt, kann dies nur eine Idee der Auswirkungen einer Denkstiltheorie wiedergeben und insbesondere die von Schwank untersuchten Differenzen zwischen funktionalen und prädikativen Denken soll auch nicht die Ausrichtung dieser Arbeit darstellen.[15]

Doch auch die Bearbeitung der problemhaltigen Aufgabe aus Kapitel 3.1. deutet eine Einschränkung basierend auf dem visuellen und dem analytischen Vorgehen bereits an. Und die Beobachtungen in den vorangegangenen Studien und den hier angeführten Interpretationen und teilweise Neuinterpretationen verdeutlichen die damit einhergehenden Probleme. Trotzdem findet sich in der bisherigen Forschung zum mathematischen Denkstil keine

[15] Die dieser Arbeit zugrunde gelegte Unterscheidung der Denkstile folgt der ersten Stildimension von Borromeo Ferri und den damit verbundenen Auswirkungen auf den Bearbeitungsprozess. Zur genauen Beschreibung des Aufgabendesigns siehe Kapitel 5.4.2..

Untersuchung, wie sich entsprechend ausgerichtete Aufgaben auf den Lösungsprozess von Schülern auswirkt.
Zwar zeigen erste Fallstudien auf, dass ein Lehrerwechsel im Fach Mathematik teilweise konkret Auswirkungen auf die Leistungen der Schüler hat, jedoch wurden die Ursachen bisher vorrangig in der Vermittlungsart der Lehrperson gesehen (vgl. Borromeo Ferri 2014, S.16). So ergab die Studie von Sternberg zum Zusammenhang zwischen Denkstil von Lehrern und Schülern, dass „students performed better and were more positively evaluated by teachers when the students‘ styles matched rather than mismatched the styles of their teachers“ (Sternberg 2001, S.130).
Neben der Vermittlung von Inhalten und der damit einhergehenden Art, wie die Inhalte vermittelt werden, bildet jedoch insbesondere im Mathematikunterricht die Auswahl von Aufgaben einen wichtigen Faktor für den Lernprozess. Es ist dementsprechend durchaus denkbar, dass nicht allein die Vermittlungsweise für eine bessere Leistung der Schüler mit gleichem Denkstil verantwortlich zeichnet, sondern ein ebensolcher Anteil auf Aufgaben, die den eigenen Denkstil nahelegen, zurückzuführen ist.
Zudem liegt die Vermutung nahe, dass Schüler des einen Denkstils durch die spezifischen Merkmalsausprägungen des eigenen Denkens solche Aufgaben unter erschwerten Bedingungen zu lösen haben, die ihrem Denkstil entgegenstehen. Und die aufgeführten mathematikdidaktischen Studien deuten an, dass grundsätzlich ein Unterschied in der Leistungswahrnehmung der Schüler besteht, doch nicht, wie sich dieser an konkreten denkstilnahen Aufgaben zeigt.
An dieser Stelle soll jedoch auch deutlich gemacht werden, dass derartige Überlegungen und Vermutungen nicht bedeuten, dass Schüler des einen Denkstils nicht in der Lage wären, Aufgaben des anderen Denkstils zu lösen. Es soll nur darauf hingewiesen werden, dass es bisher keine Untersuchungsergebnisse dazu gibt, inwieweit der mathematische Denkstil an Leistungsunterschieden bei der Bearbeitung von Aufgaben beteiligt ist. Denn auch, wenn sich den angeführten Studien häufig die Forderung danach anschließt, ein, im Sinne des mathematischen Denkstils, möglichst breites Lernangebot zu machen, gibt es ein Forschungsdesiderat darüber, wie Schüler mit Aufgaben umgehen, die nicht ihrem Denken entsprechen. Und eben hier knüpft die vorliegende Studie an.

Doch zunächst sei noch ein detaillierter Blick auf die Aufgabenforschung der Mathematikdidaktik geworfen, um zum einen die Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht herauszuarbeiten, aber vor allem, um zu belegen, dass in Bezug auf die Aufgabenanalyse ebenfalls ein Forschungsdesiderat besteht.

4. Aufgaben als zentraler Analysegegenstand im Mathematikunterricht

> „Lehrkräfte planen täglich Aufgaben, sie führen täglich in Aufgaben ein, begleiten Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabenbearbeitung und kontrollieren die Lösung."
> (Maier et al. 2013, S. 9)

Um über die Notwendigkeit zu sprechen, einen neuen Aspekt in der Analyse von Aufgaben zu implementieren, soll vorab erläutert werden, welche Bedeutung Aufgaben für den Mathematikunterricht und dem damit verbundenen Lernen von Mathematik zukommt. Einen ersten Einblick gibt das Zitat von Uwe Maier, in dem er Aufgaben in Beziehung zur Lehrtätigkeit setzt und damit deutlich macht, welchen Stellenwert sie in unserem Berufsfeld einnehmen. Was in dem oben genannten Zitat von Maier jedoch nicht weiter thematisiert wird, ist ihre Bedeutung aus verschiedenen Perspektiven des Lehrerhandelns. Bromme, Seeger & Steinbring heben die Bedeutung von Aufgaben als Mittel zur Organisation des gesamten Unterrichtsstoffs hervor und beziehen sich damit sowohl auf unterschiedliche Aufgabentypen, die Stoffgebiete voneinander trennen, als auch auf Aufgaben, die als Orientierungspunkte für Lehrer-Schüler-Interaktionen dienen. Darüber hinaus betonen die Autoren, dass Aufgaben das Objekt der Lernanstrengung von Schülern sind, wobei sie explizit auf die Bedeutung des Umgangs mit Fehlern für die Lerntheorie hinweisen (vgl. Bromme/ Seeger/ Steinbring 1990, S.1ff).

Weiterhin sehen die Autoren Aufgaben als Fundament der Lehrertätigkeit, insofern sie die Aufgabe des Lehrers bzw. seine Tätigkeit als ein Handeln zwischen der Wissenschaft Mathematik auf der einen Seite und dem Wissen der Schüler auf der anderen darstellen, wodurch Aufgaben eine besondere Rolle zukommt. Dabei sind für die Autoren Aufgaben „weniger als Hilfsmittel anzusehen, die eine tiefe Kluft zwischen mathematischem Wissen und Schülerwissen überwinden helfen, sondern beschreiben [sie] als Gegenstand der Lehrer- wie der Schüler-Tätigkeit [...], in dem der Austausch und die Vermittlung von mathematischen und Schülerwissen stattfindet"(Bromme/ Seeger/ Steinbring 1990, S.3).

4.1. Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht

Im Mathematikunterricht von heute zeigt sich, dass ein Großteil des Unterrichtsgeschehens auf das Lösen von Aufgaben verwandt wird und in der Literatur wird dieser Eindruck bestätigt. So bestimmen Pauli & Reusser aus ihrer Analyse der Siebenländer-Videostudie den Anteil von Aufgabenbearbeitung im Unterricht auf 80% der verfügbaren Unterrichtszeit (Pauli/ Reusser 2006, S. 781). Und auch Gerd Walther stellt die Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht heraus, indem er anmerkt, dass die Erkenntnis über die Bedeutung von Aufgaben keineswegs eine neumodische Erscheinung ist. Er führt hierzu an – ohne dabei genauer auf die Ausgestaltung der Aufgaben einzugehen – dass bereits Kruckenberg in seinem 1935 erschienenen Handbuch für den Rechenunterricht der Volksschule „Die Welt der Zahlen im Unterricht" die Wichtigkeit von Aufgaben im Mathematikunterricht als „den wesentlichen Bestandteil des Rechenunterrichts" (Kruckenberg nach Walther 1985, S.30) herausstellt. Und Oehl bekräftigt 1967 die Bedeutung von Aufgaben für die Entwicklung der Schülertätigkeit in seinem Werk „Rechenunterricht in der Hauptschule" (vgl. Walther 1985, S.29ff).
Im Folgenden soll die Ursache für die Bedeutung von Aufgaben dargestellt werden, indem Aufgaben zunächst aus struktureller Sicht betrachtet werden, um dann ihre Bedeutung für den Lehr-Lern-Prozess aufzuzeigen.

4.1.1. Aufgaben als Element der Steuerung von Unterricht

Aufgaben haben nicht allein die Funktion Lerngegenstand zu sein, obwohl dies zweifelsfrei die wichtigste ist, sondern dienen auch der Steuerung von Unterricht. Das heißt, neben dem Einsatz von Aufgaben im Mathematikunterricht als Grundlage für das Lehren und Lernen dienen sie auch der Planung von Unterricht. In dieser Funktion nehmen Aufgaben maßgeblichen Einfluss auf die Planung von Unterricht, was in Einzelfällen dazu führt, dass eine Aufgabe bzw. ein Aufgabenkomplex als Basis genommen wird, um dann die entsprechenden unterrichtlichen Entscheidungen daran anzupassen (vgl. Bromme/ Seeger/ Steinbring 1990, S.1).

Dabei übernehmen Aufgaben im Sinne der „Rahmung eines Themas“ unterschiedliche Funktionen in Unterrichtsprozessen. Es geht hierbei darum mithilfe von Aufgaben den Einstieg in ein neues Thema zu organisieren oder aber auch ein Thema entsprechend abzuschließen. Wobei sich die Planung hier nicht nur auf die Auswahl von Aufgaben beschränkt, sondern auch auf ihre Bearbeitung im Unterricht sowie die Art ihrer Präsentation.
Dabei werden, je nach Einstiegsform, entweder typische Aufgaben oder aber eine weitgefasste Problemstellung des derzeitigen Themas gewählt, an denen bestimmte Wissenselemente bzw. Fertigkeiten eingeführt werden. Das hat auch die Dreiländer-Videostudie von Pauli & Reusser ergeben. So haben die Analysen gezeigt, dass Mathematikunterricht in Deutschland üblicherweise ein neues Thema einführt, indem nach einer Repetitionsphase eine bestimmte Problemstellung anhand eines kleinschrittigen Lehrgesprächs entwickelt wird (vgl. Pauli/ Reusser 2006, S.777). Überdies unterscheidet Walsch bei der Verwendung von Aufgaben zur Erarbeitung neuer Inhalte, ob es sich bei diesen Inhalten „um die Aneignung eines Begriffes, eines Satzes oder eines Algorithmus Verfahrens“ (Walsch 1984, S. 62) handelt. Er entwickelt diesbezüglich unterschiedliche Anforderungen an die entsprechenden Aufgabenkomplexe, wobei allen drei Kategorien die übergeordnete Anforderung der Ausbildung mathematiktypischer Denkweisen gemein ist.
Der Abschluss hingegen erfolgt häufig durch anwendungsbezogene Aufgaben, die mit allen neu erlernten Inhalten des Themas zu lösen sind (vgl. Wittmann 2012, S.177). Hierbei soll „anwendungsbezogen“ nicht auf realitätsnahe Aufgaben hinweisen, sondern lediglich auf Aufgaben, die in ihrer Bearbeitung komplexere Lösungswege erfordern, sodass eine Vielzahl der neu erlernten Inhalte zur Anwendung kommt.

Und auch innerhalb eines abgeschlossenen Themas kommen Aufgaben vielfältig zum Einsatz, wobei hier das Einüben und Festigen des Unterrichtsstoffs und von Algorithmen im Vordergrund steht (vgl. Bromme/ Seeger/ Steinbring 1990, S.11). Dabei kann die Auswahl und Aufbereitung von Aufgaben dazu beitragen, das Verständnis für die Beherrschung eines Algorithmus oder aber auch die Einübung von Routinen und Automatisierung zu fördern (vgl. BLK 1998, S.85).

Neben den eben dargestellten Einflussfaktoren für die Auswahl, Ausgestaltung und den Einsatz von Aufgaben im Mathematikunterricht ergeben sich auch noch andere Beweggründe für den Einsatz von Aufgaben. In dieser Arbeit soll jedoch nur kurz auf zwei weitere Funktionen Aufgaben hingewiesen werden. Zum einen auf die der Leistungsmessung und zum anderen auf die Funktion als Evaluation für den eigenen Unterricht.
Ziel dieser Art von Aufgaben ist es den Wissensstand der Schüler sowie das Erreichen von Unterrichtszielen zu erheben. Deshalb kommen in der Leistungsmessung vor allem solche Aufgaben zum Einsatz, die in ähnlicher Form bereits im Unterrichtsgeschehen thematisiert und/oder bearbeiteten worden sind. Dies scheint nicht weiter verwunderlich, da Lehrpersonen Klassenarbeiten oder Tests, sprich Leistungsmessungen, aus ihrem eigenen Aufgabenfundus zusammenstellen, mit der Intention die unterrichtliche Aufgabenkultur abzubilden (vgl. Vollstädt 2005).
Demgegenüber bezieht sich die Evaluation des eigenen Unterrichts nicht auf die Feststellung des Wissensstandes von Schülern, sondern darauf, wie unterrichtliche Maßnahmen vom Schüler verarbeitet wurden bzw. ob diese den intendierten Effekt hatten. Dabei kommt den Aufgaben die Rolle zu, vielfältiges Arbeiten zuzulassen, um anhand der Bearbeitung der Schüler Schlussfolgerungen für den eigenen Unterricht zu ziehen.

4.1.2. Aufgaben auf Ebene der Gestaltung des Lehrens und Lernens

Grundsätzlich sei in diesem Kapitel zunächst geklärt, was im Allgemeinen unter Lernen verstanden wird, um die Bedeutung von Aufgaben und insbesondere Mathematikaufgaben für das Lernen herauszustellen.

Grundsätzlich, und nicht allein auf Schule und Unterricht bezogen, wird in der Kognitionspsychologie unter Lernen im Allgemeinen eine Verhaltens- oder Wissensveränderung verstanden, die jedoch nicht nur kurzfristig, wie beim Gebrauch von Drogen oder Müdigkeit, beobachtbar ist, sondern relativ überdauert. Dabei ist die Verhaltensveränderung eine Folge von Übungstätigkeiten oder anderen Erfahrung, bei denen es sich um einen aktiven Prozess handelt, in dem Bedeutung durch den Informationsaustausch mit der

Umgebung bzw. anderen Personen konstruiert wird (vgl. Mietzel 2017, S.17f).
Explizit auf Schule und der dort gegebenen Darbietung von Lerngelegenheiten beschreiben Bruner et al. Lernen als

> „einen mentalen Prozess, der die selbstständige und aktive Auseinandersetzung mit dem eigenen Wissen beinhaltet. Das Produkt dieses Prozesses ist neben prozeduralen Fertigkeiten vor allem der Aufbau konzeptuellen fachlichen Wissens, das ein tiefergehendes Fachverständnis durch eine Vernetzung von Wissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten ermöglicht" (Brunner et al. 2006, S.57).

Der Prozess des Lernens kann dabei sowohl bewusst und absichtlich als auch implizit und beiläufig vollzogen werden, wobei die Vertreter der Kognitionspsychologie eine erhebliche Bedeutung im impliziten Lernen sehen. Denn auf diese Weise werden viele komplexe Zusammenhänge und Gegenstände des alltäglichen Lebens aufgenommen, ohne sich bewusst mit diesen auseinanderzusetzen und damit Kapazitäten in der kognitiven Leistung frei werden. Trotzdem kann Lernen keineswegs als ‚leicht' zu durchlaufender Prozess verstanden werden. So zeigt besonders die Suche nach Methoden, die das Lernen erleichtern, dass diejenigen Lerninhalte, die mit einer gewissen Anstrengung und Ausdauer des Lernenden verbunden sind, am wirkungsvollsten sind bzw. am langfristigen im Gedächtnis verbleiben. Allerdings ist im Unterricht, d. h. einer bewusst auf Lernen angelegte Situation, häufig zu beobachten, dass trotz intensiver Übungstätigkeiten die damit angeregte Wirkung des Lernens nur von kurzer Dauer ist und teilweise nur bis zur nächsten Prüfung vorhält (vgl. Mietzel 2017, S.17ff).

Um darüber hinaus die Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht zu erfassen, ist es zunächst nötig, unterrichtliches Lernen nach seiner Zielsetzung zu analysieren. Hierzu findet sich in der Literatur eine Vielzahl von Differenzierungen (vgl. Roth 1963, Seel 2003, Gagné 2011), aus der sich für diese Arbeit folgende Strukturierung der Lernziele ergeben hat:

- Lernen, das sich auf *Wissen* bezieht und somit zum einen als dasjenige Lernen verstanden werden kann, das sich mit dem Präsenthalten von

Wissen, wie es beispielsweise beim Lernen von Vokabeln vorliegt, beschreiben lässt. Und es zum anderen Lernen ist, das sich auf die Konstruktion von Wissen und den damit verbundenen Begriffsbildungsprozessen bezieht.

- Das Lernen von *Fähigkeiten* beinhaltet das Ausbilden sowie die (Weiter-)Entwicklung des sozialen, motorischen sowie kognitiven Vermögens einer Person, das zur Bewältigung von allgemeinen Anforderungen nötig ist.
- Lernen, das das *Denken* und den damit verbundenen kognitiven Strategien umfasst, und hier vor allem die Kompetenzen im Problemlösen sowie dem logischen Schließen einschließt (vgl. Kapitel 1.1.1.).
- Das Lernen von *Gesinnung, Werthaltung und Einstellung* zielt dabei darauf ab, dem Lernenden moralische Vorstellung zu vermitteln, damit er bestimmte Situationen, Äußerungen und Handlungen angemessen bewertet, und sein soziales Handeln entsprechend ausrichtet.

Ausgehend vom Lösungsprozess von Mathematikaufgaben lässt sich herausstellen, dass die oben angeführten Lernziele nicht isoliert betrachtet werden können, sondern sich gegenseitig bedingen. So kann beispielsweise das Lernen von Begriffen nicht ohne eine Anwendung logischer Schlussfolgerungen von statten gehen, da in der Begriffsbildung auch grundsätzlich Querverbindungen gezogen werden, die auf einer entsprechenden Logik beruhen. Und auch in umgekehrter Weise zeigt sich der Zusammenhang beider Lernziele, da für die Lösung eines Problems auch immer auf vorhandenes Wissen zurückgegriffen werden muss.

Aus den vorangestellten Erläuterungen zum allgemeinen Lernen sowie der Analyse von grundsätzlichen Lernzielen ergibt sich als logische Schlussfolgerung, dass insbesondere Problemstellungen dazu geeignet sind, Lernprozesse anzuregen, während ‚eingetrichtertes Faktenwissen' wenig zum Lernerfolg beiträgt.
Für die Unterrichtsgestaltung ergibt sich aus dieser Auffassung, dass Wissen nicht einfach mitgeteilt werden kann, sondern ihm grundsätzlich eine Aufgabe oder Problemsituation vorausgehen sollte. Denn auf diese Weise erkennt der Lernende, welche Wissenslücken noch vorhanden sind, erkennt aber

auch Anknüpfungspunkte, indem er durch gemachte Vermutung relevantes Vorwissen aktiviert. Das entsprechende Vorwissen wird durch die Aufgabe entsprechend modifiziert, was wiederum zu einem vertieften Verständnis mathematischer Verfahren oder Begriffe und dem damit verbundenen Ausbau des individuellen Begriffsnetzes führt.
Ein derartiges Vorgehen hat darüber hinaus erheblichen Einfluss auf die Motivation sowie das Interesse des Lernenden, indem Probleme bzw. Aufgaben weitestgehend selbständig gelöst werden und damit ein positives Selbstkonzept fördert (vgl. Brunner et al. 2006, S.57).

4.2. Definition des Aufgabenbegriffs

Nachdem die Bedeutung von Aufgaben für Unterricht und Lernen in den vorangegangenen Kapiteln ausführlich dargestellt wurde, gilt es nun den hier zur Anwendung kommenden Aufgabenbegriff zu klären. Denn obwohl üblicherweise ein intuitives Verständnis darüber besteht, was eine Aufgabe ist, ergibt sich die Notwendigkeit zu klären, was explizit unter einer Aufgabe zu verstehen ist und inwieweit sich Mathematikaufgaben von einem allgemeinen Aufgabenbegriff unterscheiden. Denn es zeigt sich in der Alltagsprache ein weiter verwendeter Aufgabenbegriff als der, der sich in der Schule findet.
So wird im Alltag der Begriff Aufgabe ganz unterschiedlich verwendet, hier wird beispielsweise davon gesprochen „Eine Aufgabe innezuhaben“, „Eine Aufgabe zu haben“ oder „Eine Aufgabe zu erledigen“. Dabei werden mit den beiden erstgenannten Aussprüchen vor allem auf ein Bündel von „Verpflichtungen“ verwiesen, die im Rahmen einer Tätigkeit gefordert werden, während der letztgenannte Ausspruch sich auf ein konkretes Ziel bezieht, welches es zu erreichen gilt.
Ein ähnlich breit angelegtes Aufgabenverständnis zeigt sich, wenn von Aufgaben im schulischen Kontext gesprochen wird, denn auch in den unterschiedlichen Unterrichtfächern zeigen sich Unterschiede zwischen der Verwendung des Aufgabenbegriffs. In diesem Zusammenhang legt Doyle (1983) den Fokus auf drei Aspekte des Bearbeitens von Aufgaben:

- *products*: Die von Doyle angesprochenen Produkte einer Aufgabe beinhalten die dokumentierten Ergebnisse, die in der Aufgabe gefordert und vom Lernenden formuliert werden. Hierbei schränkt Doyle nicht weiter ein, um welche Art von Produkten es sich handelt, vielmehr führt er ein breites Spektrum an, welches sowohl Essays als auch eine Reihe von Testaufgaben umfasst.
- operations: Als weiteren Aspekt von Aufgaben führt er jene Handlungen an, die durch die Aufgabenstellung angeregt bzw. explizit verlangt werden, wodurch schließlich das Produkt der Aufgabe erzeugt wird.
- resources: Zudem sind nach Doyle die gegebenen Voraussetzungen, die den Lernenden zur Bearbeitung der Aufgabe zur Verfügung stehen, ein weiterer wichtiger Aspekt von Aufgaben.

Aus ebendiesen drei grundlegenden Aspekten von Aufgaben definiert sich für Doyle Aufgabe im schulischen bzw. akademischen Kontext als:

> „Academic tasks, in other words, are defined by the answers students are required to produce and the routes that can be used to obtain these answers“ (Doyle 1983, S.161).

Ausgehend von diesem sehr weit gefassten und wenig handhabbaren Begriff einer schulischen Aufgabe grenzen Stein, Grover & Henningsen *mathematical tasks* zum einen durch die Verortung in der Mathematik und zum anderen durch Dauer bzw. die Länge der Aufgabe ab und definieren sie als

> „a classroom activity, the purpose of which is to focus students' attention on a particular mathematical idea. An activity is not classified as a different or new task unless the underlying mathematical idea toward which the activity is oriented changes“ (Stein/ Grover/ Henningsen 1996, S.460).

Doch gerade in Anbetracht eines Unterrichtsgesprächs gilt es außerdem zu klären, inwieweit sich Mathematikaufgaben von Fragen im Gespräch gegeneinander abheben. Während Fragen eines Unterrichtsgesprächs, vor allem

das Wiederholen bereits erarbeiteter Inhalte, das Beseitigen von Unklarheiten sowie den Fortgang des Unterrichtsverlaufs zum Ziel haben, enthalten Aufgaben eine explizite Aufforderung zum Auseinandersetzten mit einem spezifischen mathematischen Sachverhalt. Durch diese unterschiedliche Zielsetzung lässt sich zwischen Unterrichtsfrage und Aufgaben unterscheiden (vgl. Neubrand 2002, S.17).
Aus den hier dargelegten Unterschieden und den damit verbundenen unterschiedlichen Anforderungen an den Begriff von Aufgaben wird hier dem von Neubrand verkürzten Begriff von Mathematikaufgaben gefolgt:

> „Aufgaben sind eine Aufforderung zur *gezielten* Bearbeitung eines *eingegrenzten* mathematischen Themas. Aufgaben sind immer Auseinandersetzung mit einem *Beispiel* eines Sachverhalts“ (Neubrand 2002, S.16f).

Natürlich lässt sich der hier verwendeten Aufgabenbegriff noch explizieren, indem auf die unterschiedlichen Aufgabentypen wie beispielsweise Problemlöseaufgaben und Modellierungsaufgaben eingegangen wird. Allerdings ist eine derartige Verfeinerung der Definition hier nicht von Bedeutung, da davon ausgegangen wird, dass die vorliegenden Differenzierungsmerkmale die unterschiedlichen Aufgabentypen gleichermaßen betreffen.

4.3. Kritik am bisherigen Einsatz von Aufgaben im Mathematikunterricht

Wie in den vorangegangenen Kapiteln bereits dargestellt, haben Aufgaben einen großen Einfluss auf mehrere Ebenen des Lernens von Mathematik. Walsch spricht in diesem Zusammenhang von lokalen Lernzielen und globalen Zielsetzungen, wobei er unter lokalen Zielen das Lernen und Aneignen von Begriffen oder Sätzen fasst, während er die „Entwicklung allgemeine[r] Fähigkeiten, Einstellungen, Verhaltensweisen usw.“ (Walsch 1984, S.61) subsumiert. Allerdings gilt dies nur für Aufgaben, die die Schüler kognitiv herausfordern und zum Bearbeiten anregen. Aber trotz des Wissens darum, welches Potenzial entsprechend eingesetzten Aufgaben innewohnt, wird auch immer wieder darauf verwiesen, dass die Lehrpersonen in ihrem Unterricht dieses Potenzial nicht entsprechend ausschöpfen. Überwiegend handelt es

sich um Routineaufgaben, bei denen vorwiegend Kalküle abzuarbeiten sind. Mit Verweis auf Kunter & Baumert spricht Drüke-Noe in diesem Zusammenhang von kognitiv anregungsarmen Aufgaben (vgl. Drüke-Noe 2014, S.313).
Dies ist kein neues Problem. So macht Walsch bereits 1984, also noch vor dem PISA-Schock und der TIMSS-Studie, auf Fanghänels Analyse zum Einsatz von Aufgaben aufmerksam. Dabei untersuchte Fanghänel 607 Aufgaben aus der Sekundarstufe 1 und ihre Funktion innerhalb des Unterrichtsgeschehens. Es zeigte sich, dass 72% der Aufgaben nur der Festigung oder der Kontrolle von Wissen und Können des aktuellen Themas dienten und lediglich 15% der Aufgaben der Erarbeitung neuer Inhalte. Und gerade auch in Bezug auf das Potenzial von Aufgaben für den Lernprozess zeigt seine Aufgabenanalyse, dass 85% der getesteten Aufgaben einfach nach einem bekannten Muster gelöst werden konnten und dass generell die Methode des Vor- und Nachahmens im Lernprozess dominieren (vgl. Walsch 1984, S. 59f).
Und auch neuere Studien zeigen, dass Aufgaben nicht immer ihrem immanenten Potential entsprechend eingesetzt werden bzw. die Auswahl der Aufgaben vorrangig einem Einüben oder Festigen von mathematischen Verfahren dient. Im Folgenden soll auf die Ergebnisse zweier Studien ausführlicher eingegangen werden: Zum einen auf die Analysen der ersten TIMSS-Videostudie[16] und zum anderen auf die Ergebnisse aus dem COACTIV Projekt.

Zwar zielt Neubrands Analyse der Dreiländer-Videostudie vor allem auf die Analyse von Unterrichtssituationen im Allgemeinen ab, doch führt die Bedeutung von Aufgaben für den Unterricht zu einer detaillierten Analyse von Aufgaben und deren Einsatz im Unterricht. So konnte sie nachweisen, dass Aufgaben, bei denen nur eine Wissenseinheit[17] benötigt wird, dominieren und Aufgaben, bei denen eine Modellierung[18] erforderlich ist, machen nur etwa 10% des Unterrichts aus (vgl. Neubrand 2002, S272f).

[16] Auch wenn es sich bei den TIMSS-Videostudien um Ländervergleiche handelt, soll hier vor allem auf die Ergebnisse bezüglich des deutschen Mathematikunterrichts verwiesen werden.
[17] Hierbei bezeichnet *Wissenseinheit* einen strukturierten Wissensbestandteil, der für das Lösen einer Aufgabe notwendig ist (siehe Kapitel 4.4.2.1.).
[18] Nach Neubrand ein Herauslösung und Anwendung von impliziten Wissen.

Im Vergleich mit den beiden anderen Ländern der Dreiländer-Videostudie zeigt sich im deutschen Mathematikunterricht der höchste Anteil fertigkeitszentrierter Aufgaben, während „die Förderung der Modellierungsfähigkeit, und damit verbunden die fähigkeitsorientierte Ausrichtung des Mathematikunterrichts, den geringsten Stellenwert einnimmt" (Neubrand 2002, S.295). Pauli & Reusser benennen das Lösen einfacher Übungsaufgaben sogar auf einen Anteil von 89% (vgl. Pauli/ Reusser 2006, S.776).

Im Rahmen der COACTIV-Studie untersuchten Jordan und Kollegen in den Jahren 2003 und 2004 über 40.000 Aufgaben auf ihr Potenzial zur kognitiven Aktivierung im Mathematikunterricht. Dabei erfasst er das kognitive Potenzial einer Aufgabe mithilfe von 6 Kategorien: *Mathematisches Argumentieren, Inner- und Außermathematisches Modellieren, Gebrauch mathematischer Darstellungen, mathematische Grundvorstellungen und der Umgang mit mathematikhaltigen Texten* (siehe Kapitel 4.4.2.2.).
Bei einem kognitiv aktivierenden Einsatz der Aufgaben wäre zu erwarten, dass sich durch die breite Streuung innerhalb seines Wertebereichs von 0 (Kompetenz nicht erforderlich) bis 3 (Kompetenz auf hohem Niveau erforderlich) ein Mittelwert zwischen 1 und 2 ergibt. Jedoch zeigt die Analyse von Einstiegsaufgaben, Hausaufgaben wie auch Aufgaben aus Klassenarbeiten Mittelwerte zwischen 0,05 (Mathematisches Argumentieren) und 0,78 (Mathematische Grundvorstellungen). Das heißt, dass Fähigkeiten wie das mathematische Argumentieren im Mathematikunterricht scheinbar gar nicht gefordert werden bzw. zur Lösung der Aufgaben maximal Elementarkompetenzen (z.B. elementare Grundvorstellungen) nötig sind (vgl. Jordan et al. 2008, S.99f). Insgesamt ziehen Jordan und Kollegen als Fazit aus der Analyse, dass qualitätsvolle Aufgaben im Mathematikunterricht nur unzureichend eingesetzt werden. Er spricht davon, dass mathematisches Argumentieren an Aufgaben im Mathematikunterricht kaum stattfindet, dass die Aufgabentexte sprachlich wenig anspruchsvoll sind und nur selten mit anspruchsvollen mathematischen Darstellungen umgegangen werden muss. Zudem werden nur wenige außermathematische und innermathematische Bezüge im Sinne eines Modellierens hergestellt.
Zur Prüfung des eigenen Ratings wurden die Aufgaben aus dem COACTIV-Fachwissenstest für Lehrkräfte sowie den nationalen und internationalen PI-

SA-Tests 2003 nach dem gleichen Klassifikationsschema analysiert. Vor diesem Hintergrund zeigt sich, dass das Rating durchaus sensibel für einen höheren Anspruch an die Aufgaben ist (vgl. Jordan et al. 2008, S.100).

Vor dem Hintergrund des Aufgabeneinsatzes in Klassenarbeiten untersuchte Drüke-Noe die im Rahmen der COACTIV-Studie erhobenen Klassenarbeiten gesondert und stützte ihre Ergebnisse auf über 25.000 Aufgaben der Klassen 9 und 10.
Sie stellt fest, dass auch in Klassenarbeiten Standardaktivitäten auf niedrigem Niveau dominieren und „in beiden Jahrgangsstufen nur (sehr) geringe Anteile von Aufgaben Außer- bzw. Innermathematisches Modellieren, Argumentieren sowie den Gebrauch von Darstellung überhaupt erfordern […]. Hingegen ist kaum eine Aufgabe ohne Technisches Arbeiten, d. h. ohne ein Umgehen mit unterschiedlich komplexen Kalkülen, zu lösen" (Drüke-Noe 2014, S.315). Darüber hinaus zeigt sich nur in den anspruchsvollsten Aufgaben die Forderung nach Aktivität auf zumindest einem mittleren Niveau. Komplexe Tätigkeiten oder gar Reflexionen sind gar nicht zu finden (vgl. Drüke-Noe 2014, S.315).

4.4. Angewandte Analysedimensionen und bestehende Konzepte

Die grundsätzlichen Schwierigkeiten von Aufgabenanalysen besteht sicherlich darin, dass es zwischen dem inhärenten und dem tatsächlich realisierten Potenzial einer Aufgabe zur Diskrepanz kommen kann, wenn beispielsweise das individuelle Vorwissen eines Schülers seine Interpretation einer Aufgabe und damit seine Vorgehensweise beeinflusst. Denn eine Aufgabenanalyse kann lediglich die Aufgabe analysieren, nicht jedoch das individuelle Vorwissen jedes Schülers.
Trotzdem ist es hilfreich, verwendete Aufgaben zu analysieren, um so ihr Potenzial für den Lernprozess erkennen zu können. Dabei sind, je nach Intention und Einsatz der Aufgaben, verschiedene Analysemodelle denkbar. So bilden beispielsweise die Bildungsstandards Mathematik nicht nur ein Anforderungsprofil, sondern durchaus eine Möglichkeit, Aufgaben und ihrem Einsatz im Mathematikunterricht auf die Zielsetzung hin zu analysieren.

Im Folgenden sollen nun einige differenziertere Analysemodelle vorgestellt werden, wobei hier unterschieden wird zwischen allgemeindidaktischen Analysemodellen und solchen, die speziell unter der Perspektive der Mathematikdidaktik entstanden sind. Denn trotz der mathematikdidaktischen Ausrichtung dieser Arbeit begründet sich die Aufführung der Bloomschen Taxonomie darin, dass sie als eine der ersten Ansätze zur Klassifizierung von Aufgaben gilt und damit Einfluss auch auf die Mathematikdidaktik hatte. Zudem lässt sich der Vorteil und das Potenzial eines allgemeindidaktischen Aufgabenanalysesystems grundsätzlich in der Vereinfachung von Unterrichtsplanung und in der besseren Möglichkeit zum überfachlichen Austausch erkennen.

4.4.1. Die Bloomsche Taxonomie zur Verortung von Aufgaben

Mit dem Ziel Lehrende dazu anzuregen, ihren Unterricht kognitiv anspruchsvoller zu gestalten und so die bloße Überprüfung von Faktenwissen zu überwinden, entwickelten Bloom et al. 1956 eine vollständige Taxonomie der schulischen Lernziele. Dabei untergliedert er seine Taxonomie in den kognitiven Bereich sowie den affektiven und den psychomotorischen Bereich. Im Folgenden wird hier der kognitive Bereich genauer dargestellt. Denn obwohl der affektive Bereich mit seinen Lernzielen zu Einstellungen und Weltanschauungen durchaus Schnittstellen mit der Mathematik zulässt, (vgl. Krathwohl/ Bloom/ Masia 1975), ist die vorliegende Arbeit auf kognitive Prozesse ausgerichtet.

Die Bloom und Kollegen gliedern dabei ihre Lernzieltaxonomie in einer hierarchischen Struktur, aufsteigend nach der Komplexität der geforderten Verhaltensweisen im kognitiven Bereich, und gehen dabei davon aus, dass jede Stufe die untergeordneten einschließt.

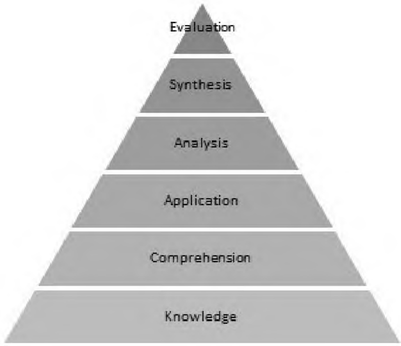


Abb. 4.1.: Taxonomy of Educational Objectives von Bloom (vgl. Bloom et al. 1972)

Bloom et al. räumen ein, dass es zur Entwicklung einer Klassifikation eine nahezu unbegrenzte Vielfalt von Aufgaben und damit ein breites Spektrum an Klassen gibt, weshalb sie sich bei der Entwicklung ihres Modells an dem beabsichtigten Schülerverhalten orientierten. Sie gehen davon aus, dass sich die angestrebten Ziele der Aufgaben an einer relativ kleinen Klassenanzahl von Verhalten zeigen und nehmen weiterhin an, dass unabhängig von Schulart oder Klassenstufe im Wesentlichen identische Verhaltensweisen beobachtet werden können (vgl. Bloom et al. 1972, S.22ff).
Auf der untersten Stufe der Bloomschen Taxonomie steht das Wissen (*Knowledge*), welches in diesem Zusammenhang das „Erinnern von Besonderheiten und Allgemeinheiten, das Erinnern von Methoden und Prozessen oder das Erinnern von Mustern, Strukturen oder Festlegungen“ (Bloom et al. 1972, S. 217) umfasst. Sie konkretisieren dabei das Erinnern von Besonderheiten und Allgemeinheiten als das Wissen von konkreten Fakten, Symbolen und ihre Verwendung sowie isolierbaren Informationen. Das Erinnern von Methoden und Prozessen beschreiben sie als das Wissen vom Gebrauch von Konventionen sowie von Kriterien, Klassifikation und Methoden und schließlich das Erinnern von Mustern, Strukturen und Festlegung als das Wissen über Verallgemeinerungen und Aktionen bestehend aus ihren Prinzipien, Theorien und Strukturen (vgl. Bloom et al. 1972, S.217ff).
Das Verstehen vollzieht sich bei Bloom et al. auf drei Ebenen. Die erste Ebene beinhaltet das Verstehen als „Wissen darüber, worum es geht“ und schließt dabei die weitere Bedeutungserfassung und das Herstellen von Sinn-

zusammenhängen aus. Die Zuschreibung von Bedeutung erfolgt auf der nächsten Ebene, auf der der Anspruch der Aufgabe darin besteht, dass die Inhalte wiedergegeben werden können, sowohl als 1-zu-1-Wiedergabe (*Translation*) als auch als Zusammenfassung (*Interpretation*). Auf der höchsten Ebene kommt schließlich das Element des Schlussfolgerns (*Extrapolation*) hinzu (vgl. Bloom et al. 1972, S. 220).

Auf der Stufe der Anwendung (*Application*) führen Bloom et al. den Gebrauch von Abstraktionen an, der sich auf vorliegende Regeln über Prozeduren, technische Prinzipien und Theorien oder verallgemeinerte Methoden stützt.

Die Analyse (*Analysis*) als nächsthöheres Lernziel bezieht sich auf die Identifikation von Elementen einer Situation, auf die Beziehung zwischen diesen einzelnen Elementen sowie der Anordnung bzw. den Prinzipien der Anordnung eben jener Elemente.

Erfordert es eine Aufgabe, dass Elemente neu zu einem Ganzen zusammengesetzt werden müssen, so handelt es sich nach Bloom et al. um Synthese (*Synthesis*). Dabei ist der erste Schritt eine einzigartige Kommunikation, die es ermöglicht, individuelle Ideen, Gefühle und/oder persönliche Erfahrungen so aufzubereiten, dass andere sie nachvollziehen können. Darüber hinaus ist eine weitere Forderung der Synthese einen geeigneten Handlungsplan für die Erfordernisse der Aufgabe zu entwickeln und schließlich das Entwickeln, Klassifizieren und Erklären abgeleiteter Regeln (vgl. Bloom et al. 1972, S.222f).

Als anspruchsvollstes Lernziel betrachten Bloom und Kollegen die *Evaluation*, bei der es um ein Urteilen darüber geht, inwieweit bestimmte Materialien, Aussagen und Methoden bestimmte Kriterien erfüllen. Dabei kann sich das Urteil auf Kriterien beziehen, die der inneren Evidenz folgen und damit internen Normen wie Logik oder Richtigkeit, oder aber auch auf äußere Kriterien, die durch den Schüler selbst bestimmt wurden oder durch der aufgabenimmanenten Kriterien vorgegeben wurden (vgl. Bloom et al. 1972, S.223). Gegenüber Meinungen grenzt sich das Urteilen oder Bewerten durch den Grad an Bewusstheit ab. So handelt es sich bei der Evaluation um ein Bewerten nach bewusst angelegten Kriterien, während Meinungen auf einem intuitiven Gefühl beruhen (vgl. Göldi 2011, S.55).

Wie bereits angeklungen hat Bloom neben seiner Lernzieltaxonomie für den kognitiven Bereich auch eine Klassifizierung von Lernzielen im affektiven Bereich entwickelt, worunter er unter anderem Begriffe wie Interesse, Einstellung und Wertschätzung subsumiert. Und auch, wenn diese Taxonomie durchaus Bedeutung in der Mathematik beikommt, bilden sie im Hinblick auf die Denkstiltheorie eine untergeordnete Rolle, weshalb an dieser Stelle darauf verzichtet wird, sie ebenfalls vorzustellen.

4.4.2. Mathematikdidaktische Analysekonzepte

Bromme, Seeger & Steinbring unterteilen die Aufgabenanalyse in zwei Teile. Zum einen fassen sie unter dem Begriff der rationalen Aufgabenanalyse den Bereich der mathematisch inhaltlichen Kriterien sowie ihre Gliederungsprinzipien zusammen und stellen die empirische Aufgabenanalyse dem gegenüber. Dabei werden unter der empirischen Aufgabenanalyse die tatsächlich angewandten Gliederungen und Bearbeitungen der Schüler subsummiert (vgl. Bromme/ Seeger/ Steinbring 1990, S.4f).
Im Folgenden wird auf neuere Analysemodelle eingegangen, die sich an den speziellen Anforderungen des Mathematikunterrichts orientieren, um auf diese Weise zu zeigen, ob und inwieweit der Denkstil in den Aufgabenanalysen Beachtung findet.

4.4.2.1. Neubrands Analysemodell

Mit dem Ziel Unterrichtssituationen adäquat analysieren zu können, entwickelte Neubrand ein Analyseverfahren, um die Qualität von Aufgaben objektiv zu bestimmen.
In diesem Zusammenhang analysiert sie zunächst den Aufgabenkern, gefolgt von der Aufgabenperipherie und abschließend die strukturbildenden Aspekte einer Aufgabe. Dabei subsumiert sie unter dem Aufgabenkern die Variablen Art des Wissens, Wisseneinheiten und Kontext.

<table>
<tr><th></th><th>Kategorie</th><th>Subkategorie</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Aufgabenkern</td><td>Art des Wissens</td><td>- prozedurales bzw. algorithmisches Wissen
- Faktenwissen
- konzeptuelles bzw. begriffliches Wissen
- mehrere Wissensarten treten kombiniert auf</td></tr>
<tr><td>Wissens-einheiten</td><td>- eine Wissenseinheit explizit gegeben
- eine Wissenseinheiten implizit enthalten
- mehrere Wissenseinheiten explizit gegeben
- unter mehreren Wissenseinheiten sind nicht alle, aber mindestens eine implizit enthalten
- mehrere implizite Wissenseinheiten liegende Aufgabe zugrunde</td></tr>
<tr><td>Kontext</td><td><table>
<tr><th colspan="7">Kontext der Aufgabe</th></tr>
<tr><td>allgemeiner Kontext</td><td colspan="3">außermathematisch</td><td colspan="2">inner-mathematisch</td><td rowspan="2">ohne erweiterten math. Kon-text</td></tr>
<tr><td>Situativer Kontext</td><td>real world</td><td>schein-bare real world</td><td>measure-ment</td><td>global</td><td>local</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Mathe-matisches Stoffgebiet</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aufgabenperipherie</td><td>Anwei-sungen</td><td>- explizit genannt (z.B. etwas ausrechnen, etwas ausfüllen oder etwas tun etc.)
- implizit in der Aufgabe enthalten (z.B.</td></tr>
<tr><td>Grad der Ausführung</td><td>- in der Aufgabe ist (nur) nach der Lösungsidee gefragt
- die Aufgabe ist vollständig zu lösen</td></tr>
<tr><td>Art der Aufgaben-repräsen-tation</td><td>- Inwieweit kommen Text und/oder Symbole vor
- Visualisierung in Form von Bildern, Konstruktionen, gra-fische Darstellung usw.
- reale Gegenstände (zum Beispiel Modelle geometri-scher Körper) sind Bestandteil der Aufgabenstellung
- es werden Handlungsteile in der Aufgabe einbezogen</td></tr>
</table>

Tab. 4.1.: Neubrands Aufgabenanalysekriterien

Mit der von Neubrand verwendeten Analysedimension, die die Art des Wissens betrifft, trägt sie dem Umstand Rechnung, zu identifizieren, ob es sich bei den Aufgaben primär um fertigkeitsorientierte, d. h. Aufgaben, die auf das Beherrschen bestimmter Prozeduren abzielen, oder fähigkeitsorientierte Aufgaben, die sich dem Ausbau von Fähigkeiten wie dem Problemlösen widmen, handelt.

Grundsätzliche unterscheidet Neubrand zwischen zwei Arten von Wissen und folgt damit der Auffassung von Hiebert & Lefevre. Das bedeutet, dass sie Wissen, das sich ausschließlich auf die Durchführung eines Verfahrens bezieht (*prozedurales Wissen*) grundsätzlich von Wissen, das sich auf die Anwendung von Wissenseinheiten bezieht (*konzeptuelles Wissen*) trennt.
Hiebert & Lefevre (1986) beschreiben dabei *prozedurales Wissen* als das Wissen, welches benötigt wird, um ein mathematisches Verfahren durchführen zu können und explizieren dazu, dass das auch bedeutet, Kenntnisse syntaktischer Art und grundlegender mathematischer Symbole zu besitzen. Das heißt konkret, wenn eine Aufgabe dazu auffordert durch Umformung einer bestimmten Gleichung zur Lösung zu gelangen, muss für die Bearbeitung das Wissen über die Bedeutung der dargebotenen Zeichen (mathematischen Symbole) vorhanden sein, genauso wie das Wissen über mathematisch zulässige Transformationen der Gleichung. Gesondert betrachten Hiebert & Lefevre das *prozedurale Wissen* in Bezug auf komplexere Operationen, die sich auf Prozeduren beziehen, die „nicht dem Standardrepertoire mathematischer Symbole angehören" (Neubrand 2002, S.108).
Bei *konzeptuellen bzw. begrifflichen Wissen* handelt es sich demgegenüber um Wissen, das sich durch reichhaltige Beziehungen auszeichnet, wobei das vorhandene Beziehungsgeflecht um entsprechendes Wissen immer wieder ergänzt und angepasst wird. Das heißt, neues Wissen wird erworben, indem eine Beziehung mit einem neuen Wissenselement verknüpft wird, sei es durch die Schaffung einer komplett neuen oder die Änderung einer bestehenden Beziehung (vgl. Hiebert/ Lefevre 1986, S.3ff).
Abgesehen von diesen beiden grundsätzlichen Wissensarten, so merkt Neubrand an, gibt es durchaus Aufgaben, die ausschließlich Faktenwissen erfordern. Das heißt, in diesem Aufgabentyp wird lediglich nach der Reproduktion von Regeln und Bezeichnung verlangt, nicht aber nach einer Anwendung dieser.
Innerhalb der Analysedimension der Wissenseinheit legt Neubrand ihren Fokus darauf, ob es sich um explizit gegebene oder implizit enthaltene Wisseneinheiten handelt und erst nachrangig, ob eine oder mehrere Wissenseinheiten und in welchen Kombinationen sie vorliegen. Dabei definiert sie Wissenseinheit wie folgt:

> „Die von einem [hypothetischen] Experten im Hinblick auf die Anforderung der jeweiligen Aufgabe aktivierten Wissensbestandteile werden hier als (die zur Lösung der Aufgabe notwendigen) Wisseneinheiten bezeichnet" (Neubrand 2002, S. 95).

Als „explizit" bezeichnet Neubrand in diesem Zusammenhang Aufgaben die den Ansatz zur Bearbeitung der Aufgabe bereits benennen. Der Schüler muss sich folglich nicht erst überlegen, wie er eine Aufgabe angehen muss, um zur richtigen Lösung zu kommen. Demgegenüber handelt es sich um implizit enthaltenes Wissen, wenn der Schüler bei der Bearbeitung einer Aufgabe die Wissenseinheiten, die zur Lösung benötigt werden, erst modellieren[19] muss, d. h., er selbst entscheiden muss, wie er zur Lösung kommt (vgl. Neubrand 2002, S.101).

Ein weiterer Grundbegriff des Analysesystems ist der Kontext, der sich je nach Aufgabe in seiner Art und dem Grad seiner Verbindung mit der Aufgabe unterscheidet. Die Bedeutung der Variable *Kontext* begründet sich darin, dass sie Aufschluss über die in der Aufgabe enthaltenen Vernetzung von Fach- und Sachwissen bzw. die Beziehungshaltigkeit der Aufgabe in der Mathematik selbst gibt.
Unter dem allgemeinen Kontext fasst Neubrand sowohl die außermathematische Anwendung, wie sie beispielsweise in Aufgaben mit Sachbezügen zu finden sind, als auch den innermathematischen Kontext zusammen, bei dem die zu bearbeitende Wissenseinheit innermathematische Bezüge erfordert. Aber auch Aufgaben ohne erweiterten mathematischen Kontext, d. h., eine Aufgabe ohne über die Wissenseinheit selbst hinausgehende kontextuelle Einbettung, gehören für Neubrand zum allgemeinen Kontext. Demgegenüber stellt sie den situativen (speziellen) Kontext, der sich auf die Bereichsspezifität des Wissens bezieht und unterscheidet auch hier zwischen dem Grad der Realitätsnähe, indem sie zwischen dem *„real world"*-Kontext mit realistischen Daten und Zusammenhängen, dem *„scheinbar real world"*-Kontext,

[19] Sie verwendet Modellieren hier im Sinne des später von Baireuther etablierten Modellierungskreislauf, der neben den Übersetzungsprozessen von Realsituationen in Mathematik zusätzlich eine Modellierung innerhalb der Sachbeschreibung etabliert, wobei es sich in dem oben genannten Zusammenhang um ein erweitertes Textverständnis handelt.

mit seinen konstruierten Daten und Einkleidung, sowie den „*measurement*“-Aufgaben, bei denen mit Größen und Anzahlen (z.B. 234 Schüler) gerechnet wird.
Auch innerhalb des situativen innermathematischen Kontextes wird hier unterschieden zwischen einem globalen Kontext, der sich auf verschiedene Teilgebiete der Mathematik bezieht, wie beispielsweise die Verknüpfung zwischen Arithmetik und Geometrie, und dem lokalen Kontext, wenn sich die Anforderungen der Aufgabe auf ein Teilgebiet der Mathematik beschränkt (vgl. Neubrand 2002, S.112ff).

Um den Aufgabenkern herum befindet sich die Aufgabenperipherie (vgl. Neubrand 2002, S.118ff), die genauere Anweisungen für den Schüler enthält, um die Aufgabe zu bearbeiten. Dazu zählen beispielsweise explizit gemachte oder implizit enthaltene Arbeitsaufforderungen, Strukturierungen, die durch Zerlegung in Teilaufgaben entstehen, der Grad der Bearbeitung, der durch die Frage nach einer Lösungsidee bzw. die komplette Bearbeitung der Aufgabe gegeben ist, sowie der Art der Aufgabenpräsentation, die sich auf die Art der Informationsvermittlung durch Text, Symbole, Visualisierung in Form von Bildern Tabellen oder durch reale Modelle beziehen.

4.4.2.2. Aufgaben-Analyse aus der COACTIV-Studie

Im Rahmen der COACTIV-Studie aus den Jahren 2003 und 2004 wurden insgesamt knapp 50.000 einzelne Mathematikaufgaben auf ihr kognitives Aktivierungspotential analysiert. Dazu entwickelten Jordan et al. ein Klassifikationsschema mit den entsprechend mathematikdidaktisch relevanten Aspekten von Aufgaben.
Die Bedeutung des inhaltlichen Rahmens für die kognitiver Aktivierung sehen Jordan et al. darin, inwieweit inhaltliche Vernetzung und stoffliche Verbindung in Aufgaben hergestellt werden, aber auch inwieweit diese Vernetzungen zu früher Erlerntem gezogen wird. Aufgrund dessen unterscheiden Jordan et al. zwischen dem Stoffgebiet der Arithmetik, welches neben dem Rechnen und den Zahlbereichen, auch den Umgang mit Größen, Proportionalität und Potenzen beinhaltet und dem Bereich der Algebra, worunter der

Umgang mit Variablen und Gleichungen fallen. Daneben trennen die Autoren die Geometrie, mit ebenen Figuren und Abbildungen, der Flächen- und Volumensbestimmung und der Anwendung von Pythagoras, Strahlensätzen und trigonometrischen Funktion, von dem Stoffgebiet der Stochastik ab, mit der beschreibenden und beurteilenden Statistik sowie der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Innerhalb der *Curricularen Wissensstufe* unterscheidet sich *einfaches Wissen* vom *anspruchsvollen Wissen* insofern, dass beim einfachen Wissen grundlegende Begriffe der Sekundarstufe 1 verwendet werden, während im anspruchsvollen Wissen fortgeschrittene Verfahren und Begriffe genutzt werden.

In dem Versuch in ihrer Aufgabenklassifikation das mathematische Denken abzubilden um damit das kognitive Potenzial von Aufgaben zu erfassen, unterscheiden die Autoren zwischen rechnerischen Aufgaben, die auf das prozedurale-algorithmische Denken ausgerichtet sind, begrifflichen Aufgaben und technischen Aufgaben.

Technische Aufgaben zeichnen sich dabei dadurch aus, dass sie nur technisches Wissen, d. h. Faktenwissen oder Fertigkeiten erfordern, während *begriffliche Aufgaben* auf konzeptionelles Denken abzielt und *rechnerische Aufgaben* vorwiegend auf das prozedurale Denken.

Um den Prozess der Auseinandersetzung mit einer Aufgabe deutlich zu machen, orientieren sich Jordan et al. an dem bekannten Zyklus des Modellierens, wobei es ihnen nicht darum geht, den kompletten Modellierungskreislauf zu durchlaufen, sondern ihn als Vorlage zu betrachten, um einzelne Anforderungen zu identifizieren. Auf diese Weise erhalten die Autoren sechs einzelne Bearbeitungsschritte zur Lösung von Aufgaben:

- Das *außermathematische Modellieren* als Übersetzungsprozess von Realität und Mathematik, sowohl bei der Mathematisierung von Realsituationen als auch bei der Interpretation und Validierung mathematischer Resultate

- *Innermathematisches Modellieren* als Übersetzungsprozesse innerhalb der Mathematik[20]
- *Mathematische Grundvorstellungen* als die „Beziehung zwischen dem mathematischen Gehalt, der Realität und den individuellen mentalen Strukturen“ (Jordan u.a. 2008, S.89), die für den Schüler den Kern des mathematischen Inhalts repräsentieren
- *Umgang mit mathematikhaltigen Texten* als Interpretationsleistung, um mathematisch relevante Information aus entsprechenden Texte bzw. Aufgaben zu entnehmen (vgl. Jordan u.a. 2008, S.89)
- *Mathematisches Argumentieren* als Fähigkeit eine geschlossene Argumentationskette hervorzubringen bzw. andere Argumentationen nachvollziehen und bewerten zu können, wobei hier nicht nur die Ausführung eines Beweises gemeint ist, sondern auch das Argumentieren durch eine stringente Strategie
- Der *Gebrauch mathematischer Darstellungen* als Fähigkeit Darstellungen zu verstehen, Informationen aus ihnen herauszulösen, sie interpretieren und beurteilen zu können (vgl. Jordan u.a. 2006, S.34ff)

Und schließlich gilt es den Lösungsraum der Aufgabe zu analysieren, wobei zum einen die Anzahl der explizit oder implizit geforderten Lösungswege und zum anderen die Bearbeitungsrichtung Berücksichtigung findet. Die Bearbeitungssichtung beinhaltet dabei, ob die Bearbeitung der Aufgabe der Bearbeitungsrichtung, der in der Mathematik üblichen entspricht, oder aber entgegengesetzt verläuft.
Insgesamt ergibt sich damit folgende Übersicht:

[20] Ist in der Aufgabe keine Innermathematische Modellierung notwendig, so kann es sich entweder um eine technische Aufgabe handeln oder aber um eine außermathematische Aufgabe, bei der nach dem Übersetzungsprozess lediglich noch Basiswissen benötigt wird.

Dimension	Kategorie	Bedeutung der Ausprägung
A – Inhaltlicher Rahmen	1 – Stoffgebiet	1=Arithmetik, 2=Algebra, 3=Geometrie, 4=Stochastik
	2 – Curriculare Wissensstufe	1=Grundkenntnisse, 2=Einfaches Wissen der Sekundarstufe I, 3=Anspruchsvolles Wissen der Sekundarstufe I
B – Kognitiver Rahmen	3 – Typ mathematischen Arbeitens	1=Technische Aufgabe, 2=rechnerische Aufgabe, 3=begriffliche Aufgabe
C – Kognitive Elemente des Modellierungs-kreislaufs	4 – Außer-mathematisches Modellieren	0=Nicht benötigt, 1=Standardmodellierungen, 2=Mehrschrittige Modellierungen, 3=Modellreflexion, -validierung oder -eigenentwicklung
	5 – Inner-mathematisches Modellieren	0=Nicht benötigt, 1=Standardmodellierungen, 2=Mehrschrittige Modellierungen, 3=Modellreflexion, -validierung oder -eigenentwicklung
	6 – Grund-vorstellungen	0=Nicht benötigt, 1=Eine elementare Grundvorstellung oder (triviale) Kombination von verwandten elementaren Grundvorstellungen, 2=Eine erweiterte Grundvorstellung oder eine nicht-triviale Kombination von elementaren, aber nicht verwandten Grundvorstellungen, 3=Mehr als dies
	7 – Umgehen mit mathematikhaltigen Texten	0=Nicht benötigt, 1=Unmittelbares Textverstehen, 2=Textverstehen mit Umorganisation, 3=Verstehen logisch komplexer Texte
	8 – Mathematisches Argumentieren	0=Nicht benötigt, 1=Standardbegründungen, 2=Mehrschrittige Argumentation,
	9 – Umgehen mit mathematischen Darstellungen	0=Nicht benötigt, 1=Standarddarstellungen, 2=Wechsel zwischen Darstellungen, 3=Beurteilen von Darstellungen
D – Lösungs-raum	10 – Bearbeitungs-richtung	1=vorwärts, 2=rückwärts
	11 – Anzahl der geforderten Lösungswege	0=kein Lösungsweg, 1=ein Lösungsweg, 2=mehrere Lösungswege

Tab. 4.2.: Überblick über ausgewählte Kategorien des Klassifikationsschemas (Jordan et al. 2006, S.91)

Neben den oben angeführten primär kognitiven Anforderungen an Aufgaben führen Jordan et al. auch strukturelle Kategorien an, die auf die Schwierigkeit wirken. Hierzu gehört zum einen die sprachlogische Komplexität, die sich aus der Übereinstimmung von Textteilen und der Reihenfolge der Bearbeitungsschritte und der Komplexität der sprachlichen Elemente zusammensetzt. Als zweites Strukturelement verweisen die Autoren auf die Art der Repräsentationsformate (Instruktionen) und beziehen sich dabei auf die Repräsentation von Bildern, Tabellen und Diagrammen, die einen direkten Bezug zur Aufgabe haben.

4.4.3. Diskussion der mathematikdidaktischen Analysemodelle

In dem Bewusstsein, dass Analysemodelle stets zielgerichtet sind und somit kein allumfassendes Analyseinstrument zur Verfügung steht, wird in diesem Abschnitt trotzdem ein detaillierterer Blick auf die angeführten Analysedimensionen geworfen und zu dem Denkstilkonstrukt in Beziehung gesetzt.
So findet sich zwar in dem mathematikdidaktischen Modell von Jordan et al. durchaus eine Dimension, die das mathematische Denken abbilden soll, jedoch bezieht sich diese darauf, das kognitive Potenzial einer Aufgabe zu erfassen und weniger auf, die mit einem Denkstil verbundenen Vorgehensweisen beim Lösen der Aufgaben (vgl. Jordan et al. 2008).
Es zeigt sich jedoch, dass die angeführten Modelle durchaus Merkmale beinhalten, die sich mit der Ausprägung des Denkens nach Borromeo Ferri in Einklang bringen lassen, jedoch wird ihnen nicht die entsprechende Bedeutung für das Denken eingeräumt. Stattdessen handelt es sich um Kriterien, die die formale Ausgestaltung der Aufgaben beinhalten in dem Sinne, wie Abbildungen oder Formeln in der Aufgabe repräsentiert werden. Für Neubrand zählt die Aufgabenrepräsentation dementsprechend in die Analyseperipherie (vgl. Neubrand 2002) und bei Jordan wird dies unter der strukturellen Ausgestaltung gefasst (vgl. Jordan et al. 2006).

Insgesamt lässt sich entsprechend schlussfolgern, dass in der mathematikdidaktischen Aufgabenforschung die mathematischen Denkstile bisher wenig

Raum eingenommen haben und somit auch an dieser Stelle von einem Forschungsdesiderat gesprochen werden kann.

5. Methodologie und Design der Studie

> „Every cobbler thinks leather is the only thing. Most social scientists […] have their favorite methods with which they are familiar and have some skill in using. […] But we should at least try to be less parochial than cobblers."
>
> (Trow 1957, zit. nach Brewer/ Hunter 2006, S.10)

Die Studie fußt auf der Annahme, dass es Mathematikaufgaben im schulischen Kontext gibt, deren Bearbeitung einen bestimmten Denkstil nahelegt. Die Darlegung der Lithner-Studie (vgl. Lithner et al. 2013, siehe Kapitel 5.1.) gibt erste Hinweise auf die Bestätigung dieser Annahme und soll im Folgenden kurz vorgestellt werden, da sie nicht nur Anteil an der Motivation dieser Arbeit hat, sondern darüber hinaus auch eine Konsequenz von *mismatch-Aufgaben* (zur Begriffsklärung siehe Kapitel 5.1.) aufzeigt, also Aufgaben, die einen anderen Denkstil nahelegen als den eigenen. Die Nähe einer Aufgabe zu einem der Denkstile kann dabei entweder durch entsprechende Formulierungen und Präsentation der Aufgabe bestimmt werden oder aber auch dadurch, dass die Bearbeitung in einem der Denkstile mit wesentlich mehr Aufwand verbunden ist als in dem anderen. In einigen Fällen sind Aufgaben sogar nur mithilfe eines Vorgehens lösbar, welches die Anwendung einer der Denkstile erfordert. Doch gerade dadurch, dass einige Aufgaben nur in einer Weise zu lösen sind, die einem der Denkstile entspricht, kann in der Konsequenz bedeuten, dass die Schwierigkeit einer Aufgabe nicht allein vom Bearbeitungsniveau abhängt, sondern auch davon, ob es sich um eine *mismatch-Aufgabe* handelt.
Um zu überprüfen, inwieweit der Denkstil nun tatsächlich Einfluss auf das Aufgabenempfinden und die Bearbeitung der Schüler hat, wurde Schülern der neunten Jahrgangsstufe eine Auswahl von Aufgaben zur Bearbeitung vorgelegt. Dabei unterlagen die Aufgaben bestimmten Richtlinien, um so den Einfluss anderer Faktoren zu minimieren.
In den folgenden Kapiteln werden zunächst genauer die zugrunde liegenden Forschungsfragen (Kapitel 5.1.) sowie das daraus entstandene Forschungsdesign und seine methodische Verortung (Kapitel 5.2.) dargestellt. Damit einhergehend folgen die detaillierte Analyse der Aufgaben, die in der Studie Verwen-

dung fanden (Kapitel 5.4.) sowie weitere strukturelle Entscheidungen in Bezug auf die Durchführung (Kapitel 5.6.) und Auswertung (Kapitel 5.7.).

5.1. Forschungsfragen

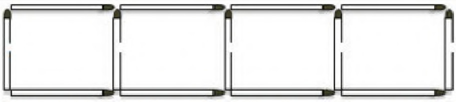
Insgesamt liefern die bestehenden Analysemodelle aus der mathematikdidaktischen Forschung ein weitreichendes Instrument zur objektiven Bewertung von Aufgaben, deren verwendete Kriterien jedoch von der Zielsetzung des Modells beeinflusst werden. So ist beispielsweise Neubrands Analysemodell auf die Verwendung von Aufgaben in Unterrichtssituationen und ihr Potenzial für Selbsttätigkeit ausgerichtet, während Jordan et al. das kognitive Aktivierungspotenzial von Aufgaben untersuchen (vgl. Jordan et al. 2006; Neubrand 2002).

Dennoch zeigt sich, dass die hier vorgestellten mathematikdidaktischen Modelle (vgl. Kapitel 4.4.2.1. und 4.4.2.2.) jeweils eine Kategorie verwenden, die auf das Denken des Bearbeitenden abzielt. Jordan und seine Kollegen geben explizit an, dass sie sich bemühen die gesamte Spannweite des mathematischen Denkens zu erfassen und führen zu diesem Zweck ihrer Aufgabenklassifikation die *Typen mathematischen Arbeitens* ein. (vgl. Jordan et al. 2006, S.15f, hierzu auch Kapitel 4.4.2.2.) Hierin unterscheiden sie zwischen Aufgaben, bei denen das prozedural-algorithmisches Denken im Fokus steht von denen des begrifflichen Denkens oder aber technische Aufgaben. Weiterhin plädieren sie dafür, ein ausgewogenes Verhältnis zwischen diesen drei Typen im Unterricht zu etablieren, um „die in den drei Typen erfassten Denkweisen adäquat auszubilden“ (Jordan et al. 2006, S.16). In weiteren Explikationen zeigt sich jedoch, dass sich die *Typen mathematischen Arbeitens* auf die Art des Wissens bezieht, das für die Lösung der Aufgabe herangezogen wird. Es lässt sich erkennen, dass die bei Jordan et al. vertretene Auffassung mathematischen Denkens nicht auf den hier verwendeten Begriff des Denkstils abzielt.

Und auch Neubrand hat in ihrem Analyseverfahren eine ganz ähnliche Subkategorie, die sie als *Art des Wissens* bezeichnet. Zwar lässt sich hierunter durchaus die Repräsentation des Wissens verstehen, welche gerade in Bezug auf das hier zugrunde gelegte Modell von Borromeo Ferri einen Teil des

Denkstils bildet, Neubrand versteht hierunter jedoch die Unterscheidung zwischen fertigkeitsorientierten und fähigkeitsorientierten Aufgaben. Bei einem Vergleich zwischen ihrer Typisierung und der hier vertretenden Auffassung des Konstrukts Denkstil als die Vorliebe für den Einsatz der eigenen Fähigkeiten (vgl. Kapitel 1.2.), wird deutlich, dass die angeführten Kategorien nicht auf den Denkstil referieren, sondern auf die Ausbildung von Fähigkeiten und Fertigkeiten. Dementsprechend kann hier nicht davon die Rede sein, dass in Neubrands Analysemodell der Denkstil im Fokus des Interesses steht.
Lediglich in der *Art der Aufgabenrepräsentation* führt Neubrand Gestaltungsmerkmale von Aufgaben an, die Einfluss auf die Bearbeitungsweise haben könnten und somit einen bestimmten Denkstil nahelegen. Allerdings verkennt sie aus meiner Sicht die Bedeutung der unterschiedlichen Ausgestaltung und geht deshalb nicht auf damit einhergehende mögliche Konsequenzen ein.
Die Bedeutung des Denkstils für das Lösungsverhalten, und damit für die Aufgabenanalyse, zeigt sich jedoch meines Erachtens unter anderem in der Design-Studie von Lithner und seinen Kollegen. Denn auch wenn die Studie primär auf die Auswirkungen von Routinelernen ausgerichtet ist, zeigt die Studie durchaus auf, welchen Einfluss Präsentationsformen und die damit nahegelegte Bearbeitung einer Aufgabe auf das Lösungsverhalten von Schülern hat. Als angestrebtes Ziel untersuchten die Autoren die Frage, inwieweit das Lernen von *CMR* (*Creative Mathematically Founded Reasoning*) effizienter ist als das Lernen von *AR* (*Imitative Algorithmic Reasoning*). Dabei erhielten Schüler der *AR*-Gruppe neben der normalen Aufgabenpräsentation auch immer noch den Verweis auf themenspezifische Algorithmen und ihre Anwendung (siehe Abb. 5.1.), während die *CMR*-Gruppe keinen gesonderten Einblick in die Verwendung von entsprechenden Algorithmen erhielt. In der unten dargestellten Aufgabe zeigt sich das, indem der Hinweis auf den entsprechenden Algorithmus fehlt, sodass nach der Zeichnung direkt die Frage „How many matches are needed to get 6 squares in a row?“ folgt.

When squares are put in a row it looks like the figure to the right. 13 matches are need for four squares:



If x is the number of squares then the number of matches y can be calculated by the function $y=3x+1$
Example: If 4 squares are put in a row then
$y=3x+1=3.4+1=13$ matches are needed.
How many matches are needed to get 6 squares in a row?

Abb. 5.1.: Beispiel einer *AR*-Übungsaufgabe der Design-Studie von Lithner et al. (Lithner et al. 2013, S.226)

Die Ergebnisse dieser Studie belegen, dass Schüler der *CMR*-Gruppe signifikant höhere Testergebnisse haben und erheblich weniger Antwortzeit benötigen. Und bei der gesonderten Analyse der Schüler mit den niedrigsten Ergebnissen in den kognitiven Tests zeigt sich nicht nur ein ähnliches Bild, sondern auch, dass die Unterschiede in den Schülerleistungen noch größer sind (vgl. Lithner et al. 2013, S.227f).
Und auch wenn die Autoren der Studie mit den unterschiedlichen Darstellungen der Aufgabe auf die Auswirkungen von Routinelernen abzielen, lässt sich die Nähe zur Unterscheidung zwischen visuell-bildlich und formal-analytisch nicht leugnen. Die Ergebnisse zeigen dementsprechend sehr deutlich, welche Unterschiede die unterschiedliche Präsentationsform und der damit einhergehenden indirekten Aufforderung zur Bearbeitung einer Aufgabe in einer bestimmten Weise machen. Denn auch wenn die Ausgestaltung der Aufgaben für die *AR*-Gruppe eine entsprechende Abbildung enthält (visuell-bildliches Element), besitzt der Abschnitt mit der formalen Darstellung (formal-analytisches Element) einen höheren Aufforderungscharakter.
Die Ursache für diese Unterschiede sieht die Studie zwar in der unterschiedlichen Ausrichtung des Unterrichts, doch gerade in Bezug auf eine Denkstiltheorie schließt sich eher die Frage an, ob die Ursache für das „Scheitern" der *AR*-Gruppe nicht darauf zurückzuführen ist, dass der Unterricht und vor allem die dort verwendeten Übungsaufgaben einseitig auf den analytischen Denkstil ausgerichtet waren. Die damit verbundenen, möglichen Auswirkungen auf die Schüler und eine einhergehende eventuelle Übervorteilung von Schülern mit einem, den Aufgaben entsprechenden, mathematischen Denkstil soll in der vorliegenden Arbeit genauer untersucht werden.

In diesem Zusammenhang scheint es unablässig Aufgaben auch unter dem Aspekt *match* bzw. *mismatch,* wie er bei Sternberg zu finden ist (vgl. Sternberg 1997, vgl. Kapitel 1.2.), zu analysieren, um so einen möglichen Zusammenhang zwischen Aufgabenbearbeitung und mathematischen Denkstil aufzudecken und in der Folge einen einseitigen Einsatz der Aufgaben zu verhindern. Hierbei bedarf es jedoch einer Modifikation des Begriffs, da eine Passung von Denkstil und Aufgaben die Bearbeitung des Schülers vernachlässigt. Folglich werden die Begriffe hier wie folgt gefasst:

> *Match* bezeichnet die Passung des Denkstils der Schüler entweder auf die Aufgabenausrichtung oder auf die Bearbeitung. Zur weiteren Differenzierung wird dementsprechend von einem *Aufgaben-match* bzw. *match-Aufgaben* gesprochen, wenn der Denkstil des Schülers mit dem Denkstil identisch ist, der in der Aufgabe gefordert ist. Auf der anderen Seite soll von einer *match-Bearbeitung* gesprochen werden, wenn die vom Schüler gemachte Bearbeitung denkstilkonform ist und entsprechend von einer *mismatch-Bearbeitung*, wenn die Bearbeitung des Schülers in dem anderen Denkstil erfolgt.

Um die Auswirkungen von Aufgaben des einen oder anderen Denkstils auf die Schüler und ihre Bearbeitung zu untersuchen, bemüht sich die vorliegende Studie, die hier zugrunde gelegten Hypothesen zu prüfen sowie die damit zusammenhängenden Fragen zu beantworten:

> Hypothese 1: Es gibt Aufgaben, die in ihrer Bearbeitung einen bestimmten Denkstil nahelegen.

- Wodurch unterscheiden sich Aufgaben, die auf visuell-bildliche oder formal-analytische Weise leichter gelöst werden können?
- Gibt es verschiedene Typen von denkstilnahen Aufgaben?

Diese erste Hypothese bildet die Grundlage für die durchgeführte Studie, so dass die angeführten Fragen hier einen besonderen Stellenwert einnehmen. Es geht dabei darum, Aufgaben auf einen eingeschränkten Lösungsraum hin

zu analysieren und zu klären, wodurch diese Einschränkungen zustande kommen. (siehe Kapitel 5.4.2.)
Thema der zweiten Frage ist, ob diese Einschränkungen sich aus dem Kontext selbst konstatieren, ob dies auf bewusste Formulierungen im Aufgabentext zurückzuführen ist und inwiefern weitere Unterschiede auszumachen sind, die in Bezug auf denkstilnahe Aufgaben zu einem dritten Aufgabentyp führen.

Hypothese 2: Es ist schwer, entgegen des eigenen Denkstils zu arbeiten.

- Wie kann das Aufgabenempfinden erfasst werden?
- Inwieweit lassen sich Unterschiede zwischen Analytikern und visuellen Denkern feststellen? Gibt es noch andere beobachtbare Unterschiede?

Die erste hier aufgebrachte Frage zielt nicht darauf ab, ob Schüler in einer Selbstauskunft über ihr persönliches Aufgabenempfinden ihr wirkliches Empfinden darlegen oder ihre Antwort durch ihren ‚Ruf' und ihrer Position in der Klasse beeinflusst wird. Vielmehr geht es in dieser Frage darum zu klären, inwiefern die Bearbeitung selbst Rückschlüsse auf das Aufgabenempfinden zulässt, wie beispielsweise die Bearbeitung aus der Studie von Schwank und ihren Kollegen (2003) ersichtlich (vgl. Kapitel 3.3.), die wiederholt abbricht und neue Ansätze verfolgt, um zur Lösung zu kommen.
Die letzte Frage zielt vor allem darauf, ob es beobachtbare Differenzen zwischen Analytikern und visuellen Denkern gibt, die über eine formal-analytische bzw. visuell-bildliche Arbeitsweise hinausgeht. So ist es durchaus denkbar, dass insbesondere eine *mismatch-Bearbeitung* Elemente aufzeigt, die auf spezifische Merkmalsausprägungen schließen lassen.

Hypothese 3: Das persönliche Erleben des Anspruchs einer Aufgabe und der damit einhergehenden Bearbeitung lässt sich auch durch ein *Mismatch* zwischen Aufgabe und eigenem Denken erklären.

- Inwieweit hängt das Erleben der Aufgabe mit der Ausprägung des Denkstils zusammen?

Die Frage unter Hypothese 3 bezieht sich auf den Vergleich zwischen analytischem und visuellem Denkstil und der damit einhergehenden Prüfung, inwieweit festgestellte Unterschiede auf den mathematischen Denkstil der Schüler zurückzuführen ist. Das heißt, es gilt mögliche andere Einflussfaktoren als Ursache für Differenzen in dem Erleben und der Bearbeitung der Aufgaben auszuschließen.
Die vorangestellten Fragen bilden den Rahmen für die vorliegende Studie und haben demzufolge Auswirkungen auf das gewählte Studiendesign und den damit einhergehenden Richtlinien zur Ausgestaltung der Untersuchung. Für die Transparenz in meinem Forschungsprozess sollen die entsprechenden Entscheidungen für die Konzeption im Folgenden dargelegt und in Beziehung zu den Forschungsfragen gesetzt werden.

5.2. Zugrunde gelegte Methodologie der Studie

Aufgrund des zugrundeliegenden Forschungsinteresses und der damit einhergehenden Forschungsfragen, wurde ein mehrschichtiges Forschungsdesign gewählt, in dem neben der quantitativen Ausrichtung (Fragebogen zur Erfassung des Aufgabenempfindens sowie die Korrektheit der Lösungen) ebenfalls qualitative Elemente (Auswertung des offenen Aufgabenteils) zum Tragen kommen. Solch ein Vorgehen bietet die Chance, ein Phänomen aus unterschiedlicher Perspektive zu untersuchen, was in der vorliegenden Studie erlaubt die Verhaltens- und Arbeitsweisen der Schüler aus den Perspektiven *Korrektheit der Lösungen*, *Aufgabenempfinden* sowie Auffälligkeiten im *individuellen Vorgehen* zu betrachten.
Der Unübersichtlichkeit halber wird die Darlegung zur Konzeption des Forschungsdesigns in mehrere Abschnitte gegliedert. Hierbei bezieht sich der erste Abschnitt auf Verortung des grundsätzlichen Studiendesigns, während in den anschließenden Abschnitten auf die unterschiedlichen Testteile eingegangen wird. Dabei wird die methodologische Begründung für die Konzeption eines (offenen) Leistungstests sowie der Auswertung nach dem themati-

schen Codieren (vgl. Kuckartz 2007, S.83ff) getrennt von der Ausgestaltung der begleitenden Fragen sowie deren quantitative Verarbeitung herausgestellt.

Quantitative Erhebung mit qualitativen Elementen – *Monostrand Conversion Design*

Entworfen als eine Studie unter Konzeption eines (offenen) Leistungstests mit begleitenden Fragen und ergänzenden, statistischen Erhebungen, handelt es sich um ein Quasi-Mixed Design (vgl. Teddlie/Tashakkori 2006, S.16), wobei im Folgenden entsprechend der Kritik von Gürtler & Huber von einem Multimethod Design gesprochen werden soll (vgl. Gürtler/ Huber 2012, S.37f). Der Blick in die Forschung zeigt, dass es innerhalb der Methodenintegration und -kombination zahlreiche Abgrenzungsmöglichkeiten gibt, z.B. solche, die die unterschiedlichen Forschungsschritte empirischen Arbeitens in den Fokus nehmen (vgl. Gläser-Zikuda et al. 2012) oder auch solche, die die zeitliche Gestaltung der Forschung als zentral annehmen (vgl. Kelle/ Erzberger 2008).

Den Versuch die diversen Unterscheidungsmerkmale über Multimethods Designs hinaus zu gruppieren, unternehmen Teddlie & Tashakkori und berufen sich hierfür auf die Dimensionen *strand* und *method*. Zur Strukturierung der Dimension *strand* grenzen Teddlie & Tashakkori die *Monostrand Designs* von den *Multistrand Designs* und kombinieren beides mit der Dimension *method*. Diese unterliegt einer gleichartigen Abgrenzung innerhalb der Methodenauswahl nach *Monomethod Designs* und *Multimethod Designs* bzw. in Teddlie & Tashakkoris Terminologie *Mixed Methods Design* (vgl. Teddlie/ Tashakkori 2006, S.15). Auf diese Weise ergeben sich vier Kategorien von Studiendesigns:

- Monomethod Monostrand Designs
- Monomethod Multistrand Designs
- Multimethod Monostrand Designs
- Multimethod Multistrand Designs (vgl. Tab. 5.1.)

Strand bezieht sich hierbei auf den Forschungsstrang, wobei dieser „includes three stages: the conceptualization stage, the experiential stage (methodological/analytical), and the inferential stage" (Teddlie/ Tashakkori 2006, S.16). Dementsprechend unterscheiden Teddlie & Tashakkori in ihrer ersten Dimension zwischen Designs, bei denen die Phasen des Forschungsprozesses lediglich einmal durchlaufen werden von denen, bei denen die Phasen innerhalb der Studie mehrmals Anwendung finden. Darüber hinaus trennen sie zwischen simultanen und sequenziellen Designs.

	Monostrand Designs	Multistrand Designs
Mono-method Designs	Simultan-Design[21] 1. traditionelle QUAN[22]-Designs 2. traditionelle QUAL-Designs	Sequenz-Design 1. concurrent Monomethod a. QUAN + QUAN b. QUAL + QUAL 2. Sequential Monomethod a. QUAN → QUAN b. QUAL → QUAL
Multi-methods Designs	Quasi-Mixed[23] Monostrand Designs: Monostrand Conversion Design	voll integriertes Design a. Multimethod Multistrand Design 1. concurrent mixed design 2. sequential mixed designs 3. conversion mixed designs 4. fully integrated designs b. Quasi-Mixed Multistrand Designs: Designs mixed at the Experiential stage only, including concurrent quasi-mixed design

Tab. 5.1.: „'families' of research designs" nach Teddlie & Tashakkori (vgl. Teddlie/Tashakkori 2006, Gürtler/ Huber 2012)

[21] In der hier dargestellten Übersicht wird nur teilweise auf die Terminologie der Autoren Teddlie & Tashakkori zurückgegriffen und stattdessen die für die Autorin handhabbaren Begriffe verwendet.

[22] Hierbei beziehen sich die Abkürzungen „QUAN" auf quantitative Methoden und „QUAL" auf qualitative Methoden, wobei die Großschreibung darauf verweist, dass die entsprechende Methode den Schwerpunkt der jeweiligen Untersuchung bildet. (Im Gegensatz dazu wäre ein „QUAL+quan-Design" eines, das den Schwerpunkt in der qualitativen Forschung hat, jedoch auch Methoden verwendet, die der quantitativen Forschung entstammen, diese allerding lediglich die Ergebnisse der qualitativen Methoden unterstützen.)

[23] Teddlie und Tashakkori sprechen in diesem Zusammenhang von quasi-mixed, da sie die Ansicht vertreten, dass sich die Verwendung mehrerer Methoden auf alle Phasen des Forschungsprozess beziehen sollte, um als „echte" Multimethod zu gelten.

Der Abgrenzung der Designs von Teddlie & Tashakkori folgend, lässt sich die vorliegende Studie als *Monostrand Conversion Design* klassifizieren, da des *Qualitizing* „QUAN data are transformed into data that can be analyzed qualitatively“ (Teddlie/Tashakkori 2006, S.17). Diese Zuordnung begründet sich aus der konkreten Ausgestaltung des Tests in der quantitativen Tradition, die sich aus den oben genannten Forschungsfragen und zugrundeliegenden Hypothesen ergibt. Dennoch wurde aufgrund der ersten Auswertungen (siehe Kapitel 6.1.) eine „methodische Perspektivenerweiterung“ (Buchholtz 2016, S.197) vorgenommen, um „ein besseres Verständnis [der vorliegenden] wissenschaftlichen Befunde“ (Buchholtz 2016, S.198) zu entwickeln. Ebendeshalb wurden zur Detailanalyse die quantitativ erhobenen Daten des offenen Aufgabenteils auf eine qualitative Auswertungsmethode zurückgegriffen. Die hier zur Anwendung kommenden Elemente der quantitativen Erhebung und der teilweise qualitativen Auswertung werden im Weiteren dargelegt.

Aufgabenteil – (offener) Leistungstest
Der Leistungstest besteht aus je fünf denkstilnahen Mathematikaufgaben (siehe Kapitel 5.4.2), die ein großes Spektrum des Mathematikunterrichts (siehe Kapitel 5.4.3.) abbilden und von den Schülern bearbeitet werden. Die Entscheidung für ein derartiges Studiendesign begründet sich zum einen in der ursprünglichen Annahme, dass denkstilkonforme Aufgaben von den Schülern erfolgreicher gelöst werden als Aufgaben, die nicht ihrem Denken entsprechen. Zum anderen bietet ein selbstständiges und vollständiges Bearbeiten der Aufgaben, ohne weitere Einschränkungen, zusätzlich die Möglichkeit, die Ursachen für den Erfolg im Denkstil zu identifizieren. Das heißt, es bedurfte einer Auswertungsmethode, die Einblicke in bewusste, aber vor allem in unbewusste Abläufe und Strukturen im Vorgehen der Schüler aufzeigt (vgl. Flick/ Kardorff/ Steinke 2008, S.14). Dementsprechend wird der Bearbeitungsprozess der Schüler nicht durch vorgegebene Antwortmöglichkeiten eingeschränkt, sondern stattdessen Raum für individuelle Vorlieben sowie entsprechende Fähigkeiten geschaffen. Auf diese Weise ist es möglich, auch kleinsten Nuancen in den unterschiedlichen Bearbeitungen Rechnung zu tragen. Und gerade in Bezug darauf, dass das Ziel der Studie ist, die Verhaltens- und Arbeitsweisen der Schüler entlang ihres mathematischen Denkstils unvoreingenommen zu untersuchen, ist ein Aufgabenteil mit uneinge-

schränkter Bearbeitungsmöglichkeit unumgänglich. Flick u.a. merken darüber hinaus an, dass der Einsatz von standardisierten Methoden nur dann möglich ist, wenn eine feste Vorstellung über den untersuchten Gegenstand besteht (vgl. Flick/Kardorff/Steinke 2008, S.18). Dagegen beruht der Fokus von qualitativer Forschung grundsätzlich auf „Beobachtungen [im weitesten Sinne,] die nicht mit den Erwartungen des Forschers übereinstimmen, [wodurch] diese *‚abweichenden' Phänomene* zum Forschungsgegenstand werden und die Theorie durch die Suche nach einer Erklärung für die devianten Fälle eine Weiterentwicklung und Präzisierung erfährt" (Lamnek 1993, S.110).

Wie sich in diesem Zitat zeigt, ist es für die qualitative Auswertung unumgänglich, eine entsprechende Offenheit bezüglich der gemachten Beobachtungen an den Tag zu legen, weshalb sie häufig als ein grundlegendes Gütekriterium in der qualitativen Forschung an sich angeführt wird (vgl. Steinke 2004, S.181). Dabei bezieht sich diese Grundhaltung nicht nur auf die Ausgestaltung der eigenen Untersuchung (Probandenwahl, Untersuchungssituation und Methoden), sondern vor allem auf die Explorationsfunktion qualitativer Forschungsmethoden. Abgeleitet aus der Explorationsfunktion ergibt sich eine flexible Vorgehensweise, die es dem Forschenden erlaubt im Verlauf seiner Studie Untersuchungsmethoden an neu gewonnene Daten und besserem Verständnis anzupassen, was auch in meiner Studie nach der Vorerhebung zu entsprechenden Anpassungen führte. Außerdem ergibt sich daraus die Forderung nach einem unvoreingenommenen Blick auf den Forschungsgegenstand. Das heißt, dass im Vorherein keine Hypothesen (Ex-ante Hypothesen) formuliert werden dürften, die anschließend zu prüfen sind. Meinefeld bezeichnet ein derartiges Festlegen sogar als „Grundübel" und führt unter Bezug auf Glaser und Strauss an, „dies gefährde die Unvoreingenommenheit gegenüber ‚dem Feld' und beeinträchtige die Fähigkeit, die empirischen Daten in gegenstandsangemessenen Kategorien wahrzunehmen und zu interpretieren" (Meinefeld 1997, S.22). Lamnek spricht in diesem Zusammenhang sogar von der „zum methodischen Prinzip erhobene Verzögerung der theoretischen Strukturierung [und] in der Konsequenz ein Verzicht auf vorab zu formulierende und dann in der Untersuchung zu prüfende Hypothesen" (Lamnek 1993, S.23). Doch trotz des allgemeinen Konsenses, dass es

sich bei der qualitativen Forschung um einen hypothesengenerierenden Vorgang handelt, zieht Hopf (vgl. Hopf 1993) dies in Zweifel.
Die beiden zugrunde gelegten Einwände gegen eine hypothesenprüfende qualitative Forschung beziehen sich zum einen darauf, dass die zur Hypothesen- und Theorieprüfung nötigen repräsentativen Zufallsstichproben aus forschungspraktischen Gründen in qualitativen Studien nicht bewältigbar sind. Und zum anderen zielen die Einwände auf die Befürchtung, dass vorab formulierte Hypothesen zu einer Einschränkung in der Auseinandersetzung mit dem Datenmaterial führen bzw. die erhobenen Daten nicht unvoreingenommen interpretiert werden. Gegen den ersten Einwand argumentiert Hopf mit dem Typus der zugrunde liegenden Hypothesen und ihrem Grad an Geltungsanspruch. Als Beispiel seien hier die „Hypothesen über singuläre Tatbestände" (Hopf 1993, S.14) genannt und lediglich darauf verwiesen, dass ebendieser Hypothesentyp „sich auch – oder gegebenenfalls nur – mit Hilfe qualitativer oder historischer Forschungsmethoden als wahr oder falsch erweisen" (Hopf 1993, S. 14) kann. Dem zweiten Hauptargument gegen eine hypothesenprüfende qualitative Forschung stellt Hopf gegenüber, dass es zwar durchaus möglich sei, einer derartigen Einschränkung zu unterliegen, es in der allgemeinen Forschungspraxis jedoch genug Beispiele dafür gäbe, einen derartigen Fehler nicht zu begehen.
Die hier stark verkürzten dargelegten Positionen zeigen, dass es durchaus denkbar ist, Hypothesen aus einem Einzelfall zu generieren und diese anhand anderer Fälle zu prüfen.
Es zeigt sich folglich, dass die in dieser Studie gemachten Vorannahmen ein qualitatives Vorgehen nicht ausschließen, wohl aber eine Anpassung des Designs zulassen, wenn neue Erkenntnisse dies bedingen. So musste auch in dieser Studie nach den Ergebnissen der Vorstudie das Design angepasst werden.
So zeigte sich in den Ergebnissen meiner Vorstudie, dass eine alleinige Analyse nach der Korrektheit der Lösung zur Bestimmung des Erfolgs beim Lösen der Aufgabe nicht aussagekräftig war. Die Vorstudie umfasste hierbei eine Stichprobe von 108 Gymnasiasten, von denen 25 als Visuelle Denker (9 m / 16 w) sowie 18 als Analytiker (16 m / 2 w) identifiziert werden konnten. Die Ergebnisse zeigten, dass die denkstilkonformen Aufgaben zwar von 41,6 % der visuellen Denker und *mismatch-Aufgaben* von lediglich 32,8 % korrekt

gelöst wurden, jedoch konnte eine entsprechende Beobachtung nicht für die Analytiker bestätigt werden. Hier lösten nur 26,7 % die *match-Aufgaben* richtig, während 46,7 % *mismatch-Aufgaben* richtig gelöst wurden.
Dies führte zum einen dazu, die Analysemethode zur Korrektheit zu modifizieren (siehe Kapitel 5.5.) und zum anderen dazu, dass die Erhebung des Aufgabenempfindens ergänzt wurde. Darüber hinaus wurde der Fokus der Arbeit auf einen Vergleich des Vorgehens zwischen Schülern mit unterschiedlichem mathematischem Denkstil gelegt und die Analyse des Aufgabenteils entsprechend angepasst. Die Auswertung orientiert sich an Hopfs systematisiertem Vorgehen zum thematischen Codieren, da die Auswertung „für vergleichende Studien entwickelt [wurde], die mit aus der Fragestellung abgeleiteten, vorab festgelegten Gruppen arbeiten“ (Flick 2007, S.402) und dies in der vorliegenden Untersuchung der Fall ist.
Grundgedanke des thematischen Codierens von Hopf und ihren Mitarbeitern ist dabei, dass alle Schritte des Auswertungsverfahrens direkt am konkreten Material vorgenommen werden, dieses jedoch seine Bedeutung im weiteren Verlauf des Verfahrens nicht durch das Kategorisieren und die Codierung einbüßt.
Das Verfahren selbst gliedert sich in vier Schritte:

1. Entwicklung von Auswertungskategorien
2. Codierung des erhobenen Materials
3. Erstellung von Fallübersichten
4. Vertiefende Analyse von ausgewählten Fällen (vgl. Hopf 1995a, S.29f)

Bereits mit der Planung der Datenerhebung werden erste Kategorien gebildet, wozu auch gehört, dass „auf die Theorie bezogene Begriffe und Kategorien schon vor der Erhebung festgelegt werden“ (Kuckartz 2007, S.85). Diese vorab entwickelten Kategorien gehen auf theoretische Vorannahmen zurück, müssen allerdings als „Prototypen“ verstanden werden, die durchaus an die erhobenen Daten angepasst werden können, sodass schließlich „alle Kategorien [...] in den empirischen Daten verankert“ (Kuckartz 2007, S.84) sind.
Während des Codierens werden die zuvor gebildeten Kategorien an das Material angelegt und gegebenenfalls weiter ausdifferenziert oder angepasst.

Erst mit dem überarbeiteten Codierleitfaden wird das gesamte Datenmaterial abschließend vercodet (siehe Kapitel 5.7.1.).
Der dritte Schritt des thematischen Codierens bezieht sich auf die Überblicksgewinnung anhand von Fallübersichten. Hierbei werden die erhobenen Daten in Überblickstabellen dargestellt, um „zur Transparenz der Untersuchung beizutragen, die Materialbasis ein Stück weit offenzulegen und damit zur intersubjektiven Überprüfbarkeit beizutragen“ (Schmidt 1997, S.562). Darüber hinaus bieten die Überblickstabellen die Möglichkeit Zusammenhänge aufzudecken sowie Ausnahmen zu identifizieren. Dieser Schritt bildet damit die Basis für die vertiefende Analyse. So führt Hopf in ihrer Studie zum Zusammenhängen zwischen rechtsextremen Orientierungen und familialen Erfahrungen an:

> „Diese Quantifizierungen auf der Ebene des Gesamtmaterials bildeten eine wichtige Grundlage für den nächsten Auswertungsschritt: die qualitative Analyse von Einzelfällen. Mit Hilfe der Fallübersichten ließen sich die Interviews hierfür begründet anhand der durch die Codierung aufgedeckten Konstellationen auswählen“ (Hopf et al. 1995b, S.30).

Im abschließenden Schritt werden Einzelfälle vertiefend analysiert und anhand des Textes Hypothesen aufgestellt oder aufgestellt Hypothesen überprüft. Dabei werden die Fallbeispiele so aufbereitet, dass Zusammenhänge am konkreten Text aufgezeigt werden können, um so den identifizierten Zusammenhang nachvollziehbar herauszustellen. Dabei erfolgt die Falldarstellung sehr konzentriert und auf die Beantwortung theoretischer Fragen gerichtet.

Die (geschlossenen) Begleitfragen – Statistische Erhebungen
Neben dem offenen Aufgabenteil werden ergänzende Aussagen, sowohl zu den Aufgaben selbst, als auch zur jeweiligen Aufgabenbearbeitung gestellt. Das bedeutet, dass jede Aufgabenbearbeitung mit drei Begleitfragen abschließt, wobei sich die Items, mit wenigen Ausnahmen, auf die Bereiche „Bekanntheit“, „Aufgabenempfinden“ sowie „Elemente des Denkstils“ beziehen. In den Begleitfragen gilt es Aussagen über die jeweilige Aufgabe selbst, aber auch über die eigene Bearbeitung der jeweiligen Aufgabe an-

hand einer vierstufigen Rating-Skala zu beurteilen (zur Ausgestaltung siehe Kapitel 5.5. und 5.7.2.). Eine solche Ergänzung zum offenen Aufgabenteil scheint insofern sinnvoll, als dass selbst dann relevante Informationen gewonnen werden können, wenn sich im Bearbeitungsfeld der Aufgabe keine Bearbeitung befindet. So ist den Items durchaus zu entnehmen, warum die Bearbeitung abgebrochen wird, bevor irgendetwas niedergeschrieben wurde bzw. eventuell auch, warum eine Aufgabe als schwer empfunden wurde. Insbesondere das Aufgabenempfinden zielt auf die Hypothese 2 ab und der damit verbundenen Prüfung, inwieweit das Erleben des Anspruchs einer *mismatch-Aufgabe* mit dem eigenen Denkstil zusammenhängt. Darüber hinaus erlaubt eine derartige Ausgestaltung den direkten Vergleich zwischen visuellen und analytischen Denkern.

Ziel dieser Kombination der Erhebungsmethoden ist, einen mehrperspektivischen Blick auf das Erleben der Schüler zu erhalten und Erklärungen für die uneindeutige Ergebnisse, die sich in der Vorstudie abzeichneten, zu erhalten. Dabei werden die Ergebnisse der unterschiedlichen Methoden in der Datenerhebung nicht bloß zusammengetragen und nebeneinander gestellt, denn durch „ein [Multimethod]-Design lassen sich Erkenntnisse erzielen, die über die Ergebnisse einzeln eingesetzter qualitativer oder qualitativer Forschung, aber auch über die bloße Addition von deren Ergebnissen, hinausgehen“ (Kuckartz 2014, S.75). Und ebendiese Chance eines Multimethod-Ansatzes wird hier genutzt, um die Ergebnisse anzureichern und entsprechende Folgerungen ziehen zu können.

5.3. Denkstilerhebung

Um den Denkstil der Schüler zu ermitteln, wurde in der vorliegenden Arbeit auf das von Borromeo Ferri entwickelte Instrument zur Erhebung des Denkstils zurückgegriffen (vgl. Borromeo Ferri 2012). Dabei wurde die von ihr entwickelte Selbstauskunft sowohl für Lehrende und Studierende als auch für Lernende im Alter von 15 – 16 Jahren angepasst und erfasst alle in ihrem Modell enthaltenen Merkmale des Denkstils. Insgesamt werden so in 27 Items die Art der Repräsentation (visuell-bildlich/formal-analytisch), die Art

der Vorgehensweise (ganzheitlich/zergliedern) und die Art der Verarbeitung von Informationen (interne/externe Orientierung) auf einer vierstufigen Likert-Skala gemessen.
Da für die hier vorliegende Arbeit vor allem die Unterscheidung von formal-analytisch und visuell-bildlich von Bedeutung ist, wurde die entsprechende Selbstauskunft soweit verknappt, dass den Schülern lediglich die Items zur Erhebung der Art der Repräsentation vorgelegt wurden. Auf diese Weise erhalten die Schüler elf Items, die sich auf ihre Präferenzen im Mathematikunterricht beziehen, deren interne Konsistenz auf der Skala visuell-bildlich/formal-analytisch mit einem cronbachs α von .75 bis .90 gut bis zufriedenstellend ist (vgl. Borromeo Ferri 2014, S.17).

5.4. Das Aufgabendesign

Die Auswahl und Entwicklung der Aufgaben erfolgte durch die forschungsmethodische Entscheidung, dass lediglich solche Aufgaben Verwendung finden, die durchaus auch in der Schule eingesetzt werden können und auch eingesetzt werden. Aus diesem Grund entstammen einige Aufgaben konkret aus Schulbuchwerken, während andere für die Sekundarstufe 1 angepasst wurden. Auf diese Weise entstanden zehn Aufgaben, die im Mathematikunterricht durchaus bearbeitet werden.
Um darüber hinaus Einflussfaktoren auf die Bearbeitung der Aufgaben weitestgehend zu minimieren, wurden die Aufgaben so entwickelt bzw. ausgewählt, dass sie ein breites Spektrum abdecken. Das heißt, dass es sich bei den für die Studie verwendeten Aufgaben teilweise um Aufgabentypen handelt, die den Schülern im Mathematikunterricht in ähnlicher Form bereits begegnet sein könnten, als auch um solche, die ihnen unbekannt sind.
Konkret zeigt sich dies, indem einige Aufgaben aus Schulbüchern, entsprechend der hier vorliegenden Anforderungen, modifiziert, Beispielaufgaben aus den Bildungsstandards angepasst oder auch geeignete Aufgaben aus der eigenen Lernbiografie entnommen wurden.
Dennoch wurde bei der Auswahl und der Entwicklung darauf geachtet, dass sich die Aufgaben nur auf den Schülern bekannte Inhaltsstoffe beziehen, ge-

nauso wie darauf, dass sie ein ähnliches Anforderungsniveau in Präsentationsform und den notwendigen Bearbeitungsschritten aufweisen.

5.4.1. Analyse der verwendeten Aufgaben nach notwendigen Bearbeitungsschritten

Wie vorangestellt, werden in diesem Unterkapitel die Bearbeitungsschritte der Aufgaben genauer analysiert und verglichen. Und obwohl es zahlreiche Beispiele dafür gibt, die notwendigen Schritte zur Bearbeitung von spezifischen Aufgaben zu analysieren und dokumentieren (z.B. Problemlösen, Modellierung), wurde sich in Anbetracht der hier verwendeten Aufgabenvielfalt dazu entschlossen, ein modifiziertes Bearbeitungsmodell zu verwenden, das sich auf die Grundlagen von Pólyas allgemeiner Aufgabenbearbeitung stützt. Zum Zweck der Darlegung des eigenen Modells sei hier kurz auf das Bearbeitungsmodell von Pólya eingegangen.
Grundsätzlich warnt Pólya vor der Annahme, dass mathematische Probleme in einem Schritt zu lösen sind, sondern bedürfen vielmehr einer Anzahl von Einzelschritten, die schlussendlich zur Lösung führen. Die Schwierigkeit sieht er weiterhin darin, dass zur Lösung der Aufgabe die Einzelschritte bekannt sein müssen, um das Ziel nicht aus den Augen zu verlieren (vgl. Pólya 1939, S. 113ff). Gerade auch in Bezug auf seine eigene Lehrtätigkeit dient die „Tabelle“, wie Pólya sein Modell nannte, dazu, den Lösungsweg von Aufgaben zu strukturieren und Fragen zu geben, die den Schüler dazu befähigen sollen, sich selbst die Bearbeitungsschritte immer wieder zu vergegenwärtigen.
Dabei gliedert er seine *Tabelle* in vier Phasen, die während der Bearbeitung einer Aufgabe zum Tragen kommen:

1. *Verstehen der Aufgabe*: Ohne ein grundsätzliches Verständnis für eine Aufgabe ist deren Lösung nicht möglich, deshalb benennt Pólya eine Reihe von Fragen, die darauf abzielen, verschiedene Teile der Aufgabenstellung zu identifizieren und entsprechend zu verstehen. Hierunter fallen Fragen wie *„Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?“* (Pólya 1967, S.20).

2. Das *Ausdenken eines Plans* bezieht sich auf die Entwicklung einer Idee zur Lösung und die damit einhergehenden notwendigen Schritte, um diese Idee entsprechend umzusetzen. Dabei kann es dem Schüler helfen auf entsprechende Erfahrungen mit ähnlichen Aufgaben zurückzugreifen und entsprechend zu modifizieren. Diesbezüglich betont Pólya die Notwendigkeit über entsprechende Vorkenntnisse zu verfügen (vgl. Pólya 1939, S.122).
3. *Ausführen des Plans*: Gegenüber der zweiten Phase ist diese Phase leichter zu durchlaufen, da die entsprechenden Ideen bereits vorhanden sind und es in dieser Phase der Aufgabenbearbeitung vor allem darum geht, den vorhandenen Plan durchzuführen. Die Schwierigkeit besteht darin, dass in jedem Schritt der Durchführung die konkrete Bearbeitung in das Konzept des Plans passt.
4. Eine abschließende *Rückschau* gibt den Schülern nicht nur die Möglichkeit ihre Ergebnisse zu prüfen, sondern darüber hinaus führt die Rückschau zu einem Festigen des Wissens und auch dazu, Fähigkeiten zum Problemlösen zu entwickeln (vgl. Pólya 1967, S.28ff).

Im Laufe seiner Arbeit untergliedert Pólya die erste Phase seines Bearbeitungsprozesses zum einen in die grundsätzliche Auseinandersetzung mit der Aufgabe und zum anderen in die Phase zur Erarbeitung eines besseren Verständnisses. Dabei bezieht sich die grundsätzliche Auseinandersetzung mit der Aufgabe darauf, dass sich die Situation vorgestellt wird und bereits hier möglicherweise notwendiges Wissen reaktiviert wird. Erst dann ist nach Pólya die Möglichkeit gegeben, die Aufgabe vollends zu verstehen und in die konkretere Bearbeitung zu gehen (vgl. Pólya 1967, S.48ff).

Darauf aufbauend ergibt sich für die Darstellung des hier verwendeten Analyseinstruments zur detaillierteren Auffächerung des Bearbeitungsprozesses folgende Abbildung:

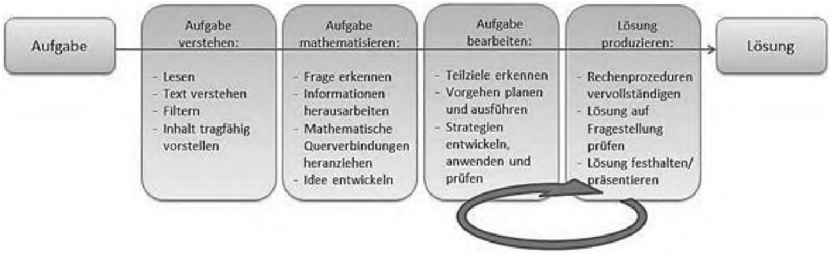


Abb. 5.2.: Modell zur Bearbeitung von Aufgaben, abgeleitet von Pólyas Aufgabenbearbeitung

Dabei bezieht sich die Phase des Aufgabenverstehens auf nicht primär mathematische Aspekte der Aufgabenbearbeitung. Neben dem grundsätzlichen Lesen der Aufgabe fallen hierunter Tätigkeiten wie das Textverstehen, Filtern der gegebenen Informationen sowie die Vorstellung des Inhalts. Dabei bezieht sich das Verstehen des Textes darauf, dass dem Schüler die Bedeutung der einzelnen Begriffe, die in der Aufgabe verwendet werden, bewusst wird, ebenso wie darauf, die Begriffe in einen bedeutungstragenden Zusammenhang zu bringen.
Erst im zweiten Schritt, wenn es darum geht, die Frage bzw. das Problem der Aufgabe zu erkennen und entsprechend notwendigen Information herauszuarbeiten, handelt es sich um mathematikspezifische Tätigkeiten, da in diesem Zusammenhang auch Querverbindung zur Mathematik und den berührenden Inhaltsbereichen gezogen werden müssen.
Für die vorliegende Studie von Bedeutung sind vor allem die Phasen der Aufgabenbearbeitung sowie das Produzieren der Lösungen. Dies ist nicht darauf zurückzuführen, dass die vorangegangenen Phasen nicht genauso wichtig für den Lösungsprozess sind, sondern in erster Linie darauf, weil sie in der internen Repräsentation ablaufen und daher in diesem Studiendesign nicht für die Analyse zugänglich sind.
Pólya dahingehend folgend, dass die Lösung eines mathematischen Problems nicht in einem Schritt erfolgen kann, wird in dem hier verwendeten Modell explizit aufgeführt, dass zunächst Teilziele erkannt werden müssen, sodass sich das weitere Vorgehen nicht direkt auf die Lösung und dem damit verbundenen Endziel der Aufgabe richtet, sondern in dieser Phase in erster Linie das Erreichen der identifizierten Teilziele anstrebt. Hierzu wird von dem

Schüler zunächst das Vorgehen geplant und entsprechend Strategien ausgewählt, die während des gesamten Prozesses immer wieder überprüft und eventuell korrigiert werden.
In der abschließenden Phase, die auf das Produzieren von Lösungen referiert, gilt es, die in Phase 3 ermittelten und bearbeiteten Teilziele zu vervollständigen, indem unter Umständen notwendige Größen bestimmt oder Ergebnisse berechnet werden und diese gegebenenfalls zu kombinieren. Zusätzlich erfolgt die Prüfung des so erhaltenen Ergebnisses, was sich zum einen auf die Korrektheit der Bearbeitung bezieht und zum anderen auf die Bedeutung des Teilergebnisses für die Endlösung der Aufgabe.
Je nachdem, ob die Lösung der Aufgabe in einem Zug erfolgen kann oder aber aus mehreren Bearbeitungsschritten besteht, gilt es zurück zu Phase 3 zu springen, um das nächste Teilziel und damit die nächsten Bearbeitungsschritte zu verfolgen und somit die letzten beiden Phasen erneut zu durchlaufen. Das kontinuierliche Durchlaufen der Bearbeitungs- und Lösungsphase führt schließlich zum Endergebnis.

Die in dieser Studie eingesetzten Aufgaben werden hier mithilfe des modifizierten Modells von Pólya detailliert analysiert[24], um anschließend die Vergleichbarkeit der Aufgaben herauszustellen. Es wird in der Analyse zunächst die Grundidee der einzelnen Aufgabe angegeben, um anschließend die erwarteten Bearbeitungsschritte der Schüler (Phase drei und vier) in idealisierter Weise darzulegen. Hierbei wird die Reihenfolge der Aufgaben, wie sie sich im Test befindet, zugunsten der Gegenüberstellung des Denkstils nach den Inhaltsbereichen der Bildungsstandards abgeändert.

[24] Für die Analysen nach ihrem Denkstil sowie die Einordnung in die Bildungsstandards, siehe Kapitel 5.4.2. und 5.4.3..

Analyse der Bearbeitung: Streichhölzchen – Fakultäten

Die so genannte *Streichhölzchen*-Aufgabe wurde in einem Seminarkontext an der Universität Kassel gestellt und zeigte bei der Bearbeitung deutliche Unterschiede zwischen Grundschullehramtsstudierenden und Gymnasiallehramtsstudierenden, der sich darauf begründet, dass die Gymnasiallehramtsstudierenden eine formal-analytische Bearbeitung der Aufgabe zur Lösung wählten, während die Grundschullehramtsstudierenden einer visuell-bildlichen Bearbeitung folgten.

Denn obwohl eine Frage nach der Anzahl von Möglichkeiten üblicherweise in höheren Lehr-Lern-Situationen zu der Verwendung einer Formel aus der Kombinatorik[25] führt, liegt eine Schwierigkeit dieser Aufgabe genau darin, zu erkennen, dass eben dies hier nicht möglich ist und ein anderer Zugang gewählt werden muss.

Streichhölzchen[26]	**6ZOv**

Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier Hölzchen aneinander zu legen, wenn gedrehte und gespiegelte Figuren nicht unterschiedlich sind. Dabei gelten folgende Regeln für das Aneinanderlegen:

- Die Hölzchen dürfen sich nur am Ende berühren, das heißt die langen Seiten dürfen nicht nebeneinander liegen.
- Zwei Hölzchen dürfen entweder gerade oder im rechten Winkel aneinander gelegt werden.

[25] Die Verfasserin ist sich dabei durchaus bewusst, dass die hier untersuchten Klassenstufen sich nicht eingehend bzw. gar nicht mit der formalen Kombinatorik befasst haben, und so nicht auf ihr Wissen um bestimmte Formeln zurückgreifen zu können. Dennoch besteht die Möglichkeit, gerade bei dieser Art von Aufgabe, dass die Schüler sich durch die entsprechenden Vorüberlegungen einer Formel nähern.

[26] Um Fragen vorzubeugen, die sich darauf beziehen, ob die Lage der Streichholzköpfchen von Bedeutung ist, wurde in der Zeichnung bewusst auf eine detailgetreue Abbildung verzichtet und im Aufgabentext nur noch von Hölzchen gesprochen.

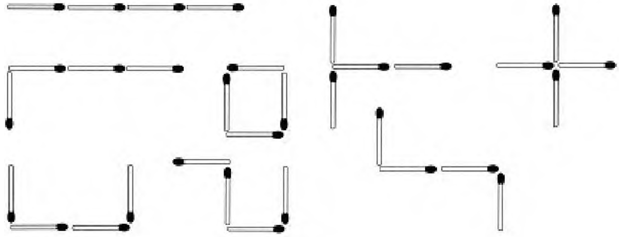
Ein formal-analytisches Vorgehen würde hier zu einer Argumentationskette führen, in der zunächst die Frage geklärt wird, wie viele Möglichkeiten es gibt, ein Hölzchen an ein bereits gelegtes anzulegen. Da entsprechend der Aufgabe zwei Hölzchen nur gerade oder im rechten Winkel aneinander liegen dürfen, ergibt sich, dass die Hölzchen mit 90°-, mit 180°- oder mit 270°-Winkel zueinander liegen und es somit drei Möglichkeiten für ein Anlegen gibt. Diese Vorüberlegung wird auf jedes weitere Anlegen übertragen und führt somit dazu, dass $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Möglichkeiten ermittelt werden.
Dieses Vorgehen berücksichtigt jedoch nicht, inwieweit die angeführten Nebenbedingungen erfüllt werden. So muss über die Frage nach der Anzahl der Möglichkeiten hinaus beachtet werden, dass einige der Lösungen kongruent sind und eben diese Figuren aus der Gesamtanzahl der Möglichkeiten gestrichen werden müssen. Darüber hinaus erfasst ein derartiges Vorgehen auch keine Figuren, bei denen sich drei Hölzchen in einem Punkt treffen. Um ebendiese „doppelten und fehlenden Figuren“ zu ermitteln, bedarf es eines visuell-bildlichen Vorgehens.

Bezüglich der zeichnerischen Ermittlung der Figuren und vor allem der Frage, ob wirklich alle Figuren erfasst worden sind, bieten sich unterschiedliche Strategien für eine systematische Bearbeitung an. Die hier aufgezeigte Strategie bezieht sich dabei auf die Kettenlänge der Hölzchen[27]. Ausgehend von der längsten Kette, die gebildet werden kann, arbeitet man sich sukzessive zur kürzesten Kette. Das heißt, nachdem eine Vielzahl von Figuren gefunden wurden, werden diese zunächst danach geordnet, wie viele Möglichkeiten es gibt, mit vier Hölzchen eine viergliedrige Kette zu legen. Dann folgen die Möglichkeiten eine dreigliedrige Kette zu konstruieren usf. Auf diese Weise ergeben sich folgende Bearbeitungsschritte:

[27] Von einer Kette soll im Zuge dieser Aufgabenanalyse gesprochen werden, wenn die verwendeten Hölzchen eine gerade Linie bilden, unabhängig davon, ob an den Verbindungsstücken in der Mitte der Linie weitere Hölzchen angelegt wurden. Dementsprechend bedeutet eine zweigliedrige Kette, dass die längste gerade Strecke genau zwei Hölzchen lang ist, wie es beispielsweise bei dem „Kreuz“ der Fall ist.

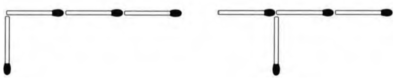
III Aufgabe bearbeiten:

1. Eine erste Ermittlung einiger Figuren

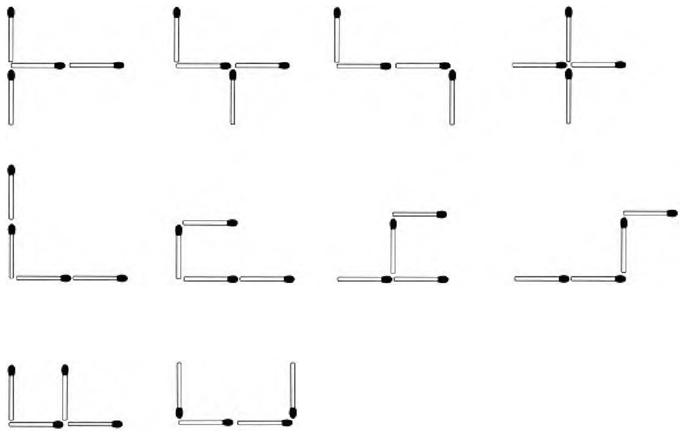


2. Systematisieren: Elemente mit einer viergliedrigen Kette

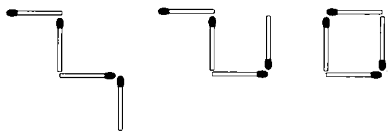
3. Systematisieren: Elemente mit einer dreigliedrigen Kette
   Für die weitere Systematisierung wird hier das freie Hölzchen an einem Knoten angelegt und anschließend um einen Knoten verschoben bis es wieder an dem Startknoten liegt. Dabei werden kongruenten Figuren bereits an dieser Stelle ausgeschlossen.



4. Sortierung der zweigliedrigen Ketten: Systematisches Vorgehen bzgl. des Anlegens der anderen zwei Hölzchen (Hier: Die beiden freien Hölzchen werden zunächst auf unterschiedlichen Seiten der Kette platziert, anschließend werden die Figuren ermittelt, bei denen die Hölzchen auf der gleichen Seite liegen. Hierbei muss unterschieden werden, ob die beiden freien Hölzchen aneinander liegen (zweite Zeile der Abbildung) oder voneinander getrennt liegen (dritte Zeile der Abbildung).)



5. Sortierung der eingliedrigen Kette: Ausgehend von einem Winkel werden die beiden freien Hölzchen so an die Enden angelegt, dass die Kette nicht verlängert wird.



IV (Teil-)Lösungen produzieren:

6. Figuren auf Nebenbedingungen prüfen:
   → Keine kongruente Figuren
7. Die Systematik nutzen, um übersichtlich auszuzählen:

$$1\ (Viererkette) + 2\ (Dreierkette) + 10\ (Zweierkette) + 3\ (Einerkette) = 16$$

Aus dem gleichen Inhaltsbereich entstammt die *Fakultäten*-Aufgabe, bei der es sich um eine formal zu lösende Aufgabe handelt, wobei die Aufgabe den Aufgabenbeispielen der Bildungsstandards entstammt. Die grundsätzliche Idee zur Bearbeitung der Aufgabe liegt zum einen in der Einsicht, dass ein handelsüblicher Schultaschenrechner zwar einen Zahlenwert liefert, dies jedoch keinen Aufschluss darüber gibt, auf wie viele Nullen das Ergebnis endet.

Zum anderen gilt es zu erkennen, welche Zahlen bei der Multiplikation eine Endnull im Produkt erzeugen.

Fakultäten	**10ZOf**
Fakultät, geschrieben als $n!$, ist eine Rechenart, bei der die natürlichen Zahlen bis zu einem bestimmten Wert miteinander multipliziert werden. Beispiel: $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ Bestimme mit wie vielen Nullen das Ergebnis von $20!$ endet, ohne die gesamte Zahl auszurechnen. Das heißt für das Beispiel von oben $6! = 720$ endet auf einer Null. Der Taschenrechner liefert für diese Frage nicht das richtige Ergebnis.	

Die Bearbeitungsschritte stellen sich wie folgt dar:

III Aufgabe bearbeiten:

1. Ursache für Endnullen finden:
   Die Multiplikation mit 10 oder eines Vielfachen davon führt zu einer Endnull. Hier: 10 und 20
2. 10 oder ein Vielfaches davon kann als Produkt zweier Zahlen erzeugt werden:
   10 ist das Produkt von $(2 \cdot 5)$ und die Vielfachen sind durch Vielfache von 2 und 5 zu produzieren. Hier z.B.: $(2 \cdot 5)$, $(4 \cdot 5)$, $(2 \cdot 15)$, $(6 \cdot 15)$ etc.
3. Anzahl der Vielfachen von 2 und 5, die nicht 10 oder 20 sind:
   8 Vielfache von 2
   2 Vielfachen von 5
4. Aus Punkt 3. zu ziehende Schlussfolgerung:
   Da eine 10 oder ein Vielfaches von 10 immer sowohl ein Vielfaches von 5 als auch von 2 benötigen, gibt es nur zwei Produkte, die neben Punkt 1. das gewünschte Ergebnis liefern.
5. Summieren aller Endnullen:
   $Punkt\ 1. + Punkt\ 4.$

IV (Teil-)Lösungen produzieren:

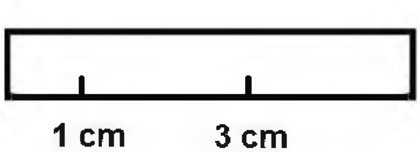
6. Rechenprozeduren vervollständigen:
   10 und 20, sowie $(2 \cdot 5)$ und $(4 \cdot 15)$ liefern Endnullen
7. Lösung interpretieren und präsentieren:
   20! endet auf 4 Nullen.

Der direkte Vergleich der beiden Aufgaben aus der Leitidee *Zahl* der Bildungsstandards zeigt ein identisch aufwändiges Vorgehen, das sich in der Analyse durch die Anzahl der notwendigen Bearbeitungsschritte darstellt.

Analyse der Bearbeitungsschritte der Aufgaben: Sparlineal – Regentonne
Aus dem Inhaltsbereich *Messen* sind zum einen die Aufgaben zum *Sparlineal*, die in Abwandlung aus dem Buch *Denkaufgaben für die 1. und 2. Klasse* entnommen wurde, sowie die Aufgabe zum Füllen der *Regentonne*, welche in vergleichbarer Form in unterschiedlichen Lehrwerken der Mittelstufe zu finden ist.

Das Sparlineal	**3GMv**

Ein Sparlineal ist ein flaches Holzstück einer bestimmten Länge, auf dem möglichst wenige Markierungen gemacht wurden. Doch diese wenigen Markierungen sind so platziert, dass es mit **einmaligem** Anlegen möglich ist, jede Länge in 1 cm Abständen abzumessen.
So kann ein Sparlineal von 5 cm Länge und den Markierungen bei 1 cm und 3 cm jede zentimetergenaue Strecke bis 5 cm abmessen. So kann man mit dem folgenden Sparlineal 2 cm abmessen, indem man von der 1 cm-



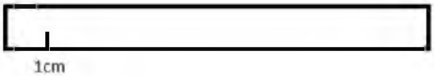
Markierung bis zur 3 cm-Markierung anlegt:

Nun soll es deine Aufgabe sein, auf einem 10 cm langen Sparlineal möglichst wenige Markierungen so zu setzen, dass man jede Länge von 1 cm bis 10 cm mit nur **einmal anlegen** abmessen kann. Wie viele Markierungen brauchst du und wo liegen sie?

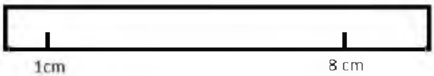
Die Grundidee bei der Aufgabe zum Sparlineal besteht darin, dass nicht damit begonnen wird, eine Markierung für die kürzeste Distanz zu suchen, sondern damit, dass zunächst die längste Distanz abgetragen wird. Dieses Vorgehen begründet sich darin, dass es eine Vielzahl an Möglichkeiten gibt, $1\ cm$ auf dem Sparlineal abzutragen, während es lediglich zwei Möglichkeiten gibt, $9\ cm$ mit einmaligem Anlegen zu messen. Das heißt für das weitere Vorgehen, dass immer eine Markierung für die verbleibend längste Distanz gesucht wird, unter der Bedingung, dass möglichst wenige Abstände auf mehrere Weisen abzulesen sind.

III Aufgabe bearbeiten:

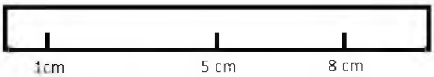
1. Eine Markierung setzen und messbare Längen ablesen:

   Messbare Längen[28]: 10, 1 und 9
2. Zweite Markierung setzen und messbare Längen ablesen:

   Messbare Längen: 10, 1 und 9 sowie 8, 2 und 7
3. Fehlende Längen bestimmen:
   Es fehlen: 3, 4, 5 und 6
4. Dritte Markierung setzen und messbare Längen ablesen:

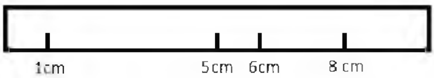
   

   Messbare Längen: 10, 1 und 9 sowie 8, 2 und 7 und neu 3, 4 und 5
5. Strategie prüfen: 9 Längen sind messbar, eine wurde doppelt gemessen, kann das durch eine andere Markierung umgangen werden?
   Bei $3\ cm$ sind 7 Längen messbar, bei $4\ cm$ sind es 9 Längen, bei $6\ cm$ sind es 9 Längen, also wird zwingend eine vierte Markierung gebraucht.

[28] Der Übersichtlichkeit halber wird innerhalb der Aufstellung auf die jeweiligen Einheiten verzichtet.

IV (Teil-)Lösungen produzieren:

6. Bearbeitung vervollständigen:



7. Lösung (Bearbeitung) interpretieren:
   Man benötigt zumindest vier Markierungen.

Obwohl die *Regentonnen*-Aufgabe eine stärkere Struktur für den Lösungsweg vorgibt, unterscheidet sie sich nur minimal im Hinblick auf notwendige Bearbeitungsschritte und dem damit einhergehenden Umfang, wie die folgende Analyse zeigt.

Füllen einer Regentonne	**5GMf**

Für die Berechnung einer Regentonne gilt folgende Formel:

$$V_{\text{Regentonne}} = G \cdot h = (\pi \cdot r^2) \cdot h$$

a) Dabei hat die Tonne einen Durchmesser von 80 cm und eine Höhe von genau einem Meter. Wie viel Inhalt passt in die Tonne?

b) Wie lange braucht man, um die Tonne mit Wasser zu füllen, wenn aus dem Wasserschlauch 25 l in der Minute kommen?

Die grundsätzliche Idee zur Bearbeitung dieser Aufgabe ist im Text der Aufgabe bereits impliziert. So geht es darum, die Füllzeit einer Regentonne zu bestimmen, was wiederum nur durch das Ermitteln des Volumens und der Berücksichtigung der Füllgeschwindigkeit möglich ist. Es handelt sich hierbei um eine Modellierungsaufgabe mit vorgegebener Vereinfachung der komplexen Realsituation, so wird bereits in der Aufgabe die Regentonne als Zylinder angenommen. Dementsprechend findet sich in der folgenden Aufgabe auch ein Wechsel zwischen der *Aufgabenbearbeitung* und dem *Produzieren von Lösungen*.

III Aufgabe bearbeiten:

1. Grundfläche berechnen:
$$G_{\text{Tonne}} = \pi \cdot \left(\frac{80\ cm}{2}\right)^2$$
2. Volumen berechnen:
$Punkt\ 1. multipliziert\ mit\ der\ Höhe$
3. Einheit der Höhe angleichen:
$1\ m = 100\ cm$

IV (Teil-)Lösungen produzieren:

4. Rechenprozedur vervollständigen:
$$\pi \cdot \left(\frac{80\ cm}{2}\right)^2 \cdot 100\ cm \approx 502.655\ cm^3$$

III Aufgabe bearbeiten:

5. Zeit bestimmen:
$$\frac{Punkt\ 4.}{25\frac{l}{min}}$$

IV (Teil-)Lösungen produzieren:

6. Einheiten angleichen:
$1l = 1dm^3$
$502.655\ cm^3 \approx 502{,}655\ dm^3$
7. Rechenprozedur vervollständigen:
$$\frac{502{,}655\ dm^3}{25\ \frac{dm^3}{min}} \approx 20{,}1\ min$$
8. Lösung interpretieren und präsentieren:
Um die Tonne zu füllen, braucht man etwa 20,1 min.

Obwohl die beiden vorangegangenen Aufgaben sehr unterschiedlichen Quellen entnommen worden sind und damit grundsätzlich von einem Auseinanderklaffen des jeweiligen Umfangs auszugehen wäre, zeigt die Analyse, dass beide Aufgaben durchaus miteinander vergleichbar sind.
Zu erklären ist dies zum einen mit dem Problemlösecharakter der Aufgabe des Sparlineals und der damit verbundenen Notwendigkeit diverse Informa-

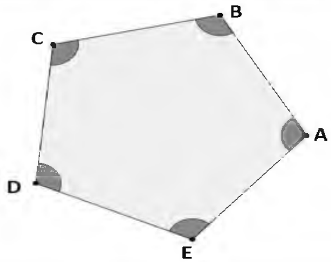
tionen und Bedingungen in Einklang zu bringen, und zum anderen damit, dass die Aufgabe zum Füllen der Regentonne ein Zwischenergebnis erfordert, welches das Vorgehen besonders strukturiert.

Innenwinkel – Variation der Möndchen des Hippokrates

Aus dem Inhaltsbereich *Raum und Form* stammen die beiden folgenden Aufgaben, beide aus Mathematikbüchern der Sekundarstufe I entnommen, wobei sich die Variation der Möndchen des Hippokrates um eine Modifikation der Ursprungsaufgabe handelt.

Innenwinkel	**7RFv**

Die Abbildung zeigt dir ein Fünfeck. Zeichne Hilfslinien so ein, dass du mit ihrer Hilfe begründen kannst, dass die Innenwinkelsumme eines Fünfecks immer 540° beträgt.

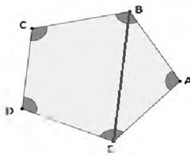


Grundsätzlich handelt es sich bei dieser Form der Aufgabe um einen visuellen Beweis, wobei die zugrundeliegende Idee ist, die dargestellte geometrische Figur durch entsprechende Hilfslinien aus geometrischen Grundfiguren herzustellen. Bedingung für die geometrischen Grundfiguren ist, dass Aussagen über ihre Innenwinkelsummen gemacht werden können. Entsprechend des Vorwissens, dass Dreiecke eine Innenwinkelsumme von 180° besitzen, gilt es, das abgebildete Fünfeck in mehrere Dreiecke[29] zu zerlegen, sodass sich ihre Eckpunkte und damit die eingeschlossenen Winkelgrößen in den Winkeln des Fünfecks wiederfinden.

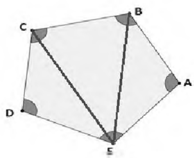
[29] Das hier beschriebene Vorgehen mehrere Dreiecke innerhalb des Fünfecks zu finden, ist jedoch nur eine Möglichkeit zu einer Lösung zu gelangen. So ist es durchaus denkbar, dass nicht bzw. nicht nur auf das Vorwissen der Innenwinkelsumme von Dreiecken, sondern auch auf das, welches die Innenwinkelsumme von Vierecken betrifft, zurückgegriffen wird. Damit sind sowohl Kombinationen aus Drei- und Vierecken, als auch die Zerteilung in zwei Vierecke denkbar.

III Aufgabe bearbeiten:

1. Untersuchen der Hilfslinie von „Seite zu Seite“
   → Keinerlei Hilfe für die Innenwinkelsumme, da entweder eine Kombination aus einem Viereck und einem neuen Fünfeck entsteht oder aus einem Dreieck und einem Sechseck, sodass das Problem nicht gelöst wird.
2. Untersuchen der Hilfslinie von „Punkt zu Seite“
   → Die Hilfslinien teilen das Fünfeck entweder in ein Dreieck und ein neues Fünfeck, was nicht zu einer Lösung führt, oder aber in zwei Vierecke[30].
3. Untersuchen der Hilfslinien von „Punkt zu Punkt“
   → Die Hilfslinien schaffen Figuren, deren Winkel Teil der Winkel des Fünfecks sind und ihre Innenwinkelsummen somit zur Ermittlung der Innenwinkelsumme des Fünfecks dienen.
4. Zeichnen der ersten Hilfslinie und Identifikation der gewonnenen Figuren:

   Es entstehen ein Dreieck und ein Viereck.
5. Wissen abrufen und anwenden:
   Die Innenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt immer 180°.
6. Viereck durch eine weitere Hilfslinie in zwei Dreiecke zerlegen:

[30] Dieses Vorgehen bedarf der Erkenntnis, dass die Hilfslinie an der Seite, die sie trifft einen 180° Winkel schafft, der in der weiteren Bearbeitung abgezogen werden muss. Dieses Vorgehen reduziert die Bearbeitungsschritte auf 7.

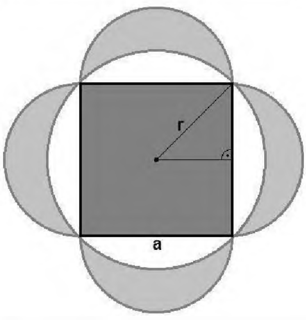
7. Innenwinkelsumme des Fünfecks in Beziehung zu den Dreiecken setzen:
   Jeder Winkel der Dreiecke bildet alleine oder als Summe zweier oder dreier Dreiecke einen Innenwinkel des Fünfecks. Kein Dreieckswinkel wird doppelt verwendet.

IV (Teil-)Lösungen produzieren:

8. Rechenprozedur vervollständigen:
   $3 \cdot 180° = 540°$

Der Vergleich zur folgenden Aufgabe zeigt eine ähnlich umfangreiche Bearbeitung. Und obwohl die Aufgabe eine Zeichnung enthält und damit auf den ersten Blick ein visuell-bildliches Vorgehen erwartet werden könnte, handelt es sich um eine formal zu bearbeitende Aufgabe, in der die Abbildung lediglich die Funktion der Verdeutlichung des Sachverhalts übernimmt. Zur genaueren Begründung, weshalb es sich bei dieser Aufgabe um eine formal-analytische Aufgabe handelt, siehe Kapitel 5.4.2..

Die Variation der Möndchen des Hippokrates	2RFf



Bei der Abbildung handelt es sich um eine Variation der Möndchen des Hippokrates. Dieser hat gezeigt, dass die Summe der Flächeninhalte der vier Sicheln (in der Abbildung hellgrau eingezeichnet) genauso groß ist, wie die Fläche des Quadrats (hier dunkelgrau dargestellt).

Wie kann man dies begründen?

Zum Lösen der Aufgabe bedarf es vor allem der Einsicht, dass die rechnerisch ermittelten Flächen sich nur dann vergleichen lassen, wenn der Radius mithilfe des Satzes von Pythagoras durch die Kantenlänge des Quadrats a angegeben wird. Dementsprechend ergeben sich folgende Bearbeitungsschritte:

III Aufgabe bearbeiten:

1. Berechnung der Fläche des Quadrats:
   $A_{\text{Quadrat}} = a \cdot a = a^2$
2. Berechnung aller Halbkreise über den Seiten:
   $$A_{\text{aller Halbkreise}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\right)$$
3. Berechnung der vier „Lücken“:
   $A_{\text{"Lücken"}} = \pi \cdot r^2 - a^2$
4. Berechnung der Sicheln:
   $$A_{\text{Sicheln}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\right) - (\pi \cdot r^2 - a^2)$$
5. Den Radius mit Pythagoras berechnen:
   $$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

IV (Teil-)Lösungen produzieren:

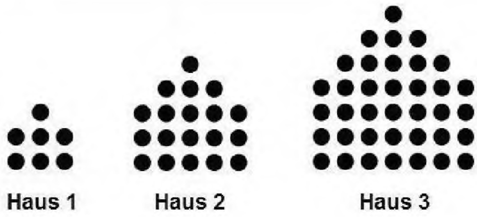
6. Durch Umformung Punkt 2. vereinfachen:
   $$4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\right) = 2 \cdot \left(\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a^2$$
7. Einsetzen des ermittelten Radius r in Punkt 4.:
   $$\begin{aligned} A_{\text{Sicheln}} &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\right) - \pi \cdot r^2 + a^2 \qquad | \text{ einsetzen} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a^2 - \pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a^2 - a^2 = a^2 \end{aligned}$$
8. Lösung interpretieren und präsentieren:
   Die Fläche aller vier Sicheln beträgt $A_{\text{Sicheln}} = a^2$ was gernau dem Flächeninhalt des Quadrats entspricht.

Wie der Vergleich der beiden Aufgaben aus dem Inhaltsbereich *Raum und Form* aufzeigt, bedarf es bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben gleich viele Bearbeitungsschritte, obwohl er durchaus die Frage zulässt, ob einzelne Bearbeitungsschritte der Aufgaben nötig wären (vgl. Bearbeitungsschritte 1. bis 3. von Aufgabe 7RFv) bzw. einzelne Bearbeitungsschritte nicht weiter aufgefächert werden müssten (vgl. Aufgabe 2RFf, Bearbeitungsschritt 2., 3. oder 7.).

Hierzu ist einzuräumen, dass die Bearbeitungsschritte 1. bis 3. (7RFv) nicht zwingend in der hier vorliegenden Reihenfolge bearbeitet werden müssen, wodurch jedoch der Anschein entsteht, dass eventuell nur ein Bearbeitungsschritt, statt der hier angegebenen drei, nötig ist. Dem ist jedoch insofern zu widersprechen, als dass die grundsätzliche Idee, eine Hilfslinie von „Punkt zu Punkt", der anschließenden Überprüfung bedarf, ob es sich hierbei um ein geeignetes Vorgehen handelt. Es muss dementsprechend an einer Stelle des Bearbeitungsprozesses geprüft werden, ob andersgeartete Hilfslinien nicht „zielführender" sind, als dass es Hilfslinien von „Punkt zu Punkt" sind.
Und auch der Einwand, dass Bearbeitungsschritt 2. bzw. 3. (2RFf) eigentlich eine Abfolge mehrere Bearbeitungsschritte darstellt, lässt sich insofern entkräften, als dass es sich bei dem Zusammenlegen aller vier Halbkreise (Bearbeitungsschritt 2.) und entsprechend aller vier „Lücken" (Bearbeitungsschritt 3.) lediglich um eine Interpretation der Abbildung handelt und somit entsprechend des Modells zum *Informationen herausarbeiten* zu zählen ist. Und auch bezüglich Bearbeitungsschritt 7. ist anzumerken, dass es sich um eine *Vervollständigung einer Rechenprozedur* handelt und somit tatsächlich einen Bearbeitungsschritt darstellt.
Gemessen an den Bearbeitungsschritten der beiden vorliegenden Aufgaben bestätigt sich demnach, dass beide ähnliche Anforderungen in den Bearbeitungsschritten aufweisen.

Analyse der Bearbeitung: Das House of Dots – Seil um den Äquator

Das House of Dots	**4FZv**



Was du hier siehst, ist ein Zahlenmuster, das sich nach einer bestimmten Regel fortsetzt. Erkläre anhand einer Zeichnung, wie das nächste Haus gebildet wird und ermittle, aus wie vielen „Dots (Punkten)“ das „Haus 4“ besteht.

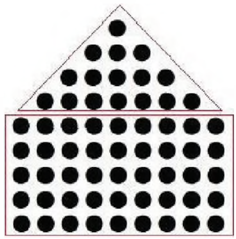
Bei dem *House of Dots* handelt es sich um eine visuell dargestellte Zahlenfolge, die damit zwar durchaus auch als formal-analytisch ausgerichtete Aufgabe denkbar ist, die jedoch durch ihre Bearbeitungsaufforderung und der Notwendigkeit der Abbildungen für das Bearbeiten den visuell-bildlichen Aufgaben zugerechnet wird.
Und auch, wenn in der hier vorgenommene Analyse der Bearbeitungsschritte zunächst scheinbar nur mit Zahlen operiert wird, so sind diese nur aus den vorgegebenen Abbildungen zu ermitteln und eben dort zu verorten. Dementsprechend stellt sich die Bearbeitung der Aufgabe „House of Dots“ wie folgt dar:

III Aufgabe bearbeiten:

1. Veränderung der Grundseite:
   $3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow ???$
2. Veränderung der Höhe:
   $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow ???$
3. Veränderungen des Dachs:
   $1 \rightarrow (1+3) \rightarrow (1+3+5) \rightarrow ???$

IV (Teil-)Lösungen produzieren:

4. Reihe fortsetzen:
   $3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \mathbf{9}$
5. Reihe fortsetzen:
   $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \mathbf{5}$
6. Reihe fortsetzen:
   $1 \rightarrow (1+3) \rightarrow (1+3+5) \rightarrow (\mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{5}+\mathbf{7})$
7. Zeichnung anfertigen:



Haus 4

8. Lösung interpretieren und präsentieren:
   Punkte auszählen / bestimmen: Das Haus 4 besteht aus 61 Punkten.

Demgegenüber besteht die grundsätzliche Idee zum Lösen der Aufgabe *Seil um den Äquator* in einem Vergleich zwischen dem Radius der Erde mit einem neu ermittelten Radius, der sich aus der Verlängerung des Erdumfangs um einen Meter konstatiert. Das heißt, es müssen zwei Radien miteinander verglichen werden, die sich aus unterschiedlichen Umfängen ergeben.

Seil um den Äquator	**8FZf**
Denke dir um den Äquator der Erde, mit seinen 40030 km, ein straff gespanntes Seil. Dieses Seil wird nun um genau einen Meter verlängert, dann wird es wieder gleichmäßig um den Äquator gelegt. Wegen der Verlängerung steht das Seil nun überall etwas vom Äquator ab. $$U_{\text{Äquator}} = 2 \cdot \pi \cdot r = 40030\ km$$ Kann nach dieser Verlängerung eine Maus mit etwa 4 cm Höhe unter dem Seil durchlaufen?	

Für die Bearbeitung der Aufgabe ergeben sich die folgenden acht Schritte:

III Aufgabe bearbeiten:

1. Radius der Erde berechnen:

$$2 \cdot \pi \cdot r = 40030\ km \qquad |: 2 : \pi$$

$$\Leftrightarrow \qquad r_{\text{Erde}} = \frac{40030\ km}{2\pi}$$

2. Radius des verlängerten Seils berechnen

$$2 \cdot \pi \cdot r = 40030\ km + 1\ m \qquad |: 2 : \pi$$

$$\Leftrightarrow \qquad r_{\text{Seil}} = \frac{40030\ km + 1\ m}{2\pi}$$

3. Den Höhenunterschied berechnen:

$Punkt\ 2.\ und\ Punkt\ 1.\ subtrahieren$

IV (Teil-)Lösungen produzieren:

4. Einheit der Verlängerung an den Umfang angleichen:

$1m = 0{,}001\ km$

5. Rechenprozedur vervollständigen:

$$\Delta r = r_{\text{Seil}} - r_{\text{Erde}}$$

$$= \frac{40030\,km + 1\,m}{2\pi} - \frac{40030\,km}{2\pi}$$

$$= \frac{40030{,}001\,km}{2\pi} - \frac{40030\,km}{2\pi}$$

$$\approx 6370{,}97253112\,km - 6370{,}97237197\,km$$

$$= 0{,}00015915\,km$$

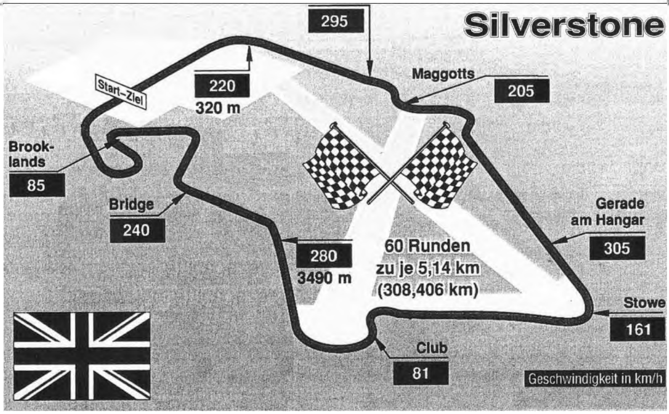
6. Lösung auf Fragestellung prüfen:
   Die Maus ist 4 cm hoch, wie steht das im Verhältnis zu meiner km-Angabe?
7. Den Höhenunterschied in cm ausdrücken:
   $0{,}00015915\,km = 0{,}15915\,m = 15{,}915\,cm$
8. Lösung interpretieren:
   Die Maus mit einer Höhe von 4cm passt unter dem Seil unterdurch, da sein Abstand zur Erde 15,9 cm beträgt.

Die Bearbeitungsschritte der beiden vorangegangenen Aufgaben des Inhaltsbereichs *Funktionaler Zusammenhang* zeigen auf, dass die Anforderungen an den Bearbeitungsprozess der Schüler durchaus in ihrem Umfang vergleichbar sind.

Bearbeitungen der Aufgaben Silverstone – Taschengeld

Wie bereits in der *Regentonnen*-Aufgabe ist die Grundidee der Aufgabe *Silverstone* bereits im Text genannt. Die Schwierigkeit in dieser Aufgabe liegt vor allem in der Überführung der gegenständlich dargestellten Informationen in eine entsprechende mathematische Visualisierung, welche die Aufgabe als ein Graph im Koordinatensystem vorsieht.

Silverstone	**9DZv**



Die Grafik zeigt den Kurs des Formel-1-Rennens in Silverstone von Michael Schumacher von 1998. Stelle die gegebenen Geschwindigkeiten in einem Koordinatensystem dar.

Die grundsätzliche Idee ist es folglich, die gegebenen Daten aus der Abbildung herauszulösen und entsprechend der Vorgaben eines Koordinatensystems umzuarbeiten. Damit stellen sich die einzelnen Bearbeitungsschritte wie folgt dar:

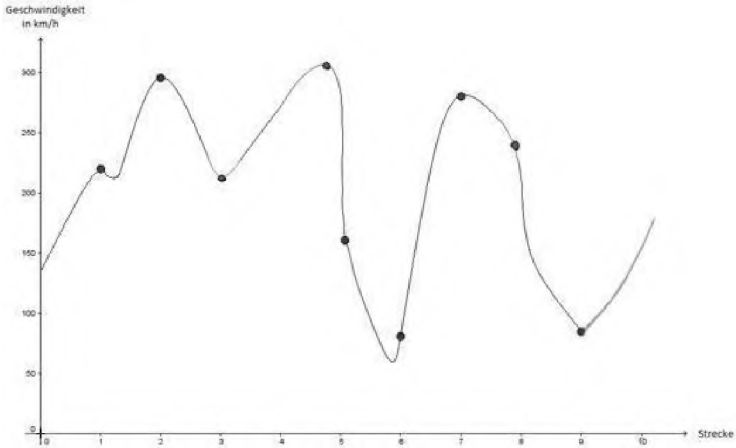
II Aufgabe bearbeiten:

I 1. Daten interpretieren:
   - Die schwarzen Fähnchen enthalten die Geschwindigkeit.
2. Daten interpretieren:
   - Die Namen darüber geben die entsprechenden Messpunkte an.
3. Daten interpretieren:
   - Die Angaben zu den Runden und die Länge der Runden / Gesamtlänge sind hier nicht von Bedeutung.
4. Fahrtrichtung bestimmen:
   - Zwei Messpunkte sind mit Meter-Angaben versehen, also fährt Schumacher im Uhrzeigersinn.

5. Wissen über Koordinatensysteme abrufen:
   - Auf der Abszisse wird die Strecke notiert
   - Auf der Ordinate wird die Geschwindigkeit abgetragen
6. Besonderheiten der situativen Kontextes erkennen:
   - Geschwindigkeit ist durchgängig, weshalb nicht nur die einzelnen Messwerte eingetragen werden können

I (Teil-)Lösungen produzieren:

V 7. Zeichnung anfertigen:



Bezüglich der formalen Korrektheit des Schaubilds ist zum einen darauf zu achten, dass obwohl nur einzelne Messungen bekannt sind, es sich um die Darstellung einer kontinuierlichen Bewegung handelt und deshalb ein durchgängiger Graph gezeichnet werden soll. Zum anderen ändern sich die dargestellten Geschwindigkeiten nicht abrupt, was in der geschwungenen Linie des Graphen ersichtlich ist. Die oben dargestellten „Ränder“ des Graphen erklären sich dadurch, dass, obwohl nur die Zeiten einer einzelnen Runde angegeben wurden, hier angenommen wird, dass die Messungen innerhalb eines Rennens durchgeführt wurden.

Bei der *Taschengeld*-Aufgabe handelt es sich um eine Aufgabe, die im schulischen Kontext der Sekundarstufe I üblicherweise bei der Ermittlung des Notenspiegels thematisiert wird und den Schülern damit grundsätzlich bekannt sein dürfte. Die in dieser Aufgabe vorliegenden Sachsituation wurde deshalb bewusst nicht aus dem bereits bekannten Kontext kreiert, sondern lediglich aus der Umwelt der Schüler entnommen.

Taschengeld **1DZf**

In einer Tageszeitung findet man folgende Statistik über die Verteilung von Taschengeld sowie eine kommentierende Aussage des Direktors:

Taschengeld pro Monat	10 Euro	15 Euro	25 Euro	40 Euro	50 Euro	60 Euro
Anzahl der Schüler	43	48	29	102	20	8

Der Direktor meint dazu: „Die Schülerinnen und Schüler der Mittelstufe bekommen im Monat zwischen 10 und 60 Euro, und schaut man sich die Daten genauer an, sieht man, dass den meisten Schülern durchschnittlich 40 Euro im Monat zur Verfügung stehen.“

Was meinst du zu der Aussage des Direktors? Hat er die durchschnittliche Höhe des Taschengeldes richtig angegeben?

Um die Aussage des Direktors auf Korrektheit zu überprüfen, bedarf es der Ermittlung der durchschnittlichen Höhe des Taschengeldes und dem anschließenden Vergleich mit der von dem Direktor angegebenen 40 € pro Monat. Das heißt für den Lösungsweg Folgendes:

III Aufgabe bearbeiten:

1. Daten interpretieren:
   - Die Spalten von unten nach oben gelesen, geben an, wie viele Schüler (untere Zelle) eine bestimmte Summe Taschengeld (obere Zelle) erhalten
2. Wissen über den Durchschnitt abrufen:
   - Gesamte vorhandene Geldmenge gleichmäßig auf alle befragten Schüler umverteilen

3. Zusammenhang von Geld und Schüleranzahl herstellen:
   $43 \cdot 10€ + 48 \cdot 15€ + 29 \cdot 25€ + 102 \cdot 40€ + 20 \cdot 50€ + 8 \cdot 60€$
4. Anzahl aller Schüler ermitteln:
   $43 + 48 + 29 + 102 + 20 + 8$
5. Durchschnitt bestimmen:
   $$\frac{Punkt\ 3.}{Punkt\ 4.}$$

IV (Teil-)Lösungen produzieren:

6. Rechenprozedur vervollständigen:
   $$\frac{43 \cdot 10€ + 48 \cdot 15€ + 29 \cdot 25€ + 102 \cdot 40€ + 20 \cdot 50€ + 8 \cdot 60€}{43 + 48 + 29 + 102 + 20 + 8}$$
   $$= \frac{7435\ €}{250} = 29{,}74€$$
7. Lösung interpretieren und präsentieren:
   Durchschnittlich bekommen die Schüler ein Taschengeld in Höhe von 29,74€, deshalb hat der Direktor nicht Recht.

Auch die Gegenüberstellung der beiden Aufgaben aus dem Inhaltsbereich *Daten und Zufall* zeigt, dass sich beide Aufgaben hinsichtlich ihres Umfangs nicht unterscheiden.

Die Auswahl von Aufgaben, die einen ähnlichen Bearbeitungsumfang aufzeigen, begründet sich darin, dass ein ähnlicher Bearbeitungsaufwand damit keinen oder einen nur geringen Einfluss auf das Aufgabenempfinden hat. Und wie in den vorangegangenen detaillierten Analysen aufgezeigt, sind jeweils zwei Aufgaben desselben Inhaltsbereiches nach ihrem Umfang der Bearbeitung gleich oder zumindest sehr ähnlich.

	ZO	GM	RF	FZ	DZ
visuell-bildlich	7	7	8	8	7
formal-analytisch	7	8	8	8	7

Tab. 5.2.: Gegenüberstellung der Anzahl der Bearbeitungsschritte zur Lösung der Aufgaben

Darüber hinaus verdeutlicht die direkte Gegenüberstellung der hier dargestellten Ergebnisse der Analyse, dass alle Aufgaben eine ähnliche Anzahl von notwendigen Bearbeitungsschritten aufweisen (siehe Tab. 5.2.), so dass ihr Einfluss auf das Empfinden und die erfolgreiche Bearbeitung minimiert wurde.

5.4.2. Der den Aufgaben inhärente Denkstil

Wie bereits im Forschungsüberblick dargelegt, zeichnet sich ein visuell-bildlich geprägtes Vorgehen dadurch aus, dass verstärkt auf Skizzen, Diagramme o. ä. in der Bearbeitung und allgemeiner dem Verständnis von Mathematik zurückgegriffen wird. Demgegenüber präferiert ein analytischer Denker ein Vorgehen, das vorrangig auf Variablen, Terme und Formeln zurückgreift (vgl. Kapitel 2.3. und 3.2.).
Überträgt man diese charakteristischen Merkmale innerhalb des Vorgehens beim Mathematiktreiben auf die Analyse von Aufgaben, so bedeutet das, dass sich visuell-bildliche Aufgaben vor allem dadurch auszeichnen, dass ihre Bearbeitung auf ein visuell-bildliches Vorgehen ausgerichtet ist und entsprechend, dass formal-analytische Aufgaben sich vor allem durch ein formales, algebraisches Vorgehen auszeichnen. Dies soll jedoch nicht heißen, dass Aufgaben des einen oder anderen Typs nicht auch auf andere Weise lösbar sind (vgl. Riding/Rayner 2012, Schwank 1990), sondern, dass ein andersgeartetes Vorgehen mit einem erheblich größeren Aufwand verbunden ist.[31]
In der detaillierten Analyse der einzelnen Bearbeitungsschritte der Aufgaben fanden sich immer wieder auch Verweise darauf, welchen Denkstil die einzelnen Aufgaben nahelegen (vgl. Kapitel 5.4.1.). Dies soll in diesem Kapitel nun expliziert werden, indem sowohl die Aufgabenstellung wie auch der implizit enthaltene Lösungsansatz analysiert werden. Für die verwendeten Aufgaben ergibt sich folgende Übersicht:

[31] Es soll zusätzlich darauf aufmerksam gemacht werden, dass die hier unternommene Differenzierung der Aufgaben nicht bedeutet, dass grundsätzlich jede Aufgabe dem einen oder anderen Typ zuzuordnen ist. Vielmehr ist es so, dass eine Vielzahl von Aufgaben auf unterschiedliche Weise und diesbezüglich auch sowohl visuell-bildlich als auch formal-analytisch lösbar sind.

	ZO	GM	RF	FZ	DZ
visuell-bildlich	Streich-hölzchen	Sparlineal	Innenwin-kel	House of Dots	Silverstone
formal-analytisch	Fakultäten	Regenton-ne	Möndchen	Seil um Äquator	Taschen-geld

Tab. 5.3.: Einteilung der Aufgaben nach ihrer Nähe zu einem visuell-bildlichen bzw. formal-analytischen Vorgehen

Wie bereits in der detaillierten Analyse der Bearbeitungsschritte der Streichhölzchen-Aufgabe angemerkt, ist ein formal-analytisches Vorgehen vor dem Hintergrund der Kombinatorik durchaus annehmbar, führt jedoch in diesem Zusammenhang nicht zu einem korrekten Ergebnis. So kann zwar durchaus der Eindruck entstehen, dass durch die drei Möglichkeiten ein Hölzchen an ein anderes zu legen sowie das dreifache Anlegen eines Hölzchens insgesamt 27 Möglichkeiten existieren. Dieses Vorgehen berücksichtigt jedoch nicht die in der Aufgabe genannte Nebenbedingung über kongruente Figuren und schließt zudem Figuren aus, bei denen sich drei Hölzchen in einem Knoten treffen.

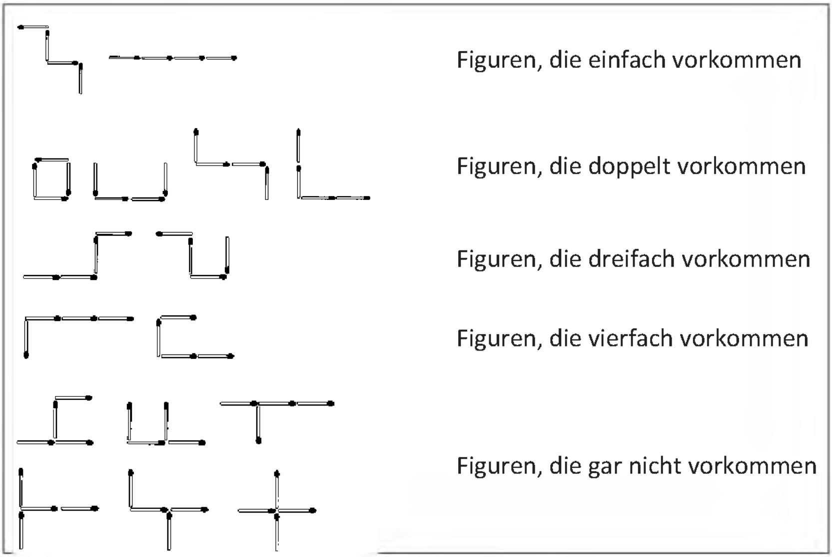


Abb. 5.3.: Darstellung der Berücksichtigungshäufigkeit der Figuren beim formal-analytischer Ermittlung aller Figuren

Dementsprechend zeigt sich, dass das einzig zielführende Vorgehen zur Lösung dieser Aufgabe ist, die möglichen Figuren visuell-bildlich darzustellen und entsprechend auszuzählen.
Wie sich demgegenüber in der im vorangegangenen Kapitel dargestellten Darlegung der einzelnen Bearbeitungsschritte der Aufgabe zeigt, handelt es sich bei der *Fakultäten*-Aufgabe um ein formal-analytisches Vorgehen. So wird innerhalb dieser Aufgabe indirekt gefordert, dass durch logische Überlegungen und entsprechende innermathematische Argumentationen jene Zahlen bestimmt werden, die innerhalb einer Multiplikation im Produkt zu einer Endnull führen. Zu begründen ist die notwendig formal-analytische Bearbeitung damit, dass die für diese Aufgabe notwendige Argumentation nur anhand der konkret vorliegenden Fakultät und dem zugrundeliegenden formalen Verständnis der Besonderheiten der Multiplikation vorgenommen werden kann. So ist der Ausdruck der Fakultät dem formalen Bereich der Mathematik entnommen und selbst bei der Interpretation der Fakultät als Folge und der damit möglichen visuell-bildlichen Repräsentation besitzt diese Repräsentation keinen Wert für die Beantwortung der Frage nach den Endnullen.

Die Analyse des inhärenten Denkstils der Aufgabe *Sparlineal* ergibt, dass diese Aufgabe ein visuell-bildliches Vorgehen nahelegt. Der Versuch eines formal-analytischen Vorgehens, ganz ohne visuelle Stützung, könnte über die Frage erfolgen, wie viele Längen mit einer bestimmten Anzahl von Markierungen erfasst werden können. Dabei ergibt die rein formale Betrachtung des Problems folgende Übersicht:

Anzahl und Sitz der Markierung	Welche Strecke (in cm) kann dargestellt werden?[32]	Wie viele Strecken können insgesamt dargestellt werden?
0	10	1
eine bei r	$10, 10-r, r$	3
zwei bei r und s	$10, 10-r, 10-s, r, s, r-s$	6
drei bei r, s und t	$10, 10-r, 10-s, 10-t,$ $r, s, t, r-s, r-t, s-t$	10

Tab. 5.4.: Allgemeine Übersicht zur Ermittlung der Markierungen auf dem Sparlineal

Obwohl dieses Vorgehen zunächst vielversprechend aussieht, da die so gewonnene Übersicht erkennen lässt, dass bereits mit drei Markierungen zehn Distanzen dargestellt werden können, gibt sie keine Auskunft darüber, ob eine Streckenlänge auf mehrfache Weise gemessen wird. Zudem gibt diese Übersicht ebenfalls keine Auskunft darüber, wo die einzelnen Markierungen zu setzen sind.
Es kann also durchaus sein, – und die unten aufgeführte aufgabenbezogene Übersicht belegt das – dass zwei Differenzen identisch sind. Entsprechend der in der Analyse im vorangegangenen Kapitel aufgeführten Vorüberlegungen ergeben sich für die ersten beiden Markierungen die Paarungen $2\ und\ 9$ bzw. alternativ $1\ und\ 8$.

Anzahl und Sitz der Markierung	Welche Strecke (in cm) kann dargestellt werden?	Wie viele Strecken können insgesamt dargestellt werden?
0	10	1
eine bei 9	$10, 10-9, 9$	3
zwei bei 9 und 2	$10, 1, 9,$ $10-2, 2, 9-2$	6
drei bei $9, 2$ und t	$10, 1, 9{,}8, 2, 7,$ $10-t, t, 9-t, t-2$	10

Tab. 5.5.: Aufgabenbezogene Übersicht zur Ermittlung der Markierungen auf dem Sparlineal

[32] In der Tabelle werden jeweils die Beträge der Differenzen betrachtet.

Zu ermitteln ist dann jedoch, wo *t* auf dem Sparlienal liegt, sodass keine der bereits ablesbaren Längen abgebildet werden. Ein solches Vorgehen, ohne visuell-bildliche Repräsentation, gestaltet sich durch die Begrenzung der Gesamtlänge des Sparlineals zwar nicht allzu schwer, dennoch erleichtert eine entsprechende Skizze das Vorgehen bei der Lösung ebenjener Aufgabe.
Die *Regentonnen*-Aufgabe ist demgegenüber eine formal-analytische Aufgabe, die bereits durch ihren Aufgabentext und den konkreten Bezug zu der Volumenformel ein bestimmtes Vorgehen nahelegt. Ein rein visuelles Vorgehen gestaltet sich bei dieser Aufgabe insofern schwierig, da sich die zeichnerische Lösung zum einen durch die Maßstabstreue und zum anderen durch die Dreidimensionalität als problematisch erweist. Zudem gibt es keine Möglichkeit die Einfüllgeschwindigkeit des Wassers visuell-bildlich darzustellen. Dementsprechend sind die Schüler dazu angehalten die vorgegebene Formel entsprechend zu interpretieren und auf das vorliegende Problem anzuwenden, um so rechnerisch das Volumen der Tonne zu bestimmen, um anschließend die benötigte Zeit für das Füllen der Tonne zu errechnen.

Die Denkstil-Paarung in der Leitidee *Raum und Form* bezieht sich auf die visuell-bildliche Aufgabe zu der Innenwinkelsumme in einem beliebigen Fünfeck und der analytisch-formalen Aufgabe zur Variation der Möndchen des Hippokrates.
Dabei handelt es sich bei der Innenwinkelsummen-Aufgabe deshalb um eine visuell-bildliche Aufgaben, da die Begründung für die Innenwinkelsumme eines beliebigen Fünfecks auf visuelle Art, in Form von Hilfslinien erfolgen soll. Durch die explizite Vorgabe des Einzeichnens von Hilfslinien in die abgebildete Figur, wird der Schüler dazu angehalten eine Begründung für die Fragestellung zu finden, die sich auf die konkrete Abbildung bezieht. Aber auch darüber hinaus ist der tendenziell natürlichere Zugang zu diesem Beweis ein visuell-bildlicher. So ist es zwar durchaus denkbar einen Zugang aus der linearen Algebra zu wählen, dieser beinhaltet neben der umständlichen Bezeichnung jeder Strecke zur Bestimmung der Richtung auch die Verwendung der trigonometrischen Funktionen zur Bestimmung der Winkelgrößen. Jedoch zeigt bereits die oberflächliche Beschreibung, dass ein derartiges Vorgehen mit erheblich mehr Aufwand verbunden ist, wodurch deutlich wird,

dass der visuell-bildliche Beweis der Innenwinkelsumme der naheliegende ist.
Die Aufgabe, die die Variation der Möndchen des Hippokrates zum Gegenstand hat, könnte durch die enthaltene Abbildung zunächst für eine visuell-bildliche Aufgabe gehalten werden, was jedoch nicht der Fall ist, da die Abbildung in dieser Aufgabe lediglich die Funktion übernimmt, den notwendigen Text zur Beschreibung der Situation zu reduzieren. Zur Bearbeitung der Aufgabe ist es allerdings notwendig, auf formale Aspekte der Mathematik zurückzugreifen, da ein entsprechendes Messwerkzeug zur Bestimmung der Flächen in der Regel nicht vorliegt. Zudem birgt die Verwendung von entsprechenden Messwerkzeugen häufig die Gefahr von Ungenauigkeiten, gerade im Messen von Flächen, die durch Kurven begrenzt sind. Um dieser Ungenauigkeit vorzubeugen, ist es notwendig, einen formalen Beweis zu führen, der sich auf die Anwendung des Pythagoras stützt, wie in der Analyse der Bearbeitungsschritte bereits deutlich geworden ist.

Wie im vorangegangenen Kapitel beschrieben, bezieht sich das *House of Dots* auf die Fortsetzung eines Punktmusters. Die Nähe zum visuellen Denkstil konstatiert sich zum einen daraus, dass die Aufgabenstellung explizit fordert, die Anzahl der Punkte zu ermitteln, indem die Bildungsregel anhand der Zeichnungen beschrieben wird und zum anderen durch die hier notwendigen Abbildungen, durch die der Schüler erst die Möglichkeit erhält, entsprechende visuelle Veränderungen innerhalb der Abbildungen aufzudecken, um auf diese Weise das nächste Haus und seine Punkte ermitteln zu können.
Dennoch ist es denkbar, diese Aufgabe formal-analytisch zu lösen, indem durch Auszählen der abgebildeten Häuser und dem Vergleich der Anzahlen der Punkte zweier benachbarter Häuser die Veränderung zum nächsten Haus mittels Fortsetzung der Zahlenfolge bestimmt wird. Aus einem derartigen Vorgehen lässt sich zunächst ein Algorithmus konstruieren, mit dessen Hilfe schließlich rechnerisch bestimmt werden kann aus wie vielen Punkten das folgende Haus besteht.
Um die Bearbeitungen der Schüler entsprechend eines visuell-bildlichen Vorgehens zusätzlich zu lenken, wurde in der Aufgabe explizit nach der Bildungsregel der Häuser gefragt. Das heißt, dass die Schüler auf diese Weise dazu angehalten werden, konkret an den Abbildungen zu arbeiten, indem sie zu-

nächst jede einzelne Figur für sich betrachten und entlang einer selbst gewählten Struktur, wie beispielsweise zunächst die Grundseite, dann die Höhe und schließlich der Aufbau des Dachs, die Punkte auszählen. Durch dieses strukturierte Zählen, eventuell unter zu Hilfenahme von Rechenoperationen, werden die Veränderungen von Haus zu Haus deutlich und schließlich herangezogen, um Haus 4 zu zeichnen und entsprechend auszuzählen.[33]

Demgegenüber bedarf es bei der Aufgabe zum *Seil um den Äquator*, die ebenfalls aus dem Inhaltsbereich *Funktionaler Zusammenhang* stammt, eines formal-analytischen Zugangs. So ist die Grundidee hinter dieser Aufgabe, dass zunächst der Radius der Erde aus dem gegebenen Erdumfang ermittelt wird, um diesen dann mit dem neuen Radius zu vergleichen, der sich aus der Summe des Erdumfangs und der Verlängerung des Seils um einen Meter ergibt. Ebendiese Grundidee gibt vor, auf welche Weise die Aufgabe bearbeitet werden soll, um zu der richtigen Lösung zu kommen. Verstärkt wird die Aufforderung nach einer formal-analytischen Bearbeitung durch die den Aufgabentext begleitende Formel zur Ermittlung des Erdumfangs.

Die Paarung zum Inhaltsbereich *Daten und Zufall* besteht aus den beiden Aufgaben *Silverstone* und *Taschengeld*, wobei die visuell-bildliche Aufgabe durch *Silverstone* vertreten ist. Bei diesem Repräsentationswechsel gilt es, die gegenständliche Darstellung eines Rundenverlaufs in ein mathematisches Modell zu überführen, indem die entsprechenden Daten aus der Darstellung herausgelöst und umgedeutet werden. Das heißt, dass die hier gewählte Darstellung der Aufgabe auf doppelte Weise dem visuellen Denkstil naheliegt, zum einen durch seine visuelle Repräsentation in der Aufgabe und zum anderen durch das Überführen in ein Koordinatensystem als visuelles Modell.

Demgegenüber handelt es sich bei der *Taschengeld*-Aufgabe um eine Aufgabe, in der das arithmetische Mittel der Höhe des Taschengeldes anhand gegebener Daten bestimmt werden muss. Die Bestimmung des Durchschnitts bedarf eines rechnerischen Vorgehens und ist somit grundsätzlich eine for-

[33] Demgegenüber ist auch ein rekursiver Zugang denkbar, der sich derart zeigt, dass das vorangegangene Haus in dem betrachteten Haus positioniert wird, umso lediglich die Struktur in den hinzugekommenen Dots ermitteln. Doch auch bei diesem Vorgehen liegt der Fokus auf der visuellen-bildlichen Bearbeitung.

mal-analytische Aufgabe, es sei denn, es wird explizit eine visuell-bildliche Bearbeitung in Form von Diagrammen gefordert. Dies ist in der vorliegenden Aufgabe jedoch nicht der Fall, womit gezeigt wäre, dass es sich um eine Aufgabe handelt, die den analytischen Denkstil naheliegt.

Wie eingangs in der Tabelle dargestellt, handelt es sich bei den hier zur Anwendung gekommenen Aufgaben um Aufgaben, die einem bestimmten Denkstil zuzurechnen sind. Die für die Arbeit essentielle Hypothese, dass es Aufgaben gibt, die in ihrer Bearbeitung einen bestimmten Denkstil nahelegen (vgl. Kapitel 5.1.), lässt sich folglich bestätigen. Darüber hinaus belegt die Analyse, dass die Nähe zu einem der Denkstile nicht per se dem thematischen Inhalte der Aufgabe zugerechnet werden kann, sondern es vielmehr Aufgaben aus jedem Inhaltsbereich gibt, die das eine oder andere Vorgehen erforderlich machen.
Allerdings zeigt die genauere Analyse auch, dass die Nähe zu einem bestimmten Denkstil durchaus in der Intensität variieren. So wurde in diesem Kapitel herausgestellt, dass beispielsweise die *Streichholz*-Aufgabe keine andere Bearbeitung zulässt als eine visuell-bildliche, während beim *House of Dots* durchaus ein formal-analytisches Vorgehen denkbar wäre. Darüber hinaus zeigt die vorangegangene Analyse jedoch auch, dass die Ausgestaltung der Aufgabe durchaus Einfluss auf die intendierte Bearbeitung haben und die Denkstilnähe entsprechend verstärken kann.
In Bezug auf die Forschungsfragen lässt sich dementsprechend folgern, dass

- es Aufgaben gibt, die eindeutig ein visuelles oder analytisches Vorgehen erfordern, wobei sich die Denkstilnähe aus der Aufgabe selbst ergibt.
- es Aufgaben gibt, die zwar einen bestimmten Denkstil nahelegen, mit gesteigertem Aufwand jedoch andere Vorgehensweisen zulassen.
- es Aufgaben gibt, die per se mithilfe unterschiedlicher Denkstile lösbar sind und nur durch die Ausgestaltung der Aufgabe einen Denkstil nahelegen.

Die vorliegende Arbeit stützt sich vorrangig auf Aufgaben, die aus sich heraus einen bestimmten Denkstil nahelegen, um die Möglichkeit einzuschränken, dass Schüler bei der Bearbeitung an den Vorgaben vorbei auf ihren eigenen Denkstil zurückgreifen und damit zu ihrer Lösung kommen. Dennoch muss hier eingeräumt werden, dass einige der Aufgaben zwar durchaus einen bestimmten Denkstil nahelegen, jedoch mit gesteigertem Aufwand auch anders lösbar sind. Die Vorgehensweise wurde in diesen Aufgaben jedoch zusätzlich durch ihre Ausgestaltung gelenkt. (vgl. *Innenwinkel, Sparlineal, House of Dots*)

5.4.3. Analyse bezüglich der Inhaltsbereiche der Bildungsstandards

Bereits in den vorangegangenen Kapiteln zu den Analysen der Aufgaben wurde die Einteilung der Aufgaben anhand der Bildungsstandards angedeutet. In diesem Kapitel soll nun explizit dargestellt werden, warum es sich bei den Aufgaben um solche handelt, die einem bestimmten Inhaltsbereich zuzuordnen sind.

Die bundesweit geltenden Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss in Mathematik traten mit Beginn des Schuljahres 2004/2005 in Kraft und bilden seitdem eine verpflichtende Grundlage für den Unterricht. Um die Qualität schulischer Bildung zu sichern, implementierte die Kultusministerkonferenz „Standards für den mittleren Schulabschluss in den Fächern Deutsch, Mathematik und Erste Fremdsprache (Englisch/Französisch)“ (KMK 2003, S.3). Diese formulieren die zu erreichenden Bildungsziele als fachbezogene Kompetenzen, die bis zum jeweiligen Abschluss erworben werden sollen, ohne jedoch Unterrichtsstandards vorzugeben. (vgl. Blum 2010, S.17) Trotzdem werden die erwünschten Kompetenzen anhand von vorgeschlagenen Kerninhalten des jeweiligen Fachs erworben. Das heißt, dass aus den Bildungsstandards Anhaltspunkte für die Gestaltung von Mathematikunterricht abgeleitet werden können, die individuelle Lernwege berücksichtigen, „damit mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht in vielfältigen kontextbezogenen Situationen angewendet werden kann“ (KMK 2003, S.6).

In diesem Sinne hat sich die Autorin bei der Entwicklung der im Test Verwendung findenden Aufgaben ebenfalls an den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards orientiert:

- *Leitidee Zahl* bezieht sich auf die Kompetenzen des sicheren Umgangs in unterschiedlichen Zahlbereichen, ein fundiertes Operationsverständnis inklusive ihrer Zusammenhänge sowie ihre Anwendung in Sachsituation und kombinatorischen Überlegungen.
- *Leitidee Messen* umfasst einen adäquaten Umgang mit Größen, insbesondere für Längen, Flächen, Volumen und Winkel, sowohl bezogen auf das Messen wie auch das Berechnen.
- Die *Leitidee Raum und Form* beinhaltet Kompetenzen zur Raumvorstellung, Kenntnisse über ebene und dreidimensionale Figuren sowie über geometrische Abbildungen.
- Die *Leitidee Funktionaler Zusammenhang* subsumiert Kompetenzen, die sich auf lineare, proportionale oder antiproportionale Funktionen und ihre Eigenschaften stützen.
- *Daten und Zufall* als Leitidee enthält Aspekte der Datenerhebung, der statistischen Verwendung sowie dem Beschreiben und Bestimmen von Zufällen und Wahrscheinlichkeiten. (vgl. KMK 2003)

Orientiert an ebendieser Abgrenzung der einzelnen Leitideen, handelt es sich sowohl bei *Streichhölzchen-* als auch bei der *Fakultäten*-Aufgabe um Aufgaben der Leitidee *Zahl*.

Nicht als eigene Leitidee angeführt, ist die Kombinatorik als Teilgebiet der Mathematik ebenfalls in den Bildungsstandards innerhalb der Leitidee *Zahl* präsent. Dabei bezieht sich die Kombinatorik auf das systematische Abzählen von Anordnungsmöglichkeiten, wie es in der vorliegenden Studie bei der *Streichhölzchen*-Aufgabe notwendig ist. Die Schüler werden in dieser Aufgabe explizit darum gebeten, zu ermitteln, wie viele Möglichkeiten es gibt, vier Hölzchen aneinander zu legen, und sind entsprechend dazu aufgefordert „kombinatorische Überlegungen anzustellen, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen“ (KMK 2003, S.10). Ein ebensolches Vorgehen wird als Standard für inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen innerhalb der Leitidee *Zahl* aufgeführt.
Ebenfalls der Leitidee *Zahl* zuzuordnen ist die *Fakultäten*-Aufgabe, da der entscheidende Grundgedanke zur Lösung die Anwendung spezifischer Strukturen der Multiplikation und ihre Bedeutung für das Ergebnis ist. Das heißt

konkret, die Schüler greifen auf ihre Kenntnisse über die Rechenoperationen, hier der Multiplikation, zurück und übertragen diese auf die Fakultät. Entsprechend der hier dargestellten Anforderungen an die Bearbeitung der Aufgaben handelt es sich hier um eine Aufgabe der Leitidee Zahl (vgl. KMK 2003, S.10).

Die Aufgaben *Sparlineal* und *Regentonne* haben beide ihren Schwerpunkt in der Leitidee *Messen.*

Als gegenstandsbezogene Aufgabe, die sich auf das Messen von Abständen bezieht, ist die Aufgabe zum *Sparlineal* der Leitidee *Messen* zuzuordnen. Hierbei nutzen die Schüler die Grundprinzipien der Längenmessung (vgl. KMK 2003, S.10) und modifizieren sie dahingehend, dass ein Messen auch möglich ist, wenn ein Messgerät nicht an seinem Ursprung angelegt wird. Erst durch diese Grundüberlegungen ist die Entwicklung eines Sparlineals möglich.
Die Anforderung der *Regentonnen*-Aufgabe an die Schüler ist zunächst einmal das Berechnen des Volumens der Regentonne, die in der Aufgabe zu einem Zylinder stilisiert wurde, um anschließend die Füllgeschwindigkeit auszurechnen. Insbesondere die Volumenberechnung ist Inhalt der Leitidee *Messen*, ebenso wie das damit verbundene Wählen der Einheiten und einer situationsgerechten Anpassung bezüglich der Füllgeschwindigkeit. Darüber hinaus ist auch die Verwendung der Angabe für die Füllgeschwindigkeit zur Berechnung der benötigten Zeit in dieser Leitidee aufgeführt. (vgl. KMK 2003, S.10f)

Der Leitidee *Raum und Form* sind in der vorliegenden Untersuchung sowohl die *Innenwinkelsumme des Fünfecks* als auch die Variation der *Möndchen des Hippokrates* zuzuschreiben.

Als Standards der Leitidee *Raum und Form* werden explizit aufgeführt, dass Schüler Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte nicht nur beschreiben und begründen, sondern darüber hinaus „diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen“ (KMK 2003, S.11) auch nutzen können. In der hier verwendeten Aufgabe zeigt sich ein derartiges Vorgehen, indem die Innenwinkelsumme von Fünfecken ermittelt wer-

den soll, was mithilfe von Hilfslinien erreicht wird, die den Satz zur Innenwinkelsumme von beliebigen Dreiecken anwendbar machen.
In der Leitidee *Raum und Form* sind eine Reihe von Standards aufgeführt, die zur Bearbeitung der *Möndchen des Hippokrates* notwendig sind, allem voran die Kompetenz der Schüler geometrische Strukturen in der Umwelt zu erkennen. In der hier vorliegenden Aufgabe ist der erste Schritt darin zu sehen, dass die Schüler erkennen, dass die Sicheln aus Halbkreisen bestehen, deren innere Begrenzungen sich durch die Halbkreisabschnitte des quadratumschließenden Kreises ergeben. Darüber hinaus ist es für die Bearbeitung notwendig, den Radius des umschließenden Kreises in Abhängigkeit der Kantenlänge des Quadrats zu ermitteln, was eine direkte Anwendung des Satzes des Pythagoras zur Folge hat, womit ein weiterer Aspekt der Leitidee *Raum und Form* zur Anwendung kommt (vgl. KMK 2003, S.11).

Bei den Aufgaben *House of Dots* sowie *Seil um den Äquator* handelt es sich um Aufgaben, die der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* zuzurechnen sind.

Der Zusammenhang zwischen dem *House of Dots* und der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* ist nicht so vordergründig, wie es bei der Zugehörigkeit der anderen Aufgaben zu ihren Leitideen ist, dennoch ist eine derartige Zuordnung durchaus tragfähig. So ist der Grundgedanke bei dem House of Dots der, dass die Regelhaftigkeit der Abbildungen erkannt und auf ein weiteres Element übertragen wird. Wie bereits in dem Unterkapitel 5.4.1. angemerkt, handelt es sich hierbei im eigentlichen um eine Folge, bei der jedoch auf die formale Darstellung verzichtet wird. Es gilt dementsprechend implizit, die vorgegebene Vorschrift zu beachten, um das nächste Folgeelement zu bestimmen. Dieses Vorgehen kommt der Bestimmung der kennzeichnenden Merkmale einer Funktion gleich, welche der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* zuzuschreiben ist. (vgl. KMK 2003, S11)
„Schüler lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen [...] Zuordnungen“ (KMK 2003, S.12) ist explizit als Standard in den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen festgeschrieben und stellt in Bezug auf die *Äquator*-Aufgabe den Grund für eine derartige Zuschreibung dar. Noch deutlicher wird die Deklarierung dieser Aufgabe als der Leitidee *Funktionaler*

Zusammenhang zugehörig, wenn die Bearbeitung dahingehend verändert wird, dass nicht von der Erde ausgegangen wird, sondern von einer erheblich kleineren Kugel.[34] Die Kugel wird anschließend sukzessive vergrößert, um den funktionalen Zusammenhang zwischen den ermittelten Abständen des jeweiligen Seils zum entsprechenden Kugelumfang herzustellen. Beginnt man folglich mit einer Kugel von $1\,m$ Radius und der Verlängerung des Seils um $1\,m$, so kann ermittelt werden, dass der Abstand zwischen Kugeloberfläche und Seil $0{,}159\,m$ beträgt. Wird der Radius der Kugel nun systematisch vergrößert, während die Verlängerung des Seils weiterhin $1\,m$ beträgt, so zeigt sich, dass der Abstand unabhängig von dem Radius der Kugel ist. Dementsprechend kann davon ausgegangen werden, dass der Abstand auch im Kontext der Aufgabenstellung identisch ist. Mit einem derartigen Vorgehen wird der Zusammenhang zur klassifizierenden Leitidee noch deutlicher. Trotzdem bedarf es auch bei diesem Vorgehen der Umrechnung vom Radius zum Umfang, der Verlängerung des Umfangs um $1\,m$ und der Umrechnung des neuen Umfangs zu einem neuen Radius. Das heißt, dass sich die Grundstruktur dieser Aufgabe diesbezüglich nicht großartig verändert, lediglich die Bearbeitungsschritte, die nötig sind, um eine entsprechende Verallgemeinerung zu entdecken, nehmen zu.

Die beiden verbleibenden Aufgaben entstammen der Leitidee *Daten und Zufall*, womit sowohl die *Taschengeld*-Aufgabe als auch *Silverstone* in dieser Leitidee liegen.

Die Aufgabe *Silverstone* fordert die Schüler dazu auf, Daten in einer gegebenen Abbildung als relevant zu erkennen und diese in grafisch darzustellen, um die Zusammenhänge entsprechend zu verdeutlichen. Dieses Vorgehen bezeichnen die Bildungsstandards in der Leitidee *Daten und Zufall* als „Schüler sammeln systematisch Daten […] und stellen sie graphisch dar“ (KMK 2003, S.12).
Die Grundidee zur Lösung der *Taschengeld*-Aufgabe ist die rechnerische Ermittlung des Durchschnitts, um so die Aussage des Direktors bestätigen bzw. widerlegen zu können. Für die Bearbeitung der Aufgabe über die Grundidee

[34] Die Grundstruktur wird dabei nicht verändert, da die Berechnung des Radius aus einem Kugelumfang ebenso wie die Berechnung des neuen Umfangs nach der Verlängerung des Seils weiterhin erforderlich ist.

hinaus bedarf es verschiedener Bearbeitungsschritte, die der Leitidee *Daten und Zufall* zuzuordnen sind. Hierzu zählt allem voran die Fähigkeit Tabellen lesen und die relevanten Daten herauslösen zu können. Ein ebensolches Vorgehen findet sich in den Standards als „Schüler werten graphische Darstellungen [...] von statistischen Erhebungen aus [und] interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen" (KMK 2003, S.12). Ferner sind die Schüler dazu aufgefordert, die vorhandenen Daten in einem neuen Zusammenhang zu stellen, um die Aussage des Direktors, aufgrund ihrer Datenanalyse zu prüfen.

Mithilfe der vorangestellten Analyse lässt sich belegen, dass die hier verwendeten Aufgaben ein breit gefächertes Spektrum des Mathematikunterrichts abbilden. Zudem zeigt die vorgenommene Analyse, dass jeder Inhaltsbereich sowohl eine visuell-bildliche als auch eine formal-analytische enthält. Durch ein derartiges Vorgehen in der Konzeption und Auswahl der Aufgaben wurde sich bemüht den Einfluss von Vorlieben und Fähigkeiten, die sich auf die unterschiedlichen Inhaltsbereiche der Mathematik beziehen, zu minimieren, um so die Bedeutung des Denkstils herauszustellen.

5.5. Die begleitenden Fragen

Neben dem offenen Leistungsteil wird jede Aufgabe durch drei begleitende Fragen ergänzt, wobei sich diese aus dem Grad der Zustimmung zu bestimmten Aussagen ergeben. Thematisch beinhalten die begleitenden Fragen Aussagen zu dem Bekanntheitsgrad der jeweiligen Aufgabe, dem Aufgabeempfinden und schließlich einer Aussage den Denkstil betreffend.
Die Auswahl der jeweiligen Aussagen erfolgt nach dem Grundsatz der Klarheit und Gegenständlichkeit, was sich vor allem in der verwendeten Sprache der Aussagen zeigt. In diesem Sinn wird auf Negationen verzichtet und abstrakte Konstrukte konkretisiert, was sich beispielsweise darin zeigt, dass das Aufgabenempfinden auf die empfundene Schwere der Aufgabe reduziert wird. Hierbei bewerten die Schüler die Aussage „Die Aufgabe fiel mit leicht" auf einer vierstufigen Skala, von „trifft nicht zu" (0) bis „trifft zu" (3).

Ferner wurden die Aussagen positiv formuliert, sodass die Zustimmung zu einer Aussage mit einem positiven Smiley auch vom Inhalt wünschenswert ist. Das heißt, dass die Aussagen zur Aufgabenschwere grundsätzlich in der Formulierung „Diese Aufgabe fiel mir leicht." abgedruckt ist, um die Zustimmung mit dem positiven Smiley in Übereinstimmung zu bringen.
Der Grundsatz der Gegenständlichkeit wird darüber hinaus durch einen konkreten Bezug zu der vorliegenden Aufgabe hergestellt, indem Teile der Aufgabe in die Formulierung aufgenommen werden, wie beispielsweise „Ich konnte mir die Hölzchen gut vorstellen".
Die Aussagen, die den jeweils nahegelegten Denkstil betreffen, werden als ergänzende Informationen in die Aufgabencodierung einbezogen, da sie auch dann Einblicke in die Bearbeitung der Aufgaben gewähren, wenn im offenen Aufgabenteil nichts niedergeschrieben wurde. Die überwiegenden Aussagen zielen dabei auf die Art der internen Repräsentation der Schüler, denn insbesondere, wenn Schüler keine tragfähigen Ideen zur Lösung entwickeln können, kann dies dazu führen, dass sie die Bearbeitung abbrechen und ihre ersten Ideen nicht notieren, wodurch keine Hinweise auf die Gedanken und entsprechenden Ideen sichtbar sind. Die folgende Tabelle zeigt auf, inwiefern Informationen dann aus den Angaben gezogen werden können:

Aufgabe	Aussage
2RFf	Die Abbildung habe ich nur benutzt, um mich zu erinnern, was ich rechnen muss.
3GMv	Ich habe mir das 10 cm lange Lineal vorgestellt.
4FZv	Ich habe die Regeln mithilfe der Abbildungen gefunden.
5GMf	Ich musste mir die Situation erst vorstellen.
6ZOv	Ich konnte mir die Hölzchen gut vorstellen.
7RFv	Eine bildhafte Begründung zu finden, fiel mir leicht.
8FZf	Ich habe gleich angefangen zu rechnen.
9DZv	Ich wusste gleich, wie ich die Zeichnung machen soll.
10ZOf	Eine Begründung, bei der man rechnet, zu finden, fällt mir leicht.

Tab. 5.6.: Aussagen aus den begleitenden Fragen, die sich auf den Denkstil beziehen

Die überwiegende Zahl der Aussagen bezieht sich auf eine visuelle interne Repräsentation. Dies ist bewusst gewählt, da häufig insbesondere der gymnasiale Mathematikunterricht formal-analytisch ausgerichtet ist und damit ein ebensolches Vorgehen herausstellt. Damit ermöglichen die Aussagen, ein formales Vorgehen daraufhin zu prüfen, inwieweit ein Schüler seine Darstellung an die Ausrichtung des Mathematikunterrichts anpasst, obwohl er ein visuelles Vorgehen bevorzugt. Lediglich die Aussagen zu den Aufgaben 7RFv und 10ZOf zielen bewusst nicht auf die konkrete Aufgabe, sondern auf eine Aussage zur generellen Ausgestaltung von Begründungen, um einen allgemeineren Blick auf die Begründungshaltung der Schüler zu gewinnen.
Um darüber hinaus zu gewährleisten, dass die Schüler in den begleitenden Fragen nicht in einen Automatismus verfallen, der eine immer gleiche Ankreuzstruktur zur Folge hat, wurde zum einen die Reihenfolge der Aussagen bewusst randomisiert, sodass die Aussagen zu den unterschiedlichen Bereichen nicht in der immer gleichen Reihenfolge erscheinen und zum anderen wurden die Formulierungen teilweise leicht verändert.

5.6. Stichprobe und Durchführung

Die vorliegende Untersuchung basiert auf einer Erhebung in der Zeit von März 2016 bis Dezember 2016, wobei insgesamt 282 Schüler aus 16 Klassen der Jahrgangsstufen 9 befragt wurden. Die Auswahl der Jahrgangsstufe erfolgte aufgrund dessen, dass die zur Bearbeitung nötigen Themenkomplexe im Mathematikunterricht bereits thematisiert wurden und der Denkstil entsprechend ausgebildet ist. Die Gesamtzahl der Klassen ergibt sich außerdem aus der Zusammensetzung von sechs Gymnasialklassen und zehn Gesamtschulklassen aus den Bundesländern Hessen (1/5), Niedersachsen (0/5) und Hamburg (5/0).
Durch die Erhebung in den neunten Jahrgangsstufen zentriert sich das Alter bei 14 – 15 Jahren, wobei sich die gesamte Spannbreite auf ein Alter von 13 – 17 Jahren erstreckt. Gründe für die breitere Altersstruktur trotz einheitlicher Jahrgangsstufe sind zum einen daran festzumachen, dass es sich bei einer Klasse um eine sogenannte Vorbereitungsklasse handelt, in der Schüler mit nur geringen Kenntnissen der deutschen Sprache zunächst ein Jahr lang

intensiv Deutsch lernen, um anschließend in Regelklassen zu wechseln. Auswirkungen auf die Leistung im Mathematikunterricht gibt es, nach Rücksprache mit der Lehrperson, keine. Zum anderen sind Gründe für die Spannweite des Alters in den unterschiedlichen Erhebungszeitpunkten innerhalb der neunten Klassenstufe zu sehen. Bezüglich des Geschlechts gibt es keine nennenswerten Unterschiede, so sind 52,5 % der Probanden männlich, gegenüber 47,2 % weiblicher Teilnehmer.

Die Leistung der Schüler im Mathematikunterricht wurde nicht mithilfe von Noten ermittelt, sondern basiert auf der Selbstauskunft der Schüler. Diese hat ergeben, dass 157 der 282 Schüler ihre Kompetenzen im Mathematikunterricht positiv einschätzen, gegenüber 102 Schülern, die von sich selbst behaupten, Mathematik nicht zu können. Darüber hinaus ergibt sich für die schulformdifferente Zusammensetzung der Schüler ein Verhältnis von 122 zu 160, was einer leichten Verschiebung (56,7 %) zugunsten der Gesamtschulen entspricht. In der Selbstauskunft der Gesamtschulen geben jedoch über die Hälfte der Schüler an, dass sie Mathematik können (51,9 %). Der Anteil fällt bei Schülern des Gymnasiums mit 60,7 % etwas höher aus (siehe Tab. 5.8).

Auf diese Weise, ergibt sich die in Tab. 5.7. dargestellte Zusammensetzung für die vorliegende Stichprobe. Zur Verteilung der herangezogenen Fälle siehe Kapitel 6.1..

	Denkstil			Bundesland			Geschlecht		Alter in Jahren				
	formal	integriert	visuell	HE	NI	HH	M	W	13	14	15	16	17
Gymnasium	23	74	25	16	0	106	63	58	0	55	45	14	0
Gesamtschule	11	100	49	60	100	0	85	75	1	52	78	16	1
Gesamt	34	174	74	76	100	106	148	133	1	107	123	30	1

Tab. 5.7.: Grundsätzliche Zusammensetzung der Stichprobe in absoluten Werten

Im Rahmen der Selbstauskunft geben zudem 141 Schüler an, das Fach Mathematik zu mögen, was einem prozentualen Anteil von 50 % entspricht, während 125 Schüler (44,3%) das Fach Mathematik nicht mögen (siehe Tab. 5.8.).

	Einstellungen zum MU			Leistungseinschätzung		
	mögen	nicht	ohne	kann	nicht	ohne
Gymnasium	72	43	7	74	41	7
Gesamtschule	69	82	9	83	61	16
Gesamt	141	125	16	157	102	23

Tab. 5.8: Verteilung der Schüler der Stichprobe anhand der Ergebnisse der Selbstauskunft „Ich mag Mathematik" und „Ich kann Mathematik"

Die Durchführung der Erhebung erfolgte im laufenden Unterrichtsbetrieb und war nach den Erfahrungswerten aus der Vorstudie auf 90 Minuten ausgelegt, welche jedoch auch in der Hauptuntersuchung nur von wenigen genutzt wurde. Die tatsächlich genutzte Bearbeitungszeit lag durchschnittlich bei etwa einer Stunde. Die in einigen Klassen auftretende Verlängerung der Bearbeitungszeit, dadurch dass der Erhebungszeitraum sich über eine große Pause erstreckte, wird hier nicht als Einflussfaktor bewertet. Dies begründet sich vor allem in der bewussten Wahl der Erhebungsdauer, die darauf abzielt, dass die Schülerbearbeitungen nicht durch Zeitdruck beeinflusst werden. Und auch in Bezug auf die Motivation der Schüler ließ sich kein Unterschied zu denjenigen Klassen erkennen, deren große Pause regulär stattfand, da die verlustige Pause in Abstimmung mit der Lehrperson nach Ende der (persönlichen) Bearbeitungszeit nachgeholt wurde.
Zudem wurden die Schüler grundsätzlich darum gebeten, nach Beendigung des Tests ruhig an ihrem Platz zu verweilen und gegebenenfalls neue Einfälle zur Bearbeitung nachzutragen. Lediglich in zwei Klassen führte eine erhöhte Unruhe dazu, dass die Schüler vorzeitig entlassen worden sind, um eine ungestörte Weiterarbeit der übrigen Schüler zu ermöglichen.

Um den Einfluss des Versuchsleiters und die äußeren Einflüsse auf die Durchführung zu minimieren, hat die Autorin selbst den Vorsitz einer jeden Durchführung übernommen, sodass die einheitliche Einleitung sowie grundsätzlichen Erklärungen zum Test gewährleistet waren. Vor Beginn der Bearbeitung wurde den Schülern kurz der Kontext, in dem der Test geschrieben wurde,

erläutert und darum gebeten, dass, auch wenn Aufgaben nicht bearbeitet würden, die ergänzenden Fragen beantwortet werden. Darüber hinaus wurden den Schülern die weiteren Rahmenbedingungen genannt und darauf aufmerksam gemacht, dass die Schüler sich für Fragen an den Versuchsleiter wenden könnten.
Auf diese Weise konnte für Fragen, die sich auf fehlendes Faktenwissen abzielten, situationsbezogen entschieden werden, wie diese zu beantworten sind, ohne die Bearbeitung der Schüler in Bezug auf ihren Denkstil zu beeinflussen. Darüber hinaus war es so möglich, Fragen in immer gleicher Weise zu beantworten, um so möglichst vergleichbare Ausgangsbedingungen zu schaffen.

5.7. Auswertungsrichtlinien

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln zunächst dargelegt wurde, nach welchen Grundsätzen die vorliegende Studie ausgestaltet wurde und wie sie durchgeführt wurde, wird in den folgenden Abschnitten, der Auswertungsprozess dargestellt. Hierbei wird zunächst Bezug auf die Entstehung der hier entwickelten Typisierung der Fälle genommen und im Sinne der Transparenz offengelegt. Und auch wenn die vorliegenden Arbeitsschritte nicht derart eindeutig voneinander zu trennen sind, wie es die Vorgehensweise von Hopf impliziert, wird sich im Folgenden bemüht, ihre Struktur beizubehalten:

1. Entwicklung von Auswertungskategorien
2. Codierung des erhobenen Materials
3. Erstellung von Fallübersichten
4. Vertiefende Analyse von ausgewählten Fällen (vgl. Hopf 1995a, S.29f, vgl. auch Kapitel 5.2.)

Im darauffolgenden Abschnitt werden die Auswertungsmethoden der begleitenden Fragen beschrieben und verdeutlicht, auf welche Forschungsfragen diese abzielen.

5.7.1. Thematische Codierung des Aufgabenteils

1. Entwicklung von (ersten) Auswertungskategorien

Die Entwicklung der Auswertungskategorien begann bereits in der Erhebungsphase und orientierte sich an der Unterscheidung zwischen einem formal-analytischen und einem visuell-bildlichen Vorgehen. Hierzu wurden die beiden Arten der Informationsrepräsentation von Borromeo Ferri zugrunde gelegt und entsprechend auf die Vorgehensweise bei der Bearbeitung von Aufgaben übertragen. Da die vorliegende Arbeit auf die Gegenüberstellung der Bearbeitungsweisen von visuellem und analytischem Denkstil abzielt, wurde bei der Konzeption der Kategorien dabei die vorliegende Bearbeitung in Beziehung zu dem erhobenen Denkstil gesetzt. Dementsprechend entwickelte sich zunächst eine grobe Rasterung der zu erwartenden Ergebnisse in

- denkstilkonforme Bearbeitung (2)
- Bearbeitung im anderen Denkstil (3),

die neben den obligatorischen Kategorie „nicht bearbeitet“ (0) sowie „nicht eindeutig“ (1) den ersten Schritt der Codierung kennzeichnen.

2. Codierung des erhobenen Materials

Erst mit Sichtung des Datenmaterials wurde die Verfeinerung des Codiermanuals in Bezug auf die Forschungsfrage, inwieweit sich Unterschiede zwischen visuellen Denkern und Analytikern feststellen lassen, vorgenommen. Hierbei hat es sich bewährt, einen zusammenhängenden Bearbeitungsprozess als eine Codiereinheit festzulegen. Dabei wird in diesem Zusammenhang von einem zusammenhängenden Bearbeitungsprozess gesprochen, wenn die einzelnen Bearbeitungsschritte aufeinander aufbauen und in irgendeiner Weise den Bezug zueinander verdeutlichen. Auf diese Weise wird dem Umstand Rechnung getragen, dass die Aufgabenbearbeitung lediglich durch das vorgegebene Freifeld eingeschränkt ist und somit der Fokus nicht auf der formalen Ausgestaltung der Bearbeitung liegen kann. Eine derartige Festlegung führt dazu, dass jeder Aufgabenbearbeitung genau ein Code zugeordnet wird.

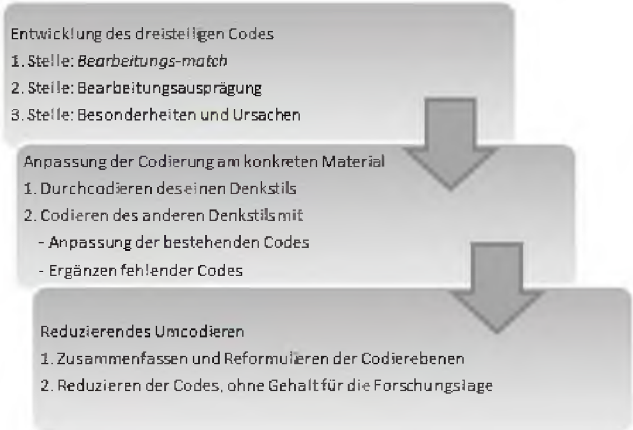


Abb. 5.4.: Codierprozess der vorliegenden Arbeit

Bereits bei der Analyse des ersten Datensatz wurde deutlich, dass ein derart grobes Raster zu einem erheblichen Datenverlust führt, wodurch die Beantwortung der Forschungsfrage nicht möglich ist. Dementsprechend wurde sich für ein mehrstufiges Codierverfahren entschieden, das die theoriegeleiteten Kategorien aufnimmt, diese jedoch mit weiteren Informationen anreichert. Dabei wird der Datenverlust reduziert, indem jede Stelle des Codes auf spezifische Informationen der Bearbeitung referiert und in ihrer Kombination eine Vielzahl der Daten wiedergibt. Zunächst als dreistufiges Verfahren angedacht, beinhaltete die erste Stelle die Passung des Denkstils des Schülers und mit der tatsächlichen Aufgabenbearbeitung, die zweite Stelle die Art der gezeigten Bearbeitung, während die dritte Stelle Ursachen für und Besonderheiten in der Vorgehensweise wiedergibt. Auf diese Weise kann trotz der Verknappung eine große Menge an Information beibehalten und flexibel auf das Datenmaterial reagiert werden.
Entsprechend der Uneingeschränktheit des offenen Codierens wurden zunächst direkt anhand der Datensätze des einen Denkstils Codierungen entworfen und anschließend an die Besonderheiten des anderen Denkstils angepasst und, wo notwendig, durch neue Codes ergänzt. Bei diesem Vorgehen entsteht ein hochauflösendes Manual, das, entsprechend dem von Corbin & Strauss etablierten Verfahren zur Grounded Theory (Corbin/ Strauss 2008), in erster Linie uneingeschränkt die konkreten Schülerlösungen vercodet. Auf

diese Weise ist die Codierung erheblich hochauflösender als es die Forschungsfragen erfordern, was anschließend ein reduzierendes Umcodieren nötig macht.
Mit dem Ziel der Reduktion von Datenmengen wurden in einem entsprechenden Arbeitsschritt die gebildeten Codierungen daraufhin analysiert, inwiefern sie Auskunft über einen Zusammenhang zwischen Denkstil und Bearbeitung gibt. Auf diese Weise konnte der dreistufige Code auf einen zweistelligen verkürzt werden, der durch seine Kombinationsmöglichkeiten noch immer ein gutauflösendes System darstellt. Hierbei setzt sich der jeweilige Code in der ersten Stelle aus den vorab entwickelten Kategorien, im Folgenden Hauptkategorien genannt, und in der zweiten Stelle (Feincodierung) genauer den Bezug zu dem Denkstil herstellt. Die zweite Stelle stuft sich zudem nach den möglichen Aussagen über den Denkstil und ihrer Bedeutung für die Forschungsfrage:

0 =	einfach Abbruch ohne ersichtlichen Grund im Denkstil (bspw. weil schwer, Wissen fehlt oder trotz leicht)
1 =	Argumentation ohne Gehalt (selbst Argumentation / Argumentation ist Banane) oder ohne math. Stützung
2 =	Plötzlich Lösung (nur die Lösung ist angegeben / Bearbeitung passt nicht zur Lösung)
3 =	Abbruch mit Angaben bzgl. des Denkstils (eigener Denkstil war nötig / Probleme mit dem anderen Denkstil)
4 =	Argumentation, die einem der Denkstile folgt
5 =	(vermeintlich) vollständige Bearbeitung ohne Besonderheiten bzgl. des Denkstils
6 =	Argumentation, die Elemente beider Denkstile zeigt
7 =	Nutzung von Elementen beider Denkstile
8 =	Besonderheiten im Denkstil

Tab. 5.9.: Kurzdarstellung der verwendeten Codes[35]

[35] Zum ausführlichen Codiermanual siehe Anhang A-2..

Auf diese Weise ergeben sich 36 mögliche Codes, die jedoch nicht alle logisch besetzt sind, das heißt, dass beispielsweise der Code 15 (keine Bearbeitung – (vermeintlich) vollständige Bearbeitung ohne Besonderheiten im Denkstil), obwohl theoretisch zulässig, in seiner Bedeutung keinen Sinn ergibt.
An einigen Beispielen soll im Folgenden die Codierarbeit und die Vergabe des Codes demonstriert werden. Dabei wurden die Aufgabenbearbeitungen so ausgewählt, dass sie die vier Hauptkategorien umfassen, während in der Feincodierung unterschiedliche Kategorien erläutert werden.

Streichhölzchen — 6DZv

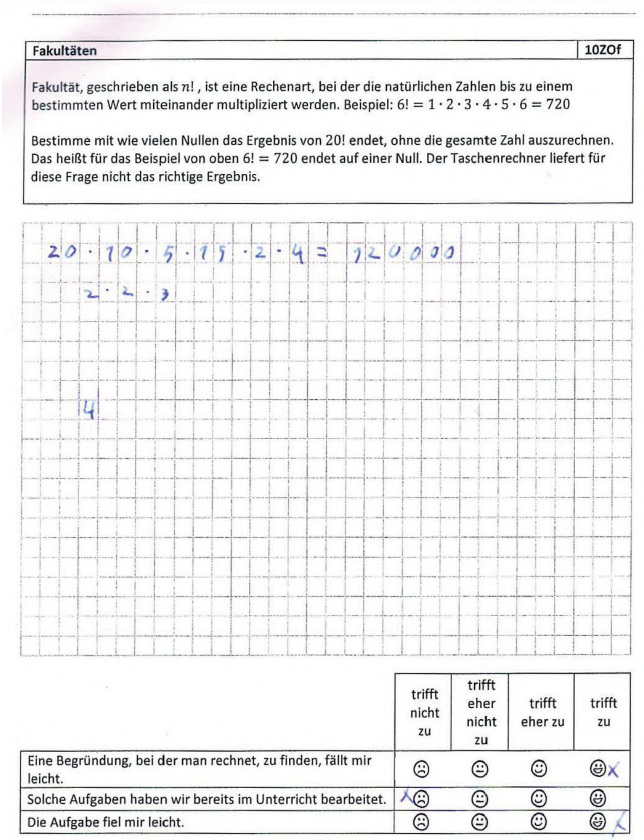
Wie viele Möglichkeiten gibt es vier Hölzchen aneinander zu legen, wenn gedrehte und gespiegelte Figuren nicht unterschiedlich sind. Dabei gelten folgende Regeln für das Aneinanderlegen:

- Die Hölzchen dürfen sich nur am Ende berühren, das heißt die langen Seiten dürfen nicht nebeneinander liegen.
- Zwei Hölzchen dürfen entweder gerade oder im rechten Winkel aneinander gelegt werden.

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Ähnliche Aufgaben habe ich schon einmal gelöst.				
Ich konnte mir die Hölzchen gut vorstellen.				
Mir fiel diese Aufgabe leicht.				

Abb. 5.5.: Schülerbeispiel (visuell) zur Verdeutlichung des Codes 08

Das in Abb. 5.5. abgebildete Schülerbeispiel zeigt im Bearbeitungsfeld keine Hinweise auf eine Bearbeitung, weshalb es der Hauptklasse 0 zuzuschreiben ist. Jedoch zeigen die begleitenden Fragen, dass die Aufgabe nicht einfach übergangen wurde, sondern gibt Hinweise darauf, weshalb die Aufgabe nicht bearbeitet werden konnte. Dabei werden insbesondere die Fragen, die den Denkstil betreffen herangezogen, um weitere Aussagen über die Nicht-Bearbeitung zu rekonstruieren. In dem oben gezeigten Fall, gibt der visuelle Schüler an, dass er Schwierigkeiten hatte, sich die Hölzchen vorzustellen. In Verbindung mit seiner Aussage, dass ihm die Aufgabe schwerfiel und er als visueller Denkstil eine Bearbeitung vorzieht, die auf entsprechenden Vorstellungen und gegenständlichen Zeichnungen, ist diese Anreuzkombination eher nicht erwartbar. Aus diesem Grund handelt es sich hier um eine Besonderheit bezüglich des Denkstils und wird entsprechend mit „8“ in der zweiten Stelle codiert, weshalb für diese „Bearbeitung“ der Code „08“ vergeben wurde.



Fakultäten	10ZOf

Fakultät, geschrieben als $n!$, ist eine Rechenart, bei der die natürlichen Zahlen bis zu einem bestimmten Wert miteinander multipliziert werden. Beispiel: $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Bestimme mit wie vielen Nullen das Ergebnis von 20! endet, ohne die gesamte Zahl auszurechnen. Das heißt für das Beispiel von oben $6! = 720$ endet auf einer Null. Der Taschenrechner liefert für diese Frage nicht das richtige Ergebnis.

$20 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 4 = 120000$

$2 \cdot 2 \cdot 3$

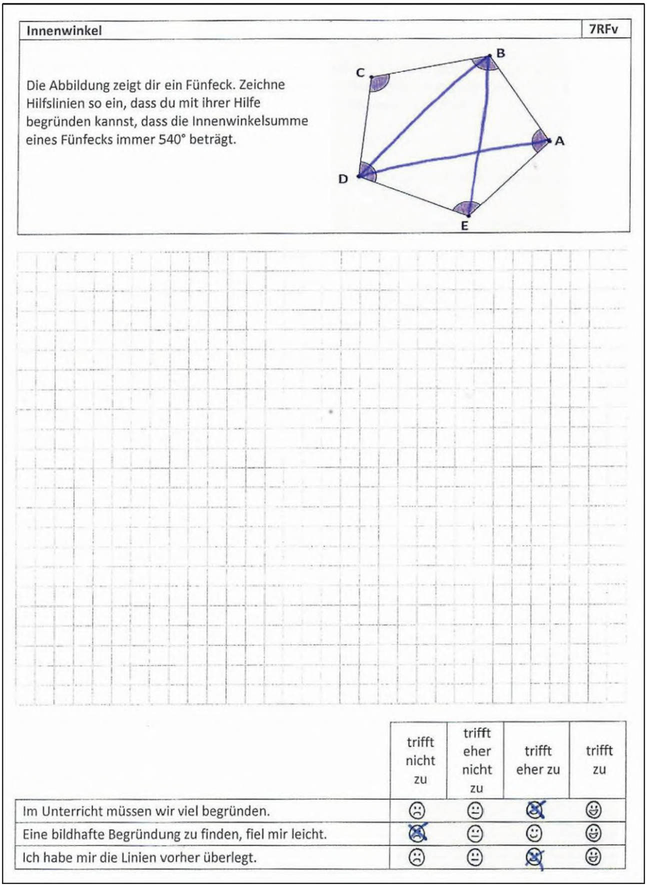
4

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Eine Begründung, bei der man rechnet, zu finden, fällt mir leicht.	☹	😐	🙂	😀 X
Solche Aufgaben haben wir bereits im Unterricht bearbeitet.	X ☹	😐	🙂	😀
Die Aufgabe fiel mir leicht.	☹	😐	🙂	😀 X

Abb. 5.6.: Schülerbearbeitung (analytisch) zur Verdeutlichung des Codes 25

Der Code 25 setzt sich hierbei aus einer *match-Bearbeitung* zusammen, was in dem oben abgebildeten Fall heißt, dass der analytische Denkstil des Schülers auch in der Bearbeitung verwendet wurde (2). Dies zeigt sich daran, dass in den zusammenhängenden Bearbeitungsschritten keinerlei Skizzen verwandt wurden, sondern über eine Rechnung mit den einzig notwendigen Zahlen eine arithmetische Begründung gegeben wurde.
Darüber hinaus besagt die zweite Stelle, dass es sich um eine (vermeintlich) vollständige Bearbeitung handelt, ohne dass Besonderheiten im Denkstil festzustellen sind.

Hierbei beziehen sich die „Besonderheiten im Denkstil“ wie im vorangegangenen Beispiel bereits angeklungen auf Bearbeitungen oder Äußerungen, die so nicht zu erwarten wären. In dieser speziellen Aufgabe könnte das heißen, dass ein analytischer Schüler angibt, dass es ihm schwerfällt rechnerische Begründungen zu finden. Da in unserem Beispiel jedoch angegeben wurde, dass dem Schüler nicht nur die Aufgabe selbst, sondern auch rechnerische Begründungen leicht fallen, gibt es in den begleitenden Fragen keinen Hinweis auf irgendwelche Besonderheiten.



Innenwinkel 7RFv

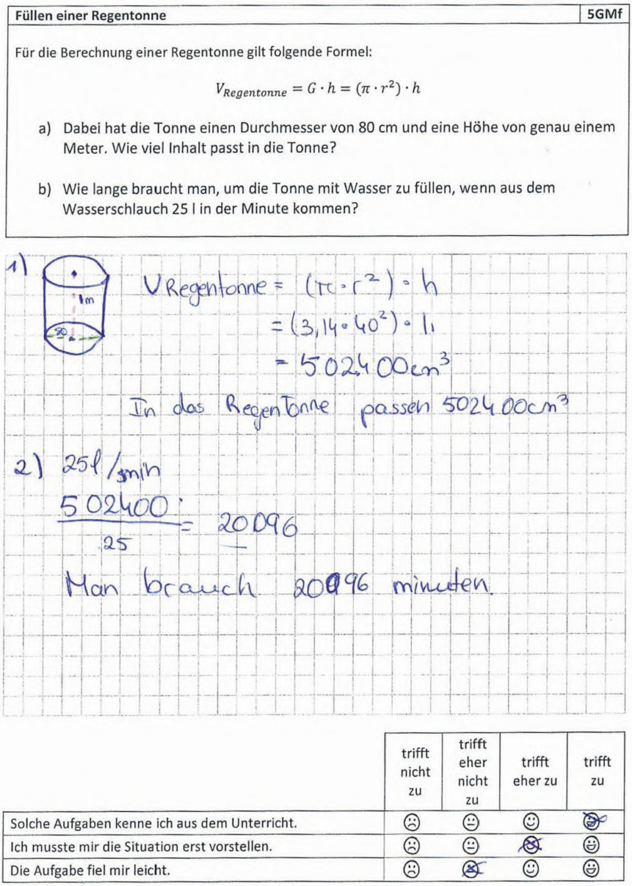
Die Abbildung zeigt dir ein Fünfeck. Zeichne Hilfslinien so ein, dass du mit ihrer Hilfe begründen kannst, dass die Innenwinkelsumme eines Fünfecks immer 540° beträgt.

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Im Unterricht müssen wir viel begründen.	☹	😐	☺	😊
Eine bildhafte Begründung zu finden, fiel mir leicht.	☹	😐	☺	😊
Ich habe mir die Linien vorher überlegt.	☹	😐	☺	😊

Abb. 5.7.: Schülerbeispiel (analytisch) zur Vergabe des Codes 33

Das abgebildete Beispiel zeigt eine visuelle Bearbeitung dadurch, dass der Schüler in der vorgegebenen Zeichnung eines Fünfecks Hilfslinien einzeichnet, um die Begründung für die Innenwinkelsumme zu geben. Aufgrund dessen, dass die Schülerin, von der die Bearbeitung stammt eine Präferenz für ein analytisches Vorgehen hat, handelt es sich um ein Vorgehen, das nicht ihrem Denkstil entspricht (3).
Die Drei in der zweiten Stelle bedeutet dabei, dass ein Abbruch der Aufgabe mit erwartbaren Angaben zum Denkstil einhergeht.
Hierbei zeigt sich der Abbruch in der Bearbeitung darin, dass zwar Hilfslinien eingezeichnet wurden, die dazugehörigen Erklärungen jedoch fehlen. Es ist folglich anhand der Bearbeitung nicht zu sagen, ob die Schülerin ihre Hilfslinien begründet gewählt hat oder sie in einem blinden Versuch gesetzt wurden. Allerdings gibt sie in den begleitenden Fragen durchaus an, dass sie sich die Hilfslinien vorher überlegt hat, sodass davon ausgegangen werden muss, dass hier ganz bewusst die Begründung, die aus den Hilfslinien entsteht, nicht gegeben wurde. Daneben gibt sie an, dass es ihr schwerfiel eine bildhafte Begründung zu finden, sodass der Verdacht naheliegt, dass die Ursache für den Abbruch mit dem Denkstil zusammenhängt.
Auf diese Weise ergibt sich für diese Bearbeitung der Code 33.

Wie bereits angemerkt gibt es neben den drei vorangegangen verdeutlichten Hauptkategorien auch noch eine Kategorie „nicht eindeutig“. Diese Uneindeutigkeit kann auf verschiedene Weisen entstehen. Zum einen dadurch, dass Schüler versuchen über eine Argumentation zur Lösung zu kommen, die nicht zwingend Hinweise auf den Denkstil gibt. So können beispielsweise die für eine tragfähige Argumentation notwendigen mathematischen Stützungen und Garanten fehlen, womit der Schüler ebenjene mathematischen Elemente ausspart, die Hinweise auf die verwendete Vorgehensweise enthalten. Zum anderen sind Bearbeitungen dann nicht eindeutig, wenn Bearbeitungsprozesse abbrechen und durch einen Lösungsansatz des anderen Denkstils ersetzt werden oder der Bearbeitungsprozess Elemente beider Denkstile nutzt.
Im folgenden Schülerbeispiel bearbeitet eine Schülerin mit visuellem Denkstil eine analytisch ausgerichtete Aufgabe.



Füllen einer Regentonne	5GMf

Für die Berechnung einer Regentonne gilt folgende Formel:

$$V_{Regentonne} = G \cdot h = (\pi \cdot r^2) \cdot h$$

a) Dabei hat die Tonne einen Durchmesser von 80 cm und eine Höhe von genau einem Meter. Wie viel Inhalt passt in die Tonne?

b) Wie lange braucht man, um die Tonne mit Wasser zu füllen, wenn aus dem Wasserschlauch 25 l in der Minute kommen?

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Solche Aufgaben kenne ich aus dem Unterricht.	☹	😐	☺	✗
Ich musste mir die Situation erst vorstellen.	☹	😐	✗	😃
Die Aufgabe fiel mir leicht.	☹	✗	☺	😃

Abb. 5.8.: Schülerbeispiel (visuell) zur Verdeutlichung der Vergabe des Codes 17

Die Bearbeitung zeigt, dass die Schülerin sowohl visuelle Elemente als auch analytische Elemente nutzt, wobei jedoch nicht benannt werden kann, welchen Stellenwert die einzelnen Elemente in der Bearbeitung einnehmen.
Die visuellen Elemente sind in der Schülerlösung durch die angefertigte Skizze der Regentonne repräsentiert, während der rechnerische Ansatz auf ein analytisches Vorgehen schließen lässt. Und auch in den begleitenden Fragen wird deutlich, dass die Schülerin zunächst auf ihre bevorzugte Art des Denkens zurückgegriffen hat, um sich der Aufgabe zu nähern.

Mit den angeführten Beispielen soll verdeutlicht werden, dass für die Vergabe der Codes nicht nur auf die gezeigten Aufgabenbearbeitungen Bezug genommen wurde, sondern teilweise auch die begleitenden Fragen, insbesondere jene, die den Denkstil betreffen, herangezogen. Auf diese Weise ergibt sich ein detaillierteres Bild für die Bearbeitungen und mögliche Ursachen für bestimmte Auffälligkeiten.

Um die Vergabe der Codes abzusichern wurde zudem die Beurteiler-Übereinstimmung mithilfe von Cohens Kappa bestimmt. Hierbei wurde der Vergleich nicht wie üblich auf unterschiedliche Codierer bezogen, sondern die Intrarater Reliabilität ermittelt, die hier darauf abzielt zu prüfen, inwieweit das Auswertungsinstrument über die Zeit hinweg zu den gleichen Ergebnissen führt. Um hierbei nicht von der ursprünglichen Codierung beeinflusst zu werden, lagen die beiden Codierphasen ein dreiviertel Jahr auseinander, sodass auch in diesem Fall von unabhängigen Auswertungen gesprochen werden kann.

		Wert	Asymptotischer Standardfehler[a]	Näherungsweises t[b]	Näherungsweise Signifikanz
Maß der Übereinstimmung in 1DZf	Kappa	0,81	0,041	19,647	0,000
Maß der Übereinstimmung in 2RFf	Kappa	0,60	0,051	16,223	0,000
Maß der Übereinstimmung in 3GMv	Kappa	0,70	0,049	16,526	0,000
Maß der Übereinstimmung in 4ZFv	Kappa	0,71	0,052	14,209	0,000
Maß der Übereinstimmung in 5GMf	Kappa	0,77	0,042	23,412	0,000
Maß der Übereinstimmung in 6ZOv	Kappa	0,74	0,047	19,636	0,000
Maß der Übereinstimmung in 7RFv	Kappa	0,41	0,048	17,481	0,000
Maß der Übereinstimmung in 8FZf	Kappa	0,65	0,048	20,131	0,000
Maß der Übereinstimmung in 9DZv	Kappa	0,75	0,045	18,440	0,000
Maß der Übereinstimmung in 10ZOf	Kappa	0,65	0,047	22,902	0,000
Anzahl der gültigen Fälle		108			

a. Die Null-Hypothese wird nicht angenommen.
b. Unter Annahme der Null-Hypothese wird der asymptotische Standardfehler verwendet.

Tab. 5.10.: Beurteiler-Übereinstimmung an unterschiedlichen Zeitpunkten

Die Werte zeigen, dass entsprechend der von Landis & Koch (1977, S.) etablierten Intervalle, ein vorwiegend „substantial agreement“ (von 0,61 – 0,80) vorliegt. Lediglich die Übereinstimmungen der Aufgabe 2RFf (Möndchen des Hippokrates) und vor allem 7RFv (Innenwinkelsumme) weisen ein nur „moderate agreement“ (0,41 – 0,60) auf.

3. Erstellung von Fallübersichten

Für die Erstellung von Fallübersichten, wurden zunächst die herangezogenen Einzelfälle mithilfe der oben dargestellten Vorgehensweise analysiert und anschließend innerhalb der Bearbeitung nach vorherrschenden Merkmalsausprägungen (vgl. Kelle/ Kluge 1999, S.78) durchsucht. Zur besseren Übersichtlichkeit, wurden dazu die bearbeiteten Aufgaben so umsortiert, dass die Bearbeitungen von match-Aufgaben denen von mismatch-Aufgaben gegenübergestellt sind. Zur Konstruktion möglicher Typen wurde sich an dem von Kluge entworfenen Prozess (vgl. Kluge 1999, S.260ff) orientiert, der zu Beginn die *Erarbeitung relevanter Vergleichsdimensionen* vorsieht.

Entsprechend wurde in der vorliegenden Studie zunächst das Bearbeitungsverhalten dahingehend analysiert, inwieweit die Schüler in match- bzw. mismatch-Aufgaben eine aufgabenadäquate Vorgehensweise wählten. Hierbei soll dann von einer *aufgabenadäquaten Bearbeitung* gesprochen werden, wenn die Bearbeitung in einer Weise erfolgt, die in der jeweiligen Aufgabengruppe (match- oder mismatch-Aufgaben) zielführend ist. Entstanden ist dabei die folgende Übersicht, die die Gruppierungen und die entsprechende Verortung aufzeigt.

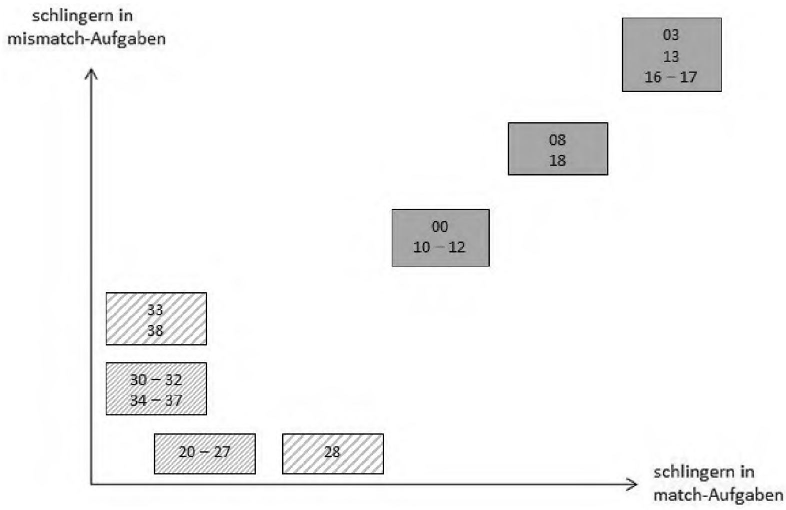


Abb. 5.9.: Verortung der Codierungen entlang der Dimensionen match- und mismatch-Aufgaben

Konkret zeigt die Abbildung, dass zum einen jene Codes zusammengefasst wurden, die keinen Hinweis darauf enthalten, dass ein Schüler Probleme mit der Denkstilkomponente innerhalb der Aufgabe hat (20, 21, 22, 24, 25, 28 bzw. 30, 31, 32, 34, 35, 38; hier schraffiert).
Zum anderen basiert die Subkategorie *schlingernde Bearbeitung* darauf, dass die Aufgabe nicht in der vorgesehenen Weise gelöst wurde. Dabei umfasst diese Subkategorie die Codes, in der die Schüler direkt auf Probleme mit dem anderen Denkstil verweisen (03, 13, 33, 16, 17; hier grau) als auch jene Codes, die zwar keinen direkten Hinweis geben, wohl aber durch die vorliegende Bearbeitung als problembehaftet angenommen werden können (00, 10, 11, 12; hier grau).
Auf diese Weise ergibt sich für den dazugehörigen Merkmalsraum grundsätzlich folgende Zusammenstellung:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">match-Aufgaben</th></tr>
<tr><th>aufgabenadäquate Bearbeitung</th><th>schlingernde Bearbeitung</th></tr>
<tr><td rowspan="2">mismatch-Aufgabe</td><td>aufgabenadäquate Bearbeitung</td><td>Typ I</td><td>Typ III</td></tr>
<tr><td>schlingernde[36] Bearbeitung</td><td>Typ II</td><td>Typ IV</td></tr>
</table>

Tab. 5.11.: Dimensionierung der Kategorien zur Typenbildung

Auf Basis der erstellten Vergleichsdimensionen wurden die vorliegenden Fälle entsprechend gruppiert und auf empirische Regelmäßigkeiten hin analysiert. Dem zweiten Schritt des Typenbildungsprozesses von Kluge liegt die Fallkontrastierung nach den Grundsätzen der internen Homogenität auf Ebene des Typus sowie der externen Heterogenität auf Ebene der Typologie zugrunde (vgl. im Kelle/ Kluge 1999, S.81). Im Zusammenhang mit den vorliegenden Daten heißt das, dass dann von einer *aufgabenadäquaten Bearbeitung* innerhalb einer Aufgabengruppe gesprochen wird, wenn der Schüler in einer Mehrzahl der Aufgaben ein aufgabenadäquates Vorgehen zeigt. Da-

[36] Schlingern als Begriff aus der Schifffahrt für eine Bewegung des Schiffs um alle drei Achsen, bedeutet in diesem Zusammenhang, dass der Schüler nicht weiß, wie er die Aufgabe lösen kann, weshalb die Bearbeitung mehrere Lösungsversuche oder Lösungswege beinhaltet.

bei soll hier dann von einer Mehrzahl gesprochen werden, wenn drei der fünf match- bzw. mismatch-Aufgaben entsprechend bearbeitet wurden.
Andersherum wird dann von einer *schlingernden Bearbeitung* gesprochen, wenn der Schüler die Mehrzahl der Aufgabenbearbeitung abbricht mit Verweis auf den Denkstil, oder aber innerhalb seiner Bearbeitung sowohl visuell-bildliche als auch formal-analytische Elemente verwendet.
Auf diese Weise

4. Vertiefende Analyse von ausgewählten Fällen

Abschließend werden die identifizierten Typen anhand ausgewählter Fälle zunächst vorgestellt und zur Verdeutlichung der Typologie entsprechend analysiert, wobei die Daten aus den begleitenden Fragen entsprechende Berücksichtigung finden.

5.7.2. Auswertung der begleitenden Fragen

Zur Unterstützung der qualitativen Daten und der sich daraus ergebenden Typologie werden die begleitenden Fragen zunächst separat ausgewertet und anschließend mit den vorhandenen Ergebnissen in Beziehung gesetzt.
Entsprechend der grundlegenden Erwartung, dass match-Aufgaben als leichter empfunden werden und auch besser gelöst werden, wird zunächst ein Mittelwertvergleich zwischen visuellen und analytischen Denkern vorgenommen. Abgesichert werden die Vergleiche über die Ermittlung der Signifikanz mithilfe des T-Tests. Um zusätzlich die Fähigkeiten und Leistungen der Schüler als Einflussfaktoren ausschließen zu können, wird zudem separat analysiert, wie sich die Werte bei Schülern verhalten, die in ihrer Selbstauskunft angeben, dass sie „Mathe können".

Darüber hinaus wird mit einer Gegenüberstellung der Mittelwerte in den beiden Aufgabengruppen (match- und mismatch-Aufgaben) der Einzelfälle geprüft, inwieweit sich die identifizierten Phänomene der qualitativen Auswertung auch in den quantitativen Werten bestätigen lassen.

Wie bereits in Kapitel 5.5. beschrieben, werden die Aussagen, die sich auf den jeweils nahegelegten Denkstil beziehen, ergänzend in der Codierung mit berücksichtigt, da sie vertiefende Einblicke in die Bearbeitung der Aufgaben ermöglichen. Insbesondere, wenn im offenen Aufgabenteil nichts niedergeschrieben wurde, geben einige Aussagen Aufschluss über (unbewusste) Ursachen. Die folgende Tabelle zeigt auf, aus welchen Aussagen entsprechende Informationen entnommen werden können und inwieweit eine (Nicht-) Zustimmung die Codierung beeinflusst. Um jedoch der Unübersichtlichkeit vorzubeugen, werden hier nicht alle möglichen Beeinflussungen dargestellt, sondern sich auf jene bei einer Nicht-Bearbeitung beschränkt:

Aussage	Ablesbare Informationen
Die Abbildung habe ich nur benutzt, um mich zu erinnern, was ich rechnen muss. (2RFf)	Weist ein visueller Denker die Aussage zurück, dass die Abbildung nur als Erinnerungsstütze genutzt wurde, gerade auch in Verbindung damit, dass sie nötig war, kann trotz fehlender Bearbeitung davon ausgegangen werden, dass visuell-bildliche Elemente zur Lösung benötigt wurden und somit der Code 03 vergeben werden. Stimmt er der Aussage jedoch zu, so erscheint dies im Zusammenhang mit der Angabe, dass die Abbildung nicht notwendig war, merkwürdig in Bezug auf seinen Denkstil, weshalb mit 08 codiert wird. Werden demgegenüber andere Kombinationen dieser beider aussagen angekreuzt, so handelt es sich um widersprüchliche Angaben, aus denen keine weiteren Informationen gezogen werden können (00).
	Lehnt hingegen ein analytischer Denker diese Aussage ab, so ist davon auszugehen, dass er die Abbildung für mehr als nur zur Verdeutlichung des Rechenwegs nutzt. In Verbindung mit einer Nicht-Bearbeitung ist folglich daraus zu schließen, dass Elemente des anderen Denkstils nötig waren, um die Aufgabe zu lösen. Diese Besonderheiten im Denkstil führen zu einer Codierung 08.

Aussage	Ablesbare Informationen
Ich musste mir die Situation erst vorstellen. (5GMf)	Gibt ein visueller Denker an, dass er sich die Situation erst vorstellen musste, so zeugt das davon, dass die Nicht-Bearbeitung darauf zurückzuführen ist, dass er nicht über die Vorstellung hinaus gekommen ist und damit der Denkstil als Ursache für ein Scheitern gesehen werden kann. Es wird 03 als Code vergeben.
	Gibt ein Analytiker hingegen an, dass er sich die Situation zunächst vorstellen musste, verdeutlicht er damit die Notwendigkeit, zunächst auf den anderen Denkstil zurückgreifen zu müssen, was bei einer formal-analytisch ausgerichteten Aufgabe nicht zu erwarten ist (08).
Ich konnte mir die Hölzchen gut vorstellen. (6ZOv)	Lehnt ein Schüler mit visuellem Denkstil diese Aussage ab, so erklärt er, dass er Schwierigkeiten mit Elementen seines eigenen Denkstils hat, was zur Vergabe des Codes 08 führt.
	Weist ein analytischer Denkstil diese Aussage zurück, zeigt das in Zusammenhang mit einer Nicht-Bearbeitung Schwierigkeiten mit Elementen des anderen Denkstils auf (03).
Eine bildhafte Begründung zu finden, fiel mir leicht. (7RFv)	Von einer Zurückweisung dieser Aussage von einem Schüler mit visuellen Denkstil ist zunächst nicht auszugehen, ist dies doch der Fall, so lässt das auf eine Besonderheit schließen, weshalb der Code 08 vergeben werden muss.
	Bei der Ablehnung dieser Aussage von einem Analytiker ist davon auszugehen, dass gerade die Elemente eines visuell-bildlichen Vorgehens die Begründung erschweren und die Ursache für die Nicht-Bearbeitung dementsprechend in dem Denkstil liegt (03).

Aussage	Ablesbare Informationen
Ich wusste gleich, wie ich die Zeichnung machen soll. (9DZv)	Gibt ein visueller Denker an, dass er nicht wusste, wie er eine Zeichnung anfertigen soll, so stellt dies eine Besonderheit in Bezug auf den eigenen Denkstil dar, weshalb hier der Code 08 vergeben wird.
	Mit der Ablehnung dieser Aussage räumt ein Analytiker ein, dass er Schwierigkeiten bei der Anfertigung der Zeichnung hat, was direkt auf den Denkstil hinweist und somit folglich mit 03 zu codieren ist.
Eine Begründung, bei der man rechnet, zu finden, fällt mir leicht. (10ZOf)	Weist ein Schüler mit visuellem Denkstil diese Aussage zurück, so verdeutlicht das Schwierigkeiten, die er mit dem formal-analytischen Element bei Begründungen hat, sodass insbesondere mit einer Nicht-Bearbeitung dies als Ursache für das Scheitern in dieser Aufgabe betrachtet werden muss. (03)
	Weist hingegen ein Schüler mit analytischem Denkstil diese Aussage zurück, so zeigt die eine Besonderheit bei der Annahme, dass Analytiker mit Elementen ihres eigenen Denkstils keine oder nur geringe Schwierigkeiten haben. Aus diesem Grund ist die Vergabe des Codes 08 folgerichtig.

Tab. 5.12.: Einfluss der begleitenden Fragen auf die Codevergabe

In der dargestellten Übersicht zeigt sich folglich, dass auch dann Informationen aus den Angaben der Schüler entnommen werden können, die Rückschlüsse auf mögliche Schwierigkeiten zulassen, wenn der Schüler keine Bearbeitung zeigt. Wie bereits genannt, lassen sich die Angaben in den begleitenden Fragen, die den Denkstil betreffen, jedoch nicht nur auf Nicht-Bearbeitungen beziehen, sondern geben darüber hinaus auch bei abgebrochenen Bearbeitungen teilweise Aufschluss über die Gründe für diesen Abschluss.

Aus diesem Grund soll hier noch einmal betont werden, dass die entsprechende Codierung nicht allein auf der gezeigten Bearbeitung beruht, sondern alle Angaben des Schülers mit berücksichtigt, um auf diese Weise ein umfassenderes Bild von der entsprechenden Bearbeitung zu erhalten.

6. Ergebnisse der Studie

Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse der durchgeführten Studie zeigen auf, dass die Grundannahme, nach welcher Schüler in *match-Aufgaben* erfolgreicher sind und diese gleichfalls als leichter empfinden, nur zum Teil bestätigt werden konnte. Hierbei zeigen die vorliegenden Daten, dass es zwar durchaus Zusammenhänge zwischen Aufgabenbearbeitung und Denkstil gibt, diese sich jedoch deutlich heterogener darstellen als zunächst angenommen. Aufgrund dieser ersten Befunde bedurfte es der detaillierteren Analyse der Aufgabenbearbeitung, um die entsprechenden Regelmäßigkeiten herauszuarbeiten.
Die nachfolgenden Kapitel zeichnen anhand der vorgestellten Ergebnisse gleichzeitig die Suche nach möglichen Erklärungen nach (siehe Kapitel 6.1.).
Jedoch erlauben die Darstellungen in Kapitel 6.2. erst einen differenzierteren Blick auf den Zusammenhang zwischen mathematischem Denkstil und der Aufgabenbearbeitung dadurch, dass die Aufgaben geordnet einander gegenüber gestellt werden und der Unterschied zwischen ihnen nachfolgend systematisch dargelegt wird. Anhand einer geringen Fallauswahl wird, wie in den Abschnitten von Kapitel 5.7. angeführt wurde, verdeutlicht, wie sich die unterschiedlichen Typen innerhalb der Bearbeitungen herausarbeiten lassen.
Abschließend werden je ein visuelles und ein analytisches Fallbeispiel aus jedem der Typen dargestellt, um explizit zu verdeutlichen, wie zu dieser Einschätzung gelangt wurde. Hierzu werden zunächst die einzelnen Schüler mit einigen charakteristischen Angaben vorgestellt und anschließend ihre Bearbeitungen genauer analysiert. Darüber hinaus werden ebenfalls die Mittelwerte ihrer *match-* und *mismatch-Aufgaben* zu ihrem Aufgabenempfinden und der Korrektheit ihrer Lösungen zueinander in Beziehung gesetzt (Kapitel 6.3. und Unterkapitel).

6.1. Vergleich der Denkstile

Nachdem in Kapitel 5.6. bereits auf den Umfang und die Struktur der Stichprobe eingegangen wurde, soll ihre Zusammensetzung hier nach der für diese Studie entscheidenden Denkstiltypen analysiert werden. Die daraus für

die Erhebung herangezogenen Fälle wurden anschließend auf ihre Merkmale hin analysiert und dessen Ergebnisse im Weiteren dargestellt.
Bei den 282 befragten Schülern ergab sich eine grundsätzliche Verteilung mit 26,24% bevorzugt visuell denkenden Schüler gegenüber 12,06% Analytikern, während 61,70% dem integrierten Denkstil angehörten. Die genauere Analyse ergab, dass die Anteile der integrierten Denker den jeweiligen Anteilen der gesamten Stichprobe ähneln. So umfasste die gesamte Stichprobe einen Schüleranteil von 43,3% auf dem Gymnasium, während es sich bei 42,5% der bevorzugt integriert denkenden Schüler ebenfalls um Gymnasiasten handelt. Genauso verhält es sich bei ihren Einstellungen zum Mathematikunterricht, bei der 50% aller Befragten, genauso wie 50,6% der Integrierten angeben Mathematik zu mögen, und ihrer Leistungseinschätzung (allgemein 55,7% der Schüler und 56,9% der Integrierten können laut Selbstauskunft Mathematik).

	Schulform		Einstellungen zum MU			Leistungseinschätzung		
	Gymnasium	Gesamtschule	mögen	nicht	ohne	kann	nicht	ohne
Analytiker	67,6	32,4	82,4	14,7	2,9	94,1	5,9	0,0
Integrierte	42,5	57,5	50,6	43,1	6,3	56,9	35,1	8,0
Visuelle	33,8	66,2	33,8	60,8	5,4	35,1	52,7	12,2
Gesamt	43,3	56,7	50,0	44,3	5,7	55,7	36,2	8,2

Tab. 6.1.: Verteilung der unterschiedlichen Denkstile (Angaben in Prozent)

Interessant ist dabei, dass sich diese ähnliche strukturelle Zusammensetzung nicht auch in den übrigen beiden Denkstilen widerspiegelt. Hier zeigt sich vielmehr, dass die tendenzielle Verteilung sich überkreuzt. So lässt sich in der vorliegenden Stichprobe erkennen, dass während etwa zwei Drittel der Analytiker das Gymnasium besuchen, ebenso viele visuell Denkende zur Gesamtschule gehen. Ähnlich verhält es sich sowohl bei der Einstellung zur Mathematik als auch bei der Leistungseinschätzung. In der Selbstauskunft zur Einstellung zur Mathematik zeigt sich, dass ein Großteil der bevorzugt analytisch denkenden Schüler Mathematik mögen, während demgegenüber der größere Anteil des visuellen Denkstils angibt, Mathematik nicht zu mögen. Und auch bei der Leistungseinschätzung sehen sich die meisten Analytiker positiv, wohingegen mehr als die Hälfte der visuellen Denker sich selbst eher negativ einschätzt.

Um den Einfluss der Schulform und den damit einhergehenden unterschiedlichen Leistungswahrnehmungen und -anforderungen zu minimieren, sei hier ein gesonderter Blick auf die Selbstauskünfte der Gymnasialschüler geworfen. Insbesondere da die beobachtbaren gegenläufigen Selbsteinschätzungen der Analytiker und visuellen Denker evtl. auf ihre Ungleichverteilung innerhalb der Schulformen zurückzuführen sind. Das vorgezeichnete Bild lässt sich jedoch auch nach Separierung der unterschiedlichen Schulformen bestätigen, wenn auch nicht in der Deutlichkeit, wie sie sich in der Gesamtbetrachtung erkennen lässt.

	Einstellungen zum MU			Leistungseinschätzung		
	mögen	nicht	ohne	kann	nicht	ohne
Analytiker	87,0	13,0	0,0	95,7	4,3	0,0
Integrierte	55,4	37,8	6,8	58,1	35,1	6,8
Visuelle	44,0	48,0	8,0	36,0	56,0	8,0
Gesamt	59,0	35,2	5,7	60,7	33,6	5,7

Tab. 6.2.: Verteilungen der Gymnasiasten (Angaben in Prozent)[36]

Entsprechend der hier dargestellten Unterscheide zwischen dem visuellen Denkstil und dem analytischen Denkstil schließt sich die Frage an, inwieweit sich die vorliegende Selbsteinschätzung in den Aufgaben des für diese Studie entwickelten Tests bestätigen lassen.

Die im Folgenden dargestellten Untersuchungen und ihre Ergebnisse legen ihren Fokus dabei auf die Gegenüberstellung des visuellen und analytischen Denkstils. Dies begründet die Autorin damit, dass die Ausprägung des integrierten Denkstils als einer, der keine klaren Präferenzen aufweist, davon auszugehen ist, dass die Ursachen für mögliche Diskrepanzen in dem Erfolg

[36] Zur Gegenüberstellung der Gesamteinschätzung sowie beider Schulformen, siehe Anhang A-1.

des Lösens und ihr Aufgabenempfinden nicht deutlich auf den Denkstil zurückzuführen ist. Dementsprechend werden die folgenden Ausführungen ihren Fokus auf die Kontrastierung von Analytikern und visuellem Denkstil legen.

Insbesondere das Aufgabenempfinden bildet, neben dem Maß der Korrektheit der Bearbeitungen, einen wichtigen Indikator für mögliche Unterschiede in der Bearbeitung. Hierzu wurden die Mittelwerte der begleitenden Fragen zum Aufgabenempfinden mit ihrer vierstufigen Skala von 0 (Ich fand die Aufgabe schwer) bis 3 (Ich fand die Aufgabe leicht) der beiden Denkstile berechnet und miteinander verglichen.

Es zeigt sich, dass die formal-analytischen Aufgaben von Schülern des analytischen Denkstils als leichter empfunden werden. Insbesondere bei der Aufgabe zum Füllen der Regentonne lässt sich ein deutlicher Unterschied feststellen, bei dem die Schüler mit visuellem Denkstil dazu tendieren, dass die Aufgaben als eher schwer empfunden werden (Mittelwert 0,78), während analytisch denkende Schüler diese als eher leicht einstufen (Mittelwert 1,52). Aber auch die übrigen Aufgaben zeigen eine mittlere Differenz von 0,49 zugunsten der Analytiker.

		N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
1DZf [37]– Aufgabenempfinden	analytisch	33	2,061	1,0808	0,1881
	visuell	70	1,514	0,9963	0,1191
2RFf - Aufgabenempfinden	analytisch	28	1,018	1,0928	0,2065
	visuell	64	0,500	0,8729	0,1091
3GMv - Aufgabenempfinden	analytisch	32	1,688	0,8496	0,1502
	visuell	71	1,634	1,1338	0,1346
4FZv - Aufgabenempfinden	analytisch	34	2,441	0,8941	0,1533
	visuell	73	2,315	0,8313	0,0973
5GMf - Aufgabenempfinden	analytisch	31	1,516	1,2075	0,2169
	visuell	69	0,775	0,8425	0,1014
6ZOv - Aufgabenempfinden	analytisch	28	1,696	1,1000	0,2079
	visuell	68	1,647	0,9347	0,1133
7RFv - Aufgabenempfinden	analytisch	28	1,464	1,2013	0,2270
	visuell	66	1,348	1,0596	0,1304
8FZf - Aufgabenempfinden	analytisch	31	1,258	1,1245	0,2020
	visuell	62	0,790	0,9213	0,1170
9DZv - Aufgabenempfinden	analytisch	29	1,793	1,1765	0,2185
	visuell	64	1,227	1,0688	0,1336
10ZOf - Aufgabenempfinden	analytisch	30	0,833	1,0532	0,1923
	visuell	67	0,642	0,7220	0,0882

Tab. 6.3.: Aufgabenbezogener Mittelwertvergleich des Aufgabenempfindens

[37] Aufgrund des begrenzten Platzes wird hier auf die formale Benennung der Aufgaben zurückgegriffen. Um die Lesbarkeit jedoch zu erhöhen, wird diese kurz erläutert: Die Zahl gibt an, welche Stelle die Aufgabe innerhalb des Testes einnimmt, während die Stellen 2 und 3 den jeweiligen Inhaltsbereich der KMK-Standards widerspiegeln. Die letzte Stelle gibt an, ob es sich bei der Aufgabe um eine formal oder eine visuell zu lösende Aufgabe handelt.

Dagegen ist auffällig, dass alle visuell-bildlich ausgerichteten Aufgaben ebenfalls von den Schülern mit analytischem Denkstil als leichter empfunden werden, wenn auch nicht so deutlich wie es bei formal-analytisch ausgerichteten Aufgaben der Fall ist. Das heißt, dass entgegen der Annahme, dass Schüler Aufgaben als tendenziell leichter einstufen, die eine Bearbeitung entsprechend ihrer bevorzugten Art des Denkens erfordern, dies in dieser Erhebung nicht bestätigt werden konnte.

Der anschließende zweiseitige Hypothesentest hat dabei signifikante Ergebnisse für die meisten formalen Aufgaben ergeben, hierunter die Regentonne-Aufgabe ($p = 0{,}003$), die Taschengeld-Aufgabe ($p = 0{,}013$), die Aufgabe zu den Möndchen des Hippokrates ($p = 0{,}018$) und das Seil um den Äquator ($p = 0{,}035$). Darüber hinaus hat sich gezeigt, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit bei der visuell-bildlich ausgerichteten Aufgabe Silverstone ($p = 0{,}024$) unterhalb des kritischen Wertes von $p = 0{,}05$ liegt. Somit kann der tendenzielle Unterschied zwischen dem Aufgabenempfinden von visuellem und analytischem Denkstil auch für die Grundgesamtheit angenommen werden kann.
Die überwiegend visuell-bildlich ausgerichteten Aufgaben zeigen hingegen mit Werten von $p = 0{,}370$ bis $p = 0{,}824$ keine signifikanten Ergebnisse (siehe Anhang A-4.1., S. A-13f).

Ein deutlich anderes Bild zeigt sich bei der separaten Gegenüberstellung der Mittelwerte der Gymnasiasten. Die Entscheidung diese gesondert zu betrachten, begründet sich in den unterschiedlichen Anforderungen der jeweiligen Schulform und der damit einhergehenden Selektion nach Leistungen vor dem Eintritt in die weiterführende Schule.

		N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
1DZf – Aufgaben-empfinden	analytisch	22	2,250	0,9970	0,2126
	visuell	23	1,891	1,0440	0,2177
2RFf – Aufgaben-empfinden	analytisch	17	0,824	1,0744	0,2606
	visuell	21	0,810	1,0779	0,2352
3GMv – Aufgaben-empfinden	analytisch	22	1,750	0,7520	0,1603
	visuell	24	1,854	1,1561	0,2360
4FZv – Aufgaben-empfinden	analytisch	23	2,522	0,7305	0,1523
	visuell	25	2,680	0,6272	0,1254
5GMf – Aufgaben-empfinden	analytisch	21	1,667	1,1547	0,2520
	visuell	24	1,000	0,8470	0,1729
6ZOv – Aufgaben-empfinden	analytisch	17	1,647	1,1147	0,2704
	visuell	23	1,848	0,9224	0,1923
7RFv – Aufgaben-empfinden	analytisch	18	1,556	1,2472	0,2940
	visuell	22	1,591	1,1406	0,2432
8FZf – Aufgaben-empfinden	analytisch	22	1,273	1,1205	0,2389
	visuell	18	1,139	1,0262	0,2419
9DZv – Aufgaben-empfinden	analytisch	18	1,667	1,1376	0,2681
	visuell	17	1,294	1,2127	0,2941
10ZOf – Aufgaben-empfinden	analytisch	20	0,650	0,9881	0,2209
	visuell	23	0,739	0,6720	0,1401

Tab. 6.4.: Aufgabenbezogene Mittelwerte zum Aufgabenempfinden der Gymnasiasten

Die Ergebnisse (vgl. Tab. 6.4.) zeigen die grundsätzlich angenommene Tendenz, dahingehend dass Schüler Aufgaben, die ihrer bevorzugten Art des Denkens entsprechen, als leichter empfinden. Lediglich zwei Aufgaben zeigen eine entgegen gerichtete Tendenz, wobei die Aufgaben unterschiedliche

Denkstile zur Bearbeitung nahelegen. Es kann folglich kein Trend für die Aufgaben, die den Erwartungen entgegenstehen, ausgemacht werden.
Darüber hinaus zeigt lediglich Aufgabe 5GMf (Regentonne) ein signifikantes Ergebnis ($p = 0{,}036$), wohingegen sich für die übrigen Aufgaben eine Irrtumswahrscheinlichkeiten von $0{,}245 \leq p \leq 0{,}968$ ergibt. Dementsprechend zeigt sich der angenommene Unterschied zwischen visuellem und analytischem Denkstil im Schwierigkeitsempfinden einer Aufgabe zwar in den vorliegenden Ergebnissen, dieser ist jedoch nicht für die Allgemeinheit anzunehmen (siehe Anhang A-4.2., S.A-15f).

Bei einem Vergleich über die einzelnen Aufgaben hinweg wird deutlich, dass das unterschiedliche Aufgabenempfinden nicht konsistent innerhalb der Denkstile ist. Vielmehr zeigt sich, dass Schüler mit analytischen Denkstil sowohl *match*- als auch *mismatch-Aufgaben* als leichter empfinden.

		Aufgaben	
		match	mismatch
Denkstil	analytisch	1,3792	1,8581
	visuell	1,6546	0,8651

Tab. 6.5.: Mittelwertvergleiche des Aufgabenempfindens

In Bezug auf die formal-analytisch ausgerichteten Aufgaben handelt es sich zudem um ein signifikantes Ergebnis ($p = 0{,}000$, siehe Anhang A-4.3., S.A-17).

Nachdem sich in der Gegenüberstellung der Mittelwerte des Aufgabenempfinden gezeigt hat, dass *match-Aufgaben* in der vorliegenden Stichprobe tendenziell als leichter empfunden werden, schließt sich die Frage an, inwieweit dies auch bei der Korrektheit der Lösungen erkennbar ist. Ausgehend von Tab. 6.1. und der positiveren Selbsteinschätzung von Analytikern bezüglich ihrer mathematischen Leistungen ist hierbei denkbar, dass Analytiker tendenziell besser in den Aufgaben abschneiden als visuelle Denker. Allerdings ist es, auf der Annahme beruhend, dass ein Zusammenhang zwischen der Vorliebe für die Informationsrepräsentation und der tatsächlichen

Leistung besteht, ebenso möglich, dass Schüler mit visuellem Denkstil erfolgreicher in visuell-bildlich ausgerichteten Aufgaben sind als in formal-analytischen.

Auf Basis der Mittelwerte von Analytikern und visuellen Denkern für die einzelnen Aufgaben zeigt sich, dass auf der dreistufigen Skala von 0 (falsch gelöst) über 1 (richtiger Ansatz zur Lösung) bis 2 (richtige Lösung) der Mittelwertvergleich belegt, dass denkstilkonforme Aufgaben geringfügig besser gelöst werden. Lediglich zwei der visuell-bildlichen Aufgaben, die zum Sparlineal (3GMv) und Silverstone (9DZv), folgen dieser Tendenz nicht (siehe graue Markierungen in Tab. 6.6.), sondern werden von Analytikern erfolgreicher bearbeitet als von visuellen Denkern.
Auffällig ist darüber hinaus, dass es sich bei den beiden Aufgaben, deren mittlere Differenz am größten ist, um solche handelt, die eine formal-analytische Bearbeitung erfordern. So zeigt sich in der Fakultäten-Aufgabe eine mittlere Differenz von 0,36 und in der Aufgabe zum Seil um den Äquator von sogar 0,41.

		N	Mittelwert	Standard-abweichung	Standardfehler des Mittel-wertes
1DZf – Korrektheit	analytisch	31	0,58	0,564	0,101
	visuell	66	0,39	0,762	0,094
2RFf – Korrektheit	analytisch	17	0,35	0,493	0,119
	visuell	36	0,11	0,319	0,053
3GMv – Korrektheit	analytisch	32	0,91	0,296	0,052
	visuell	68	0,71	0,692	0,084
4FZv – Korrektheit	analytisch	33	0,85	0,364	0,063
	visuell	72	1,06	0,603	0,071
5GMf – Korrektheit	analytisch	29	0,76	0,511	0,095
	visuell	54	0,56	0,691	0,094
6ZOv – Korrektheit	analytisch	30	0,50	0,509	0,093
	visuell	64	0,70	0,494	0,062
7RFv – Korrektheit	analytisch	22	0,50	0,512	0,109
	visuell	62	0,55	0,843	0,107
8FZf – Korrektheit	analytisch	26	0,65	0,629	0,123
	visuell	45	0,24	0,609	0,091
9DZv – Korrektheit	analytisch	28	0,89	0,315	0,060
	visuell	63	0,67	0,508	0,064
10ZOf – Korrektheit	analytisch	22	0,64	0,727	0,155
	visuell	51	0,27	0,532	0,075

Tab. 6.6.: Aufgabenbezogene Mittelwerte der Korrektheit der Lösungen

Der anschließende t-Test belegt signifikante Ergebnisse für Aufgaben zum Seil um den Äquator ($p = 0{,}009$), Silverstone ($p = 0{,}011$), Fakultäten ($p = 0{,}043$) und zum Sparlineal ($p = 0{,}046$, siehe Anhang A-4.4., S.A-18). Dies zeigt, dass der angenommene Unterschied einer erfolgreicheren Bearbeitung von Aufgaben von Schülern mit unterschiedlichem Denkstil, der sich auch in den Mittelwertvergleichen gezeigt hat, auf die Grundgesamtheit übertragbar ist.

Und obwohl die Aufgaben zu den Streichhölzchen ($p = 0{,}069$), dem House of Dots ($p = 0{,}071$) und den Möndchen ($p = 0{,}078$) eine Irrtumswahrscheinlichkeit nur geringfügig über dem Ablehnungsbereich der Nullhypothese liegt, machen die Aufgaben Regentonne ($p = 0{,}133$), Taschengeld

($p = 0{,}22$) und zur Innenwinkelsumme ($p = 0{,}75$) deutlich, dass eine verallgemeinerbare Aussage zu einem Zusammenhang hier nicht gemacht werden kann.

Um zu prüfen, ob diese nicht verallgemeinerbaren Ergebnisse auf die Stichprobe zurückzuführen sind oder ob dies mit den differenzierten Leistungsanforderungen der unterschiedlichen Schulformen zusammenhängt, wurden der Mittelwertvergleich separat für die Gymnasiasten wiederholt.
Hierbei zeigen Schüler des Gymnasiums im Vergleich zur Gesamtstichprobe jedoch nur sehr geringfügig bessere Leistungen. Bemerkenswert scheint allerdings die Tatsache, dass die gymnasialen Analytiker über alle Aufgaben hinweg sogar etwas schlechter abschneiden (mit einer mittleren Differenz von $-0{,}014$), während die Schüler mit visuellem Denkstil bessere Leistungen zeigen (die mittlere Differenz beträgt hier $0{,}06$). Hierbei zeigen die gymnasialen Analytiker sowohl bei *mismatch-Aufgaben* als auch bei *match-Aufgaben* im Mittel ein leicht schlechteres Ergebnis (mittlere Unterschiede von $-0{,}016$ und $-0{,}012$), während visuelle Denker zumindest in den *match-Aufgaben* besser abschneiden als die Schüler beider Schulformen gemeinsam (die mittlere Differenz liegt hier bei $0{,}122$).

		N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
1DZf – Korrektheit	analytisch	20	0,65	0,587	0,131
	visuell	25	0,40	0,816	0,163
2RFf – Korrektheit	analytisch	9	0,33	0,500	0,167
	visuell	15	0,13	0,352	0,091
3GMv – Korrektheit	analytisch	22	0,86	0,351	0,075
	visuell	23	1,04	0,706	0,147
4FZv – Korrektheit	analytisch	23	0,91	0,288	0,060
	visuell	25	1,16	0,624	0,125
5GMf – Korrektheit	analytisch	21	0,71	0,561	0,122
	visuell	22	0,55	0,739	0,157
6ZOv – Korrektheit	analytisch	20	0,40	0,503	0,112
	visuell	23	0,83	0,388	0,081
7RFv – Korrektheit	analytisch	16	0,50	0,516	0,129
	visuell	23	0,48	0,790	0,165
8FZf – Korrektheit	analytisch	18	0,61	0,608	0,143
	visuell	16	0,25	0,683	0,171
9DZv – Korrektheit	analytisch	18	0,89	0,323	0,076
	visuell	23	0,78	0,518	0,108
10ZOf – Korrektheit	analytisch	13	0,62	0,768	0,213
	visuell	21	0,24	0,539	0,118

Tab. 6.7.: Aufgabenbezogene Mittelwerte der Gymnasiasten zur Korrektheit der Lösungen

Trotzdem bleiben die Tendenzen, dass *match-Aufgaben* erfolgreicher gelöst werden als *mismatch-Aufgaben* auch bei gymnasialen Schülern bestehen, ebenso wie die Tatsache, dass auch hier die beiden Aufgaben, die diesem Trend nicht folgen, visuell ausgerichtete Aufgaben sind.

Entsprechend ist Tab. 6.7. zu entnehmen, dass die Aufgaben zur Innenwinkelsumme und Silverstone erfolgreicher von Analytikern bearbeitet wurden als von Schülern mit visuellem Denkstil (die mittleren Differenzen betragen hier 0,02 und 0,11). Allerdings zeigt der entsprechende Signifikanzwert von $p = 0{,}924$ (siehe Anhang A-4.5., S.A-21), dass dies Ergebnis nicht für die

Grundgesamtheit angenommen werden kann. Lediglich der Mittelwertunterschied der Aufgabe zur Innenwinkelsumme im Fünfeck ist signifikant ($p = 0{,}004$), während die übrigen Aufgaben bei Werten von $0{,}113 \leq p \leq 0{,}924$ liegen.

		Aufgaben	
		match	mismatch
Denkstil	analytisch	0,5961	0,7471
	visuell	0,7457	0,3484

Tab. 6.8.: Mittlerer Erfolg beim Lösen von Aufgaben

Insgesamt lässt sich feststellen, dass sich zwar durchaus Tendenzen in der Bearbeitung zeigen, die darauf schließen lassen, dass der Denkstil einen Einfluss auf das Aufgabenempfinden sowie das korrekte Lösen der Aufgaben hat, diese sich in den unterschiedlichen Denkstilen jedoch nicht in vergleichbarer Weise äußern. Vielmehr zeigen sich Analytiker bei der Aufgabenbearbeitung von *mismatch-Aufgaben* erfolgreicher als bei ihren *match-Aufgaben*, während visuelle Denker, entsprechend der Grundannahme, *match-Aufgaben* erfolgreicher bearbeiten als formal-analytische Aufgaben (vgl. Tab. 6.8.).

6.2. Fallübersicht

Wie im vorangegangenen Abschnitt des Kapitels verdeutlicht wurde, konnte die Annahme, dass Analytiker Schwierigkeiten mit dem visuellen Arbeiten haben und umgekehrt nicht uneingeschränkt bestätigt werden. Die eingehenderen Analysen der konkret gezeigten Aufgabenbearbeitungen ergeben dabei Unterschiede, die auf verschiedene Typen bezüglich des Löseverhaltens schließen lassen. Es lassen sich insgesamt vier Typen identifizieren, die sich aus ihrem Vorgehen beim Lösen *match-* und *mismatch-Aufgaben* konstituieren.

		match-Aufgaben	
		aufgabenadäquate Bearbeitung	schlingernde Bearbeitung
mismatch-Aufgabe	aufgabenadäquate Bearbeitung	Typ I	Typ III
	schlingernde[38] Bearbeitung	Typ II	Typ IV

Tab. 6.9.: Dimensionierung der Kategorien zur Typenbildung (vgl. Kapitel 5.7.1., Tab. 5.11.)

Basierend auf den in Kapitel 5.7.1. ausführlich dargelegten Dimensionierungen der Bearbeitungen der Schüler wird im Nachfolgenden nur noch kurz auf die verwendete Analysemethode eingegangen, um die angeführten verkürzten Fallübersichten (für die kompletten Fallübersichten siehe Anhang A-5., S.A-23ff) verständlich zu machen.
Für die Erstellung der Fallübersichten wurden hier zunächst die Aufgaben nach *match-* und *mismatch-Aufgaben* umsortiert, sodass sich anschließend entsprechend den ebenfalls in Kapitel 5.7.1. vorgestellten Gruppierungen (siehe hierzu die Abb. 6.1. unten) nachfolgend die farblichen Differenzierungen der Codes ergeben.

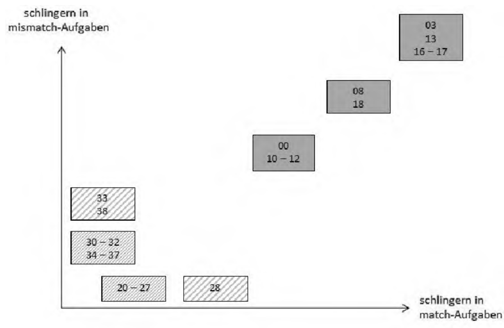


Abb. 6.1.: Verortung der Codierungen entlang der Dimensionen match- und mismatch-Aufgaben (vgl. Kapitel 5.7.1., Abb. 5.9.)

[38] Schlingern als Begriff aus der Schifffahrt für eine Bewegung des Schiffs um alle drei Achsen, bedeutet in diesem Zusammenhang, dass der Schüler nicht weiß, wie er die Aufgabe lösen kann, weshalb die Bearbeitung mehrere Lösungsversuche oder Lösungswege beinhaltet.

Dabei handelt es sich bei den graugefärbten Codegruppen um jene Aufgaben, die unabhängig vom *match* oder *mismatch* der Aufgaben auf Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe hinweisen. Die grau schraffierten Codegruppen kategorisieren eine aufgabenadäquate Bearbeitung entsprechend ihrer Verortung entlang der Achsen. Dementsprechend zeigen die Codes 20 bis 27 und 28 in *match-Aufgaben* zwar durchaus ein angemessenes Löseverhalten, jedoch deuten sie in *mismatch-Aufgaben* auf Schwierigkeiten beim Bearbeiten hin. Abschließend werden die entsprechenden Subkategorien nach den in den Aufgabengruppen mehrheitlich vorliegenden Bearbeitungen mit *schlingernde* oder *aufgabenadäquate* Vorgehensweise betitelt.

Die dargestellte Fallauswahl der bevorzugt analytisch denkenden Schüler zeigt auf, dass die Schüler innerhalb der *match-* und *mismatch*-Aufgaben ganz unterschiedlich versuchen zu Lösungen zu kommen. Der dabei hervorgehobene Unterschied zwischen einer aufgabenadäquaten Bearbeitung (in der Tabelle hellgrau schraffiert), also einer Vorgehensweise, die die entsprechende Aufgabe nahelegt, und einer irgendwie andersgearteten Bearbeitung (in der Tabelle grau gefüllt), zeigen die Schwierigkeiten, die einige Schüler hatten, die Aufgaben wie vorgesehen zu lösen. Daran angeknüpft wurden die jeweiligen Aufgabenblöcke (*match* und *mismatch*) daraufhin analysiert, welches Label anhand der mehrheitlichen Vergabe der Codegruppen zu vergeben ist.
Auf diese Weise ergeben sich für jeweils ein Label für *match-Aufgaben* und eines für *mismatch-Aufgaben*, die in ihrer Kombination den jeweiligen Typ ausmachen (letzte Spalte der Tab. 6.10.).

Fall	Taschen-geld	Möndchen	Regen-tonne	Seil um Äquator	Fakultäten	Label	Sparlineal	House of Dots	Streich-hölzchen	Innenwin-kel	Silver-stone	Label	Typ
A21[39]	00	18	00	00	08	schlingernd	12	35	32	17	35	adäquat	Typ III
A22	25	18	25	12	00	schlingernd	12	35	35	11	35	adäquat	Typ III
A23	25	00	25	25	12	adäquat	35	35	35	17	35	adäquat	Typ I
A24	22	00	25	20	28	adäquat	12	12	12	17	35	schlingernd	Typ II
A25	25	17	25	25	00	adäquat	12	17	30	34	35	adäquat	Typ I
A26	11	11	25	12	25	schlingernd	12	35	32	17	35	adäquat	Typ III
A27	20	00	20	25	25	adäquat	35	35	00	12	35	adäquat	Typ I
A28	25	00	18	12	28	schlingernd	12	17	35	17	30	schlingernd	Typ IV

Tab: 6.10.: Exemplarische Fallauswahl der Analytiker

Die Umkehrung von *match-* und *mismatch-Aufgaben* bereits in der Tabelle berücksichtigt, ergibt sich bei identischem Vorgehen ein ganz ähnliches Bild in den entsprechenden Fallübersichten der Schüler mit visuellem Denkstil.

Fall	Sparlineal	House of Dots	Streich-hölzchen	Innenwin-kel	Silver-stone	Label	Taschen-geld	Möndchen	Regen-tonne	Seil um Äquator	Fakultäten	Label	Typ
V33	25	25	25	24	20	adäquat	35	20	35	17	35	adäquat	Typ I
V34	20	25	25	28	20	adäquat	35	34	33	35	03	adäquat	Typ I
V35	20	25	25	16	25	adäquat	35	20	17	00	35	schlingernd	Typ II
V36	00	25	25	25	28	adäquat	34	34	30	00	33	adäquat	Typ I
V37	00	11	35	28	28	schlingernd	30	24	35	00	12	schlingernd	Typ IV
V38	25	17	12	10	20	schlingernd	12	12	12	10	03	schlingernd	Typ IV
V39	25	25	28	18	25	adäquat	00	00	03	20	03	schlingernd	Typ II
V40	25	24	25	08	28	adäquat	11	03	00	00	03	schlingernd	Typ II
V41	12	25	20	20	20	adäquat	35	11	33	11	13	schlingernd	Typ II
V42	25	25	12	28	25	adäquat	35	00	12	00	03	schlingernd	Typ II
V43	12	08	12	28	28	schlingernd	34	00	03	00	03	schlingernd	Typ IV

Tab. 6.11.: Exemplarische Fallauswahl der visuellen Denker

Anhand der beiden Fallübersichten ist ersichtlich, dass sowohl beim analytischen als auch beim visuellen Denkstil die unterschiedlichen Typen möglich sind, da bei beiden Denkstilen sowohl ein aufgabenadäquates Vorgehen als

[39] Für die hier angeführte Tabelle wurden auf die zusätzlichen Informationen in der jeweiligen Fallbezeichnung verzichtet, um so die Lesbarkeit der Tabelle zu erhöhen.

auch eine schlingernde Bearbeitung beobachtbar ist. Hierbei bleibt jedoch zunächst die Frage unberührt, inwieweit sich die unterschiedlichen Kombinationsmöglichkeiten, wie sie oben (vgl. Tab. 6.9.) aufgeführt sind, auftreten.
Die gesonderte Auszählung der Kombinationsmöglichkeiten zeigt dabei, dass die vier Typen in der vorliegenden Stichprobe nicht gleichverteilt sind. Vielmehr wird sichtbar, dass die Mehrheit der Schüler Typ II angehört und damit die vorab immer wieder erwähnte Grundannahme, dass Schüler mit *match-Aufgaben* weniger Schwierigkeiten haben als mit *mismatch-Aufgaben* auf mehr als die Hälfte (53,7 %) aller befragten Schüler zutrifft. Dennoch zeigen daneben etwa ein Drittel der Schüler (30,55 %) keine Schwierigkeiten beim Vorgehen mit *match-* wie auch *mismatch-Aufgaben*.

		Denkstil		Gesamt
		analytisch	visuell	
Typ	adäquat – adäquat (Typ I)	12,04	17,59	30,55
	adäquat – schlingernd (Typ II)	9,26	45,37	53,70
	schlingernd – adäquat (Typ III)	6,48	0,00	6,48
	schlingernd – schlingernd (Typ IV)	3,70	5,56	9,26
Gesamt		31,48	68,52	100,00

Tab. 6.12: Prozentuale Verteilung der unterschiedlichen Typen

Darüber hinaus zeigt sich diese Ungleichverteilung auch innerhalb beider Denkstile. Besonders auffällig scheint hierbei, dass, obwohl eine homogenere Verteilung bei den Analytikern beobachtbar ist, Typ I die größte Gruppe darstellt (38,24 %), während die stärkste Gruppe innerhalb des visuellen Denkstils Schüler des Typ II ausmacht (66,22 %).

		Denkstil		Gesamt
		analytisch	visuell	
Typ	adäquat – adäquat (Typ I)	38,24	25,68	30,55
	adäquat – schlingernd (Typ II)	29,41	66,22	53,7
	schlingernd – adäquat (Typ III)	20,59	0,00	6,48
	schlingernd – schlingernd (Typ IV)	11,76	8,11	9,26
Gesamt		100,00	100,00	100,00

Tab. 6.13.: Prozentuale Verteilung der Typen innerhalb der beiden Denkstile

Das bedeutet, dass ein Großteil der bevorzugt visuell denkenden Schüler Schwierigkeiten dabei hat, sich in *mismatch-Aufgaben* aufgabenadäquate Vorgehensweisen zu finden. Dies soll jedoch nicht bedeuten, dass visuelle Denker häufiger entsprechende Aufgaben abbrechen, denn tatsächlich lässt sich durchaus ein Bemühen, die Aufgaben irgendwie anders zu lösen, erkennen.

6.2.1. Darstellung von Fallbeispielen

Die Auswahl der hier dargestellten Fälle wurde nach den Grundsatz der Diversität getroffen, um daran Unterschiede innerhalb des Typs hervorzuheben, die anhand der vorliegenden Ergebnisse zwar angenommen werden könnten, sich jedoch nicht generalisieren lassen. Dementsprechend wird innerhalb jeden Typs je ein visueller Denker und ein Analytiker vorgestellt.
Hierbei werden zunächst einige grundsätzliche Informationen zu den betreffenden Schülern und ihren Denkstilen gemacht, um anschließend erst ihr Vorgehen in den jeweiligen *match-Aufgaben* und dann ihre *mismatch-Aufgaben* zu analysieren und zu kommentieren.[40]

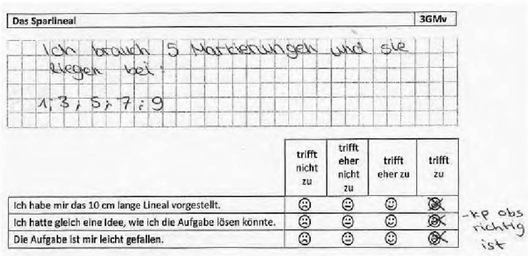
[40] Nicht alle Bearbeitungen sind in den folgenden Abschnitten abgebildet. Zur vollständigen Darstellung der Bearbeitungen der Schüler, siehe Anhang A-6, S.A-28ff.

6.2.1.1. Typ I: V66-Gy32-W00A und A18-Gy32-M11D

Anastasia Fondant[41] ist zum Zeitpunkt der Erhebung 14 Jahre und besucht die neunte Klasse eines Hamburger Gymnasiums Bezüglich der Mathematik gibt sie an, dass sie sie eher nicht mag und auch eher nicht gut in dem Fach ist.

In den Aussagen zu ihrem Denkstil positioniert sie sich eindeutig auf Seiten des visuellen Denkens, indem sie deutlich Zustimmung zu bildhaften Erklärungen und visuellen Lösungen zeigt, während sie ebenso deutlich Aussagen ablehnt, die ein Verständnis durch Variablen und Formeln betreffen.

Sowohl in den *match-Aufgaben* als auch in den *mismatch-Aufgaben* zeigt *Anastasia Fondant* ein überwiegend aufgabenadäquates Vorgehen, was darauf schließen lässt, dass sie keine übermäßigen Schwierigkeiten mit den Aufgaben beider Denkstile hat. So zeigt sie in den visuell-bildlich ausgerichteten Aufgaben eine entsprechend visuell ausgerichtete Bearbeitung, was lediglich in Aufgabe 3GMv (Das Sparlineal) nicht eindeutig bestätigt werden konnte.


Das Sparlineal | 3GMv

Ich brauch 5 Markierungen und sie liegen bei:
1; 3; 5; 7; 9

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Ich habe mir das 10 cm lange Lineal vorgestellt.	☹	😐	☺	~~☺~~
Ich hatte gleich eine Idee, wie ich die Aufgabe lösen könnte.	☹	😐	☺	~~☺~~
Die Aufgabe ist mir leicht gefallen.	☹	😐	☺	~~☺~~

- kp obs richtig ist

Abb. 6.2.: *Anastasia Fondants* Bearbeitung des Sparlineals

Wie in der Abbildung ersichtlich, präsentiert *Anastasia Fondant* eine Lösung, ohne dass sie ihren Lösungsweg schildert. Aus diesem Grund ist anhand der Bearbeitung allein nicht eindeutig zu bestimmen, wie sie vorgegangen ist.

[41] Die hier verwendeten Namen der Schüler haben sie sich im Rahmen der Studie selbst gegeben. Auf diese Weise wurde zum einen der Anonymisierung Rechnung getragen und zum anderen ein positiver Einstieg in den Fragebogen geschaffen.

Lediglich ihre Zustimmung zu der Aussage, dass sie sich das Lineal vorgestellt hat, könnte als Hinweis auf ein visuell-bildliches Vorgehen gedeutet werden.

Demgegenüber ist die Aufgabe House of Dots eindeutig in einem visuell-bildlichen Stil von *Anastasia Fondant* bearbeitet worden. Dies zeigt sich in der angefertigten Zeichnung sowie in den direkt darauf bezogenen Erklärungen, wie sich das vierte Haus aufbaut. Bestätigt wird dies darüber hinaus durch ihre Angabe in der begleitenden Frage, ob sie die Regel anhand der Abbildung gefunden hat. Die Streichhölzchen-Aufgabe bearbeitet sie ebenfalls visuell-bildlich, indem sie einzelne Möglichkeiten die Hölzchen zu arrangieren aufzeichnet und so zu ihrem Ergebnis kommt. Trotzdem gibt sie in den begleitenden Fragen an, dass sie sich die Hölzchen nicht so gut vorstellen konnte und ihr die Aufgabe insgesamt schwerfiel. Dennoch kann hier von einem visuell-bildlichen Zugang gesprochen werden, sodass sie ein aufgabenadäquates Verhalten beim Lösen zeigt, und die übrigen *match-Aufgaben* bestätigen das.
Auch wenn die Argumentation in der Innenwinkel-Aufgabe von *Anastasia Fondant* zweigeteilt wirkt, lässt sich ein zunächst visueller Zugang erkennen. Hierbei gibt sie explizit an, dass sie sich die Hilfslinien vorher überlegt hat, so dass ihr Ansatz klar als visuell-bildlich einzustufen ist. Daraufhin folgt jedoch eine Argumentation, die nur schwer in Zusammenhang mit der Zeichnung gebracht werden kann, trotzdem aber auf einem visuellen Niveau argumentiert.

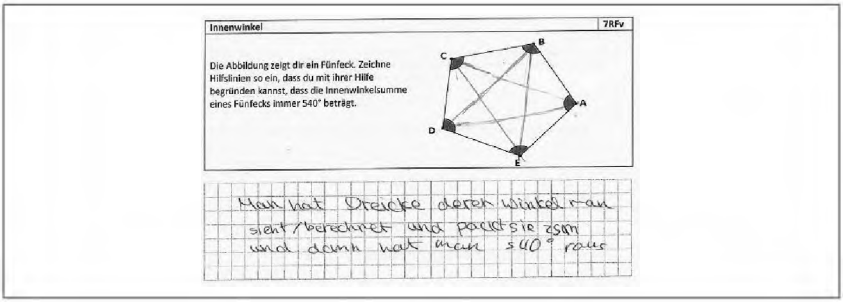


Abb. 6.3.: Visuell-bildliche und damit aufgabenadäquate Bearbeitung von *Anastasia Fondant*

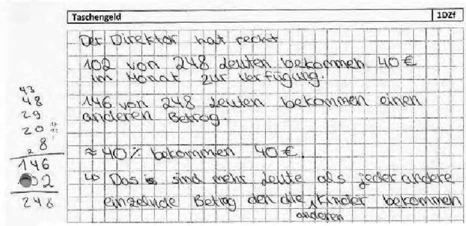
In Aufgabe 9DZv (Silverstone) wurde mit der Zeichnung eines Koordinatensystems begonnen, die Bearbeitung jedoch abgebrochen bevor die der Geschwindigkeit übertragen wurde. Interessant bei dieser Aufgabe ist jedoch, dass *Anastasia Fondant* Schwierigkeiten bei der Anfertigung der Zeichnung einräumt. Dies kann jedoch damit zusammenhängen, dass solche Aufgaben im Unterricht bisher nicht gelöst wurden, wie sie selbst angibt.

match-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Sparlineal	uneindeutiges Vorgehen mit Hinweisen auf visuelle interne Repräsentation
House of Dots	visuell-bildliche Beschreibung anhand der eigenen Zeichnung
Streichhölzchen	visuell-bildliche Bearbeitung der Aufgabe
Innenwinkelsumme	visuelle Argumentation losgelöst vom visuellen Ansatz
Silverstone	visueller Ansatz

Tab. 6.14.: Zusammenfassende Übersicht von *Anastasia Fondants* Bearbeitungen der *match-Aufgaben*

Es bestätigt sich folglich die eingangs genannte Behauptung, dass *Anastasia Fondant* als charakteristische visuelle Vertreterin des Typ I in *match-Aufgaben* eine mehrheitlich aufgabenadäquate Vorgehensweise offenbart. Ebenso verhält es sich in den *mismatch-Aufgaben*, wie folgend aufgezeigt wird.

Anastasia Fondants Bearbeitung der Taschengeld-Aufgabe zeigt ein formal-analytisches Vorgehen, das sich in der Rechnung der Schülerzahl sowie in der Bestimmung des prozentualen Anteils manifestiert. Und auch, wenn *Anastasia Fondant* auf diese Wiese den bewusst irreführenden Aspekt der Formulierung prüft und somit die eigentliche Frage nicht beantwortet, ist ihre Bearbeitung als aufgabenadäquat anzusehen.



Taschengeld | 1DZf

Der Direktor hat recht

102 von 248 Leuten bekommen 40€ im Monat zur Verfügung.

146 von 248 Leuten bekommen einen anderen Betrag.

≈ 40% bekommen 40€.

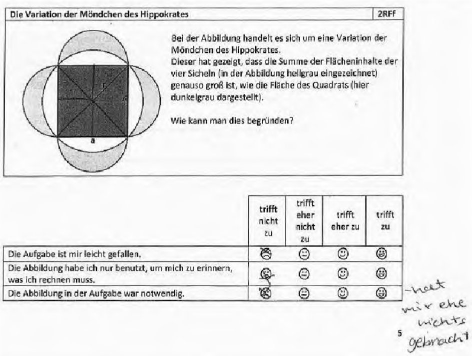
↳ Das is sind mehr Leute als jeder andere einzelnde Betrag den die anderen Kinder bekommen

43
48
29
20
8
146
102
248

Abb. 6.4.: *Anastasia Fondants* Bearbeitung der Taschengeldaufgabe

Anders verhält es sich bei der Aufgabe zu den Möndchen des Hippokrates. Hier wählt *Anastasia Fondant* einen visuell-bildlichen Ansatz, der sich in der bildlichen Zerlegung des Quadrats innerhalb der Abbildung zeigt. Darüber hinaus ist jedoch keine Bearbeitung ersichtlich.

Die begleitenden Fragen enthalten daneben jedoch widersprüchlich erscheinende Aussagen. So gibt *Anastasia Fondant* an, dass sie die Zeichnung zu mehr genutzt hat als sich nur daran zu erinnern, was sie rechnen musste, was die eingezeichneten Hilfslinien bestätigen. Daneben gibt sie jedoch ebenfalls an, dass die Abbildung nicht notwendig war. Lediglich ihr ergänzender Kommentar dazu lässt vermuten, dass sie den Wert der Zeichnung für ihre Bearbeitung nicht richtig einschätzt, da sie in ihrem Lösungsprozess nicht weitgenug vorangekommen ist.



Die Variation der Möndchen des Hippokrates | 2RFf

Bei der Abbildung handelt es sich um eine Variation der Möndchen des Hippokrates.
Dieser hat gezeigt, dass die Summe der Flächeninhalte der vier Sicheln (in der Abbildung hellgrau eingezeichnet) genauso groß ist, wie die Fläche des Quadrats (hier dunkelgrau dargestellt).

Wie kann man dies begründen?

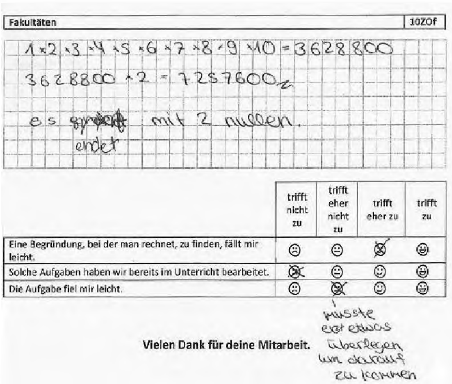
	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Die Aufgabe ist mir leicht gefallen.	☹	😐	☺	😀
Die Abbildung habe ich nur benutzt, um mich zu erinnern, was ich rechnen muss.	☹	😐	☺	😀
Die Abbildung in der Aufgabe war notwendig.	☹	😐	☺	😀

– hat mir eh nichts gebracht

5

Abb. 6.5.: *Anastasia Fondants* visueller Ansatz in einer *mismatch-Aufgabe*

Das Füllen der Regentonne als weitere *mismatch-Aufgabe* löst *Anastasia Fondant* mit einem formal-analytischen Vorgehen, der sich in der Anwendung der abgebildeten Formel zeigt. Allerdings gibt sie in den begleitenden Fragen auch an, dass sie sich die Situation erst vorstellen musste. Und auch die formal-analytisch ausgerichtete Aufgabe Seil um Äquator weist bei ihr einen aufgabenadäquaten Ansatz auf, den sie jedoch nicht weiter verfolgt, sondern stattdessen einfach eine Lösung präsentiert, von der unklar ist, wie sie auf diese gekommen ist.
Anders in Bezug auf die Herkunft ihrer Lösung verhält es sich bei der Fakultäten-Aufgabe, in der *Anastasia Fondant* ihr formal-analytisches Vorgehen explizit darlegt. Sie verwendet dabei zunächst die korrekte Interpretation der Fakultät, um so 10! als Zwischenergebnis zu bestimmen, um entsprechend der allgemeinen Multiplikationsregeln das Ergebnis für 20! zu nutzen.


Fakultäten | 10ZOf

1×2 ×3 ×4 ×5 ×6 ×7 ×8 ×9 ×10 = 3628800
3628800 ×2 = 7257600
es ~~[illegible]~~ endet mit 2 nullen.

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Eine Begründung, bei der man rechnet, zu finden, fällt mir leicht.	☹	😐	X	😃
Solche Aufgaben haben wir bereits im Unterricht bearbeitet.	X	😐	🙂	😃
Die Aufgabe fiel mir leicht.	☹	X	🙂	😃

musste erst etwas überlegen um darauf zu kommen

Vielen Dank für deine Mitarbeit.

Abb. 6.6.: Bearbeitung von *Anastasia Fondant* mit Einräumen der Schwierigkeit bei rechnerischen Begründungen

Sie kommentiert entsprechend selbstbewusst in den begleitenden Fragen, dass ihr die Aufgabe zunächst eher schwierig erschien, sie jedoch eher kein Problem mit der rechnerischen Begründung hatte.
Entsprechend ergibt die Kurzbeschreibung des Bearbeitungsverhaltens von *Anastasia Fondant*:

mismatch-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Taschengeld	formal-analytisches Argumentieren
Möndchen des Hippokrates	Ansätze eines visuell-bildlichen Vorgehens
Füllen der Regentonne	formale Bearbeitung mit Nutzung der angegebenen Formel
Seil um den Äquator	formal-analytischer Ansatz, dem plötzlich eine Lösung folgt
Fakultäten	formal-analytisches Vorgehen

Tab. 6.15.: Kurzbeschreibung von *Anastasia Fondants* Bearbeitungen der *mismatch-Aufgaben*

Das bestätigt, dass *Anastasia Fondant* auch in den *mismatch-Aufgaben* so arbeitet, wie die Aufgaben es nahelegen, weshalb über den Aufgabentyp hinweg von einer aufgabenadäquaten Bearbeitung gesprochen werden kann. Darüber hinaus zeigen ihre Mittelwertvergleiche, dass sie Aufgaben, die ihrem eigenen Denken entsprechen, auch als leichter empfindet, wenn auch nur geringfügig (Mittelwerte von 1,6 zu 1,4 bei einer Skalierung von 0 bis 3). Zudem werden *match-Aufgaben* von ihr deutlich richtiger gelöst als Aufgaben, die nicht ihrem Denken entsprechen. Entsprechend steht der Mittelwert 1,0 (richtige Idee) bei *match-Aufgaben* einem Mittelwert von 0,25 bei *mismatch-Aufgaben* auf einer dreistufigen Skala (0 bis 2) gegenüber.

Typ I konnte darüber hinaus ebenfalls bei den Analytikern rekonstruiert werden, was an der folgenden Analyse des Schülers, der sich *Fliegerkönig* genannt hat, verdeutlicht wird.

Fliegerkönig besucht die gleiche Klasse wie *Anastasia Fondant* und ist ebenfalls 14 Jahre zum Zeitpunkt der Erhebung. Jedoch zeigt seine Selbstauskunft, dass er Mathematik ohne Einschränkungen mag und auch, dass er gut in dem Fach ist.
Insbesondere in Aussagen, die den analytischen Denkstil betreffen, macht er deutlich, dass er Mathematik vor allem durch Variablen und Formeln versteht und er auch in seinem Lösungsverhalten bevorzugt auf Formeln zurückgreift. Dennoch sieht er Mathematik nicht als das Behalten und Anwenden von Definitionen und Formeln an, sondern erkennt ihre Bedeutung für

den Alltag und den Fortschritt, sodass nicht verwunderlich ist, dass Mathematik für ihn zu den wichtigsten Dingen gehört.

Neben seiner allgemein positiven Einstellung zur Mathematik zeigt sich in seinen Aufgabenbearbeitungen eine Flexibilität, die es ihm ermöglicht, sowohl *match-* als auch *mismatch-Aufgaben* aufgabenadäquat zu lösen. Auch wenn dies nicht per se zu richtigen Ergebnissen führt.
So beginnt *Fliegerkönig* seine Bearbeitung der Taschengeld-Aufgabe richtig mit der Bestimmung der durchschnittlichen Höhe des Taschengelds, ändert jedoch sein Vorgehen und bezieht sich im zweiten Teil seiner Bearbeitung auf den, vom Direktor angesprochenen Aspekt, wie viel Taschengeld die meisten Schüler bekommen. Trotz dieses Strategiewechsels ist diese Aufgabe als formal-analytisch bearbeitet anzusehen, da die zweite Bearbeitung auf eine Neuinterpretation des Aufgabentextes und der damit einhergehenden Frage zurückzuführen ist.

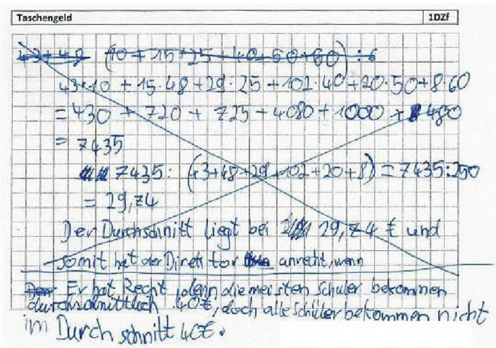
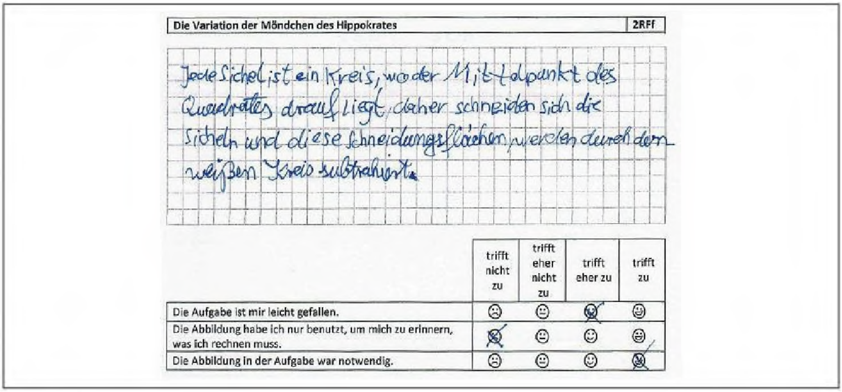


Abb. 6.7.: Taschengeld-Bearbeitung von *Fliegerkönig*

Mit Aufgabe 2RFf hat *Fliegerkönig* dann jedoch Schwierigkeiten, was sich daran zeigt, dass seine Aufgabenbearbeitung nicht dem nahegelegten Weg folgt, sondern er sich bemüht eine irgendwie geartete Lösung zu finden. Aus diesem Grund führt er den Beginn einer Argumentation an, die auf visuell-bildlichen Elementen basiert, indem er Teile der Abbildung beschreibt und sie in einen Zusammenhang stellt.



Die Variation der Möndchen des Hippokrates	2RFf

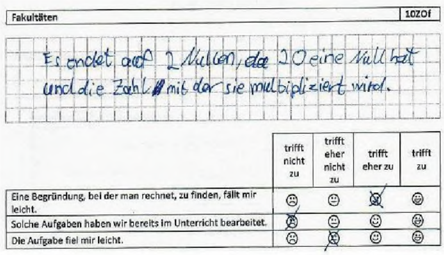
Jede Sichel ist ein Kreis, wo der Mittelpunkt des Quadrates drauf liegt, daher schneiden sich die Sicheln und diese Schneidungsflächen werden durch den weißen Kreis subtrahiert.

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Die Aufgabe ist mir leicht gefallen.	☹	😐	X	☺
Die Abbildung habe ich nur benutzt, um mich zu erinnern, was ich rechnen muss.	X	😐	☺	☺
Die Abbildung in der Aufgabe war notwendig.	☹	😐	☺	X

Abb. 6.8.: *Fliegerkönigs* Argumentation in der *match-Aufgabe* 2RFf

Dazu passend gibt er in den begleitenden Fragen an, dass er die Abbildung in der Aufgabe für notwendig erachtet und diese nicht nur dafür benutzt, um sich an die Rechnungsschritte zu erinnern (vgl. Abb. 6.8.).

Den begleitenden Fragen der Aufgabe zum Füllen der Regentonne ist zu entnehmen, dass *Fliegerkönig* sich die Situation nicht erst vorstellen musste, stattdessen beginnt er, indem er die angegebene Formel richtig verwendet und auch das korrekte Volumen der Tonne bestimmt. Jedoch zeigt er beim Umrechnen in eine andere Einheit Unsicherheiten, weshalb er von einer weiteren Bearbeitung (Aufgabenteil b)) absieht.
Genauso die Seil um den Äquator-Aufgabe. Sie enthält zunächst einen formal-analytischen Ansatz, der vom *Fliegerkönig* jedoch abgebrochen wurde, woraufhin direkt eine Lösung angegeben wird, von der nicht ersichtlich ist, wie diese zustande gekommen ist. Vielmehr scheint sie aus einer intuitiven Überzeugung heraus gegeben worden zu sein.



Fakultäten				10ZOf

Es endet auf 2 Nullen, da 10 eine Null hat und die Zahl mit der sie multipliziert wird.

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Eine Begründung, bei der man rechnet, zu finden, fällt mir leicht.				
Solche Aufgaben haben wir bereits im Unterricht bearbeitet.				
Die Aufgabe fiel mir leicht.				

Abb. 6.9.: *Fliegerkönigs* formal-analytische Argumentation in der Fakultäten-Aufgabe

Wie Abb. 6.9. zeigt, handelt es sich bei *Fliegerkönigs* Bearbeitung der Fakultäten-Aufgabe um eine Argumentation, die sich auf formal-analytische Elemente stützt, die hier durch die Stützung anhand von Multiplikationsregeln zum Ausdruck kommen. Darüber hinaus gibt er an, dass ihm rechnerische Begründungen zu finden, eher leicht fallen, obwohl ihm speziell die Fakultäten-Aufgabe eher nicht leichtfiel. Trotzdem kann hier von einem für die Aufgabe adäquates Lösungsverhalten gesprochen werden.

Und auch in den *mismatch-Aufgaben* zeigt *Fliegerkönig* ein zumeist aufgabenadäquates Vorgehen. So gibt er seine korrekten Markierungen auf dem Sparlineal konkret auf einer entsprechend angefertigten Skizze an und bestätigt in den begleitenden Fragen, dass er sich das Sparlineal vorgestellt hat. Doch besonders deutlich wird sein aufgabenadäquates Handeln in der Aufgabe zum House of Dots.

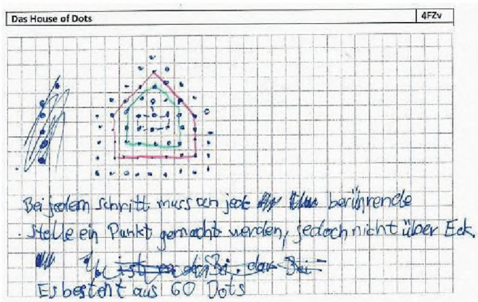


Abb. 6.10.: *Fliegerkönigs* ausführliche visuell-bildliche Bearbeitung des House of Dots

Ziel dieser Aufgabe, ohne dass es explizit gesagt wurde, war anhand einer Zeichnung die Zählstrategie zu verdeutlichen, um mit ihr die Anzahl der Punkte zu bestimmen, aus der das vierte Haus besteht (vgl. Kapitel 5.4.1). Die Bearbeitung von *Fliegerkönig* macht genau dies deutlich. Visuell-bildlich verdeutlicht er sein Vorgehen, indem er die vorangegangenen Häuser in dem jeweils folgenden zeichnerisch darstellt. Entsprechend überträgt er seine Methode auf seine Zeichnung des vierten Hauses und unterstützt dies verbal durch die darauf bezogene Beschreibung.

Genauso verhält es sich mit der Streichholz- und der Innenwinkel-Aufgabe. In beiden Aufgaben zeigt *Fliegerkönig* deutlich ein entsprechend visuell-bildliches Vorgehen, indem er die Streichholzkombinationen konkret aufzeichnet und an der Anzahl seiner Zeichnungen seine Lösung abliest.

Bei der Innenwinkelsumme des Fünfecks zeichnet er zwei Hilfslinien so ein, dass drei Dreiecke entstehen, die er mit jeweils 180° beschriftet, abgesehen davon findet sich kein erklärender Text im Freifeld. Wohl aber gibt *Fliegerkönig* in den begleitenden Fragen an, dass er sich die Hilfslinien vorher überlegt hat und ihm die bildliche Begründung leichtfiel. Eine solche Bearbeitung im Zusammenhang mit den entsprechenden Begleitfragen, verdeutlicht zudem, dass er seine beschriftete Zeichnung für derart aussagekräftig erachtet, dass keine weitere Erklärung nötig ist.

Wieder schwerer fiel ihm die Aufgabe um Silverstone, obwohl er auch hier eine visuell-bildliche und damit aufgabenkonforme Bearbeitung zeigt. Seine Angabe bezüglich seines Empfindens als eher schwere Aufgabe ist evtl. darauf zurückzuführen, dass solche Aufgaben laut begleitender Frage aus dem

Unterricht bisher nicht bekannt waren. Dennoch löst er die Aufgabe wie vorgesehen und weitestgehend richtig.

Bei der Gegenüberstellung sowohl der *match-* als auch der *mismatch-*Bearbeitungen vom *Fliegerkönig* ergeben sich folgende Übersichten:

match-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Taschengeld	formal-analytische Bearbeitung, gefolgt von einer Neuinterpretation der Frage
Möndchen des Hippokrates	visuelle Argumentation
Füllen der Regentonne	beginnt formal-analytisch, bricht dann jedoch ab
Seil um den Äquator	formal-analytische Idee, dann intuitive Lösung
Fakultäten	formal-analytisches Argumentieren

Tab. 6.16.: Übersicht der Bearbeitungen von *Fliegerkönig* in *match-Aufgaben*

mismatch-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Sparlineal	visuell-bildliche Lösung
House of Dots	ausführliche visuell-bildliche Bearbeitung
Streichhölzchen	zeichnerische Darstellung der Figuren
Innenwinkelsumme	ausreichende Erklärung anhand der Abbildung
Silverstone	Darstellung in einem korrekten Koordinatensystem

Tab. 6.17.: Kurzdarstellung von *Fliegerkönigs* Bearbeitungen in *mismatch-Aufgaben*

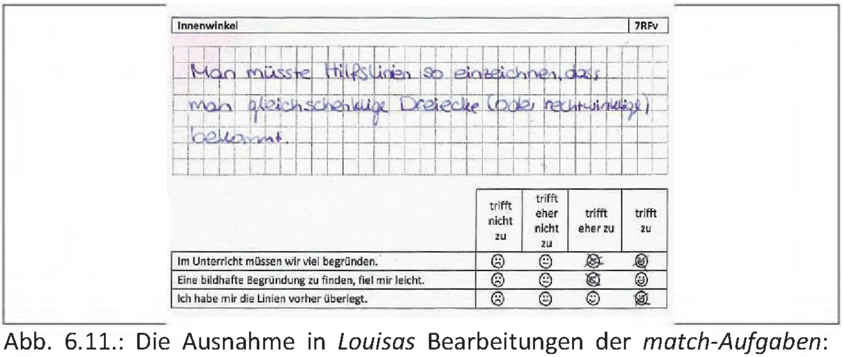
Der direkte Vergleich beider Übersichten lässt darauf schließen, dass *Fliegerkönig* unabhängig von dem der Aufgabe inhärenten Denkstil zur Lösung kommt, indem er keine Probleme zeigt, die auf seinen Denkstil zurückzuführen sind. Trotzdem zeigt ein Vergleich der Korrektheit sowie des Aufgabenempfindens, dass *Fliegerkönig* in *mismatch-Aufgaben* sowohl erfolgreicher ist, als auch, dass er diese als leichter empfindet.
Bezüglich der Korrektheit seiner Lösungen ergibt sich in *match-Aufgaben* ein Mittelwert von 0,4 auf der dreistufigen Skala, womit er noch unter einer richtigen Idee zur Lösung steht, während er in *mismatch-Aufgaben* mit einem Mittelwert von 0,8 häufig zumindest einen korrekten Ansatz zeigt.

Ebenso die Unterschiede im Aufgabenempfinden, in dem *Fliegerkönig* einen Mittelwert von 1,2 in Aufgaben zeigt, der dem eigenen Denken entsprechen und sie damit eher schwer findet, während er bei *mismatch-Aufgaben* einen Mittelwert von 2,4 erreicht, womit er entsprechende Aufgaben als eher leicht einstuft.

Entsprechend der beiden vorgestellten Fälle in Typ I zeigt sich deutlich, dass die vorgenommene Typisierung keinen Aufschluss darüber gibt, wie erfolgreich dieser Typ beim Lösen von *match-Aufgaben* ist, er gibt lediglich darüber Aufschluss, wie dieser Typ sich sowohl *match-* als auch *mismatch-Aufgaben* nähert.

6.2.1.2. Typ II: V4-GS12-W00D und A6-GS24-M21D

Louisa als visuelle Vertreterin des Typ II war zum Zeitpunkt der Erhebung 15 Jahre alt und besuchte eine Gesamtschule in Hessen. Sie gibt selbst an, dass sie Mathematik eher weniger mag und auch eher weniger gut kann.
Als visueller Denkstil stimmt sie Aussagen vorbehaltlos zu, die den Einsatz von Zeichnungen fordern, während sie einräumt, dass ihr der Umgang mit Variablen und Formeln eher nicht leichtfällt. Dennoch ist ihre Lösungsstrategie für eine Aufgabe, sich eine bekannte Formel zu suchen.


Innenwinkel 7RFv

Man müsste Hilfslinien so einzeichnen, dass man gleichschenklige Dreiecke (oder rechtwinklige) bekommt.

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Im Unterricht müssen wir viel begründen.				
Eine bildhafte Begründung zu finden, fiel mir leicht.				
Ich habe mir die Linien vorher überlegt.				

Abb. 6.11.: Die Ausnahme in *Louisas* Bearbeitungen der *match-Aufgaben*: visuell-bildliche Argumentation

Entsprechend dieses Typs zeigen sich in *Louisas* Bearbeitungen der *match-Aufgaben* überwiegend auch visuell-bildliches Lösungswege. So enthält die Aufgabe 3GMv eine Abbildung ihres Sparlineals mit gesetzten Markierungen, für das House of Dots wurde zunächst die Veränderungen beschrieben und anschließend eine Zeichnung des vierten Hauses angefertigt und auch das Koordinatensystem für Silverstone wurde skizziert. Und obwohl die Aufgaben mehrheitlich nicht richtig gelöst wurden, zeigen die begleitenden Fragen auf, dass *Louisa* die match-Aufgaben eher als leicht eingestuft hat. Dies deckt sich mit ihren Angaben in den Aussagen, die den Denkstil betreffen, in denen sie häufig angibt, dass sie keine Probleme mit visuellen Elementen der Aufgabe hat.
Zur Verdeutlichung sei hier auf Abb. 6.11. hingewiesen, in der das einzige Mal in den *match-Aufgaben* nicht visuell-bildlich gearbeitet wurde, sondern „lediglich“ visuell-bildlich argumentiert. Trotzdem ist auch in dieser Bearbeitung in den begleitenden Fragen zu erkennen, dass sie es eher leicht findet, eine visuell-bildliche Begründung zu finden.

match-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Sparlineal	visuell-bildliche Lösung
House of Dots	visuell-bildliche Bearbeitung
Streichhölzchen	zeichnerische Darstellung der Figuren
Innenwinkelsumme	visuell-bildliche Argumentation
Silverstone	visuell-bildliche Lösung

Tab. 6.18.: Übersicht von *Louisas* Vorgehensweise in *match-Aufgaben*

Entsprechend der Übersicht von *Louisas* Vorgehensweisen in *match-Aufgaben* zeigt sich eine grundsätzlich aufgabenadäquate Bearbeitung, anders als bei den *mismatch-Aufgaben*. Hier zeigt *Louisa* mehr Unsicherheit bei ihren Bearbeitungen, die sich häufiger auf oberflächliche Argumentationen stützen oder aber auf Elemente aus beiden Denkstilen zurückgreifen, wie die folgenden Beispiele demonstrieren.

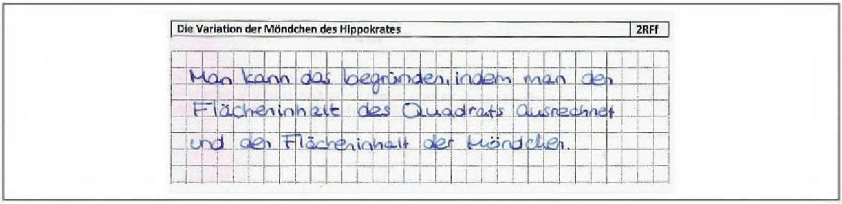


Abb. 6.12.: uneindeutige Selbstargumentation in der Bearbeitung von *Louisa*

Während *Louisa* in der Taschengeld-Aufgabe eine formal-analytische Bearbeitung zeigt, bemüht sie sich, die Aufgabe zu den Möndchen des Hippokrates argumentativ zu lösen. Bei der in dieser Aufgabe angeführten Argumentation handelt es sich mit ihren Bezügen auf ein rechnerisches Vorgehen zwar um eine eher formal-analytisch ausgerichtete Argumentation, jedoch ist dies im Zusammenhang mit dem Aufgabentext nicht mehr eindeutig zu bestimmen, da dies von der Fragestellung entsprechend vorgegeben wird. Es handelt sich folglich um eine nicht eindeutige Argumentation, die die Aufgabe selbst vorgibt und somit keine richtige Argumentation darstellt.

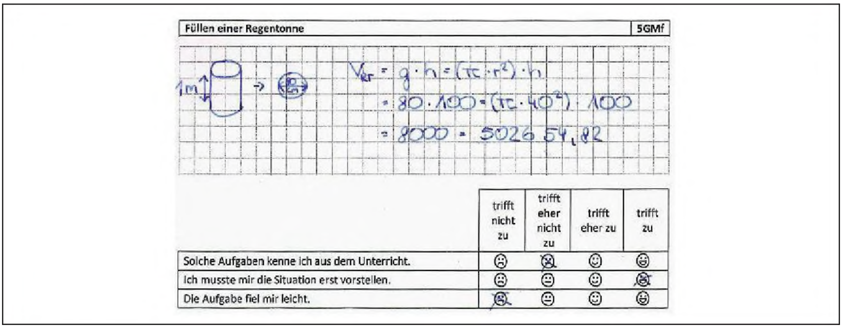
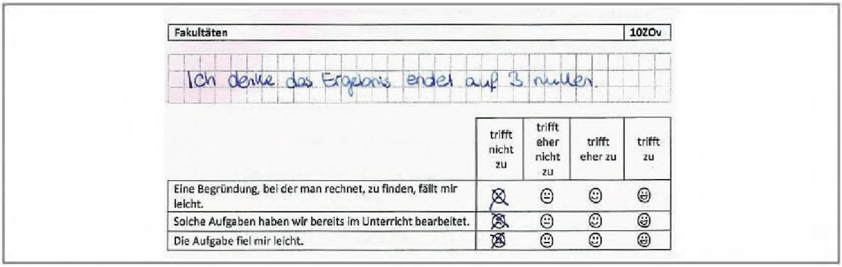


Abb. 6.13.: *Louisas* Bearbeitungen mit Elementen beider Denkstile

Die Bearbeitung der Regentonnen-Aufgabe zeigt deutlich, dass *Louisa* auf ihren eigenen Denkstil zurückgreift, um zu einer Lösung zu kommen. So findet sich in der Aufgabe als visuell-bildliches Element direkt eine Skizze, die die Maße der Regentonne zuordnet, genauso wie ihre Zustimmung zu der Aussage, dass sie sich die Situation zunächst vorstellen musste.
Und auch in der Äquator-Aufgabe zeigt *Louisa* eine Notwendigkeit für visuell-bildliche Elemente, die sie hier in Form eines Modells der Erde und dem da-

rum liegenden Seil deutlich macht. Nach der Vergegenwärtigung der Situation bricht sie die Bearbeitung jedoch ab, mit dem Hinweis aus den begleitenden Fragen, dass ihr die Aufgabe schwerfiel.


Fakultäten 10ZOv

Ich denke das Ergebnis endet auf 3 nullen.

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Eine Begründung, bei der man rechnet, zu finden, fällt mir leicht.	X			
Solche Aufgaben haben wir bereits im Unterricht bearbeitet.	X			
Die Aufgabe fiel mir leicht.	X			

Abb. 6.14.: *Louisas* Lösung der Fakultäten-Aufgabe

Louisas Bearbeitung der Fakultäten-Aufgabe zeigt ein weiteres Mal, dass sie Schwierigkeiten hat, *mismatch-Aufgaben* aufgabenadäquat zu lösen. Denn auch wenn ihre Vorgehensweise nicht ersichtlich ist, da sie direkt eine Lösung anbietet, zeigen sich diese in ihren Antworten auf die begleitenden Fragen. Hier gibt sie an, dass ihr die Aufgabe schwer gefallen ist und gibt mit ihrer Aussage, dass es ihr schwerfällt, rechnerische Begründungen zu finden, zudem einen Hinweis darauf, dass dies an ihrer bevorzugten Art des Denkens liegt.

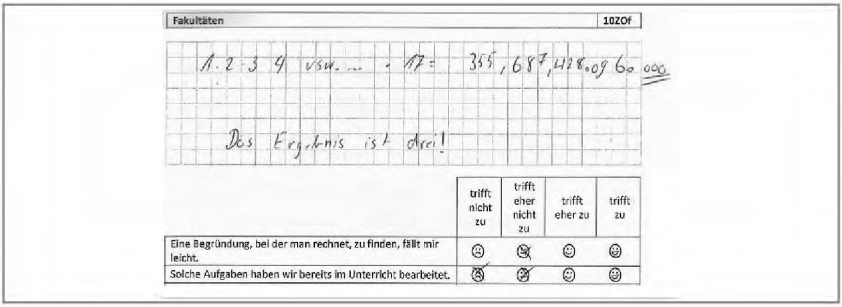
mismatch-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Taschengeld	formal-analytische Bearbeitung
Möndchen des Hippokrates	uneindeutig, da Selbstargumentation
Füllen der Regentonne	Elemente beider Denkstile
Seil um den Äquator	visuell-bildliche Elemente vor Abbruch
Fakultäten	uneindeutig, da lediglich ein Ergebnis genannt wird

Tab. 6.19.: Kurzdarstellung von *Louisas* Bearbeitungen in *mismatch-Aufgaben*

Tatsächlich zeigt sich auch im Mittelwertvergleich, dass *Louisa match-Aufgaben* sowohl leichter findet als auch, dass sie diese erfolgreicher löst. Hierbei ist besonders beeindruckend, dass ihr Aufgabenempfinden von 0,4 (findet die Aufgaben schwer) bei *mismatch-Aufgaben* einem Mittelwert von

1,8 (findet die Aufgaben eher leicht) gegenübersteht, obwohl sie nur unwesentlich erfolgreicher in *match-Aufgaben* ist (Mittelwert von 0,6 zu 0,4).

Megan Fox wird hier als Beispiel eines analytischen Denkers in Typ II herangezogen. Der niedersächsische Gesamtschüler war zum Zeitpunkt der Erhebung 15 Jahre alt und schwankt zwischen „Mag Mathematik eher nicht" und „Findet Mathematik okay", dennoch ist er bereit, Freizeit zu investieren, wenn er etwas Neues in Mathematik dazulernen kann. Der Aussage „Ich kann Mathematik" stimmt er allerdings nur „eher" zu.
Darüber hinaus zeigt sich eine Abneigungen bezüglich eines bildlichen Mathematikverständnisses in *Megan Fox'* Angaben zu seinem Denkstil, wohingegen er betont, dass ihm ein Umgang mit Variablen und Formeln leichtfällt.


Fakultäten 10ZOf

1 · 2 · 3 · 4 usw. ... · 17 = 355,687,428,096,000

Das Ergebnis ist drei!

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Eine Begründung, bei der man rechnet, zu finden, fällt mir leicht.				
Solche Aufgaben haben wir bereits im Unterricht bearbeitet.				

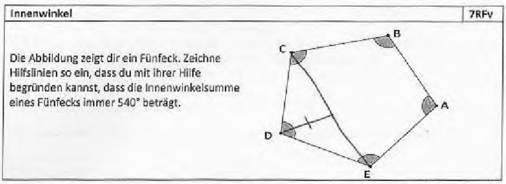
Abb. 6.15.: *Megan Fox'* Lösung der Fakultäten-Aufgabe

In seinen Bearbeitungen zeigt *Megan Fox* ein mehrheitlich aufgabenadäquates Vorgehen, insbesondere in den Aufgaben 1DZf (Taschengeld), 8FZf (Seil um den Äquator) sowie in der dargestellten Aufgabe 10ZOf (Fakultäten). Auffällig ist jedoch, dass er mithilfe seines rechnerischen Zugangs korrekt beginnt, jedoch im Laufe seiner Bearbeitung scheinbar das Ziel aus dem Blick verliert und deshalb zu einer falschen bzw. unvollständigen Lösung kommt. Dies wird auch an Abb. 6.15. deutlich, in der er das Ergebnis von 17! rechnerisch und damit formal-analytisch bestimmt, dieses „Zwischenergebnis" jedoch nicht weiter genutzt wird, um die gestellte Aufgabe zu lösen. Stattdessen nimmt er sein Ergebnis als das korrekte für diese Aufgabe an.
In den Aufgaben zu den Möndchen des Hippokrates und der Regentonne räumt *Megan Fox* Schwierigkeiten bei der Lösung ein, indem beide Freifelder

für die Bearbeitung leer bleiben und lediglich die begleitenden Fragen Auskunft über die Bearbeitung geben. Hierbei zeigt sich in Aufgabe 2RFf, dass er auf die Abbildung der Möndchen angewiesen war und das nicht nur, weil er sie zur Erinnerung genutzt hat, und auch in 5GMf macht er Angaben dazu, dass er sich die Regentonne, wider Erwarten, erst vorstellen musste.

Anders gestalten sich seine Bearbeitungen der *mismatch-Aufgaben*. So zeigen weder das Sparlineal, noch das House of Dots einen Lösungsansatz, wobei zumindest beim House of Dots die begleitenden Fragen beantwortet wurden. Diese geben darüber Auskunft, dass *Megan Fox* die Regeln zur Konstruktion des nächsten Hauses nicht mit Hilfe der Abbildung finden konnte, was ein Indikator dafür ist, dass er Schwierigkeiten mit dem visuell-bildlichen Element der Aufgabenbearbeitung hat.

Ebendiese Schwierigkeiten mit den Elementen des anderen Denkstils räumt *Megan Fox* auch in den Aufgaben zur Innenwinkelsumme und Silverstone ein. So gibt er in den begleitenden Fragen zu Aufgabe 7RFv explizit an, dass es ihm schwerfiel eine visuelle Begründung zu finden, obwohl in seinem Mathematikunterricht teilweise durchaus begründet werden muss (siehe Abb. 6.16.). Trotzdem bemüht er sich, eine Lösung zu finden, scheitert daran jedoch, genauso wie in der Silverstone-Aufgabe.



Innenwinkel	7RFv
Die Abbildung zeigt dir ein Fünfeck. Zeichne Hilfslinien so ein, dass du mit ihrer Hilfe begründen kannst, dass die Innenwinkelsumme eines Fünfecks immer 540° beträgt.	

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Im Unterricht müssen wir viel begründen.				
Eine bildhafte Begründung zu finden, fiel mir leicht.				
Ich habe mir die Linien vorher überlegt.				

Abb. 6.16.: Charakteristische Bearbeitung von *Megan Fox* in einer *mismatch-Aufgabe*

In der Silverstone-Aufgabe konstruiert *Megan Fox* zwar die Skizze eines Koordinatensystems, schafft es jedoch nicht die visuell dargebrachten Informationen der gegenständlichen Abbildung in sein Diagramm zu übertragen. Er zeigt Unsicherheiten beim Anfertigen eines Koordinatensystems, obwohl bereits teilweise derartige Aufgaben im Unterricht bearbeitet wurden und damit bekannt sein dürften.

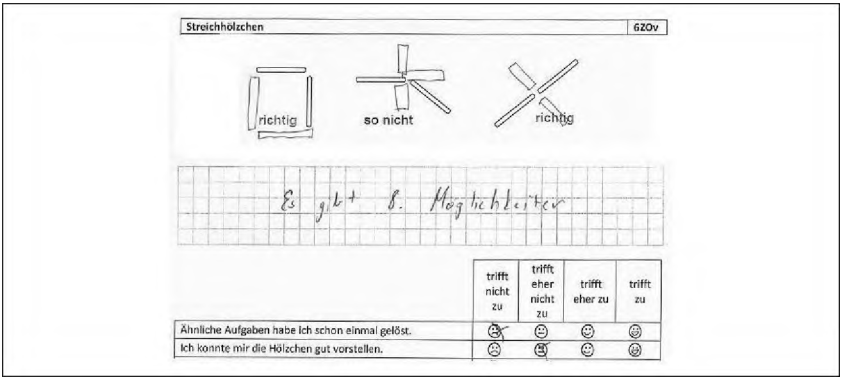


Abb. 6.17.: *Megan Fox'* Lösung der Streichhölzchen-Aufgabe

Etwas anders gestaltet sich die seine Bearbeitung in der oben dargestellten Streichhölzchen-Aufgabe. Hier zeigt *Megan Fox* zunächst einen visuell-bildlichen Ansatz, den er jedoch nicht weiter verfolgt, sondern stattdessen eine Lösung präsentiert, die in keinerlei sichtbaren Zusammenhang zu seinem Ansatz steht. Und obwohl diese Bearbeitung einen zeichnerischen Ansatz verwendet, geben seine Antworten in den begleitenden Fragen darüber Aufschluss, dass die Ursache für diese Bearbeitung mit dem visuell-bildlichen Element dieser Aufgabe zusammenhängt. Dies wird deutlich in der Aussage, dass er sich die Hölzchen nicht vorstellen konnte und damit den notwendigen visuellen Zugang zu der Aufgabe nur schwer herstellen konnte.

Die Zusammenfassung von *Megan Fox'* Bearbeitung der *match-Aufgaben* zeigt, dass er in drei der fünf Aufgaben formal-analytisch bearbeitet hat, unabhängig davon, ob die Aufgaben dabei korrekt bis zur Lösung verfolgt wurden. Dementsprechend handelt es sich um eine aufgabenadäquate Bearbeitung in *match-Aufgaben*.

match-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Taschengeld	formal-analytische Bearbeitung
Möndchen des Hippokrates	keine Bearbeitung mit Verweis auf visuell-bildliche Elemente
Füllen der Regentonne	keine Bearbeitung mit Verweis auf visuell-bildliche Elemente
Seil um den Äquator	formal-analytische Bearbeitung
Fakultäten	formal-analytische Bearbeitung

Tab. 6.20.: Übersicht der Bearbeitungen von *Megan Fox* in *match-Aufgaben*

Anders verhält es sich mit den Bearbeitungen von *mismatch-Aufgaben*. Hier zeigt *Megan Fox* häufiger, dass er Schwierigkeiten bei der Bearbeitung hat, weshalb er die Aufgabe gar nicht löst oder zwar visuell-bildlich beginnt, jedoch bewusst abbricht und in den Begleitenden Fragen die Schwierigkeiten explizit auf ebenjene Elemente zurückführt.

mismatch-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Sparlineal	keine Bearbeitung
House of Dots	keine Bearbeitung
Streichhölzchen	zeichnerische Elemente, Schwierigkeiten beim Vorstellen
Innenwinkelsumme	zeichnerische Elemente, Schwierigkeiten mit visuell-bildlichem Vorgehen
Silverstone	Ansatz eines Koordinatensystems

Tab. 6.21.: Kurzdarstellung von *Megan Fox'* Bearbeitungen in *mismatch-Aufgaben*

Zwar bestätigt sich im Vergleich der Mittelwerte des Aufgabenempfindens, dass *Megan Fox* mehr Probleme mit den Aufgaben des anderen Denkstils hatte (Mittelwert 0,13 gegenüber 0,7), jedoch zeigt sich diese Tendenz nicht genauso in der Korrektheit seiner Lösungen. Hier steht ein Mittelwert von 0,33 bei *match-Aufgaben* einem Wert von 0,5 in *mismatch-Aufgaben* gegenüber.

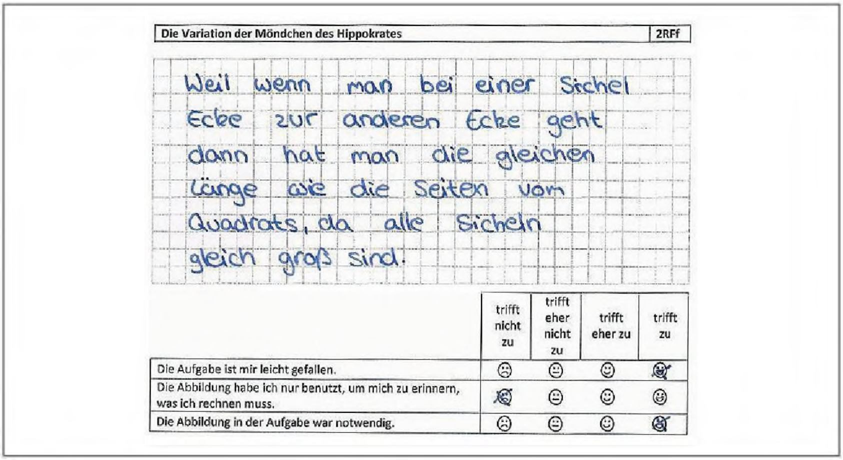
6.2.1.3. Typ III: A5-GS21-W11D

In der hier durchgeführten Erhebung konnte kein visueller Denker Typ III zugeordnet werden, zu prüfen bleibt deshalb, inwieweit dies mit der Stichprobengröße und ihrer Zusammensetzung zusammenhängt. Jedoch konnte dieser Typ innerhalb des analytischen Denkstils rekonstruiert werden, der hier durch die vierzehnjährige *Nele* repräsentiert wird.
Nele besucht die neunte Klasse einer Gesamtschule in Niedersachsen und sagt von sich selbst, dass sie gut in Mathe sei, das Fach aber nur okay findet, dennoch gibt sie an, dass Mathematik für sie persönlich zu den wichtigeren Dingen gehört.
In der Verteilung ihrer Aussagen den Denkstil betreffend zeichnet sich eine Abneigung gegen ein bildliches Vorgehen an, wohingegen sie nicht ebenso deutlich aufzeigt, dass sie Variablen und Formeln für ihr Verständnis von Mathematik benötigt. Trotzdem ergibt *Neles* Denkstilerhebung einen ausgeprägten analytischen Denkstil.

Neles Bearbeitungen der *match-Aufgaben*, in ihrem Fall also der formal-analytischen Aufgaben, offenbaren ihre Unsicherheiten beim Lösen, die häufiger zu Problemen bei der Bewältigung dieser Aufgaben führen. Zur Verdeutlichung werden zunächst ihre Lösungen eingehender analysiert und anschließend mit den vorgestellten *mismatch-Aufgaben* kontrastiert.

Wie bereits in Kapitel 5.4.2. dargestellt, handelt es sich bei der Taschengeld-Aufgabe um eine formal-analytisch ausgerichtete Aufgabe, was sie für *Nele* zu einer *match-Aufgabe* macht. Tatsächlich zeigt sie in dieser Aufgabe eine entsprechend ausgerichtete Bearbeitung, indem sie zunächst ihr Vorgehen, anhand der formalen Berechnung des Durchschnitts erläutert, wie die Aufgabe zu lösen sei und dies auch konkret ausführt.
Zwar ist ihre Aussage, alles zu addieren und dann durch 6 zu teilen, recht ungenau und führt in ihrer Anwendung nicht zur korrekten Bestimmung des Durchschnitts, dennoch ist *Nele* sich sehr wohl bewusst, dass es hier um die Errechnung einer Lösung geht, um die Aussage des Direktors zu verifizieren. Es kann also in diesem Zusammenhang festgestellt werden, dass Nele dem

nahegelegten Denkstil folgt, ohne dass in dieser Aufgabe Schwierigkeiten in der Wahl des Vorgehens sichtbar werden.



Die Variation der Möndchen des Hippokrates | 2RFf

Weil wenn man bei einer Sichel Ecke zur anderen Ecke geht dann hat man die gleichen Länge wie die Seiten vom Quadrats, da alle Sicheln gleich groß sind.

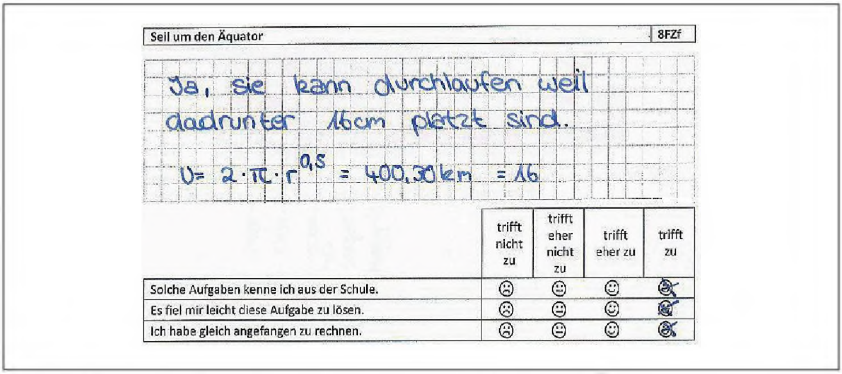
	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Die Aufgabe ist mir leicht gefallen.				
Die Abbildung habe ich nur benutzt, um mich zu erinnern, was ich rechnen muss.				
Die Abbildung in der Aufgabe war notwendig.				

Abb. 6.18.: *Neles* Lösung der Möndchen des Hippokrates

In der abgebildeten *match-Aufgabe* zeigt sich in *Neles* Argumentation eine visuell-bildliche Ausrichtung. Deutlich wird dies an ihrem Versuch die Argumentation auf visuelle Elemente aufzubauen, was sich hier durch die gegenständliche Beschreibung der in der Abbildung sichtbaren Länge des Durchmessers der Sichel zeigt. Dabei stützt sie sich weder auf formale Bezeichnungen, noch gibt ihre Argumentation Hinweise auf den Gebrauch von Variablen und Termen.
Es lässt sich folglich feststellen, dass *Nele*, trotz der formal-analytisch ausgerichteten Aufgabe, keinen Lösungsweg einschlägt, der ihrem Denkstil nach bevorzugt wird, sondern sich um eine irgendwie andersgeartete Bearbeitung bemüht. Verwunderlich ist daran weniger, dass sie nicht weiß, wie sie die Aufgabe beantworten soll und sich deshalb darauf verlegt, sie argumentativ lösen zu wollen, sondern vielmehr, dass ihre Argumentation eine visuell-bildliche Richtung einschlägt.
Dies zeigt sich ebenfalls in den begleitenden Fragen, in denen deutlich wird, dass sie die Abbildung als notwendig einstuft und diese nicht nur für die Erinnerung benutzt. Das heißt, dass die Abbildung für mehr herangezogen

wurde, wobei dies „mehr“ nicht benannt wurde, wohl aber durch ihre Argumentation angedeutet wird.

Die Aufgabe zum Füllen der Regentonne zeigt zunächst keine Bearbeitung, wobei *Nele* jedoch die begleitenden Fragen beantwortet und damit deutlich macht, dass sie die Aufgabe durchaus wahrgenommen hat, sie sie jedoch nicht lösen konnte. Die begleitenden Fragen geben ebenfalls wenig Aufschluss darüber, weshalb sie die Aufgabe nicht beantworten konnte.


Seil um den Äquator | 8FZf

Ja, sie kann durchlaufen weil dadrunter 16cm pletzt sind.

$U = 2 \cdot \pi \cdot r^{0,5} = 400{,}30\,km = 16$

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Solche Aufgaben kenne ich aus der Schule.	☹	😐	☺	☺ X
Es fiel mir leicht diese Aufgabe zu lösen.	☹	😐	☺	☺ X
Ich habe gleich angefangen zu rechnen.	☹	😐	☺	☺ X

Abb. 6.19.: *Neles* Bearbeitung der Aufgabe Seil um den Äquator

Nele beantwortet die in der Aufgabe Seil um den Äquator gestellte Frage zunächst korrekt und gibt auch den richtigen Abstand des Seils zum Erdumfang an, jedoch ergibt ihre Rechnung keinerlei Sinn und stimmt auch mit ihrem Ergebnis nicht überein. Aufschluss über ihr Vorgehen gibt die begleitende Frage, ob sie solche Aufgaben bereits aus der Schule kenne, die sie mit ja beantwortet. Darüber hinaus haben einige ihrer Klassenkammeraden direkt angegeben, dass sie genau diese Aufgabe bereits im Unterricht besprochen hatten.
Dennoch ist auffällig, dass *Nele*, obwohl ihr die Grundidee für das Vorgehen damit bekannt sein sollte, nicht weiß, wie sie mit der im Aufgabentext enthaltene Formel umgehen kann, um zu einer Lösung zu kommen oder sie zumindest zu reproduzieren. Vielmehr verändert sie die Formel in irgendeiner Weise, um die Lösung irgendwie annährend rechtfertigen zu können.

Auch in der Fakultäten-Aufgabe zeigt *Nele* nicht die in der Aufgabe vorgesehene Bearbeitung, die durchaus ihrem Denkstil entspricht. Vielmehr ist es wie in der Regentonnen-Aufgabe so, dass nur die begleitenden Fragen aufzeigen, dass sie sich mit der Aufgabe auseinandergesetzt hat. Hierbei ist vor allem interessant, dass sie angibt, dass es ihr schwerfällt, rechnerische Begründungen zu finden, obwohl ihrem Denkstil nach davon auszugehen ist, dass ihr rechnerische Begründungen leichter fallen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Nele als analytische Denkerin in den formal-analytisch ausgerichteten Aufgaben Schwierigkeiten bei deren Bewältigung hat. Dies zeigt sich darin, dass sie mehrheitlich nicht auf ihren eigenen Denkstil zurückgreift, sondern neben Nicht-Bearbeitungen auch Rückgriffe auf Elemente des anderen Denkstils zeigt und in den begleitenden Fragen Schwierigkeiten mit ihrem eigenen Denkstil einräumt.

Demgegenüber zeigen *Neles* Bearbeitungen bei *mismatch-Aufgaben* ein durchaus aufgabenadäquates Vorgehen.

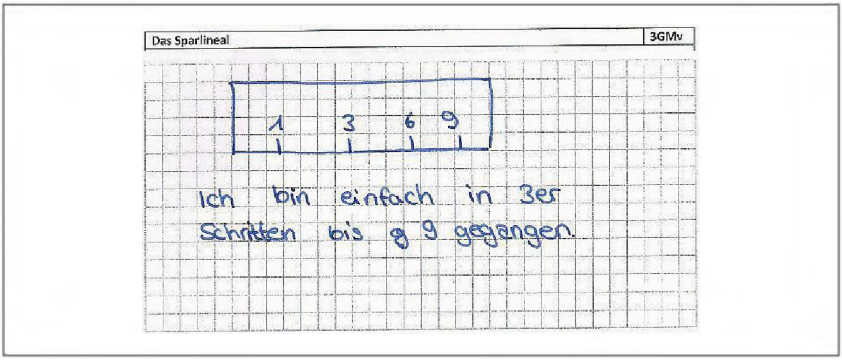


Abb. 6.20.: *Neles* Vorgehen in der bei der Aufgabe Sparlineal

Neles Bearbeitung der Aufgabe zeigt eine Abbildung des von ihr entworfenen Sparlineals, die auf ein visuell-bildliches Vorgehen schließen lässt. Und auch in den begleitenden Fragen gibt sie an, dass sie sich das Lineal vorgestellt hat, was ebenfalls auf eine visuelle interne Repräsentation hinweist.

Das bedeutet, dass *Nele* entgegen ihrer bevorzugten Art agiert hat, wohl aber so, wie die Aufgabe es erfordert und nahelegt. Es stellt sich jedoch die Frage, wie ihre Erklärung zu ihrer Strategie zu deuten ist. Für sich genommen scheint es, dass ihre Erklärung bezüglich des Sparlineals nicht zur Lösung führt. Bei einem Blick auf ihr entworfenes Lineal ist jedoch zu erkennen, dass ihr beschriebenes Vorgehen nicht zur angefertigten Abbildung passt. Dementsprechend wird hier davon ausgegangen, dass es sich um eine nachgelagerten Erklärungsversuch handelt, der, in Ermangelung der Möglichkeit ihr tatsächliches Vorgehen wiedergeben zu können, eine Schein-Erklärung liefert.

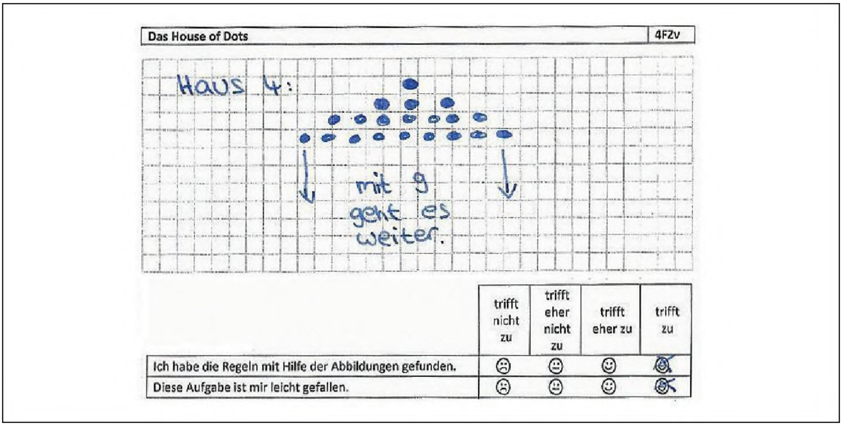


Abb. 6.21.: *Neles* Lösung zum House of Dots

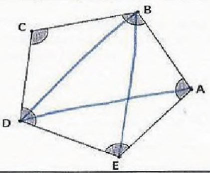
Die Lösung des House of Dots, die *Nele* anfertigt, basiert auf einer skizzierten Abbildung, die in *Neles* Verständnis für die Beantwortung der Frage ausreicht. Deutlich wird dies an den begleitenden Fragen, die eine Selbstsicherheit zeigen, die üblicherweise mit dem Eindruck einhergeht, dass eine Aufgabe gut und richtig gelöst wurde. Weiterhin geben die begleitenden Fragen Aufschluss darüber, dass *Nele* die Lösung und damit die Fortführung des Musters mithilfe der in der Aufgabe enthaltenen Abbildung gefunden hat.
Die Anfertigung einer Skizze, wenn auch falsch, sowie die begleitende Frage zur Verwendung der Abbildung zeigen, dass das House of Dots von *Nele* visuell-bildlich bearbeitet wurde, womit es sich ebenfalls um eine aufgabeadäquate Bearbeitung handelt.

Und auch in der von *Nele* notierten Bearbeitung der Streichhölzchen-Aufgabe zeigt sich, dass Nele die Aufgabe entgegen ihrer bevorzugten Art des mathematischen Arbeitens löst und somit aufgabenadäquat handelt. Die Bearbeitung zeigt darüber hinaus, dass sie den Arbeitsauftrag aus dem Blick verloren hat und nur zwei Hölzchen aneinanderlegt, zeugen ihre Abbildungen von einem visuell-bildlichen Vorgehen. Zudem gibt sie ebenso wie in Aufgabe 4FZv (House of Dots) an, dass ihr die Aufgabe leicht fiel und sie mit den visuellen Elementen keine Schwierigkeiten hatte.

Neles bisher gezeigtes Muster vom problemlosen Lösen von visuell-bildlichen Aufgaben wird in der Aufgabe zu der Innenwinkelsumme im Fünfeck geringfügig gestört. So zeigt sie zwar in dieser Aufgabe ebenfalls einen visuell-bildlichen Zugang zu der Aufgabe, indem sie konkret Hilfslinien in das vorgegebene Fünfeck einzeichnet und gibt zudem an, dass sie sich die Linien vorher überlegt hat, jedoch kann sie ihre Idee nicht als Begründung heranziehen und bricht aus diesem Grund vor der eigentlichen Lösung ab.
Dies zeigt sich auch in *Neles* Ablehnung der Aussage, dass ihr bildhafte Begründungen leichtfallen.

Innenwinkel **7RFv**

Die Abbildung zeigt dir ein Fünfeck. Zeichne Hilfslinien so ein, dass du mit ihrer Hilfe begründen kannst, dass die Innenwinkelsumme eines Fünfecks immer 540° beträgt.



	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Im Unterricht müssen wir viel begründen.			X	
Eine bildhafte Begründung zu finden, fiel mir leicht.	X			
Ich habe mir die Linien vorher überlegt.			X	

Abb. 6.22.: Aufgabe zur Innenwinkelsumme in der Bearbeitung von *Nele*

In der letzten visuell-bildlichen Aufgabe des Sets, Silverstone, zeigt *Nele* wieder ihr übliches Vorgehen mit der entsprechenden Sicherheit bei der Bearbeitung der Aufgabe. Denn obwohl ihre angefertigte Zeichnung nicht korrekt[42] ist, gibt sie an, dass ihr die Aufgabe leicht fiel und sie darüber hinaus auch gleich wusste, wie sie die Zeichnung machen musste.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass *Nele* mehrheitlich (drei von fünf) Schwierigkeiten in den *match-Aufgaben* hatte, weshalb sie sich auf Lösungsversuche verlegt hat, die nicht dem von der Aufgabe nahegelegten Vorgehen entsprechen und somit ebenfalls ihrem bevorzugten Denken widersprechen.

match-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Taschengeld	formal-analytisches Vorgehen
Möndchen des Hippokrates	visuell-bildlicher Argumentationsansatz
Füllen der Regentonne	keine Bearbeitung
Seil um den Äquator	formal-analytisches Vorgehen auf Basis falscher Erinnerung
Fakultäten	keine Bearbeitung, weil ihr eine rechnerische Begründung schwerfällt

Tab. 6.22.: Übersicht von *Neles* Bearbeitungen der *match-Aufgaben*

Demgegenüber zeigt sie ein regelgeleitetes Vorgehen bei *mismatch-Aufgaben* sowie ein Empfinden der Aufgaben als leicht, was ein Indikator dafür darstellt, dass sie ihre Lösungen als korrekt einschätzt.

mismatch-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Sparlineal	visuell-bildliche Vorstellung und Bearbeitung
House of Dots	visuell-bildliche Bearbeitung anhand der Zeichnung
Streichhölzchen	visuell-bildliches Vorgehen mit
Innenwinkelsumme	visuell-bildlicher Ansatz
Silverstone	zeichnerische Bearbeitung

Tab. 6.23.: Kurzdarstellung von *Neles* Bearbeitungen in *mismatch-Aufgaben*

[42] Sie sortiert die Messpunkte auf der Abszisse so, dass ihr Graph eine lineare Funktion beschreibt.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass *Nele* als repräsentatives Beispiel für Typ II angesehen werden kann, der sich dadurch auszeichnet, dass entgegen der intuitiven Annahme, dass *match-Aufgaben* bevorzugt auch eine *match-Bearbeitung* erfahren, *match-Aufgaben* mehrheitlich anders bearbeitet werden als es die Aufgabe nahelegt. Dies äußert sich wie bei *Nele* teilweise in Argumentationsversuchen (sowohl visuell, wie analytisch oder beides) als abgebrochene Bearbeitungen, die auf Schwierigkeiten mit dem Denkstil hinweisen oder auch als Bearbeitung, die beide Denkstile aufweisen. Deshalb verwundert es auch nicht, dass *Nele* in *match-Aufgaben* im Mittel schlechter abschneidet als in Aufgaben des anderen Denkstils, was charakteristisch für diesen Typ ist (Mittelwert 0,0 in *match-Aufgaben* und 0,25 in *mismatch-Aufgaben*).
Darüber hinaus zeigt sich bei *Nele* auch, dass ihr Aufgaben, die ihrem Denkstil entsprechen im Mittel schwerer fallen als *mismatch-Aufgaben* (Mittelwert von 1,4 gegen 2,2).

6.2.1.4. Typ IV: V10-GS21-M11D und A17-Gy31-W11D

Der fünfzehnjährige *Simon* ist Schüler einer niedersächsischen Gesamtschule, der laut Selbstauskunft gut in Mathematik ist. Darüber hinaus findet er Mathematik eher gut und sieht die Bedeutung vor allem im technischen Bereich, er erkennt jedoch weniger den Alltagsbezug.
Insbesondere die Unterstützung von Zeichnungen bei der Erklärung von Formeln ist für *Simons* Verstehensprozess wichtig und auch beim Lösen von Aufgaben greift er auf Visualisierungen zurück.

Während bei der Aufgabe um das Sparlineal keine Besonderheiten in seiner Bearbeitung zu beobachten sind, zeigt sich bei *Simons* zunächst gewähltem Lösungsweg für das House of Dots ein eher formal-analytisch ausgerichtetes Vorgehen. Dies ist daran festzumachen, dass er zunächst unabhängig von Abbildungen rein formal die Differenz zwischen den Dots zweier benachbarter Häuser berechnet und anhand seiner Ergebnisse eine Regel formuliert (+6 am Ende zwischen den Zeilen, siehe Abb. 6.23.). Jedoch ändert er schließlich sein Vorgehen und zeichnet das entsprechende Haus, wobei er an seiner Zeichnung erneut das Bildungsgesetz für benachbarte Häuser formuliert.

Es ist leider nicht ersichtlich, warum er sein Vorgehen ändert, es könnte jedoch vermutet werden, dass die entsprechende Aufgabenstellung mit der Aufforderung anhand einer Zeichnung zu erklären, wie das vierte Haus gebildet wird. Wäre die Aufgabe jedoch darauf reduziert, zu ermitteln aus wie vielen Punkten das vierte Haus besteht, bleibt fraglich, ob *Simon* ein visuelles Vorgehen genutzt hätte.

Interessant an dieser Bearbeitung bleibt jedoch, dass *Simon* ein formal-analytisches Vorgehen wählt, um die Aufgabe zu bearbeiten, obwohl seine bevorzugte Art des Denkens eine visuelle ist.

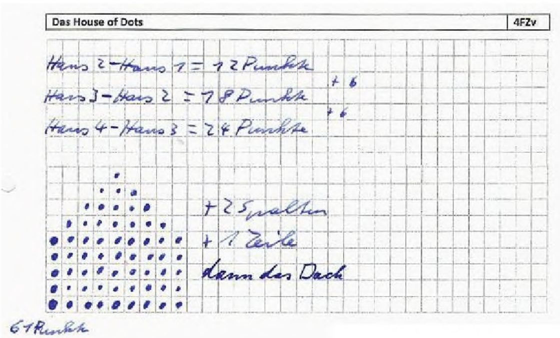


Abb. 6.23.: *Simons* Bearbeitungen zum House of Dots

Einen ähnlichen Wechsel im Lösungsweg zeigt er ebenfalls bei der nächsten *match-Aufgabe*. Hierbei schlägt *Simon* zunächst einen visuell-bildlichen Lösungsweg ein, indem er Zeichnungen der gefundenen Figuren anfertigt, dessen Ergebnis er dann mithilfe einer entsprechenden Rechnung (formal-analytisch) erklärt (siehe Abb. 6.24.).

Abb. 6.24.: *Simons* Vorgehen bei der Streichhölzchen-Aufgabe

Zu den Aufgaben 7RFv (Innenwinkelsumme im Fünfeck) sowie 9DZv (Silverstone) macht Simon überhaupt keine Angaben, was in diesem Zusammenhang darauf schließen lässt, dass er keine Idee für einen Ansatz zu den entsprechenden *match-Aufgaben* entwickeln konnte und damit Schwierigkeiten bei ihrer Bearbeitung deutlich macht.
Entsprechend ergibt sich für die Kurzübersicht:

match-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Sparlineal	visuell-bildliche Lösung
House of Dots	formal-analytischer Ansatz sowie visuell-bildliche Lösung
Streichhölzchen	visuell-bildliche Bearbeitung mit formal-analytischer Erklärung
Innenwinkelsumme	keine Bearbeitung
Silverstone	keine Bearbeitung

Tab. 6.24.: Übersicht von *Simons* Bearbeitungen in *match-Aufgaben*

Und auch in seinen Bearbeitungen der *mismatch-Aufgaben* wird deutlich, dass *Simon* mehrheitlich Schwierigkeiten dabei hat, die Aufgaben in der vorgesehenen Weise zu lösen und dementsprechend auf seine Art des Denkens zurückgreift. Dies zeigt sich bereits in der Aufgabe zu den Möndchen des Hippokrates, in der er zwar einem rein formal-analytischen Lösungsweg folgt, jedoch macht er in den begleitenden Fragen deutlich, dass die Abbildung in der Aufgabe für ihn notwendig war und er die Zeichnung über das bloße Memorieren hinaus genutzt hat.

Und auch in der Aufgabe zum Füllen der Regentonne und bei dem Seil um den Äquator zeigen sich entsprechende Rückgriffe auf den eigenen Denkstil, indem er neben den teilweise durchaus aufgabenadäquaten Bearbeitungen erklärende Zeichnungen angefertigt hat. So befindet sich neben seiner formal-analytischen Bearbeitung in Form von Rechnungen auch eine visuelle Gedankenstütze der Grundfläche der Regentonne. Darüber hinaus gibt er in den begleitenden Fragen an, dass er sich die Situation zunächst eher vorstellen musste.

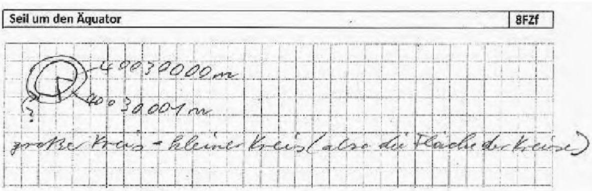


Abb. 6.25.: visuell-bildlicher Ansatz von *Simon*

Und auch in der oben abgebildeten Bearbeitung der Äquator-Aufgabe (Abb. 6.25.) zeigt sich eine entsprechende Zeichnung, um sich den Sachverhalt visuell-bildlich zu erklären, wobei *Simons* Bearbeitung mit der darstellende Skizze endet. Es wird deutlich, dass *Simon* trotz enthaltener Formel für die Lösung Schwierigkeiten damit hat, mit ihr umzugehen, obwohl seine Skizze die Situation und dem damit einhergehenden notwendigen Vorgehen korrekt wiedergibt.
Da eine Zeichnung in der Fakultäten-Aufgabe nicht möglich ist, liegt die Vermutung nahe, dass *Simon* diese Aufgabe nicht weiter bearbeiten konnte. Seine Angaben in den begleitenden Fragen bestätigen, dass ihm die Aufgabe schwerfiel, ebenso wie ganz allgemein rechnerische Begründungen zu finden.

Die entsprechende Kurzdarstellung verdeutlicht noch einmal, dass *Simon* in der Bearbeitung von *mismatch-Aufgaben* schlingert, weshalb von Schwierigkeiten auszugehen ist, die ihn dazu veranlassen auf seine bevorzugte Art des Denkens zurückzugreifen, falls dies möglich ist.

mismatch-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Taschengeld	formal-analytische Bearbeitung
Möndchen des Hippokrates	formal-analytischer Ansatz unter Angabe der Notwendigkeit der Abbildung
Füllen der Regentonne	neben visuell-bildlichen Elementen, formal-analytische Bearbeitung
Seil um den Äquator	visuell-bildliche Idee
Fakultäten	keine Bearbeitung mit Verweis auf Schwierigkeiten bei rechnerischen Begründungen

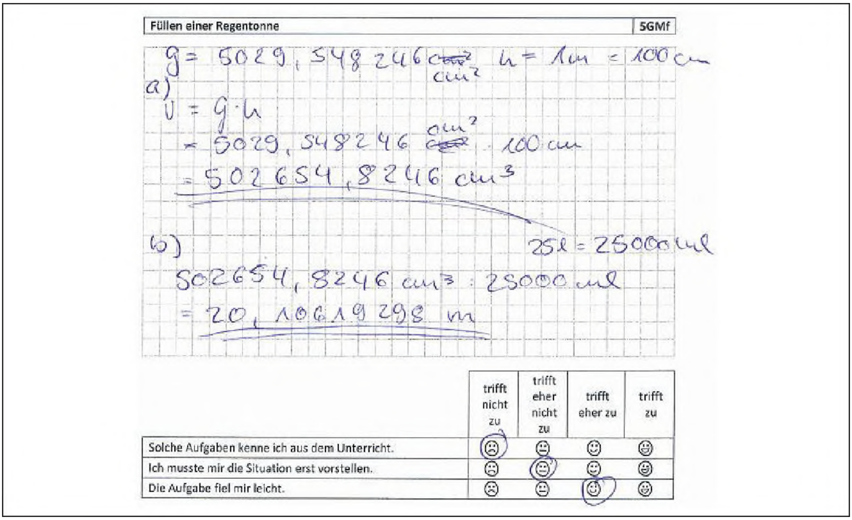
Tab. 6.25.: Übersicht der *match-Aufgaben* und *Simon* Bearbeitungen

Und obwohl *Simon* auch in *match-Aufgaben* in seiner Bearbeitungsweise schlingert, ist er doch etwas erfolgreicher beim Lösen ebenjener Aufgaben (Mittelwert von 1,0 gegenüber 0,25), während sich sein Aufgabenempfinden deutlich positiver gegenüber *match-Aufgaben* darstellt. Hier steht ein Mittelwert von 0,6 in *mismatch-Aufgaben* einem von 2,17 gegenüber.

Als analytische Vertreterin des Typ IV sei hier die Schülerin *Minna* vorgestellt. *Minna* war zum Zeitpunkt der Erhebung, kurz vor den Weihnachtsferien, 14 Jahre alt und besuchte ein Hamburger Gymnasium. Bezüglich der Mathematik gibt sie an, dass sie das Fach mag und kann.
Obwohl ihre Stellung zu den Aussagen in der Denkstilerhebung häufig eingeschränkt sind, zeigt sie jedoch ganz klar, dass sie in ihrem Lösungsprozess meistens keine Zeichnungen benötigt und häufig auf bekannte Formeln zurückgreift.

Schwierigkeiten mit Aufgaben, die ihrem Denkstil entsprechen zeigen sich bei *Minna* nicht primär in den Bearbeitungen selbst, in denen sie ein überaus formal-analytisches Vorgehen zeigt, sondern darin, dass sie die Mehrzahl der Aufgaben nicht bearbeitet.
Davon ausgehend, dass *Minna* mit angemessener Motivation an der Studie teilgenommen hat, zeichnet sich daher ab, dass sie die Aufgaben nicht lösen konnte, wobei ihr Test keine Hinweise darauf enthält, weshalb sie sie nicht gelöst hat. Dementsprechend zeigen die *match-Aufgaben* Taschengeld, Möndchen des Hippokrates und die Fakultäten-Aufgabe keine Bearbeitung und auch die begleitenden Fragen wurden nicht beantwortet.

Allerdings zeigen die beiden *match-Aufgaben* Füllen der Regentonne und Seil um den Äquator ausgeprägt formal-analytische Strukturen.
In der Regentonnen-Aufgabe gibt sie zunächst direkt die Grundfläche der Tonne an und notiert die aus der Aufgabe entnommene Höhe. Erst anschließend macht sie deutlich, was sie rechnet, indem sie das als Grundfläche mal Höhe angibt. In der nachfolgenden Berechnung wird deutlich, dass sie nicht einfach die vorher gegebenen Werte übernimmt, da sie ein Fehler in diesem Schritt kommentarlos korrigiert. Umso beeindruckender ist ihre fehlerfreie Bearbeitung, als dass sie in Aufgabe 8FZf einräumt, dass ihr Pi noch nicht bekannt ist (siehe Abb. 6.26.).
Verdeutlicht wird ihr formal-analytisches Vorgehen nochmals durch die Aussage in den begleitenden Fragen, dass sie sich die Situation nicht zunächst vorstellen musste.


Füllen einer Regentonne | 5GMf

$g = 5029,548246\ cm^2 \quad h = 1m = 100\ cm$

a) $V = g \cdot h$

$= 5029,548246\ cm^2 \cdot 100\ cm$

$= 502654,8246\ cm^3$

b) $25l = 25000ml$

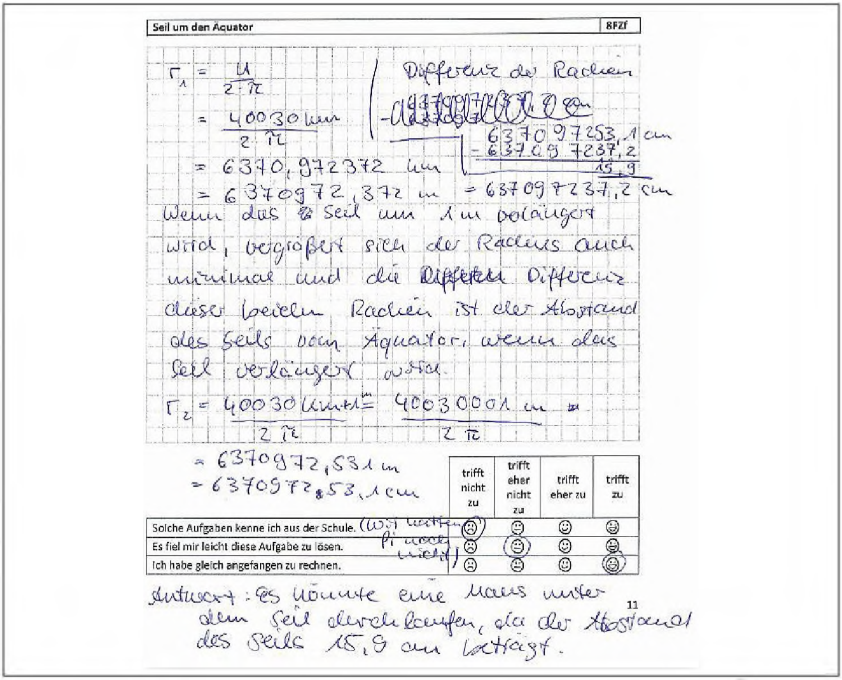
$502654,8246\ cm^3 : 25000\ ml$

$= 20,10619298\ m$

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Solche Aufgaben kenne ich aus dem Unterricht.	☹	😐	🙂	☺
Ich musste mir die Situation erst vorstellen.	☹	😐	🙂	☺
Die Aufgabe fiel mir leicht.	☹	😐	🙂	☺

Abb. 6.26.: *Minnas* Bearbeitung der Regentonnen-Aufgabe

Ein ebensolches strikt formal-analytisches Vorgehen zeigt *Minna* in der Äquator-Aufgabe, in der sie direkt zu rechnen beginnt und ordnungsgemäß die abgebildete Formel umstellt, um so zunächst den Erdradius, dann den Seil-Radius zu berechnen und anschließend beide Radien miteinander zu vergleichen.



Seil um den Äquator | 8FZf

$r_1 = \frac{U}{2\pi} = \frac{40030\,km}{2\pi} = 6370{,}972372\,km = 6370972{,}372\,m = 637097237{,}2\,cm$

Differenz der Radien

$637097253{,}1\,cm - 637097237{,}2 = 15{,}9$

Wenn das Seil um 1 m verlängert wird, vergrößert sich der Radius auch minimal und die Differenz dieser beiden Radien ist der Abstand des Seils vom Äquator, wenn das Seil verlängert wird.

$r_2 = \frac{40030\,km + 1\,m}{2\pi} = \frac{40030001\,m}{2\pi} = 6370972{,}531\,m = 637097253{,}1\,cm$

	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft zu
Solche Aufgaben kenne ich aus der Schule. (Wir hatten Pi noch nicht!)				
Es fiel mir leicht diese Aufgabe zu lösen.				
Ich habe gleich angefangen zu rechnen.				

Antwort: Es könnte eine Maus unter dem Seil durchlaufen, da der Abstand des Seils 15,9 cm beträgt.

11

Abb. 6.27.: *Minnas* korrekt formal-analytische Bearbeitung der Äquator-Aufgaben

In den *mismatch-Aufgaben* zeigt sich ebenfalls, dass *Minna* die Mehrheit der Aufgaben nicht bearbeitet hat, lediglich die Aufgabe House of Dots hat sie gelöst.

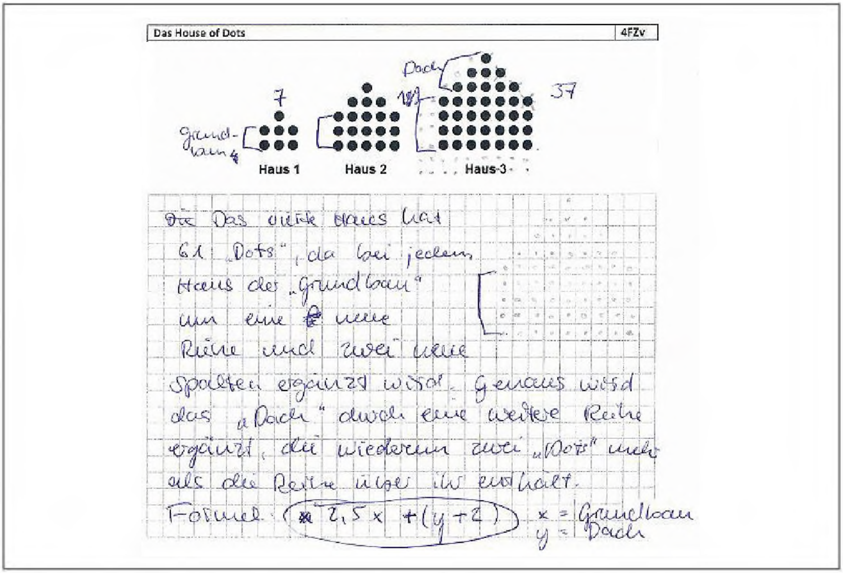


Abb. 6.28.: Bearbeitung einer *mismatch-Aufgabe* von *Minna*

Im House of Dots zeigt sich der Versuch die Aufgabe formal-analytisch zu bearbeiten bzw. eine formal-analytische Beschreibung des Aufbaus zu finden, wobei die Aufgabe zusätzlich Elemente eines visuell-bildlichen Vorgehens ausweist. Insgesamt lässt sich demzufolge auch bei den *mismatch-Aufgaben* beobachten, dass *Minna* Probleme hatte die Aufgaben entsprechend ihrer nahegelegten Bearbeitungsweise zu lösen, so dass sich folgende Übersichten ergeben:

match-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Taschengeld	keine Bearbeitung
Möndchen des Hippokrates	keine Bearbeitung
Füllen der Regentonne	formal-analytische Lösung
Seil um den Äquator	formal-analytisches Vorgehen
Fakultäten	keine Bearbeitung

Tab. 6.26.: Übersicht von *Minnas* Bearbeitungen der *match-Aufgaben*

mismatch-Aufgaben	Bearbeitungszusammenfassung
Sparlineal	keine Bearbeitung
House of Dots	Bearbeitung mit Elementen beider Denkstile
Streichhölzchen	keine Bearbeitung
Innenwinkelsumme	keine Bearbeitung
Silverstone	keine Bearbeitung

Tab. 6.27.: Übersicht von *Minnas* Bearbeitungen in *mismatch-Aufgaben*

Und obwohl *Minna* nur wenige Bearbeitungen in dem Test geschafft hat, zeigt sich, aufgrund der Mittelwertvergleiche, dass sie in *match-Aufgaben* ebenso gut ist wie in *mismatch-Aufgaben* (Mittelwerte von 1,0), jedoch die visuellen Aufgaben als geringfügig leichter empfindet (Mittelwert von 1,5 zu 2,0).

7. Schlussfolgerung und Ausblick

> „Students need to learn […] that the world does not always provide us with a perfect match to our preferred ways of doing things. […] But if we want students to show what they truly can do, match of instruction and assessment to styles is essential."
>
> (Sternberg 1997, S.115)

Das vorangestellte Zitat von Sternberg drückt die Erwartung aus, dass Schüler *match-Aufgaben* erfolgreicher lösen als *mismatch-Aufgaben,* wobei sich seine Überlegungen nicht auf die mathematischen Denkstile beziehen. An die entsprechende Grundannahme, dass es Aufgaben mit inhärentem Denkstil gibt, schließen sich Fragen an, die die Bewältigung der entsprechenden Aufgaben von Schülern mit unterschiedlichem Denkstil betreffen, sodass nach Gegenüberstellung des analytischen Denkstils und visuellen Denkstils von Borromeo Ferri, entsprechende Aufgaben konzipiert wurden. Die Aufgaben sind dabei so ausgewählt und modifiziert, dass sie lediglich mithilfe eines visuell-bildlichen oder formal-analytischen Vorgehens bzw. nur mit erheblichem Mehraufwand mithilfe der entgegen gerichteten Bearbeitungsweise lösbar sind.

Ziel dieser Studie war es, zu prüfen, inwieweit Schüler des analytischen oder des visuellen Denkstils Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Aufgaben, die den entsprechend anderen Denkstil nahelegen, haben (Hypothese 2; vgl. Kapitel 5.1.). Hierzu wurde die Unterscheidung zwischen *match-* und *mismatch-Aufgaben* getroffen, die beschreibt, ob eine Passung zwischen dem Denkstil des Schülers und der konkret vorliegenden denkstilnahen Aufgabe vorliegt. Daneben ist zwischen *match-* und einer *mismatch-Bearbeitungen* zu unterscheiden, die den Denkstil in Beziehung zu der jeweils gezeigten Bearbeitungsweise setzen.

Die vorliegende Studie ergab jedoch, dass ein Zusammenhang, wie ihn Hypothese 2 annimmt, nicht uneingeschränkt nachgewiesen werden konnte. Das heißt, anhand der vorliegenden Ergebnisse konnte nicht bestätigt werden, dass Schüler mit analytischem oder visuellem Denkstil die jeweiligen *match-Aufgaben* grundsätzlich als leichter empfanden als ihre *mismatch-Aufgaben*. Zwar konnte gezeigt werden, dass Schüler mit visuellem Denkstil *match-Aufgabe* gegenüber analytisch ausgerichtete Aufgaben als deutlich leichter empfanden, ließ sich diese Tendenz für Schüler mit analytischem Denkstil nicht belegen.

		Aufgaben	
		match	mismatch
Denkstil	analytisch	1,3792	1,8581
	visuell	1,6546	0,8651

Tab. 7.1.: Vergleich des Mittelwerts des Aufgabenempfindens (vgl. auch Kapitel 6.1.)

Und auch hinsichtlich der erfolgreichen Aufgabenbearbeitung ließen sich die angenommenen Tendenzen lediglich für Schüler mit visuellem Denkstil belegen, nicht aber für den analytischen Denkstil.

Dennoch wurden in den Detailanalysen der Aufgabenbearbeitungen wiederkehrende Strukturen sichtbar, die unabhängig vom Denkstil auftraten. Die weiteren Analysen zeigten, dass die Schüler, abhängig von *match-* und *mismatch-Aufgaben*, Vorgehensweisen verfolgten, die sich mit der Unterscheidung zwischen *aufgabenadäquate Bearbeitungen* und *schlingernde Aufgabenbearbeitung* beschreiben lassen. Anders als bei der Unterscheidung von *match-* und *mismatch-Bearbeitung*, die das Verhältnis von Schülerdenkstil und Bearbeitung beschreibt, bezieht sich die aufgabenadäquate und schlingernde Bearbeitung auf das Verhältnis von der aufgabeninhärenten Vorgehensweise und der gezeigten Bearbeitung. Dabei handelt es sich auch dann um eine aufgabenadäquate Bearbeitung, wenn der Schüler einen entsprechenden Lösungsansatz präsentiert oder Fehler in der Bearbeitung macht. Ein schlingerndes Vorgehen hingegen zeichnet sich dadurch aus, dass der Schüler eben nicht dem inhärenten Lösungsweg folgt, sondern sich um eine andersgeartete Bearbeitung bemüht. Entsprechende Bemühungen äußern sich beispielsweise in dem Versuch durch Argumentationen mit oder ohne mathematische Stützung zu einer Lösung zu kommen, oder aber auch dadurch, dass Schüler auf ihren eigenen Denkstil zurückgreifen, um die Aufgabe zu durchdringen und zu lösen.

Aus der vorangestellten Unterscheidung zwischen *match-* und *mismatch-Aufgaben* mit den jeweiligen Ausprägungen Aufgaben *aufgabenadäquat* oder *schlingernd* zu lösen, ergibt sich insgesamt ein Modell mit vier unterschiedlichen Typen:

		match-Aufgaben	
		aufgabenadäquate Bearbeitung	schlingernde Bearbeitung
mismatch-Aufgabe	aufgabenadäquate Bearbeitung	Typ I	Typ III
	schlingernde Bearbeitung	Typ II	Typ IV

Tab. 7.2.: Dimensionierung der Kategorien zur Typenbildung (vgl. Kapitel 5.7.1., Tab. 5.11.)

Hierbei charakterisieren sich die vier Typen wie folgt:

Typ I (adäquat – adäquat)
Schüler dieses Typs zeichnen sich dadurch aus, dass sich in ihrer Bearbeitung von sowohl *match-* wie auch *mismatch-Aufgaben* ein aufgabenadäquates Vorgehen abzeichnet. Dies lässt darauf schließen, dass der Schüler nicht nur erkannt hat, welche Vorgehensweise in der jeweiligen Aufgabe gefordert ist, sondern auch wenig Unsicherheiten zeigt im Umgang mit *match-* und *mismatch-Bearbeitungen*.

Typ II (adäquat – schlingernd)
Schüler, die dem Typ II angehören, zeigen in *match-Aufgaben* eine Vorgehensweise, die sowohl der Aufgabe entspricht als auch ihrem eigenen Denkstil. Entsprechend zeigen sich in match-Aufgaben wenig Schwierigkeiten bei der Wahl der Bearbeitungsweise. Demgegenüber zeigt sich jedoch in *mismatch-Aufgaben* eine gewisse Unsicherheit bezüglich der Vorgehensweise, die sich dadurch äußert, dass die Schüler zur Bearbeitung auf ihren eigenen Denkstil zurückgreifen müssen oder aber mithilfe von Argumentationen versuchen, zu einer Lösung zu gelangen.

Typ III (schlingernd – adäquat)
Schüler des Typ III weisen Unsicherheiten in *match-Bearbeitungen* auf, die sich darin verdeutlichen, dass die von der Aufgabe nahegelegte Bearbeitungsweise nicht gefunden wird und sich dementsprechend an andersgearteten Lösungs-

wegen versucht wird. Daneben zeigen die Schüler jedoch in *mismatch-Aufgaben* ein durchaus adäquates Aufgabenverhalten, dass sich darin äußert, dass die Aufgaben in der entsprechend geforderten und Vorgehensweise bearbeitet werden.

Typ IV (schlingernd – schlingernd)
Die Bearbeitungen von Typ IV-Schülern verdeutlichen sowohl bei *match-* als auch *mismatch-Aufgaben* Unsicherheiten in Bezug auf die Wahl der Vorgehensweise. Dies zeigt sich darin, dass sie die naheliegende Vorgehensweise in beiden Aufgabentypen nicht finden konnten und sich stattdessen darum bemühen, mithilfe eines anderen Lösungsansatzes zur Lösung zu kommen.

Die unterschiedlichen Typen ließen sich dabei nicht nur theoretisch konstruieren, sondern auch anhand der Daten aus der vorliegenden Studie bestätigt werden. Anhand der Daten wurde deutlich, dass die unterschiedlichen Typen nicht gleich verteilt sind.

		Denkstil		Gesamt
		analytisch	visuell	
Typ	adäquat – adäquat (Typ I)	38,24	25,68	30,55
	adäquat – schlingernd (Typ II)	29,41	66,22	53,70
	schlingernd – adäquat (Typ III)	20,59	0,00	6,48
	schlingernd – schlingernd (Typ IV)	11,76	8,11	9,26
Gesamt		100,00	100,00	100,00

Tab. 7.3.: Prozentuale Verteilung der Typen innerhalb der beiden Denkstile (vgl. Kapitel 6.2., Tab. 6.13.)

Die Zusammensetzung der Stichprobe aus der vorliegenden Studie in Bezug auf die identifizierten Typen zeigt, dass bei knapp einem Drittel der Schüler kein Unterschied in Bezug auf Unsicherheiten bei der Wahl der Vorgehensweise zwischen *match-* und *mismatch-Aufgaben* besteht. Entsprechend des Typ I bearbeiten diese Schüler alle Aufgaben aufgabenadäquat.

Allerdings zeigt sich auch, dass für die Mehrheit der Schüler der Zugang zu *match-Aufgaben* leichter fällt als bei *mismatch-Aufgaben*, was die zweite Hypothese, nach der es schwer fällt, entgegen des eigenen Denkstils zu arbeiten, zumindest in Teilen bestätigt.
Aber auch die Verteilung über die beiden Denkstile analytisch und visuell hinweg ist insofern bemerkenswert, als dass etwa zwei Drittel der Analytiker die formal-analytischen Aufgaben ohne gezeigte Unsicherheiten bearbeitet haben, während knapp drei Viertel der visuellen Denker Schwierigkeiten in eben jenen Aufgaben hatten. Umgekehrt zeigt sich, dass über 90% der Schüler mit visuellem Denkstil keine Probleme mit der Bearbeitung von visuell-bildlichen Aufgaben hatten, während etwa 40% der Analytiker Unsicherheiten bei der Wahl ihrer Vorgehensweise zeigten.

Für die weitere Forschung ergeben sich hieraus eine Reihe von neuen Fragen bzw. Anknüpfungspunkte, die den folgenden beiden Bereichen zuzuordnen sind:

- Ansatz für vertiefende Studien
- Konsequenzen für die Schule

Zunächst soll hier auf einige der Fragen eingegangen werden, die sich aus den bisherigen Ergebnissen für die weitere Forschung ergeben:

1. Inwieweit lassen sich die herausgearbeiteten Typen bei Schülern mit integriertem Denkstil ausmachen?

   Die Ergebnisse der vorliegenden Studie basieren auf dem Vergleich zwischen dem analytischen und dem visuellen Denkstil, da der integrierte Denkstil keine klare Präferenz für ein analytisches oder visuelles Vorgehen zeigt und somit die Unterscheidung zwischen *match-* und *mismatch-Aufgaben* nicht vorgenommen werden kann.
   Dennoch hält die Autorin es durchaus für möglich, dass sich bestimmte Aufgabentypen identifizieren lassen, die von Schülern mit integriertem Denkstil aufgabenadäquat bzw. schlingernd bearbeitet werden. Und insbesondere im Hinblick auf Ridings Auffassung des Denkstils als ein Konti-

nuum zwischen den Polen analytisch und visuell stellt sich die Frage, ob nicht bereits bei einer minimal ausgeprägten Bevorzugung, die vier Typen zu rekonstruieren sind.

2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Aufgabenempfinden und den identifizierten Typen?

In der vorliegenden Studie konnte bisher kein Zusammenhang zwischen den gezeigten Unsicherheiten bei der Wahl der Vorgehensweise (schlingernde Bearbeitung) und dem angegebenen Aufgabenempfinden der Schüler nachgewiesen werden. Es bleibt also weiterhin die Frage bestehen, ob sich ein entsprechender Zusammenhang mit anderen Aufgaben bestätigen lässt oder ob die Ursachen in der Zusammensetzung der Stichprobe zu suchen ist. So zeigt der Mittelwertvergleich des Aufgabenempfindens zunächst einmal, dass Schüler mit analytischem Denkstil auch visuell ausgerichtete Aufgaben leichter empfinden als dies Schüler mit visuellem Denkstil tun (vgl. Tab. 7.3.).

	Taschengeld	Hippokrates	Sparlineal	House of Dots	Regentonne	Streichhölzchen	Innenwinkel-summe	Seil um Äquator	Silverstone	Fakultäten
analytisch	2,06	1,02	1,69	2,44	1,52	1,70	1,46	1,26	1,79	0,83
visuell	1,51	0,50	1,63	2,32	0,78	1,65	1,35	0,79	1,23	0,64

Tab. 7.4.: Mittelwertvergleiche des Aufgabenempfindens (vgl. auch Kapitel 6.1., Tab. 6.3.)

Tabelle 7.2. ist hierbei zu entnehmen, dass insgesamt 58,83 % der Analytiker keine Unsicherheiten bei der Wahl ihrer Vorgehensweise in visuellen Aufgaben zeigen (Typ I und Typ III), sodass die Auffälligkeiten evtl. auf die Verteilung der Analytiker innerhalb der Typen zurückzuführen ist.

Allerdings räumt die Zusammensetzung der Analytiker, von denen 67,6 % das Gymnasium besuchen und 82,4 % Mathematik mögen auch die Möglichkeit ein, dass die Ursache für ein derartiges Ergebnis woanders liegt.

3. Warum zeigt der Vergleich von Schülern mit analytischem Denkstil gegenüber solchen des visuellen Denkstils, dass sie Aufgaben grundsätzlich als leichter empfinden und warum sind sie erfolgreicher bei ihrer Bearbeitung?

   Zur Klärung der Frage bedarf es weiterer Untersuchungen, die die hier hergestellte Verbindung daraufhin prüft, ob die Ursache für den Erfolg von Schülern mit analytischem Denkstil tatsächlich auf diesen zurückzuführen ist. Denn es ist ebenfalls möglich, wie bereits in Frage 2. angesprochen, dass die Ursache für die dargelegten Ergebnisse auf die Zusammensetzung der Stichprobe zurückzuführen ist.
   Eine andere Erklärung wäre jedoch auch die unterschiedliche mathematische Sozialisation, die in Gymnasien eher ein analytisches Vorgehen fokussiert, während in der Gesamtschule die Lösung von Aufgaben mit unterschiedlichen Mitteln im Vordergrund steht.

4. Sind die hier entworfenen Typen ebenfalls bei Studierenden, Lehrpersonen und Mathematikern zu rekonstruieren? Oder welchen Einfluss hat die Erfahrung im Mathematiktreiben auf die unterschiedlichen Typen?

   Die forschungsmethodische Entscheidung für die Durchführung an Schulen basiert auf der Annahme, dass Schüler die Ursache für ein evtl. Scheitern beim Lösen von denkstilnahen Aufgaben vorrangig auf ihre Kompetenzen, nicht aber auf ihren Denkstil, zurückführen. Mit einer derartigen Ursachenzuschreibung ist jedoch eine Reihe von Widerständen verknüpft, die den Schülern den Zugang zur Mathematik erschweren können und die es aufzubrechen gilt. Aus ebendieser Argumentation ist der Fokus auf Schüler gerichtet und scheint weiterhin von besonderer Bedeutung.

Jedoch schließt sich hier die Frage an, ob ein Zusammenhang zwischen der Ausprägung der Typen und der Erfahrung des Mathematiktreibenden besteht. So scheint es möglich, dass erfahrende Mathematiker zu Experten in ihrem eigenen Denkstil geworden sind und deshalb häufiger auch in *mismatch-Aufgaben* ihren eigenen Denkstil bevorzugen. Es scheint jedoch genauso möglich zu sein, dass durch die vielseitige Beschäftigung in der Mathematik die Flexibilität erhöht wurde und der Mathematiktreibende dementsprechend keine schlingernden Bearbeitungen zeigt.

Neben dem Ausblick auf weiterführende Forschung steht vor allem jedoch eine entsprechende Aufgabenanalyse als Konsequenzen für die Schule und das Lehrerhandeln im Vordergrund. Dies begründet sich in folgenden Zielsetzungen für den Mathematikunterricht:

Ein grundsätzliches Ziel des Mathematikunterrichts ist, dass Schüler „in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben“ (KMK 2003, S.6).

Die Kultusministerkonferenz formuliert bereits zu Beginn der Bildungsstandards, dass ein Ziel des Mathematikunterrichts die allgemeine Problemlösekompetenz ist und expliziert dies in der allgemeinen mathematischen Kompetenz Problemlösen als „geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien [...] auswählen und anwenden“ (KMK 2003, S.8). Das zeigt, dass eine grundsätzliche Forderung an Aufgaben im Mathematikunterricht ist, dass die Schüler die Möglichkeit zur Flexibilität im Lösen von Mathematikaufgaben haben. Doch auch, wenn eine derartige Flexibilität vor allem in solchen Aufgaben erreicht wird, die keine Bearbeitungsweise vorgeben, sodass die Schüler ihre Vorgehensweise ohne Einschränkungen selbst bestimmen, bleibt die Frage offen, inwieweit diese Flexibilität genutzt wird.
Insbesondere in Bezug auf den Denkstil ist anzunehmen, dass Schüler in offengehaltenen Aufgaben vor allem jene Aufgabenbearbeitungen verfolgen, die ihrer Art des Denkens entspricht.
Es scheint folglich notwendig, Schülern durch entsprechende Aufgaben auch in der Bearbeitungsweise zu unterrichten, die nicht ihrer bevorzug-

ten Art zu denken entspricht. Verdeutlicht ist dies auch in dem Zitat von Sternberg zu Beginn des Kapitels, in dem er die Begründung von *mismatch-Aufgaben* darin sieht, dass die Umwelt nicht immer Anforderungen an uns stellt, die unsere bevorzugten Art des Handelns entspricht. Weiter sieht er den Einsatz von *match-Aufgaben* jedoch darin, dass nur auf diese Weise die Schüler ihr tatsächliches Potenzial erkennen können (vgl. Sternberg 1997, S.115).

Als weiterer Aspekt, in der die Bedeutung der Ergebnisse der vorliegenden Studie deutlich wird, ist daneben die Differenzierung in Leistungssituationen zu nennen:

Die Notwendigkeit der Analyse nach dem inhärenten Denkstil der Aufgabe wird in der Leistungsmessung in Form von Klassenarbeiten deutlich. Ohne eine entsprechende Analyse, inwieweit die Aufgabe, die zur Leistungsmessung verwandt werden soll, einen bestimmten Denkstil nahelegt, kann es zu einer unbeabsichtigten Einseitigkeit kommen. Bezogen auf die hier ermittelte Verteilung der unterschiedlichen Typen führt dies dazu, dass bei einer Leistungsmessung mit vorrangig visuell-bildliche ausgerichteten Aufgaben 18,5 % der Schüler Schwierigkeiten bei der Bewältigung der Aufgaben haben, während bei einer formal-analytischen Ausrichtung 61,1 % der Schüler Schwierigkeiten mit entsprechenden Aufgaben zeigen.
Es schließt sich die Frage an, was bei einer Leistungsmessung getestet werden soll, denn ohne eine vorangestellte Analyse der Denkstilinhärenz von Aufgaben wird neben dem Wissen und der Verständnis der Inhalte auch geprüft, ob ein Schüler in der Lage ist, *mismatch-Aufgaben* zu bearbeiten.

Die hier angesprochenen Bereiche des Mathematikunterrichts zeigen auf, welches Potenzial in Mathematikaufgaben liegt, das bisher nicht in vollem Umfang genutzt wird. Darüber hinaus verdeutlichen die Ergebnisse dieser Studie jedoch auch, welche Schwierigkeiten sich bei der Bearbeitung ebensolcher Aufgaben bei Schülern einstellen. In ihrer Konsequenz fordert sie deshalb, die Sensibilität von Lehrkräften auf die Ausgestaltung von Aufgaben für den Mathematikunterricht zu lenken, um so Schülern der hier identifizierten Typen insbesondere in

Leistungssituationen zu ermöglichen, ihre tatsächliche Leistungsfähigkeit zu zeigen.

Literaturverzeichnis

Aeppli, J./ Gasser, L./ Gutzwiller, E. Tettenborn, A. (2016) Empirisches wissenschaftliches Arbeiten: Ein Studienbuch für die Bildungswissenschaften. Bad Heilbrunn: Klinkhardt Verlag

Beller, S./ Bender, A. (2010) Allgemeine Psychologie – Denken und Sprache. Göttingen u.a.: Hogrefe

BLK (1997) *Gutachten zur Vorbereitung des Programms "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"* (Vol. 60). Bonn: BLK.

Blum, W. (2010) Einführung. In: Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller, O. (Hrsg.) Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen, S. 17 – 32

Bloom, B.S./ Engelhardt, M.D./ Furst, E.J./ Hill, W.H./ Krathwohl, D.R. (1972) Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich. Weinheim u.a.: Beltz Verlag

Böhm, A. (2008) Theoretisches Codieren: Textanalyse in der Grounded Theory. In: Flick, U./ Kardoff, E.v./ Steinke, I. (Hrsg.) Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek: Rowohlts, S. 475 – 485

Borromeo Ferri, R. (2015) Mathematical thinking styles in schools and across cultures. In: Cho, S.J. (Hrsg.) Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. Cham: Springer, S. 153 – 174

Borromeo Ferri (2014) Präferenzen oder Fähigkeiten? – Mathematische Denkstile im Spannungsfeld von Persönlichkeit, Struktur und schulischer Sozialisation. In: Roth, J./ Ames, J. (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, Bd. 1. Münster: WTM, S. 13 – 20

Borromeo Ferri, R. (2012) Mathematical Thinking Styles and their Influences on Teaching and Learning Mathematics. In: 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea, S. 538 – 546

Borromeo Ferri, R. (2010) On the Influence of Mathematical Thinking styles on Learners' Modeling Behavior. In: *Journal für Mathematik-Didaktik Jg. 31(1),* S. 99 – 118

Borromeo Ferri, R. (2009) Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens. Kognitive Analyse zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht. Hamburg: Vieweg+Teubner

Borromeo Ferri, R. (2004) Mathematische Denkstile. Ergebnisse einer empirischen Studie. Hildesheim u.a.: Franzbecker

Bransford, J.D./ Stein, B.S. (1993) The Ideal Problem Solver: A guide for improving thinking, learning, and creativity. New York: W.H. Freemann

Brewer, J./ Hunter, A. (2006) Foundations of Multimethod Research. Synthesizing Styles. Thousand Oaks u.a.: Sage Publications

Bromme, R./ Seeger, F. Steinbring, H. (1990) Aufgaben, Fehler und Aufgabensysteme. In: Bromme, R./ Seeger, F. Steinbring, H. (Hrsg.) Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler. Köln: Aulis-Verlag Deubner, S. 1 – 30

Brunner, M./ Kunter, M./ Krauss, S./ Klusmann, U./ Baumert, J./ Blum, W./ Neubrand, M./ Dubberke, T./ Jordan, A./ Löwen, K./ Tsai, Y.-M. (2006) die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: konzeptionelleren, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In: Prenzel, M. (Hrsg.) Untersuchung zur Bildungsqualität von Schule: Ein Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms. Münster u.a.: Waxmann, S. 54 – 83

Buchholtz, N. (2016) Welchen Beitrag können Mixed Methods Studien zur mathematikdidaktischen Forschung leisten?. In: Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM, S. 197 – 200

Bühner, M. (2011) Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion. München: Pearson Education

Burton, L. (1997) Mathematics and their epistemologies – and the learning of mathematics. In: Schwank, I. (Hrsg.) European Research in Mathematics Education, Bd. 1, Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, S. 87 – 102

Burton, L. (1995) Moving towards a feminist epistemology of mathematics. In: *ZDM Mathematics Education 2008(40)*, S. 519 – 528

Burton, L. (1984) Mathematical Thinking: The struggle for Meaning. In: *Journal for Research in Mathematics Education 15(1)*, S. 35 – 49

Burzan (2015) Quantitative Methoden kompakt. Konstanz u.a.: UVK Verlag

Cohors-Fresenburg, E./ Brinkschmidt, S./ Armbrust, S. (2003) Augenbewegungen als Spuren prädikativen oder funktionalen Denkens. In: *ZDM Vol. 35(3)*, S. 86 – 93

Corbin, J./ Strauss, A. (2008) Basics of Qualitative Research. Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory. Los Aneles, Calif.: Sage Publications

Dikici, A. (2014). Relationships between thinking styles and behaviors fostering creativity: An exploratory study for the mediating role of certain demographic traits. In: *Educational Sciences: Theory and Practice 14(1)*, S. 179 – 201

Dörner, D. (1976) Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart: Kohlhammer

Doyle, W. (1983) Academic Work. In: *Review of Educational Research 53(2)*, S. 159 – 199

Drüke-Noe, C. (2014) Empirische Untersuchungen zur Aufgabenkultur in Klassenarbeiten neunter und zehnter Klassen im Fach Mathematik. In: Roth, J./ Ames, J. (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Münster: WTM, S. 313 – 316

Duncker, K. (1935) Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin: Springer

Eckes T. (1996) Begriffsbildung. In: Hoffmann, J./ Kintsch, W. (Hrsg.) Lernen. Göttingen u.a.: Hogrefe, S. 273 – 319

Emir, S. (2013) Contribution of Teachers' Thinking Styles to Critical Thinking Dispositions (Istanbul-Fatih Sample). In: *Educational Sciences: Theory and Practice 13(1),* S. 337 – 347

Eysenck, M.W. (1993) Principles of Cognitiv Psychology. Hove u.a.: Erlbaum

Fischer, A./ Hefendehl-Hebeker, L. (2009) Zur algebraspezifischen Ausprägung mathematischer Denkhandlungen. In: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Hildesheim: Franzbecker, S. 191 – 195

Flick, U./ Kardorff, E.v./ Steinke, I. (2008) Was ist qualitative Forschung? Einleitung und Überblick. In: Flick, U./ Kardorff, E.v./ Steinke, I. (Hrsg.) Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek: Rowohlt, S. 13 – 29

Flick, U. (2007) Qualitative Sozialforschung: Eine Einführung. Reinbek: Rowohlt

Friedrich, H.F./ Mandl, H. (1992) Lern- und Denkstrategien – Ein Problemaufriss In: Mandl, H. / Friedrich, H.F. (Hrsg.) Lern- und Denkstrategien. Analyse und Intervention. Göttingen u.a.: Hogrefe, S. 1 – 54

Funke, J. (2006) Komplexes Problemlösen. In: Funke, J. (Hrsg.) Denken und Problemlösen. Göttingen u.a.: Hogrefe, S. 375 – 446

Gagné, R.M. (2011) Die Bedingung des menschlichen Lernens. In: Rost, D.H. (Hrsg.) Standardwerke aus Psychologie und Pädagogik. Reprints. Münster u.a.: Waxmann, Original von 1977

Gigerenzer, G. / Gaissmaier, W. (2006) Denken und Urteilen unter Unsicherheit: Kognitive Heuristiken. In: Funke, J. (Hrsg.) Denken und Problemlösen. Göttingen u.a.: Hogrefe, S. 329 – 374

Gläser-Zikuda, M./ Seidel, T./ Rohlf, C./ Gröscher, A./ Ziegelbauer, S. (2012) Mixed Methods in der empirischen Bildungsforschung – eine Einführung in die Thematik. In: Gläser-Zikuda, M./ Seidel, T./ Rohlf, C./ Gröscher, A./ Ziegelbauer, S. (Hrsg.) Mixed Methods in der empirischen Bildungsforschung. Münster u.a.: Waxmann, S. 7 – 14

Göldi, S. (2011) Von der bloomschen Taxonomy zu aktuellen Bildungsstandards. Zur Entstehungs- und Rezeptionsgeschichte eines pädagogischen Bestsellers. Bern: hep Verlag

Goldstein, K.M. / Blackman, S. (1978) Cognitive Style. Five approaches and relevant research. New York u.a.: John Wiley & Sons

Graumann, C.F. (1971) Denken im Vorwissenschaftlichen Verständnis. In: Graumannn, C.F. (Hrsg.) Denken. Köln u.a.: Kiepenheuer & Witsch, S. 15 – 23

Grigorenko, A.F./ Sternberg, R.J. (1997) Styles of thinking, abilities, and academic performance. In: *Exeptional Children 63*, S. 295 – 312

Grigorenko, A.F./ Sternberg, R.J. (1995) Thinking Styles. In: Saklosfske, D./ Zeidner, M. (Hrsg.) International Handbook of Personality and intelligence. New York: Plenum, S. 205 – 229

Gürtler, L./ Huber, G.H. (2012) Triangulation. Vergleiche und Schlussfolgerungen auf der Ebene der Datenanalyse. In: Gläser-Zikuda, M./ Seidel, T./ Rohlf, C./ Gröscher, A./ Ziegelbauer, S. (Hrsg.) Mixed Methods in der empirischen Bildungsforschung. Münster u.a.: Waxmann, S. 37 – 50

Haggbloom, S.J./ Warnick, R./ Warnick, J.E./ Jones, V.K./ Yarbrough, G.L./ Russel, T.M./ Borecky, C.M./ McGahhey, R./ Powell II, J.L./ Beavers, J./ Monte, E. (2002) The 100 Most Eminent Psychologists of the 20th Century. In: *Review of General Psychology Bd.6(2)*, S. 139 – 152, letzter Abruf: 27.4.18

Harel, G. (2008) DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (2008)40*, S. 487 – 500

Hasemann, K./ Leonhardt, U./ Szambien, H. (2006) Denkaufgaben für die 1. und 2. Klasse. Berlin: Cornelsen

Hefendehl-Hebeker, L. (2007) Algebraisches Denken – was ist das? In: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim: Franzbecker, S. 148–151

Henn, H.-W./ Kaiser, G. (2001) Mathematik – ein polarisierendes Schulfach. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 4(3)*, S. 359 – 380

Hiebert, J./ Lefevre, P. (1986) Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In: Hiebert, J. (Hrsg.) Conceptual and procedural Knowledge: The Case of Mathematics. Hillsdale u.a.: Erlbaum Associates, S. 1 – 28

Hopf, C./ Rieker, P./ Schmidt, C. (1995a) Einleitung: theoretischer Hintergrund – Fragestellungen – Methoden. In: Hopf, C./ Rieker, P./ Sanden-Marcus, M./ Schmidt, C. (Hrsg.) Familie und Rechtsextremismus. Weinheim u.a.: Juventa, S. 11 – 30

Hopf, C. (1995b) Familie und Rechtsextremismus: Familiale Sozialisation und rechtsextreme Orientierungen junger Männer. Weinheim u.a.: Juventa

Hopf, C./ Schmidt, C. (1993) Zum Verhältnis von innerfamilialen sozialen Erfahrungen, Persönlichkeitsentwicklung und politischen Orientierungen. Dokumentation und Erörterung des methodischen Vorgehens in einer Studie zu diesem Thema. Hildesheim. URL: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0168-ssoar-456148, letzter Abruf: 29.12.17

Hussy, W. (1984) Denkpsychologie. Ein Lehrbuch. Band 1: Geschichte, Begriffs- und Problemlöseforschung, Intelligenz. Stuttgart u.a.: Verlag W. Kohlhammer

Jordan, A./ Krauss, S./ Löwen, K./ Blum, W./ Neubrand, M./ Brunner, M./ Baumert, J. (2008) Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. In: *JMD 29(2)*, S. 83 – 107

Jordan, A. / Ross, N. / Krauss, S. / Baumert, J. / Blum, W. / Neubrand, M. / Löwen, K. / Brunner, M. / Kunter, M. (2006) Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt. In: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung (Hrsg.) Materialien aus der Bildungsforschung Nr. 81

Kelle, U. / Erzberger, C. (2008) Qualitative und quantitative Methoden: kein Gegensatz. In: Flick, U./ Kardorff, E.v./ Steinke, I. (Hrsg.) Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek: Rowohlt, S.299 – 309

Kelle, U./ Kluge, S. (1999) Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung. Opladen: Leske+Budrich

Klein, F. (1926) Vorlesung über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin: Springer

Klein, F. (1921) Gesammelte mathematische Abhandlungen. Band 1. Berlin u.a.: Springer

Kluge, S. (1999) Empirisch begründete Typenbildung. Zur Konstruktion von Typen und Typologien in der qualitativen Sozialforschung. Opladen: Leske+Budrich

KMK (2003) Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Luchterhand

Knauff, M (2006) Deduktion und logisches Denken. In: Funke, J. (Hrsg.) Denken und Problemlösen. Göttignen u.a.: Hogrefe, S. 167 – 264

Kogan, N. (1976) Cognitive Styles in Infancy and Early Childhood. New York u.a.: John Wiley & Sons

Krathwohl, D.R./ Bloom, B.S./ Masia, B.B. (1975) Taxonomie von Lernzielen im affektiven Bereich. Weinheim u.a.: Beltz Verlag

Krutetzki, W.A. (1976) The psychology of Mathematical Abilitiesin Schoolchildren. Chicago: The University of Chicago Press

Kuckartz, U. (2014) Mixed Methods. Methodlogie, Forschungsdesigns und Analyseverfahren. Wiesbaden: Springer

Kuckartz, U. (2013) Statistik: Eine verständliche Einführung. Wiesbaden: Springer

Kuckartz, U. (2007) Einführung in die computergestützte Analyse qualitativer Daten. Wiesbaden: VS Verlag

Kunter, M./ Dubberke, T./ Baumert, J./ Blum, W./ Brunner, M./ Jordan, A./ Klusmann, U./ Krauss, S./ Löwen, K./ Neubrand, M./ Tsai, Y.-M. (2006) Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse. In: Prenzel, M./ Baumert, J./ Blum, W./ Lehmann, R./ Leutner, D./ Neubrand, M./ Pekrun, R./ Rost, J./ Schiefele, U. (Hrsg.) PISA 2003. Untersuchungen zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schuljahres. Münster u.a.: Waxmann, S. 161 – 194

Lamnek, S. (1993) Qualitative Sozialforschung. Band 1 – Methodologie. Weinheim: Beltz

Landis, J.R./ Koch, G.G. (1977) The measurement of observer agreement for categorical data. In: *Biometrics 33(1),* S. 159 – 174

Lithner, J./ Jonsson, B./ Granberg, C./ Liljekvist, Y./ Norqvist, M./ Olsson, J. (2013) Designing tasks that enhance mathematics learning through creative reasoning. In: Margolinas, C (Hrsg.) Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, UK, S.221 – 230

Maier, U./ Bohl, T./ Kleinknecht, M./ Metz, K. (2013) Allgemeindidaktische Kriterien für die Analyse von Aufgaben. In: Kleinknecht, M./ Bohl, T./ Maier, U./ Metz, K. (Hrsg.) Lern- und Leistungsaufgaben im Unterricht. Fächerübergreifende Kriterien zur Auswahl und Analyse. Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt

Maier, U./ Kleinknecht, M./ Metz, K. (2010) Ein fächerübergreifendes Kategoriensystem zur Analyse und Konstruktion von Aufgaben. In: Kiper, H./ Meints, W./ Peters, S./ Schlump, S./ Schmidt, S. (Hrsg.) Lernaufgaben und Lernmaterialien im kompetenzorientierten Unterricht. Stuttgart: Kohlhammer, S. 28 – 43

Maier, U./ Kleinknecht, M./ Metz, K. / Bohl, T. (2010) Ein allgemeindidaktisches Kategoriensystem zur Analyse des kognitiven Potenzials von Aufgaben. In: *Beiträge zur Lehrerbildung 28 (1),* S. 84 – 96

Mandl, H./ Gruber, H./ Renkl, A. (1994) Zum Problem der Wissensanwendung. In: *Unterrichtswissenschaft 22(3),* S. 233 – 242

Mazur, J.E. (2006) Lernen und Verhalten. München u.a.: Pearson

Meinefeld, W. (1997) Ex-ante Hypothesen in der qualitativen Sozialforschung: zwischen „fehl am Platz“ und „unverzichtbar“. In: *Zeitschrift für Soziologie Jg. 26(1)*, S. 22 – 34

Mietzel, G. (2017) Pädagogische Psychologie des Lernens und Lehrens. Göttingen: Hogrefe

Miller, A. (1987) Cognitive Styles: An integrated modell. In: *Educational Psychology 7*, S. 251 – 268

Moutsios-Rentzos, A./ Simpson, A. (2010) The thinking styles of university mathematics students. In: *Acta didactica Napocensia 3(4)*, S. 1 – 10.

Myers, I.B. (1980) Gifts differing. Palo Alto, CA: Consulting Psychologists Press

Neubrand, J. (2002) Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Hildesheim u.a.: Franzbecker Verlag

Nisbett, R. E./ Masuda, T. (2003) Culture and point of view. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences 100(19)*, S. 11163 – 11170.

Pauli, C./ Reusser, K. (2006). Von international vergleichenden Video Surveys zur videobasierten Unterrichtsforschung und -entwicklung. In: *Zeitschrift für Pädagogik 52(6)*, S. 774 – 798.

Pólya, G. (1967) Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern u.a.: Francke Verlag

Pólya, G. (1939) Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben? In: *Acta Psychologica 4*, S. 113 – 170

Raithel, J. (2008) Quantitative Forschung. Ein Praxiskurs. Wiesbaden: VS Verlag

Reyes-Santander, P. / Soto-Andrade, J. (2011) Mathematisches Denken. Grundvorstellungen und Metaphern. In: Haug, R./ Holzäpfel, L. (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2011(2) Münster: WTM, S. 683 – 686

Richardson, J.T.E. (1999) Imagery. Hove: Psychology Press

Riding, R. (2002) School Learning and Cognitive Style. London: David Fulton

Riding, R./ Rayner, S. (2012) Cognitive Styles and Learning Strategies. Understanding Style Differences in Learning and Behavior. London u.a.: Routledge, originally 1998

Roth, H. (1963) Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens. Hannover u.a.: Schroedel

Rott, B. (2013) Mathematisches Problemlösen. Ergebnisse einer empirischen Studie. Münster: WTM

Rubenstein, S.L. (1971) Das Wesen des Denkens und seine Komponenten. In: Graumann, C.F. (Hrsg.) Denken. Köln u.a.: Verlag Kiepenheuer & Witsch, S. 75 – 85

Schmidt, C (1997) „Am Material“: Auswertungstechniken für Leitfadeninterviews. In: Friebertshäuser, B./ Prengel, A. (Hrsg.) Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft. Weinheim u.a.: Juventa

Schwank, I. (2003) Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: *ZDM Vol. 35 (3)*, S. 70 – 78

Schwank, I. (1990) Zur Analyse kognitiver Strukturen algorithmischen Denkens. In: Haussmann, K./ Reiss, N. (Hrsg.) Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse. Göttingen: Hogrefe, S. 31 – 54

Schwank, I./ Armbrust, S./ Libertus, M. (2003) Prädikative versus funktionale Denkvorgänge beim Konstruieren von Algorithmen. In: *ZDM Vol. 35(3)*, S. 79 – 85

Seel, N.M. (2003) Psychologie des Lernens. Lehrbuch für Pädagogen und Psychologen. München u.a.: Ernst Reinhardt Verlag

Skemp, R.R. (1986) The Psychology of Learning Mathematics. Harmondsworth u.a.: Penguin Books

Stacey, K. (2006) What is mathematical thinking and why is it important? In: Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking, S. 39 – 48

Stein, M.K./ Grover, B.W./ Henningsen, M. (1996) Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. In: *American Educational Research Journal 33(2)*, S. 455 – 488

Steinke, I. (2007) Qualitätssicherung in der qualitativen Forschung. In: Kuckartz, U./ Grunenberg, H./ Dresing, T. (Hrsg.) Qualitative Datenanalyse: computergestützt. Methodische Hintergründe und Beispiele aus der Forschungspraxis. Wiesbaden: VS Verlag, S. 176 – 187

Sternberg, R.J. (2009) Cognitive Psychology. Bellmont, Calif. u.a.: Wadsworth

Sternberg, R.J. (1997) Thinking styles. Cambridge u.a.: Cambridge University Press

Sternberg, R.J. (1994) Thinking styles: theory and assessment at the interface between intelligence and personality. In: Sternberg, R.J. / Ruzgis, P. (Hrsg.) Personality and Intelligence. Cambridge u.a.: Cambridge University Press, S. 169 – 187

Sternberg, R.J./ Grigorenko, E. (2000) A Capsule History of Theory an Research on Styles. In: Sternberg, R.J. (Hrsg.) Perspectives on Thinking, Learning, and Cognitive Styles. Mahwah, N.J.: Erlbaum, S. 1 – 16

Sternberg, R.J./ Williams, W.M. (2002) Educational Psychology. Boston u.a.: Allyn and Bacon

Sternberg, R.J./ Zhang, L.-F. (2005) Styles of Thinking as a Basis of Differentiated Instruction. In: *Theory into Practice, 44(3)*, S. 245 – 253

Teddlie, C./ Tashakkori, A. (2006) A General Typology of Research Designs Featuring Mixed Methods. In: *Research in the Schools Vol. 13(1)*, S. 12 – 28

Tobies, R. (1987) Zur Berufungspolitik Felix Kleins. Grundsätzliche Ansichten. In: *NTM-Schriftenreihe Geschichte, Naturwissenschaft, Technik, Medizin 24(2)*, S. 43 – 52

Tobies, R. (1981) Felix Klein. Leipzig: Teubner

Vollstädt W.B. (2005) Leistungen ermitteln, bewerten, melden. Qualitätsinitiative SINUS. Weiterentwicklung des Unterrichts in Mathematik und in den naturwissenschaftlichen Fächern. In: Amt für Lehrerbildung (Hrsg.) Materialien zur Schulentwicklung H. 39, URL: http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienBT/leistungsbeurteilung_sinus_hessen.pdf, letzter Abruf: 9.2.18

Vollstedt, M. (2011) Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong: Eine rekonstruktiv-empirische Studie. Wiesbaden: Vieweg+Teubner

Walsch, W. (1984) Zur Bedeutung des Aufgabenlösens im Mathematikunterricht. In: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 1984. Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker, S. 58 – 65

Walther, G. (1985) Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht. In: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 1985. Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker, S. 28 – 42

Weigand, H.-G. (2012) Begriffe lehren – Begriffe Lernen. In: *mathematik lehren 23*, S. 2 – 9

Wilson, J. W./ Fernandez, M. L./ Hadaway, N. (1993) Mathematical problem solving. In: *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, S. 57 – 78

Wirtz, M./ Caspar, F. (2002) Beurteiler-übereinstimmung und Beurteilerreliabilität. Methoden zur Bestimmung und Verbesserung der Zuverlässigkeit von Einschätzungen mittels Kategoriensystemen und Ratingskalen. Göttingen u.a.: Hogrefe

Wittman, E. (2012) Üben im Lernprozess. In: Wittmann, E./ Müller, G. (Hrsg.) Handbuch produktiver Rechenübungen Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart u.a.: Klett Verlag

Woolfolk, A. (2008) Pädagogische Psychologie. München u.a.: Pearson Studium

Zhang, L.-F./ Sternberg, R.J. (2000) Are Learning Approaches and Thinking Styles Related? A Study in Two Chinese Popolations. In: *The Journal of Psychology 134(5)*, S. 469 – 489

In der Sekundarstufe I polarisiert insbesondere das Fach Mathematik wie kein zweites (vgl. Henn/ Kaiser 2001). Schülerinnen und Schüler lieben es oder sie hassen es, eher selten findet sich eine neutrale Einstellung. Eine mögliche Erklärung könnte hierbei die Theorie der mathematischen Denkstile liefern, die Personen Präferenzen für eine bestimmte Art und Weise mathematische Inhalte zu verstehen zuschreibt (vgl. Borromeo Ferri 2004).
In diesem Zusammenhang wurde in dieser Arbeit anhand von Mathematikaufgaben untersucht, wie Schülerinnen und Schüler Aufgaben bearbeiten, die einen der beiden Denkstile nahelegen. Die hierzu gemachte Unterscheidung zwischen *match*- und *mismatch-Aufgaben*, bezieht sich dabei auf die Passung vom Denkstil des Bearbeitenden und dem von der Aufgabe nahegelegen Denkstil.
Im Ergebnis ließen sich verschiedene Typen identifizieren, deren Souveränität bei der Bearbeitung von *match*- und *mismatch-Aufgaben* variiert.

ISBN 978-3-7376-0730-8

9 783737 607308 >