Kramer, Martin

Bruchrechnung begreifen durch Begreifen

Kassel : kassel university press 2019, X, 264 S. - (Dissertation, Universität Kassel, 2018)

Quellenangabe/ Reference:
Kramer, Martin: Bruchrechnung begreifen durch Begreifen. Kassel : kassel university press 2019, X, 264 S. - (Dissertation, Universität Kassel, 2018) - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-318188 - DOI: 10.25656/01:31818; 10.19211/KUP9783737606394

https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-318188
https://doi.org/10.25656/01:31818

Bruchrechnung begreifen durch Begreifen

Martin Kramer

kassel university press

Martin Kramer

Bruchrechnung begreifen durch Begreifen

kassel university press

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Humanwissenschaften der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Philosophie (Dr. phil.) angenommen.

Gutachter: Prof. Dr. Olaf-Axel Burow, Universität Kassel
Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri, Universität Kassel

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Oktober 2018

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2018
ISBN 978-3-7376-0638-7 (print)
ISBN 978-3-7376-0639-4 (e-book)
DOI: http://dx.medra.org/10.19211/KUP9783737606394
URN: https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0002-406390

www.upress.uni-kassel.de

Printed in Germany

Für die Schüler

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis I

Zusammenfassung 1

Einführung 3

Teil I Konstruktivismus und Systemtheorie im unterrichtlichen Kontext 9

Kapitel 1 Konstruktion von Wissen 11

1.1 Frühere Vorstellungen von Lernen und Lehren *11*
1.1.1 Materielle Vorstellung von Lernen und Lehren 11
1.1.2 Abbildendes Lernverständnis 13

1.2 Triviale und nicht-triviale Maschinen *15*
1.2.1 Triviale und nicht-triviale Maschinen 15
1.2.2 Nicht-triviale Maschinen 16
1.2.3 Der Schüler als nichttriviale Maschine 17

1.3 Das Bewusstsein des Lernenden als autopoietisches System *19*
1.3.1 Systeme 19
1.3.2 System und Umwelt 21
1.3.2.1 Autopoietische Systeme 21
1.3.2.2 Umwelt autopoietischer Systeme 22
1.3.3 Information 23
1.3.4 Bewusstseinssysteme 23
1.3.5 Biologische und psychische Systeme 24
1.3.5.1 Körper(system) und Bewusstseinssystem 24
1.3.5.2 Wissensvermittlung auf geistiger und körperlicher Ebene 25
1.3.6 Strukturelle Kopplung, Koevolution 25

1.4 Parallelitätsthese: körperliche und geistige Nahrung *27*
1.4.1 Nahrung als Umwelt des Systems 28
1.4.1.1 Nahrung als Umwelt des Systems 29
1.4.1.2 Strukturdeterminiertheit, Nicht-Existenz direkter Vermittlung 29
1.4.1.3 Die Bedeutung des Inhaltes 31
1.4.1.4 Bildungs- und Nahrungsangebot, Bildung als aktiver Prozess 33
1.4.1.5 Beschränktes Wachstum 33
1.4.1.6 Bildung und Nachhaltigkeit, Verdauungsprozesse 34
1.4.1.7 Ess- und Lernstörungen 35
1.4.2 Unbelebte, zeitliche und materielle Umgebung der Nahrung 35
1.4.2.1 Der Einfluss der Umgebung – die Umwelt von Unterricht 35
1.4.2.2 Ästhetik und Zweckhaftigkeit 36
1.4.2.3 Zeitliche Umgebung: Pausen und Schlaf 37
1.4.3 Soziale Umgebung der Nahrung 38
1.4.3.1 Gemeinsames Essen, lebendige Umwelten 38

1.4.4 Genese der Nahrung als Beziehungsarbeit 39
1.4.4.1 Verantwortung delegieren, „guter“ Unterricht 39
1.4.4.2 Unterrichtsmaterial und Heftaufschrieb 40

1.5 Modelle für das Lernen und Lehren aus einer systemisch-konstruktivistischen Sicht 40
1.5.1 Das Gehirn als Pflanze 41
1.5.2 Das Landschaftsmodell 44
1.5.2.1 Doppelte Passgenauigkeit von Unterricht 44
1.5.2.2 Stimmigkeit zwischen Stoffgebiet und Mensch 45
1.5.2.3 Lernen heißt Landkarten entwerfen 49
1.5.2.4 Lehrgänge und Landkarten – Bezug zu Martin Wagenschein 52
1.5.2.5 „Richtig und falsch“ – ein typisches Landkartenphänomen 54

1.6 Kartografie und Wissenskonstruktion 55
1.6.1 Strukturbildung, interne Landkarten entwickeln 55
1.6.1.1 Unterscheidungen 55
1.6.1.2 Anschlussfähigkeit 56
1.6.1.3 Erschließung eines Wissensgebiets 56
1.6.1.4 Beispiel zur Strukturbildung/Ausdifferenzierung 59
1.6.1.5 Konstruktive Diskussion = Landkarten vergleichen 61
1.6.2 Übertragung von Landkarten 63
1.6.2.1 Erfolgreiche Übertragungen, Verallgemeinerung im Landschaftsmodell 63
1.6.2.2 Beispiele für Übertragungen 65
1.6.2.3 Unglückliche Übertragungen: Verwechslung von Landkarte und Landschaft 66
1.6.3 Vernetzung von Wissenskonstruktionen im Landkartenmodell 68
1.6.3.1 Beginn der Erforschung eines unbekannten Wissensgebiets 68
1.6.3.2 Vernetzung zweier Wissensgebiete 69
1.6.4 Fächer und fächerübergreifendes Lernen 70
1.6.4.1 Länder und Gebietseinteilungen 70
1.6.4.2 Fächereinteilung und Reduktion der Komplexität 72
1.6.4.3 Die Landschaft ist prinzipiell fächerübergreifend 72
1.6.4.4 Beispiele für die fächerübergreifende Eigenschaft des Materials 74
1.6.4.5 Eine große schulische Gefahr: Die Landkarte des Lehrers lernen? 78

1.7 Fazit 80

Kapitel 2 Unterrichtliche Kommunikation 81

2.1 Kommunikationsvorgang als Emergenz 81
2.1.1 Unterricht als emergentes Ereignis – ohne Übertragung von Wissen 81
2.1.2 Unterricht ohne geradlinige Ursache-Wirkungs-Beziehung 81
2.1.3 Bezug zur Resonanzpädagogik 82

2.2 Konstruktion als Eigenleistung des Systems (Schüler) 83
2.2.1 Macht des Senders 83
2.2.2 Macht des Empfängers 83
2.2.3 Neues Rollenverständnis für den Lehrer 84

2.3 Kommunikation nach Niklas Luhmann 85

2.3.1 Unübertragbarkeit von Information/Wissen ... 85
2.3.2 Kommunikation als dreiteiliger Selektionsprozess ... 85
2.3.2.1 Selektion einer Information ... 85
2.3.2.2 Selektion der Mitteilung ... 86
2.3.2.3 Selektion des Empfängers, Verstehen einer Mitteilungsabsicht ... 86
2.3.3 Bedeutung des Materials im Kommunikationsprozess ... 86
2.3.3.1 Beispiel 1: Material Papier ... 87
2.3.3.2 Beispiel 2: Material Roboter ... 87

2.4 Experiment zur Demonstration subjektiver Konstruktionen ... 88
2.4.1 Das Gehirn als Datengenerator ... 88
2.4.2 Einfluss der Umgebung, verborgene Parameter bei der Wissenskonstruktion ... 89

2.5 Grundlegende Kommunikationsmodelle zur Gestaltung von Unterricht ... 91
2.5.1 Quadratur von Nachrichten (Schulz von Thun) ... 91
2.5.2 Duale Didaktik ... 92
2.5.2.1 Nachrichtenquadrat als Landschaft ... 92
2.5.2.2 Wertequadrat und Paradoxieentfaltung ... 93
2.5.2.3 Das „Herz der Sache“ ... 93
2.5.2.4 Freiheit und Struktur ... 93
2.5.3 Nachrichtenquadrat und Rollendefinition ... 94
2.5.3.1 Rolle des Schülers ... 95
2.5.3.2 Rolle des Lehrers ... 95
2.5.4 Das Kommunikationsmodell von Riemann-Thomann ... 96
2.5.4.1 Dauer- und Wechselstreben im Unterricht, Flow ... 96
2.5.4.2 Nähe- und Distanzstreben im Unterricht ... 97
2.5.5 Riemann-Thomann als Diagnoseinstrument für Lernumgebungen ... 98
2.5.6 Didaktische Anwendung des Riemann-Thomann-Modells: individuelle Beispiele, die Regel durch die Gruppe ... 99
2.5.6.1 Strukturbildung durch Beispiele ... 99
2.5.6.2 Verallgemeinerung mit Riemann-Thomann ... 100
2.5.6.3 Konsequenzen für den Unterricht: Konkrete Beispiele vs. allgemeine Merksätze ... 102
2.5.6.4 Mustererkennung bei negativer Erfahrung ... 103

2.6 Fazit ... 104

Teil II Gestaltung von Lernumgebungen ... 105

Kapitel 3 Rolle und Bühne ... 107

3.1 Rolle und Bühne als Umgebung einer Äußerung ... 107
3.1.1 Gleichzeitigkeit von Rolle und Bühne ... 108
3.1.2 Implizite und explizite Rollen und Bühnen ... 108

3.2 Die Bühne als Umwelt des Lernenden ... 109
3.2.1 Pädagogische Bühne ... 109
3.2.1.1 Zerstörung der Bühnenwirkung ... 109
3.2.1.2 Bühne als Schutzraum ... 110
3.2.2 Didaktische Bühne ... 110

3.2.2.1 Didaktische Reduktion ... 110
3.2.2.2 Experiment zur didaktischen Reduktion ... 111

3.3 „Grammatik der Bühne“: Gestaltpsychologie im Unterricht ... 112
3.3.1 Gesetz der Ähnlichkeit ... 113
3.3.1.1 Ähnlichkeit bei Dingen ... 113
3.3.1.2 Ähnlichkeit bei Menschen ... 114
3.3.2 Gesetz der Nähe ... 114
3.3.2.1 Unterschiedliche Nähe, noch mehr Gestaltung ... 116
3.3.2.2 Verwendung in der Sprache ... 116
3.3.2.3 Schülerexperimente ... 117
3.3.2.4 Schulische Welt und Wirklichkeit ... 117
3.3.3 Gesetz der Gleichzeitigkeit ... 118
3.3.3.1 Gleichzeitigkeit von Themen ... 118
3.3.4 Weitere Gestaltgesetze ... 118

3.4 Rolle und Rollenbelegung ... 119
3.4.1 Pädagogische Rollenbelegung ... 119
3.4.1.1 Direkte und indirekte Interventionen ... 119
3.4.1.2 Beispiel zur direkte Intervention – Rollenzuweisung ... 120
3.4.1.3 Verbindlichkeit durch Rollen ... 120
3.4.1.4 Eigenständige Rollenbelegung und -klärung ... 121
3.4.2 Didaktische Rollenbelegung ... 121
3.4.2.1 Verschiedene Sichtweisen durch verschiedene Rollen: ... 122
3.4.2.2 Didaktische Bedeutung der verschiedenen Sichtweisen ... 123
3.4.2.3 Verschiedene Rollen von Material und Begriffen ... 123
3.4.2.4 Theatrale Möglichkeiten didaktischer Rollen ... 123

3.5 Fazit ... 125

Kapitel 4 Nonverbale Kommunikationssysteme und „stille“ Feedbackschleifen ... 127

4.1 Unterricht als soziales System ... 127
4.1.1 Nonverbale Feedbackschleifen ... 127
4.1.2 Information im System – alle sehen alles ... 128
4.1.3 Drei Möglichkeiten von Nonverbalität ... 129

4.2 Äußerungen über den Körper ... 129
4.2.1 Ja-Nein-Äußerungen ... 129
4.2.2 Zahlen und Skalen ... 131
4.2.3 Über darstellendes Spiel ... 132
4.2.4 „Zerstörung“ der Bühne ... 133

4.3 Äußerungen über den Ort (2) ... 134
4.3.1 Beispiel einer Aufstellungsarbeit im Klassenzimmer: Einführung der Multiplikation ... 134
4.3.2 Spielfelder ... 135
4.3.3 Skalen ... 136
4.3.3.1 Lineare Skalen ... 136
4.3.3.2 Logarithmische Skalen ... 136

4.3.4 Zeitstrahl und Kalender 137
4.3.5 Raumhöhe 138
4.3.6 Rund- und Lehrgänge 138

4.4 Äußerungen über das Material (3) 139

4.5 Systemischer Blick auf nonverbale Kommunikationssysteme 139

4.6 Fazit 140

Kapitel 5 Material in Lernumgebungen 141

5.1 Lernen mit Körper und Geist 141
5.1.1 EIS-Prinzip 141
5.1.2 Verschränkung von körperlichem und geistigem Lernen 141
5.1.2.1 Reihenfolge der Repräsentationsformen in der Vermittlung 142
5.1.3 „4D-Lernen“ 143
5.1.3.1 Gleichzeitigkeit verschiedener Repräsentationsebenen (4D-Lernen) 143
5.1.3.2 Weitere Beispiele für vielkanaliges Lernen 144
5.1.3.3 Vieldimensionales Lernen 145

5.2 Wirkung des Materials 145
5.2.1 „Äußerung“ des Materials 145
5.2.1.1 Denken als Abhängigkeit von der individuellen Vorgeschichte 145
5.2.1.2 Uneindeutigkeit der Assoziation durch Vorerfahrung 146
5.2.2 Selbstbewertung durch das selbsterschaffene Bauwerk 147
5.2.3 Pädagogische Wirkung des Materials „Spielzeug“ 147

5.3 Didaktische Wirkung des Materials 148
5.3.1 Fächerübergreifende Wirkung 148
5.3.2 Binnendifferenzierende Wirkung 148
5.3.3 Mit Material lassen sich Daten erzeugen 149
5.3.3.1 Beispiel zur Datengenerierung 149

5.4 Gestaltung von Lernumgebungen durch Material 150
5.4.1 Appellcharakter des Materials 150
5.4.2 Gestaltung von Lernumgebungen 151

5.5 Fazit 152

Teil III Bruchrechnen mit Ketten und Zahnrädern 153

Kapitel 6 Typische Schwierigkeiten in der Bruchrechnung 155

6.1 Bestandsaufnahme 155
6.1.1 Probleme und typische Schülerfehler 155

6.2 Warum fällt Schülern Bruchrechnen schwer? 155
6.2.1 Erster Grund: Außerhalb der Mathematik 155
6.2.2 Zweiter Grund: Innerhalb der Mathematik 156
6.2.3 Dritter Grund: Unsichtbare Mathematik, gestaltpsychologisches Gesetz der Nähe 157
6.2.3.1 Gestaltpsychologie 157

6.2.4 Vierter Grund: Gelernte Konzepte lassen sich nicht übertragen 157

6.3 Ausweg: Modellbildung und Anschaulichkeit. *159*

6.3.1 Vier Gesichter eines Bruches und deren materielle Vereinigung in Übersetzungen 160

6.4 Fazit *160*

Kapitel 7 Konzeption „Bruchrechnen als Abenteuer" **163**

7.1 Flächen- vs. Operator- bez. Maschinenkonzept *163*

7.1.1 Kritik am Operatorkonzept 164

7.2 Reihenfolge im Lehrgang: Multiplikation vor Addition? *165*

7.2.1 Vorbemerkung: Lässt sich Wissensvermittlung ohne konkrete beteiligte Personen denken? ... 166

7.2.2 Gründe für die Multiplikation vor der Addition 166

7.2.2.1 Der Bruch ist ein multiplikatives Konzept 166

7.2.2.2 Handlungsorientierung 167

7.2.2.3 Innermathematische Gründe 167

7.2.2.4 Die Multiplikation in der Lebenswelt der Schüler 167

7.3 Ketten und Zahnräder – ein neues Konzept? *168*

7.3.1 Ketten und Zahnräder in der Literatur 168

7.3.1.1 Räder und Getriebe in mathe live, Schülerbuch 7 168

7.3.1.2 Multiplikation von Brüchen als Übertragungskette in Mathematik Lehren 171

7.3.2 Bruchrechnen als Abenteuer – ein neues Konzept! 171

7.3.2.1 Konzept der Handlungs- und Denkorientierung: handeln und denken 171

7.3.2.2 Stoffliche Inhalte 172

7.3.2.3 Anordnung des Stoffes durch das Material 172

7.4 Isomorphismus zwischen der multiplikativen Gruppe der positiven Brüche $\mathbb{Q}+, \cdot$ und der multiplikativen Gruppe der Übersetzungen *173*

7.4.1 Die multiplikative Gruppe der Übersetzungen 173

7.4.2 Weitere strukturelle Kopplungen zwischen Getrieben und Brüchen 174

7.5 Fazit *175*

Kapitel 8 Bruchrechnung als Abenteuer: Modellbildung mit Ketten und Zahnrädern **177**

8.1 Übersicht und materielle Voraussetzung *177*

8.1.1 Darstellung von Brüchen 177

8.1.2 Baukasten und materiell beschränkter Zahlenraum 177

8.1.2.1 Inhalte des Getriebebaukastensystems 177

8.1.2.2 Das Material im Kasten erzeugt keine multiplikative Gruppe 178

8.1.3 Konkrete Modellierung 179

8.1.3.1 Anatomie eines Bruch-Operators 182

8.1.3.2 Die verschiedenen Zahlenbereiche und ihre Modellierung 183

8.1.3.3 Grenzfälle der Übersetzung: Die Null im Bruch 186

8.2 Modellierung rationaler und irrationaler Verhältnisse *187*

8.2.1.1 Haptische Deutung der Potenz 187

8.2.2 Rationale und irrationale Wurzeln 187

8.2.3 Irrationale Verhältnisse und der Zahlenkörper $\mathbb{R}$ 188
8.2.4 Einbettung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ 188
8.2.5 $\mathbb{Q}$ ist Nullmenge in $\mathbb{R}$ 189
8.2.6 Negative irrationale Zahlen 189

8.3 Modellierung von Bruchzahl, Äquivalenzklasse, des Kürzens und Erweitern 190
8.3.1 Bruchzahl und Äquivalenzklasse 190
8.3.2 Exkurs: Abzählbarkeit 190
8.3.3 Kürzen und Erweitern 192
8.3.4 Interpretation von „$\mathbf{0}:\mathbf{0}$“, propädeutische Annäherung an die Differentialrechnung 192

8.4 Modellierung der Multiplikation von Brüchen 193
8.4.1 Multiplizieren als Hintereinanderschaltung zweier Übersetzungen 193
8.4.2 Haptisches Nachvollziehen der Rechenregel „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“ 194
8.4.2.1 Aufbau von Gleichungen bzw. Doppelgetrieben (innerhalb der multiplikativen Gruppe) 194
8.4.2.2 Aufbau der Gleichung $\mathbf{2}:\mathbf{3}=\mathbf{2}/\mathbf{3}$, Teilen durch ganze Zahlen 194
8.4.2.3 Zerlegung des Terms $\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{cd}$ 195

8.5 Exkurs I: Modellierung von Potenzen und exponentiellem Wachstum 196
8.5.1 Potenzieren 196
8.5.2 Veranschaulichung der nullten Potenz und negative Hochzahlen 197
8.5.3 Potenzgesetze 198
8.5.4 Exponentieller Zerfall, Grenzwerte 198

8.6 Modellierung der Division von Brüchen 199
8.6.1 Division mittels inversem Element 199
8.6.1.1 Anwendung: Umkehrbruch 200

8.7 Modellierung negative Brüche, Rolle des Minus als Vorzeichen und Operator 200
8.7.1 Darstellung negativer Brüchen 200
8.7.2 Unterscheidung: Vorzeichen bei Zahl und Operator 201
8.7.3 Richtungskodierung, Rollenklarheit 202
8.7.4 Minus mal Minus (Operator mal Operator) 202
8.7.5 Minus mal Minus: Minus im Operator und Vorzeichenminus im Vergleich 203
8.7.6 Aufbau der Operatoren: $+\mathbf{2}/+\mathbf{1}=-\mathbf{2}/-\mathbf{1}=+\mathbf{2}/\mathbf{1}$ und $+\mathbf{2}/-\mathbf{1}=-\mathbf{2}/+\mathbf{1}=-\mathbf{2}/\mathbf{1}$ 204

8.8 Exkurs II: Modellierung linearer Funktionen 204
8.8.1 Modellierung linearer Funktionen als lineare Maschinen 204
8.8.1.1 Bemerkung: Minus als Operator und Vorzeichenminus 205
8.8.2 Spezielle realisierbare Maschinen 205
8.8.3 Modellierung affin-lineare Funktionen 206
8.8.4 Modellierung der Steigung als Übersetzungsverhältnis 207
8.8.5 Modellierung von Funktion und Umkehrfunktionen 208
8.8.6 Zusammenhang zwischen linearen und exponentiellen Funktionen 208

8.9 Brüche vergleichen, kleinstes gemeinsames Vielfaches im Modell 209
8.9.1 Größer- und Kleinerrelation 209
8.9.2 Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) 210

8.10 Modellierung der Addition 211

8.10.1 Addition ganzer Zahlen ... 211
8.10.2 Addition von Brüchen ... 212
8.10.2.1 Haptische Durchführung der Addition ... 212
8.10.2.2 Zwei weitere Beispiele ... 213

8.11 Fazit ... 214

Kapitel 9 Umsetzung in Klasse 6 ... 215

9.1 Durchgeführter Lehrgang im Überblick ... 215

9.2 Einführung des Modells – ein erstes Produkt ... 216
9.2.1 Erste Begegnung mit einem Getriebe ... 217
9.2.2 Material als Datengenerator ... 217
9.2.3 Die Auflösung: das Getriebe als Modell für $2 \cdot 4$ ... 219

9.3 Teamtraining: Exponentielles Wachstum ... 219
9.3.1 Phase I: Der Schüler wird zum Operator „$\cdot\ 1/2$“ ... 220
9.3.2 Phase II: Aufgabenstellung ... 221
9.3.2.1 Konkrete Aufgabenstellung ... 221
9.3.2.2 Pädagogische Bemerkung: Besser als man selbst ... 223
9.3.2.3 Mögliche Hilfen ... 224
9.3.2.4 Mögliche Hilfen ... 224
9.3.3 Phase III: Das Experiment ... 226
9.3.3.1 Ergänzung: Reflexion des Teamgeistes, Prüfung der Arbeitsfähigkeit ... 227
9.3.3.2 Einfühlung in exponentielles Wachstum bzw. Zerfall ... 228
9.3.3.3 Zusatz zu Phase II: Ein Rätsel ... 228

9.4 Fazit ... 230

Kapitel 10 Kritische Reflexion und Ausblick ... 231

10.1 Erfahrungsbezogener Ansatz ... 231

10.2 Weiterführende Forschungsfragen ... 231
10.2.1 Beziehung zwischen Mensch und Mathematik ... 232
10.2.2 Mathematik als Erlebnis ... 232
10.2.3 Transfervermögen ... 232
10.2.4 Nachhaltigkeit der Fachlichkeit ... 233

10.3 Empirischen Schwierigkeiten ... 233
10.3.1 Subjektive Didaktik ... 233
10.3.2 Reduktionismus vs. Holismus ... 233
10.3.2.1 Leitfadengestütztes Interview ... 234
10.3.3 Grenzen der empirischen Forschung ... 234

10.4 Zwei Vorschläge für empirische Untersuchungen ... 235
10.4.1 Forschungsfragen ... 236
10.4.2 Randomisierung, Kontrollgruppen ... 236
10.4.3 (1) Untersuchung der individuellen Beziehung zur Mathematik und deren Korrelation zur fachlichen Leistung ... 236

10.4.4 (2) Untersuchung auf enaktiver Ebene per Adventure-Room 237

Kapitel 11 Anhänge **239**

11.1 Erstellte Arbeitsblätter *239*

11.2 Exemplarische Rückmeldung *241*

11.3 Konkreter Ansatz eines Leitfadengestützten Interviews *241*

11.3.1 Entwicklung der Fragen 242

11.3.1.1 Entwicklung der Interviewfragen 242

11.3.2 Design des Interviews: explizite und implizite Fragestellungen 244

11.3.2.1 Finale Fragen 245

11.3.2.2 Reihenfolge der finalen Fragen 247

Dank und unterrichtliche Umsetzung **249**

Abbildungsverzeichnis **251**

Literatur **257**

Zusammenfassung

Der radikale Konstruktivismus und die Systemtheorie zeigen den Menschen als nicht-triviale Maschine (Foerster 2015) und das menschliche Bewusstseinssystem als autopoietisches, operativ abgeschlossenes System (Maturana 1982). Eine direkte Übertragung von Information zwischen Bewusstseinssystemen und zwischen Bewusstseinssystem und Umwelt ist nicht möglich (Luhmann 2012). Vor diesem Hintergrund muss Lernen und Lehren neu konzeptualisiert werden.

Unterricht kann hierbei als soziales System aufgefasst werden, dessen elementaren Einheiten aus Kommunikationen bestehen. Der Empfänger (Schüler) rückt in der kommunikativen Sichtweise in den Vordergrund, Unterricht wird, im Sinne Luhmanns, von hinten aufgerollt: Der Schüler entscheidet, was gelehrt wurde.

Um dieser systemisch-konstruktivistischen Herausforderung gerecht zu werden, braucht es didaktische Modelle und konkrete Handlungsstrategien für den Unterricht.

Am Beispiel der Bruchrechnung wird ein Unterricht realisiert, der auf einer systemisch-konstruktivistischen Sichtweise basiert. Bisher gibt es noch keinen Unterricht der Bruchrechnung, der konsequent handlungs- und erlebnisorientiert, mit einem altersgerechten Modell alle zentralen und relevanten Themen modelliert.

Das Konzept basiert auf einem Isomorphismus zwischen der multiplikativen Gruppe der Brüche und der Gruppe der materiellen Übersetzungen mit ihrer Verknüpfung. Durch die Entsprechung des Materiellen und der Abstraktion ist ein „begreifen durch Begreifen“ möglich.

Die Welt der Brüche ist Gegenstand geistiger Vorstellungen und findet innerhalb des Bewusstseins des Lernenden statt. Die materielle Welt der Übersetzungen operiert auf haptischer Ebene. Sowohl das körperliche als auch das geistige System sind strukturell gekoppelt, d. h. sie irritieren sich gegenseitig. Damit gibt es zwei Ebenen eines Lernangebotes, die eine ist körperlicher, die andere geistiger Natur. Modellierung wird also zirkulär gedacht, einerseits hilft das Modell dem Lernenden, das Abstrakte zu verstehen, andererseits hilft das Abstrakte, das Modell exakter zu betrachten und weiter auszubauen. Die geistige als auch die materielle Konstruktion entwickeln sich gemeinsam in einer Koevolution. Entfernt man aus dieser z. B. den materiellen Anteil, so wird der gesamte (ganzheitliche) Lernvorgang empfindlich gestört.

Einführung

Durch den radikalen Konstruktivismus (Glaserfeld 2009, Foerster 2015) und die Systemtheorie (Maturana 1982, Luhmann 2012) hat sich in den letzten Jahrzehnten die Theorie des Lernens und Lehrens grundlegend verändert. Die Vorstellung, dass Information direkt vom Lehrer an den Schüler in irgendeinem Sinne weitergereicht werden kann, scheint der Vergangenheit anzugehören. Aus heutiger Sicht ist Lernen kein abbildender Prozess: *„Das Lernen von Mathematik ist ein konstruierend-entdeckender Prozess, der sich an bereits vorhandene Kompetenzen anschließt und zu intensivem Nachdenken über mathematische Sachverhalte anregt.“* (Bildungsplan 2016).

Die veränderte Sichtweise konzeptualisiert Lernen und Lehren völlig neu und stellt bisher selbstverständliche Dinge in Frage. So ist aus systemischer-konstruktivistischer Sicht das Bewusstseinssystem des Schülers autopoietisch, d. h. strukturell gegenüber seiner Umwelt abgeschlossen: *„Das Nervensystem wird als Einheit (d. h. als System) definiert durch Relationen, die es als geschlossenes Netzwerk interagierender Neuronen auf solche Weise konstituieren, dass jegliche Veränderung des Zustands relativer Aktivität einer Menge von Neuronen zu einer Veränderung des Zustands relativer Aktivität einer anderen oder derselben Menge von Neuronen führen: alle Zustände neuronaler Aktivität im Nervensystem führen stets zu anderen Aktivitätszuständen des Nervensystems.“* (Maturana 1982, S.142). Niklas Luhmann schreibt weiter: *„Das Nervensystem hat als ein geschlossenes neuronales Netzwerk weder Input noch Output, und es gibt kein Merkmal seiner Organisation, das es ihm ermöglichte, in der Dynamik seiner Zustandsveränderungen zwischen möglichen internen oder externen Ursachen für diese Zustandsveränderungen zu unterscheiden.“* (Luhmann 2012, S. 193)

Es gibt also keine Schnittstelle zwischen dem Bewusstseinssystem des Lehrers und dem des Schülers. Damit ist die Idee von Bildung als Informationsübertragung bzw. einer Wissensvermittlung in dem Sinne, dass der Sender (Lehrer) etwas von sich gibt, das dann beim Empfänger (Schüler) „ankommt“, nicht aufrechtzuerhalten. „*Die ankommende Nachricht ist ein Machwerk des Empfängers. (…) Im Unterschied zu Paketen, die mit der Post ankommen, ist der empfangende Inhalt (…) nicht gleich dem abgesendeten Inhalt*.“ (Schulz von Thun 1981, S. 61). Luhmann geht noch einen Schritt weiter: *„Die Übertragungsmetapher ist unbrauchbar, weil sie zu viel Ontologie impliziert. Sie suggeriert, dass der Absender etwas übergibt, was der Empfänger erhält. (…). Die Übertragungsmetapher legt das Wesentliche der Kommunikation in den Akt der Übertragung, in die Mitteilung. Sie lenkt die Aufmerksamkeit und die Geschicklichkeitsanforderungen auf den Mitteilenden. Die Mitteilung ist aber nichts weiter als ein Selektionsvorschlag, eine Anregung.“* (Luhmann 1984, S. 193). Lernen ist demnach ein interner Vorgang, Wissen kann nicht (von außen) übertragen werden. Somit kann Schulstoff nur als Anregung, als Lernangebot, verstanden werden, und nicht in irgendeinem Sinne „verabreicht“ oder „durchgenommen“ werden. Der „Stoff“ stellt in dieser

Arbeit die (äußere) Lernumgebung dar, Wissen bzw. Informationen existieren gar nicht außerhalb von Bewusstseinssystemen und können insbesondere auch nicht übertragen werden. *„Informationen kommen nicht in der Umwelt, sondern nur im System* [dem Lernenden] *selbst vor. Sie können also nicht als identische Einheiten aus der Umwelt in das System transportiert werden. (…) Denn Informationen setzten einen Entwurf von Möglichkeiten voraus, aus denen sie eine (und keine andere) auswählen. Solche Konstruktionen sind aber stets Eigenleistungen des Systems und nicht ‚Daten' der Umwelt."* (Luhmann 1990, S. 104, Klammerbemerkung von mir).

Es stellt sich die Frage, wie Lernen überhaupt geschehen kann: *„Wie kommt das Bild der Realität in das erkennende Individuum hinein (…)?"* (Simon 2013, S. 48).
Betrachtet man den Lernenden in seiner Interaktion von außen, so stellt man fest, dass dieser *„die Objekte, die er zu erkennen sucht, manipuliert. Er versucht sie zu „begreifen" indem er sie im wahrsten Sinne des Wortes begreift. (…) Er dreht und wendet die Dinge hin und her und blickt sie aus unterschiedlichen Perspektiven an, um sich ein Bild von ihnen machen zu können usw. (…) Es sind seine neuronalen Aktivitäten, die sein äußerlich wahrnehmbares Verhalten bedingen (z. B. die Innervation der Muskeln, die es ihm ermöglichen zu greifen), und die Welt der „Gegenstände" (die ihm bzw. seiner Motorik „entgegenstehen") sorgt dafür, das andere seiner neuronalen Aktivitäten (die Erregung sensorischer Zellen) an die motorischen Aktivitäten anschließen."* (Simon 2013, S. 47, S. 48) Das impliziert, dass der Lernende aktiv sein muss und begründet einen handlungs- und erlebnisorientierten Ansatz. Weiter braucht es ein „Außen", damit überhaupt gelernt werden kann. Dieses Außen ist die Umgebung des Lernenden und wird wie in der Literatur üblich als „Lernumgebung" bezeichnet. Da das Außen und nicht die internen Strukturen vom Lehrer direkt beeinflusst werden kann, wird folgerichtig der Fokus auf ein indirektes Lernen gelegt. Die zentrale didaktische Frage lautet daher: Wie lässt sich die Umgebung der Lernenden so gestalten, dass das gelernt wird, was (aus Sicht eines äußeren Beobachters, z. B. des Lehrers oder des Kultusministeriums) gelernt werden sollte?

Die derzeitige Situation
Auch wenn der systemisch-konstruktivistische Ansatz in der Forschung verbreitet ist, zeigt *„ein kurzer Blick in die derzeitige unterrichtliche Kommunikation folgendes Bild: Unterricht wird heute vielfach als ein vorfabriziertes Konstrukt aus Informationen, Daten und Zusammenhängen häufig in einer Kurzzeit-Didaktik schnell und übersichtlich als Fertigmontage des Lehrenden für den Lernenden ausgesendet."* (Kösel 2007, S. 29). Üblicherweise wird Unterricht bzw. Wissensvermittlung in der schulischen Praxis noch immer in einem technischen Sinne verstanden bzw. vom Sender her gedacht. Dieser erscheint als der aktive Teil, er handelt, während der Empfänger scheinbar nur zuhört und eher eine passive Rolle einnimmt. *„All diese* [am Sender orientierten und

gedachten] *Gedanken und Methoden ist gemeinsam, dass sie Lernen als einen passiven Vorgang begreifen: Ein zu lernender Inhalt gelangt durch Lernen irgendwie in unseren Kopf.*“ (Spitzer 2009, S. 2). Spitzer beschreibt weiter die mechanische Vorstellung von Lernen: *„Jeder kennt den Nürnberger Trichter. Man setzt ihn am Kopf an, so etwa in der Mitte, und gießt dann oben das hinein, was gelernt werden soll. (…) Dummerweise gibt es den Nürnberger Trichter nicht.“* (ebd.) Tagebucheinträge, Lehr- und Stoffverteilungspläne oder Curricula legen den Fokus auf den Sender, ob der Stoff (von der Organisation Schule bzw. vom unterrichtenden Lehrer) durchgenommen wurde. Spitzer schreibt hierzu weiter: *„Kein Wunder also, dass gegenwärtig die Trichter-Metapher des passiv gedachten Lernens ganz besonders stark in Gestalt des Marktes für Multimediaprodukte, Computer und Lernsoftware boomt. (…) Und es scheint, als würden viele Menschen dies tatsächlich glauben.“* (ebd.)
Ein materiell gedachtes Lernkonzept, das im Auffüllen eines Gehirns mit Daten besteht, scheint also für viele Menschen naheliegend zu sein. Aber *„das Gehirn ist kein Datenspeicher, sondern ein Datengenerator durch die autonome Organisation der Speicherung und Verknüpfung von Informationen und der Konstruktion von deren Bedeutungen.“* (Herrmann 2009, S. 11) Die Auffassung, dass Wissen wächst und nicht von außen verabreicht werden kann, ist nicht neu. Maria Montessori spricht vom Kind als *„Baumeister seiner selbst*“, François Rabelais wählt das Bild des Feuers: *„Ein Kind ist kein Gefäß, das gefüllt, sondern ein Feuer, das entzündet werden will.*“

Bruchrechnung als Beispiel für eine Umsetzung, die auf einem systemisch-konstruktivistischen Konzept basiert

Eine systemisch-konstruktivistische Didaktik (Reich 2002) führt zu andern Handlungsstrategien als klassische/maschinelle Sichtweisen. Die vorliegende Arbeit zeigt Handlungsstrategien eines Unterrichts, der auf systemisch-konstruktivistischer Überlegungen basiert, am Beispiel der Bruchrechnung auf. Diese ist ein komplexes und didaktisch schwieriges Thema, für die eine durchgängige, konsequente Handlungs- und Erlebnisorientierung bisher noch nicht existiert und für die Modellierung und Handlungsstrategien gefragt sind: *„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden. Diesen Fehler kann man an fast allen Stoffgebieten der Schulmathematik beobachten. Die Bruchrechnung ist aber ein besonders geeignetes Studienobjekt.“* (Malle 2004, S. 4). Es fehlt also an Modellvorstellungen, auch wenn *„die Bruchrechnung verbreiteterweise anschaulich begonnen wird, bald aber werden – im guten Glauben, die Schülerinnen und Schüler hätten nun verstanden, was Brüche sind – Rechenregeln ohne tieferen Bezug zur Anschauung abgeleitet. Damit hat man zwar einige Impressionen vermittelt, aber den potentiellen Nutzen der*

Veranschaulichung für ein verständnisvolles Lernen mehr oder weniger verfehlt." (Winter 2016, S. 190f). Susanne Prediger fügt hinzu: *„Empirische Untersuchungen zeigen immer wieder, dass gerade nicht hinreichend entwickelte inhaltliche Vorstellungen ein Hindernis auch für die Mathematisierungskompetenzen darstellen."* (Prediger 2007). Friedhelm Padberg bestärkt diese Aussage: *„Nur 2 der von Malle/Huber untersuchten 170 Schüler antwortete mit anschaulichen Grundvorstellungen auf die Frage ‚Was stellst du dir unter $\frac{4}{5}:\frac{2}{5}$ vor?' Praktisch alle ließen die Aufgabe aus oder antworteten mit rein formalen Rechnungen ohne jegliche anschauliche Vorstellung."* (Padberg 2015, S. 153). Dabei ist die Bedeutung der Anschaulichkeit keineswegs neu: *„Alles klare und sichere Erkennen der Jugend geht aus Anschauungen und nur aus Anschauungen hervor, sowohl das Erkennen äußerer Dinge als das Erkennen innerer Zustände des Geistes selbst. (…) Gehe vom Anschaulichen aus und schreite von da aus zum Begrifflichen fort, vom Einzelnen zum Allgemeinen, vom Konkreten zum Abstrakten, nicht umgekehrt.*" (Diesterweg 1970, S. 23)

Weiter besteht auch bei der Bruchrechnung die berechtigte Forderung, dass die Mathematik in außermathematischen Zwängen von Belang sein sollen: *„Ernsthafte Anwendungen (vs. wohlfeile Veranschaulichungen) bestehen immer in Modellbildungen, die ihrerseits auch das zu diskutierende Spannungsverhältnis zwischen innermathematischer Reinheit und außermathematischen Zwängen, Beschränkungen, Unordnungen betreffen."* (Winter 2009, S. 2).

Aufbau der Arbeit

Es stellt sich die Frage, wie ein Unterricht aussehen kann, der die Modellierung in den Mittelpunkt stellt und zugleich begrifflich-anschaulich ist. Wie lässt sich eine indirekte Didaktik über Lernumgebungen in einem systemisch-konstruktivistischen Sinne realisieren? Die Antworten werden in drei Teilen gegeben.

In Teil I werden Konstruktivismus und Systemtheorie im Kontext von Unterricht betrachtet.

Kapitel 1 beschreibt den Schüler im Sinne von Foerster als nicht-triviale Maschine. Sein Bewusstseinssystem ist autopoietisch und damit insbesondere strukturell abgeschlossen. Auch der biologische Körper des Schülers bildet ein autopoietisches System. Beide Systeme lassen sich aufeinander abbilden (Parallelitätsthese) und ermöglichen eine Anschaulichkeit von Lernprozessen. Beide Systeme (Körper und Geist) sind strukturell miteinander gekoppelt, was die Grundlage von handlungs- und erlebnisorientierten Lernens darstellt. Weiter wird ein zur Gestaltung von Lernumgebungen passendes Landschaftsmodell entwickelt, das Lernen als die Erstellung einer internen (subjektiven) Landkarte beschreibt.

Kapitel 2 zeigt unterrichtliche Kommunikation als Emergenz. Kommunikation wird im Sinne von Luhmann als dreiteiliger Prozess konzeptualisiert, dabei kommt dem Empfänger (Schüler) die zentrale Rolle zu. Dessen Bewusstseinssystem erschafft sich aufgrund seinen internen Strukturen eine subjektive Wirklichkeit (Landkarte). Zwei Kommunikationsmodelle werden zur Gestaltung von Lernumgebungen herangezogen.

In Teil II werden drei zentrale Gestaltungsmöglichkeiten von Lernumgebungen aufgezeigt, die in Teil III ihre Anwendung finden.
Kapitel 3 konzeptualisiert Rolle und Bühne als Umwelten des Bewusstseinssystems des Schülers. Dabei wird unter didaktischen und pädagogischen Rollen unterschieden. Mittels Rollenbelegungen kann das soziale System vom Lehrer gestaltet werden. Die Bühnenwirkung ermöglicht ihm einen Fokus zu setzen, so dass die Aufmerksamkeit der Schüler in eine Richtung gelenkt werden kann. Gestaltpsychologische Gesetze spielen hier eine zentrale Rolle.
Kapitel 4 führt in nonverbale Kommunikationssysteme ein. Da das soziale System Unterricht aus Kommunikationen besteht, lässt sich mit der Veränderung dieser elementaren Einheiten (von verbal auf nonverbal) das Geschehen im Klassenraum massiv verändern, was für die Praxis der Gestaltung sehr bedeutsam ist. Im Wesentlichen wird die Idee der aus der systemischen Therapie bekannten Aufstellungsarbeit auf fachliche Themen (statt auf Beziehungsthemen) angewendet.
Schließlich wird in Kapitel 5 die Rolle des Materials (als Teil der Umgebung) gesondert untersucht. Es ermöglicht ein verschränktes, d. h. verbindendes und verknüpfendes, Lernen von Körper und Geist. Die binnendifferenzierende und fächerübergreifende Wirkung des Materials, sowie dessen Appellcharakter lässt sich zur Gestaltung von Lernumgebungen nutzen.

In Teil III werden die ersten beiden Teile auf das Wissensgebiet der Bruchrechnung angewandt.
Kapitel 6 gibt die Bestandsaufnahme typischer Schwierigkeiten in der Bruchrechnung und zeigt einen Ausweg in der Modellbildung mit Übersetzungen.
In Kapitel 7 wird die Konzeption „Bruchrechnen als Abenteuer“ vorgestellt. Zentral ist der vorgestellte „Isomorphismus“ zwischen der multiplikativen Gruppe der Brüche und der Gruppe der Übersetzungen. Diese ermöglicht eine strukturelle Kopplung von Praxis und Theorie bzw. zwischen Körper und Geist.
Kapitel 8 zeigt alle relevanten Ausformungen der Modellierung mit dem Material von Fischertechnik. Zwei Exkurse zeigen die fächerübergreifende Eigenschaft.
Schließlich wird in Kapitel 11 die Umsetzung in einer 6. Klasse der franz. Schule in Tübingen exemplarisch in zwei Lernumgebungen gezeigt.

Verwendete Bilder
Um auch der ikonischen Repräsentationsebene gerecht zu werden, enthält die Arbeit viele Abbildungen. Wenn keine Quelle angegeben wurde sind diese von mir gezeichnet oder fotografiert.

Männliche und weibliche Schreibweise
Mit den Begriffen „Lehrer“, „Schüler“, „Lernender“ oder „Lehrende“ möchte ich lediglich eine bestimmte Funktion bzw. Rolle im Unterricht bezeichnen. Diese ist weder weiblich noch männlich. Einerseits erleichtert es die Lesbarkeit dieser Arbeit, andererseits gibt es einen konstruktiven Grund: Beim Schreiben von „Schüler“ oder „Lehrer“ möchte ich in Rollen und nicht geschlechtlich denken, also aus dem grammatischen Geschlecht kein biologisches machen. Ich bitte die Leserschaft um Verständnis.

Teil I

Konstruktivismus und Systemtheorie im unterrichtlichen Kontext

Kapitel 1 Konstruktion von Wissen

1.1 Frühere Vorstellungen von Lernen und Lehren

Wie entsteht Wissen? Das ist die zentrale Frage der Didaktik, also der Kunst und der Wissenschaft des Lehrens und Lernens. Die Frage ist alt. Seit dem klassischen Altertum beschäftigen sich Philosophen mit der Frage, wie wir von dem „in der Welt zu sein" zum Erkennen der Welt gelangen.

1.1.1 Materielle Vorstellung von Lernen und Lehren

Descartes ist einer *„der wichtigsten Vordenker unseres zeitgenössischen Weltbildes."* (Simon 2013, S. 9). Mit Hilfe *„eingeborener Begriffe"* (Jaspers 1966) konnte er die Wirklichkeit erklären. Descartes ging davon aus, dass da etwas (objektiv) in der Welt sei. Das folgende Beispiel ist von Foerster (Wissen und Gewissen) entnommen und zeigt die Vorstellung einer deterministischen Input-Output-Relation.

Abb. 1: Descartes Bild vom Menschen (Bild aus Foerster 2015, S. 42)

„Wenn das Feuer A dem Fuß B nahekommt, dann haben die Teilchen dieses Feuers, die sich, wie wir wissen, mit großer Geschwindigkeit bewegen, die Kraft, jenen Teil der Haut des Fußes, den sie berühren, zu bewegen; auf dieses Weise ziehen sie an dem dünnen Faden c, den wir an den Wurzeln der Zehen und an den Nerven angebunden sehen; gleichzeitig öffnen sie den Zugang zu der Pore d und e, wo dieser dünne Faden endet, so wie das Ziehen an dem einen Ende einer Kordel die Glocke läuten läßt, die an deren anderem Ende hängt. Das nun so bewirkte Öffnen der Pore bzw. des kleinen Ausgangs d und e läßt die Lebensgeister des Hohlraumes F austreten und fortströmen, zum Teil in Muskeln, die den Fuß vom Feuer zurückziehen helfen, zum Teil in andere, die die Augen und den Kopf drehen, um das Feuer anzusehen, und zum Teil in wieder andere, die die Hände darauf hinbewegen und den ganzen Körper neigen, um den Fuß zu schützen." (Descartes 1964, S. 119 – 209). Heinz v. Foerster schreibt

hierzu (Foerster 2015, S. 42): *„Man bedenke, dass einige unserer heutigen Behavioristen immer noch diese Auffassung vertreten (Skinner 1971), lediglich mit dem Unterschied, das Descartes' Lebensgeister inzwischen verlorengegangen sind.*"

Ein materielles bzw. ein abbildendes Lern- und Lehrverständnis entspricht dem Denken der klassischen Physik, welche von einem deterministischen Weltbild ausging: Jedes Ereignis hat eine Ursache und hängt kausal miteinander zusammen. Dass man das Wetter oder den Unterrichtsprozess nicht voraussagen kann, liegt daran, dass nicht alle Daten bekannt sind. Prinzipiell gelten Ursache-Wirkungs-Beziehungen. Die Welt ist ein Uhrwerk und wir Menschen streben Berechenbarkeit und Vorhersagbarkeit an. Die klassische Physik hatte einen unglaublichen Erfolg, ebenso der wissenschaftliche Ansatz des „Reduktionismus" (ein System kann durch seine Einzelbestandteile vollständig bestimmt werden).

So gilt es den „perfekten", den „richtigen" oder den „guten" Unterricht zu finden. Wie ein Schreinermeister wird in der Ausbildung zum Lehrer ein „Gesellenstück" verlangt: die Lehrprobe. Die Schulstunde kann geplant und errechnet werden. Das geht soweit, dass typische „vorhersehbare" Schülerantworten und Lehrer-Schüler-Gespräche im Unterrichtsentwurf (vor Ablauf des Unterrichts) aufgezeichnet werden. *„Aufgrund der stillschweigend unterlegten mechanistischen Bildungsauffassung wird angenommen, jeder Schüler könnte prinzipiell im Rahmen der Organisation der Schule jede vom Lehrenden ausgesendete Information aufnehmen, abbildmäßig wiedergeben und behalten und sogar in neuen Situationen erneut erinnern und situativ transformieren."* (Kösel 2007, S. 29).

Die naheliegende Vorstellung von Wissen und Bildung ist materieller Natur: Man hat *„etwas im Kopf"* oder man hat *„nichts im Kopf"*. Man kann auch *„Stroh im Kopf"* haben. In dieser materiellen Vorstellung kann das Gedächtnis wie *„ein Sieb"* sein. Man braucht (in diesem Modell) *„eine Grundlage"*, worauf man (später einmal) aufbauen kann. Man findet materielle Vorstellungen ebenso in moderner Literatur: *„Was für ein Jahr! Hoffentlich sind eure Köpfe ein wenig voller als zuvor … ihr habt jetzt den ganzen Sommer vor euch, um sie wieder hübsch leer zu räumen, bevor das nächste Schuljahr anfängt …"* (Rowling 1998). Das Gehirn ist in dieser Vorstellung ein Datenspeicher. Der Lehrer dazu da, diesen zu füllen. Seine Rolle ist die des Beschulenden. Mit welchem „*Stoff*" das Gehirn befüllt werden soll, wird vom Lehrer bzw. von einem System (z. B. dem Staat) von außen[1] vorgegeben.

Mithilfe von Regelsystemen (z. B. Tagebucheinträgen, Anwesenheits- und Kontrolllisten) soll sichergestellt werden, dass der Stoff durchgenommen und „*verabreicht*"

[1] Die Definition eines Bildungskanons bzw. dessen Inhalte ermöglichen es erst Begriffe wie „vollständig, Defizit, Lücke, ..." sinnvoll zu verwenden. Lücken können nur durch einen Beobachter von außerhalb gesehen werden, einem „Beobachter zweiter Ordnung".

wurde. Klassenarbeiten und Tests sollen diagnostizieren, ob und wie das Wissen *„gespeichert“* wurde.
Kritiker warnen vor einem sog. „Bulimie-Lernen“, d. h. Wissen wird in kurzer Zeit „geschluckt“, um es dann auf Kommando bzw. einer Prüfungssituation wieder auszuspucken. Auch in diesem Vergleich ist die Vorstellung von Lernen und Lehren materieller Natur.

Der Begriff des „Nürnberger Trichters“ ist im Sinne eines materiellen Lernverständnisses nicht negativ zu verstehen. Vielmehr ist er (in der Wirklichkeit dieses Lernmodells) eine Wertschätzung: Kein Tropfen des edlen Wissens soll verloren gehen, alles soll aufgefangen und sorgsam mit Zeit umgegangen werden. (Harsdörfer 1647)[2].
Auch die heutige Forderung nach Binnendifferenziertheit ergibt in einem materiellen Lern- und Lehrverständnis Sinn: Jeder Schüler soll seine eigene „Trichterfüllung“ mit den für ihn relevanten Inhalten in der richtigen Geschwindigkeit bekommen. Man spricht von „langsameren“ und „schnelleren“ Schülern. Für eine Klasse kann die Forderung – wenn überhaupt – nur sehr schwer für alle Schüler vom Lehrer erfüllt werden. Maria Montessori schreibt hierzu: *„Keine Anleitung, kein Lehrer könnte das innere Bedürfnis und die notwendige Reifezeit eines jeden Schülers erraten. Wenn dem Kind jedoch die Freiheit gelassen wird, wird uns all dies durch Leitung der Natur offenbart.“* (Montessori 1990, S. 175).
Interessant in dem Bild des „Eintrichterns“ ist die implizite Rollendefinition des Lehrers: Er ist verantwortlich für Inhalt und Geschwindigkeit. Der Unterricht ist senderorientiert, Unterricht geschieht nicht, sondern wird vom Lehrer vorbereitet, entworfen und schlussendlich „gemacht“.

1.1.2 Abbildendes Lernverständnis

Eine weitere Vorstellung vom Lehren und Lernen besteht in der Idee der Kopie. Der Lehrer zeichnet dabei einen unterrichtlichen Gegenstand, welcher in die Schülerköpfe abgebildet werden soll, so exakt wie möglich vor.

[2] Ebenso kann sehr gut die Grundidee der allgemeinen Schulbildung in diesem Bild als eine zutiefst humane verstanden werden: Jeder Mensch, jedes Kind soll dieselben Voraussetzungen bzw. Möglichkeiten bekommen. Es soll nicht zwingend sein, dass wenn der Vater Metzger ist, es auch der Sohn wird. So ermöglicht Bildung erst die Freiheit der Berufswahl. Man kann sehr gut das Bedürfnis verstehen, allen Kindern ein „gute Grundlage“ (wieder ein materieller Ausdruck) mitzugeben.

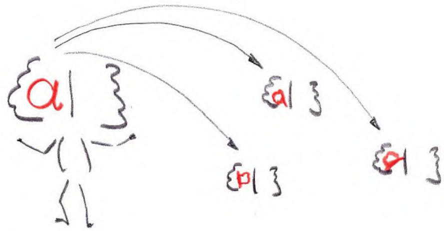


Abb. 2: Abbildendes Lehr- und Lernverständnis

Sowohl Tafel wie Schulheft kommen in diesem Lernverständnis eine hohe Bedeutung zu. Die Schüler versuchen das Vorgezeichnete zu kopieren, das gelingt einmal mehr, einmal weniger gut. Die grundlegende Idee ist senderorientiert: Je klarer und deutlicher das Original, desto besser die Ergebnisse in den Schülerheften.

„Kopieren statt entdecken – der Lösungsweg war nie ein neuer und persönlicher Weg unter vielen, vielen denkbar anderen, sondern der Weg des Lehrers, der einzig seligmachende Weg, breitgetreten von unzähligen Schülergenerationen, die schon zuvor so und nur so zur Lösung getrieben wurden. Wer vom „rechten Weg" abkam, wurde mit roten Kommentaren ermahnt, denn nur so lassen sich Schularbeiten per Schablone verbessern – wie einfach – wie einfallslos!" (Spiegel & Selter 2011, S. 3)

Da die Kopie nicht besser als das Original sein kann, wird logischerweise ein sehr hoher Wert auf einen übersichtlichen und sauberen Tafelanschrieb gelegt. Wenn der Lehrer zum Unterstreichen kein Lineal benutzt, wird es der Schüler meist ebenfalls nicht benutzen.

Die Idee des abbildenden Lernens ist sehr effektiv in der Vermittlung von Verhaltensweisen. Sogenannte Spiegelneurone ermöglichen nachahmen und nachmachen. (Bauer 2006, S. 23) Allerdings brauchen Spiegelneurone Sinneseindrücke. Abstrakte Dinge können nicht kopiert werden. Auf der symbolischen (formaler) Ebene „versagen" die Spiegelneurone.

Mag die Idee der Kopie auf symbolischer Ebene (Abschreiben und Auswendiglernen von vorformulierten Merksätzen) als fragwürdig erscheinen, so ist deren Bedeutung auf enaktiver Ebene nicht zu unterschätzen. Das Lernen am Konkreten, die Idee der Nachahmung, ist sehr effektiv. Ein möglicher Grund des Versagens der Kopie auf symbolischer Ebene könnte in den Spiegelneuronen liegen, welche in erster Linie konkrete Handlungen „spiegeln".

Beispiele für abbildende Lernvorstellungen in der schulischen Praxis

Die Idee der Kopie findet sich im alltäglichen Unterricht wieder, etwa bei Verständnisschwierigkeiten. Der Fokus liegt auf dem Sender (Lehrer). Eine typische unterrichtliche Situation: Ein Schüler hat an einer Lehreraussage etwas nicht verstanden. Dieses

Nichtverstehen wird häufig als „Übertragungsfehler“ gedeutet. So wiederholt in der Regel der Lehrer das Gesagte. Bei weiterem Nichtverstehen ist die Wiederholung *lauter*, obwohl es sich fast immer um kein akustisches Problem handelt. Versteht der Schüler immer noch nicht, erfolgt die Wiederholung (durch den Sender) *lauter und langsamer*.
Ein weiteres Beispiel zeigt der Umgang mit Fehlern: Fehler gelten in einem Abbildenden Lehr- und Lernverständnis als fatal. Steht Falsches an der Tafel, wird Falsches in die Schülerhirne „übertragen“. Aus diesem Grund gelten fachliche Fehler in Lehrproben als gravierend.
Eine Kopie kann weiterkopiert werden: Das wieder und wieder praktizierte „Multiplizieren von Fortbildungen“ ist ein Beispiel für den Glauben an die Kopie der Kopie. Die Idee ist folgende: Es müssen nicht alle Lehrer zu einer Fortbildung, es reicht, wenn wenige Kollegen teilnehmen und die Inhalte später im Kollegium oder in der Fachschaft weitergeben bzw. „multiplizieren“. Natürlich ist die direkte Kopie näher am Original, deutlicher und daher besser.[3] Auch hier zeigt sich Foerster kritisch: *„Lernen ist das Persönlichste auf der Welt, so eigen wie dein Gesicht. Aber wenn der Lehrer lehrt, wird der Schüler passiv. Man muß einmal erkennen, dass Lernen kein Kopiervorgang ist. Lernen ist deine allerindividuellste Operation. Noch individueller als das Liebesleben.“* (Kahl 2000).

In wie vielen Schülerköpfen eine Kopie erzeugt werden soll, spielt in einem abbildenden Lehr- und Lernverständnis eine untergeordnete Rolle. Bei einem (lehrerzentrierten) Vortrag ist es in erster Näherung egal, wie viele Menschen im Raum sind. Nach der großen Mehrheit der Studien ist kein (negativer) Zusammenhang zwischen der Schülerleistung und der Klassengröße festzustellen (Hattie 2009). Ob 500 Personen einer Vorlesung zuhören oder 30 spielt keine Rolle. Die Studie selbst kann umgekehrt gelesen werden: Erzielt die Klassengröße keinen Effekt, liegt der Verdacht nahe, dass es sich um ein abbildendes Lernverständnis handelt. Aus diesem Blickwinkel zeigt die Hattie-Studie sehr klar eine Senderdominanz auf.

1.2 Triviale und nicht-triviale Maschinen

1.2.1 Triviale und nicht-triviale Maschinen

Eingabe und Ausgabe einer solchen Maschine ist deterministisch in einer Input-Output-Relation festgelegt (Foerster 2015, S. 245 ff). Ein Beispiel für eine triviale Maschine ist eine Kaffeemaschine: Geld einwerfen, Knopf drücken (Input) und als Ergebnis gibt es Kaffee (Output). Selbst wenn z. B. das Kaffeepulver fehlt, kann klar vorhergesagt werden, was passiert.

---

[3] Hier ist die materielle Vorstellung (Kopie wird schlechter) mit der abbildenden verknüpft.

In einem materiellen oder abbildenden Lern- und Lehrverständnis gleicht der Schüler einer trivialen Maschine. Implizit wird eine Input-Output-Relation unterstellt. Diese „maschinelle“ Haltung lässt sich nachvollziehen: Es ist naheliegend (vgl. das gestaltpsychologische Gesetz in Abschnitt 3.3) erfolgreiche Konzepte auf andere Bereiche zu übertragen. Die Idee der Wiederholbarkeit „funktioniert“ in einer Umwelt, die kausal zu sein scheint: Man drückt auf den Knopf und bekommt dafür einen Kaffee. Man drückt wieder auf den Knopf und bekommt wieder einen Kaffee. Auch beim dritten Mal funktioniert das Eingabe-Ausgabe-Modell.
Im schulischen Kontext scheint es, als ob häufig der Schüler als triviale Maschine betrachtet wird (Foerster 2016, S. 65). Versteht der Schüler etwas nicht, wird die Aussage vom Sender wiederholt (der Knopf der Kaffeemaschine erneut gedrückt), schließlich lauter und langsamer (der Knopf intensiver und nachdrücklicher gedrückt). Wenn es immer noch nicht „funktioniert“, liegt der Fehler am Schüler (an der Kaffeemaschine) oder am Sender (er kann sich nicht ausdrücken). Tatsächlich waren für Descartes Tiere (nicht der Mensch) reduktiv erklärbare Automaten (Descartes 1964).

1.2.2 Nicht-triviale Maschinen

Anders verhält es sich beim Menschen. Menschen sind keine trivialen Systeme.
„Man erzählt einem Menschen einen Witz, und er lacht sich schief, und man versucht, den Humor dieses Menschen (als Eigenschaft, die ihm zuzuschreiben ist) in bester naturwissenschaftlicher Manier zu testen, indem man das Experiment wiederholt. Man erzählt ihm denselben Witz erneut, sein Lachen wirkt ein wenig gezwungen; man erzählt ihn zum dritten Mal, die Versuchsperson verzieht gequält die Miene, und beim vierten Mal wird der Leiter des Experimentes vom Probanden geschlagen.“ (Simon 2013a, S. 39).
Nicht-triviale Maschinen unterscheiden sich auf eine sehr einfache, aber ungeheuer folgenreiche Weise: *„Eine einmal beobachtete Reaktion auf einen gegebenen Stimulus muß in einem späteren Zeitpunkt nicht wieder auftreten, wenn der gleiche Stimulus auftritt.“* (Foerster 2015, S. 245).

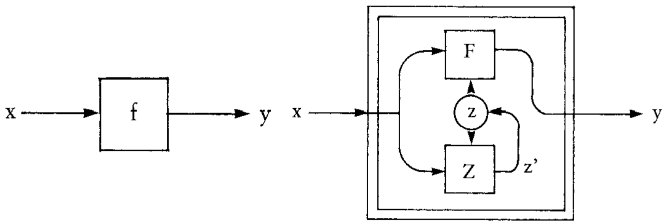


Abb. 3: Triviale und Nicht-triviale Maschine (nach Foerster 2015, S. 245 ff)

Während eine triviale Maschine auf den (äußeren) Input gehorcht, gehorcht eine nicht-triviale Maschine der eigenen Stimme. *„Von außen sieht eine solche Maschine einer* *trivialen Maschine sehr ähnlich, denn sie hat ebenso einen Input x und einen Output y. Nimmt man jedoch den Deckel ab, kann man die Eingeweide einer NTM betrachten.“* (Foerster 1915, S. 248). Diese „Eingeweide“ sind im Wesentlichen ein innerer Zustand Z, der sich durch die Eingabe im Allgemeinen verändert. Dadurch kann der erneute Stimulus (= Eingabe) eine völlig andere Reaktion hervorrufen. Der innere Zustand wird innerhalb dieser Arbeit auch als interne Landkarte bezeichnet (vgl. Abschnitt 1.5.2.3).

Bewusstseinssysteme wissen, wenn ihnen ein Witz schon einmal erzählt wurde. Vielleicht schüttelt der Schüler mitleidig den Kopf. Bewusst steht hier „vielleicht“, denn niemand weiß, wie der konkrete Schüler reagieren wird, vielleicht ist er ja tatsächlich dankbar für die dreifache Wiederholung. Schüler sind keine trivialen Maschinen und deren Reaktionen sind nicht vorauszusehen. Man kann lediglich sagen, dass es *wahrscheinlich* ist, dass Schüler das Lehrerverhalten für äußerst fragwürdig halten, wenn der Lehrer mehrmals im Jahr in diesem Stil Fragen beantwortet.
Ebenso kann der Lehrer eine Atmosphäre, eine Umgebung schaffen, wo Erkenntnisgewinn von Wissen *wahrscheinlich* wird, aber er kann diesen nicht erzwingen. Abschnitt 5.1 (Diktat des Materials) zeigt die Abhängigkeit von Konstruktionen von der Vorgeschichte des Schülers.

1.2.3 Der Schüler als nichttriviale Maschine

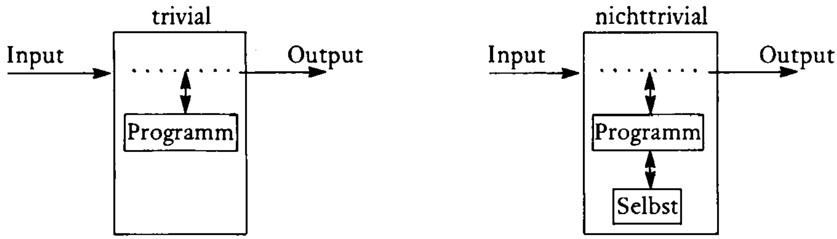


Abb. 4: Triviale vs. nichttriviale Maschine (nach Luhmann 1987, S. 193)

Für Luhmann sind alle psychischen Systeme, alle Kinder, alle Schüler, alle Lernenden nicht-triviale Maschinen (Luhmann 1987, S. 193): *„Daran besteht auch für Pädagogen kein Zweifel. Wenn die Pädagogik das, was sie im Menschen vorfindet, vervollkommnen will, bestünde also aller Anlaß, von der Eigenart einer nicht-trivialen Maschine auszugehen und die nicht-triviale Funktionsweise auszubauen. Das hieße vor allem: den Spielraum des „Selbst“ in seiner Entwicklung auf die Beziehung von Selbst und Programm zu vergrößern und mehr Freiheit, das heißt mehr Unzuverlässigkeit zu erzeugen.*

Dies geschieht nicht. Der Erzieher behält sich die eigene Bewertung der Äußerungen des Zöglings vor, auch wenn er bereit ist, sich im Prozeß des Beobachtens und Beurteilens zu korrigieren und sich auf neue Einsichten einzulassen. Sein Ziel ist gleichwohl: die Erziehung zur Trivialmaschine, und die pädagogische Vernunft rät nur, dem System nicht unbedingt fremde Programme aufzudrängen, sondern Eigenentwicklungen zu tolerieren, ja zu fördern, sofern sie akzeptable Resultate liefern. (…)
Die Erklärung dafür, dass das Erziehungssystem nicht-triviale Systeme als triviale Systeme erzieht, liegt natürlich nicht in der Anwendung einer solchen Philosophie. Sie findet sich in dem Problem der Rekombination von Codierung und Programmierung. Trivialmaschinen lassen sich leicht beobachten und beurteilen, man braucht nur festzustellen, ob die Transformation von Input in Output richtig funktioniert."

Voraussetzung dafür, den „richtigen Unterricht" zu finden ist also die passive Betrachtung des Schülers als „triviale Maschine", ansonsten kann man lange nach dem „richtigen Input" suchen. Folgt man dieser „trivialen" Denkweise, so kann (scheinbar) die Frage nach dem „richtigen Unterricht" beantwortet werden – und zwar durch ein äußeres System. Bildung wird gleichsam von außen gedacht. So scheinen Lehrer, Didaktiker, Ausbilder, Schulsysteme, Bildungspläne zu „wissen" was für den Schüler gut ist, obwohl sich ja im Schüler etwas „bildet" bzw. bilden soll. Statt von Paula und Paul wird von „dem Schüler" in einem allgemeinen Sinne gesprochen. Die Gefahr ist, dass der Schüler im Sinne von Foerster als „triviale Maschine" betrachtet wird, an dem Unterricht vollzogen wird. Foerster schreibt kritisch:
„Betrachten wir den Aufbau unseres Schulsystems. Der Schüler kommt zur Schule als eine unvorhersehbare „nicht-triviale Maschine". Wir wissen nicht, welche Antwort er auf eine Frage geben wird. Will er jedoch in diesem System Erfolg haben, dann müssen die Antworten, die er auf diese Fragen gibt, bekannt sein. Diese Antworten sind dann die „richtigen" Antworten (…). Tests sind Instrumente, um ein Maß der Trivialisierung festzulegen. Ein hervorragendes Testergebnis verweist auf vollkommene Trivialisierung: Der Schüler ist vollkommen vorhersagbar und darf daher in die Gesellschaft entlassen werden." (Foerster 2015, S. 208).
Fritz Simon weist ebenfalls auf die Unterschiedlichkeit von Maschinen und Menschen hin (Simon 2013a, S. 35, S. 39): *„Die Abstraktion vom Beobachter und das naturwissenschaftliche Objektivitätsideal gehen von einer Welt aus, in der die untersuchten Gegenstände eine charakteristische Eigenschaft aufweisen: Sie lassen sich durch die Katalogisierung von Input-Output-Relationen analysieren, ihr Verhalten lässt sich durch Regeln beschreiben und daher vorhersagen. Sie funktionieren wie eine zuverlässige Maschine. (…)*
In unserem Alltag haben wir es eigentlich nur selten mit trivialen Systemen zu tun. Meist sind es wirklich nur technische Maschinen, die diesem Ideal gerecht werden.

(…) Aber im Bereich des menschlichen Lebens und Zusammenlebens finden wir es überhaupt nicht. (…) Menschen sind nichttriviale Systeme.“

Der Schüler ist also keine triviale Maschine, der bei definiertem Input etwas Definiertes lernt. Es ist nicht deterministischer hervorsagbar, was der einzelne Schüler im Unterricht lernt bzw. wie er seinen internen Zustand, seine innere Landkarte verändert.

1.3 Das Bewusstsein des Lernenden als autopoietisches System

1.3.1 Systeme

Nach Kneer und Nassehi versteht man unter einem System die „*Ganzheit einer Menge von Elementen und deren Relationen zueinander*.“ (Kneer & Nassehi 2000, S. 25). Hall und Fagen geben eine ähnliche lautende Definition, Wilke geht genauer auf die Systemgrenze ein: *„Unter einem System versteht man nach Hall und Fagen (1965) einen Satz von Elementen oder Objekten zusammen mit den Beziehungen zwischen diesen Objekten und deren Merkmalen. (…) Helmut Wilke definiert den Systembegriff 1993 als einen ganzheitlichen Zusammenhang von Teilen, deren Beziehungen untereinander quantitativ intensiver und qualitativ produktiver sind als ihre Beziehungen zu anderen Elementen. Diese Unterschiedlichkeit der Beziehungen konstituiert eine Systemgrenze, die System und Umwelt des Systems trennt.“* (Mayer & Busch 2012, S. 251).

Den verschiedenen Ansätzen ist gemein, dass ein System aus der Verbindung von Elementen besteht. Es werden also nicht nur die Elemente untersucht, sondern ebenfalls die Beziehungen zwischen den Elementen. Allen ist gemein, dass das System bestimmten Regeln und Gesetzen folgt, dass es eine klare Systemgrenze gibt in der sich das System von seiner Umwelt unterscheidet bzw. abgrenzt und dass ab einer bestimmten Komplexität sich Substrukturen bilden.

Ein einfaches Beispiel eines Systems zeigt das verwendete Baukastensystem von Fischertechnik, mit dem Getriebe realisiert werden (vgl. Teil II der vorliegenden Arbeit).

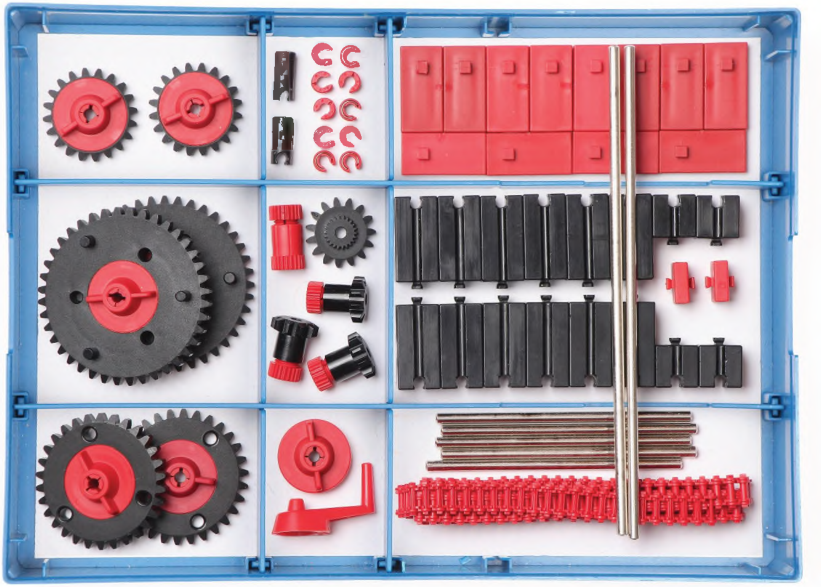


Abb. 5: Baukastensystem „Bruchrechnen als Abenteuer“

Für das Baukastensystem ist die Beziehung zwischen den Bausteinen bzw. den „Elementen oder Objekten“ zentral. Der Zusammenbau erfolgt nach bestimmten Regeln und Gesetzen, die durch das Material bzw. dessen Bauart vorgegeben sind. Es gibt eine klare Systemgrenze: die Fischertechnikbauteile grenzen sich klar vom Tisch bzw. der Umwelt, in der gebaut wird, ab. Weiter zeigen sich ab einer gewissen Komplexität beim Zusammenbau auch Subsysteme, etwa eine Radaufhängung, eine Motorisierung, eine Lenkung.

Fritz Simon charakterisiert verschiedene Entwicklungsstufen von Systemen (Simon 2013a, S. 17):

1. Stufe: Systeme sind aus vorgegebenen Elementen zusammengesetzt / Gleichgewichtsmodelle / Elemente des Systems sind unbelebte Einheiten.
2. Stufe: Systeme sind aus vorgegebenen Elementen zusammengesetzt / Ungleichgewichtsmodelle / komplexe Systeme / Elemente des Systems können belebte oder unbelebte Einheiten sein.
3. Stufe: Systeme produzieren die Elemente, aus denen sie zusammengesetzt sind und von denen sie produziert werden, selbst / Organismen, psychische Systeme, soziale Systeme / Elemente des Systems können materielle oder immaterielle Einheiten sein.

1.3.2 System und Umwelt

1.3.2.1 Autopoietische Systeme

Autopoietische Systeme basieren auf der dritten Stufe. Der Begriff „Autopoiesis" bezeichnet den Prozess der Selbsterschaffung und Selbsterhaltung eines Systems und wurde geprägt von Humberto Maturana (altgriechisch „ausos" = selbst, „poienin" = schaffen). Ein Baukastensystem ist offensichtlich nicht autopoietisch, es erzeugt seine Elemente nicht selbst.

Luhmann hat den Begriff der Autopoiese auf andere Gebiete übertragen: *„Der Autopoieses-Begriff, den seine Erfinder Maturana und Varela für die Beschreibung lebender Systeme reserviert haben, wird also in direkter Weise auf das Gebiet der Soziologie übertragen. (…) Luhmann nimmt eine eigenmächtige Generalisierung des Autopoieses-Begriffs vor. (…) Lebende, neuronale, psychische und soziale Systeme sind nach Luhmann autopoietische Systeme.*" (Kneer & Nassehi 2000, S. 57, S. 58).

Autopoietische Systeme sind gleichzeitig offen und abgeschlossen. Offen in dem Sinne, dass sie Energie und Materie mit ihrer Umwelt austauschen, abgeschlossen in dem Sinne von operativ abgeschlossen. *„Damit soll gesagt sein, dass das Netzwerk der Interaktionen, das die Grenzen des Systems kreiert und dadurch das System als abgegrenzte Einheit hervorbringt, in sich und gegenüber dem Rest der Welt abgeschlossen funktioniert."* (Simon 2013, S. 34). Ein autopoietisches System ist somit strukturdeterminiert: Es kann von außen (zumindest auf direktem Wege) prinzipiell nichts eingegeben werden. Luhmann verdeutlicht die Strukturdeterminiertheit: *„Alles, was solche Systeme als Einheit verwenden, ihre Elemente, ihre Prozesse, ihre Strukturen und sich selbst, wird durch eben solche Einheiten im System erst bestimmt. Oder anders gesagt: es gibt weder Input von Einheit in das System, noch Output von Einheit aus dem System. Das heißt nicht, daß keine Beziehungen zur Umwelt bestehen, aber diese Beziehungen liegen auf anderen Realitätsebenen als die Autopoiesis selbst."* (Kneer &, Nassehi 2000, S. 59).

Folgendes Beispiel folgt einer Idee von Gregory Bateson (Bateson 1967, S. 515 – 529): Wenn ein Ball oder ein Stein getreten wird, lässt sich mit Hilfe der Physik die Flugbahn vorhersagen, zumindest, wenn alle Anfangsbedingungen bekannt sind (Anfangsgeschwindigkeit, Richtung des Tritts, Masse des Steins, …). Ganz anders sieht es aus, wenn ein Herrchen seinen Hund (= autopoietisches System) gemeinerweise tritt. Natürlich hat der Schmerz des Hundes etwas mit dem Fuß seines Besitzers zu tun. Und doch hat der Hund die Schmerzen selbst erzeugt. Der Ball oder der Stein spürt nichts, unter einer Narkose könnte auch der Hund (vorübergehend) nichts spüren. Die Körperlichkeit des Hundes ist ein komplexes System, das in der Lage ist, ein Schmerzempfinden herzustellen. Der Schmerz kommt nicht von außen, er wird intern erzeugt. Offensichtlich kann die Umwelt (der Fuß des gemeinen Herrchens) auf den Hund einwirken, jedoch steht diese Einwirkung in keiner (maschinellen) Input-Output-

Relation. Die Reaktion des Hundes hängt von seiner internen Struktur ab. Mit anderen Worten: Es ist strukturdeterminiert: Ob er sein Herrchen beißt, ankläfft, die Zähne fletscht oder sich jaulend verzieht, hängt von der inneren Struktur des Hundes ab.
Das Beispiel von Bateson ist schmerzlicher Natur, aber gilt ebenso für Glücksempfinden. Es gibt prinzipiell keine direkte Schnittstelle zwischen Umgebung und System oder zwischen zwei Systemen untereinander. Darum gibt es auch keine Möglichkeit einem Menschen etwas „beizubringen". Der Mensch (genauer dessen Bewusstseinssystem) lernt stets indirekt und nicht geradlinig deterministisch von seiner Umgebung.

1.3.2.2 Umwelt autopoietischer Systeme

Die Umwelt des Systems ist nicht die Realität, sondern wird durch das System selbst gebildet. *„Umwelt ist ein systemrelativer Sachverhalt. Jedes System nimmt sich aus seiner Umwelt aus."* (Luhmann 2012, S. 249). Für die Konstruktion von Lernumgebungen ist es bedeutsam, dass, obwohl alle Schüler und Lehrer im selben Klassenzimmer sind, dennoch jedes Bewusstseinssystem eine andere (subjektive) Umgebung besitzt. So kommt Schüler „X" in seiner eigenen Umwelt nicht vor, dafür in jeder anderen. *„Damit ist die Umwelt eines jeden Systems eine verschiedene. Somit ist auch die Einheit der Umwelt durch das System konstituiert. ‚Die' Umwelt ist nur ein Negativkorrelat des Systems. (…) Die Umwelt ist einfach, alles andere'."*(ebd.) Daraus folgt, dass jeder Schüler sich in einem anderen Unterricht (genauer einer anderen Lernumgebung) befindet, auch wenn er im selben Raum ist. Dabei geht es nicht nur darum, das er sich selbst nicht wahrnimmt und eine andere Perspektive der realen Welt beobachtet – nein, er sieht auch andere Dinge. Je ausdifferenzierter sein Wahrnehmungsapparat ist, desto mehr sieht er auch. In einem Experiment an der Universität Freiburg im Sommersemester 2017 filmten die Studierenden die Vorlesung aus ihrer Perspektive mit ihrem Smartphone. Bild und Ton unterscheiden sich deutlich, mitunter wirkt es so, als ob eine andere Vorlesung gefilmt wurde. Im Experiment übernimmt die Kamera die Rolle des Systems. Sie nimmt sich selbst nicht auf, je nach Sensorik (Farbsensor, Mikrofon) und Aufstellungsort unterscheidet sich die Wahrnehmung.

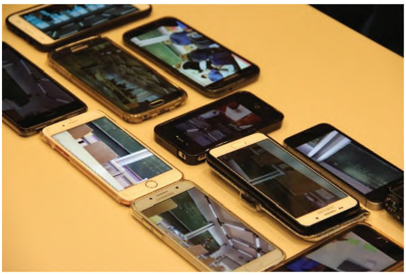


Abb. 6: Subjektive Umwelt

Bei einer Unterrichtsbeobachtung ist daher immer entscheidend, wer aus welcher Perspektive beobachtet. Die gängige Unterrichtsbeobachtung (Beobachter sitzt hinten im Klassenraum) in der Sichtweise der Totalen, ist nur eine mögliche Kameraeinstellung – wird aber häufig als „objektiv" verstanden. Mit der Wahrnehmung eines Subjektes im Unterricht, hat diese Sichtweise häufig wenig gemein.

1.3.3 Information

Um Wissen zu konstruieren bzw. eine Information zu erhalten, muss man zuerst etwas wahrnehmen. Unsere Sinnesorgane nehmen Unterschiede wahr, was nicht unterschieden werden kann, kann auch nicht wahrgenommen werden. So schreibt Gregory Bateson *„(…) Wahrnehmung arbeitet nur mit Unterschieden. Jede Informationsaufnahme ist notwendig die Aufnahme einer Nachricht von einem Unterschied, und alle Wahrnehmung von Unterschieden ist durch Schwellen begrenzt. Unterschiede, die zu klein oder zu langsam dargestellt sind, können nicht wahrgenommen werden. Sie sind keine Nahrung für die Wahrnehmung."* (Bateson 2002, S. 39).
Aber Wahrnehmung selbst ist noch keine Information. Ich kann zwar einen chinesischen Sender im Radio hören, meine Ohren nehmen das Erzittern der Luft wahr, aber es macht für mich keinen Unterschied, ob ich das chinesische Programm von jetzt oder das von gestern höre. Der wahrgenommene Unterschied muss für mich einen Unterschied machen, damit es zur Information wird. Wäre ich Chinese würden die Druckschwankungen der Luft – die Unterschiede, die mein Ohr erreichen (der Schall vom chinesischen Radioprogramm) – Information bedeuten. So beruht Wissenskonstruktion letztlich auf Unterscheidungen. *„Informationen bestehen aus Unterschieden, die einen Unterschied machen."* (Bateson 2002, S. 122).

1.3.4 Bewusstseinssysteme

Das menschliche Bewusstsein ist ein Beispiel für ein autopoietisches System. Das Wissensgebiet ist im Kontext des Lernens dessen Umgebung. Denken, die entstehende Strukturen im Gehirn bzw. der Bewusstseinsprozess, ist strukturdeterminiert. Von außen kann nichts (auf direktem Wege) in das Bewusstsseinssystem gelangen. Eine direkte Schnittstelle existiert nicht, alles Denken wird prinzipiell eigenständig konstruiert. Vergleiche hierzu Ulrich Herrmann: *„Das Gehirn ist kein Datenspeicher, sondern ein Datengenerator durch die autonome Organisation der Speicherung und Verknüpfung von Informationen und der Konstruktion von deren Bedeutungen."* (Herrmann 2009, S. 11).
Es ist nicht nur so, dass sich Wissen nicht direkt vermitteln lässt, Informationen existieren gar nicht außerhalb eines Beobachters. Hierzu schreibt Niklas Luhmann:
„Informationen kommen nicht in der Umwelt, sondern nur im System selbst vor. Sie können also nicht als identische Einheiten aus der Umwelt [das Fachwissen] in dieser

Arbeit die Bruchrechnung) in das ,System [das Bewusstseinssystem des Schülers] transportiert werden." (Luhmann 1990, S. 104, Klammerbemerkung von mir).
Folgt man der konstruktivistischen Idee, dass sich Wissen prinzipiell nicht in direkter Weise „verabreichen" lässt, sondern dass es prinzipiell im Bewusstseinssystem (in einer geeigneten Umgebung) entsteht, so ändert sich der Blick auf Unterricht radikal: Der Blick richtet sich auf die Umgebung, die Rolle des Lehrers besteht nicht in der „Stoffvermittlung" sondern in der Vermittlung zwischen (Wissens-)Stoff und Lernendem. Es stellt sich die Frage, was geeignete Umgebungen sind, in der der Lernende mit hoher Wahrscheinlichkeit Inhalte lernt, die das äußere System (z. B. Bildungsplan) für wichtig hält. Dabei ist zu beachten, dass es nicht *die* Umwelt des Schülers gibt. Umwelt ist ein Konstrukt des Schülerbewusstseins und kommt nicht in der Realität vor, es ist einfach alles andere als er selbst. Stets sind es Systeme (hier das Bewusstseinssystem des Schülers) die beobachten und konstruieren. Im Klassenzimmer existieren keine zwei Systeme, die eine identische Umwelt haben. Aus diesem Grund kann es prinzipiell nicht *den* richtigen Unterricht für jeden einzelnen Schüler geben. *„Für Sinnsysteme ist die Welt kein Riesenmechanismus, der Zustände aus Zuständen produziert und dadurch die Systeme selbst determiniert. Sondern (...) die Welt ist ein unermessliches Potential für Überraschungen, ist virtuelle Information, die aber Systeme benötigt, um Information zu erzeugen, oder genauer: um ausgewählten Irritationen den Sinn von Informationen zu geben."* (Berghaus 2011, S. 39).

1.3.5 Biologische und psychische Systeme

1.3.5.1 Körper(system) und Bewusstseinssystem

Es gibt biologische, psychische und soziale Systeme. „Menschen" sind keine Systeme. *„Der Mensch mag für sich selbst und für Beobachter als Einheit erscheinen, aber er ist kein System."* (Luhmann 1984, S. 67ff).
Die Untersuchung sozialer Systeme bedeutet im unterrichtlichen Kontext die Untersuchung von unterrichtlicher Kommunikation. Dieser Abschnitt vergleicht das Bewusstseinssystem des Lernenden (psychische System) mit dem biologischen (körperlichen) System des Lernenden. Im Folgenden werden beide autopoietische Systeme aufeinander abgebildet. Die grundliegende These ist, dass es sich in beiden Systemen um dieselbe Struktur handelt. Gerne würde ich einen Homomorphismus angeben, aber da die körperliche Welt und die geistige Welt reale Dinge sind, lassen sich höchstens Modelle bilden und diese aufeinander abbilden.

1.3.5.2 Wissensvermittlung auf geistiger und körperlicher Ebene

Dieses Kapitel soll neben den Parallelen zwischen Körper und Geist auch deren Bedeutung im Kontext eines handlungs- und erlebnisorientierten Ansatzes verdeutlichen. Das Körperliche erfährt häufig eine Entwertung im schulischen Alltag. Es scheint im unterrichtlichen Kontext weitgehend verzichtbar zu sein, das Schulbuch, das Arbeitsblatt, die sprachliche oder schriftliche Erklärung genügt. Das Körperliche wird häufig als optionale Funktion angesehen („wenn noch Zeit bleibt“). Auch die vorliegende Arbeit gibt scheinbar vor, dass die Körperlichkeit keine entscheidende Rolle spielt. Allerdings „begreifen“ Sie als Leser nur einen Teil der Arbeit, genauer eine Teilmenge von dem, was sich in Worte fassen und niederschreiben lässt. Hier findet eine Selektion (zugunsten der Schriftlichkeit) statt. Die wirkliche Erfahrung ist direkter und bildet die Grundlage der hier vorgestellten Didaktik. Es ist nur so, dass ich in dem System, in dem ich meine Arbeit schreibe und vorstelle, keine enaktiven Prozesse darstellen kann. Sie bleibt gewissermaßen „oberflächlich“. Ich möchte damit die Bedeutung des Geistes nicht schmälern, sondern vielmehr den Blick auf das Zusammenspiel von Körper *und* Geist richten. Das in Abschnitt 5.1.3 vorgestellte 4D-Lernen verbindet beide strukturell gekoppelten Systeme (vgl. 1.3.6 Strukturelle Kopplung, Koevolution). Ganz konkret wird das Zusammenspiel im zweiten Teil dieser Arbeit, wo Bruchrechnen „begreifbar“ wird. Das Haptische ist keine bloße Hilfestellung für unser Bewusstseinssystem. Es erschafft Vorstellungen und treibt zu neuen Gedanken an. Das Haptische „irritiert“ den Geist. So gesehen tragen Bauteile von Fischertechnik als Umwelt oder allgemeiner, das enaktive Erleben dazu bei, Gedanken in uns entstehen zu lassen. Sie übernehmen die Funktion des Fußes des gemeinen Herrchens (vgl. das Beispiel von Gregory Bateson in Abschnitt 1.3.2), nur das im Bewusstsein des Lernenden im Gegensatz zur Körperlichkeit nicht Schmerz sondern in einem psychischen Bewusstseinssystem sich Wissen bildet.

1.3.6 Strukturelle Kopplung, Koevolution

Der Begriff der strukturellen Kopplung hat Humberto Maturana geprägt. *„Als Biologe interessiert er sich für die Beziehung zwischen einem lebenden System und dem Medium seines Operierens bzw. zwischen System und Umwelt. Das Konzept der strukturellen Kopplung wird inzwischen auch auf andere Typen autopoietischer Systeme (psychische und soziale Systeme) übertragen, um die Dynamik gemeinsamer Entwicklungen zu erfassen. (…) Das zeigt sich beispielhaft in der untrennbar miteinander verbundenen Entwicklung der körperlichen und psychischen Strukturen eines Individuums.“* (Simon 2013a, S. 79 ff).

H. W. Winter betont den Gedanken, *„dass Erkenntnisfortschritt darin besteht, dass gleichzeitig zwei Prozesse sich gegenseitig ergänzen und begrenzen: begriffliches Erweitern, Verallgemeinern und Verfeinern einerseits und anschauliches Detaillieren,* *Konkretisieren, Spezifizieren in weitere und entferntere Phänomenbereiche hinein andererseits."* (Winter 2016, S. 174).

Beide Systeme, das biologische bzw. körperliche und das geistige bzw. psychische, sind also nicht unabhängig voneinander. Das eine ist eine (belebte) Umwelt des anderen. Damit erscheint handlungsorientierter Unterricht in einem neuen Licht. Es ist nicht so, dass die Haptik, das konkrete Anfassen und Begreifen etwas für den „schwächeren" Schüler ist, etwa im Sinne eines Zusatzes. Vielmehr ist haptisches Arbeiten und theoretisches Denken ein (strukturell) gekoppeltes System. Es ist auch nicht so, dass es eine bestimmte Reihenfolge gibt. Etwa im Sinne eines Fließbandes: Erst die symbolische abstrakte Vermittlungsebene, dann die haptische – oder anders herum. Nein. Körperliche und gedankliche Welt bedingen sich gegenseitig (vgl. Abschnitt 5.1.3 *4D-Lernen*). Simon schreibt weiter: *„Die Entwicklung der Psyche eines Menschen ist nicht losgelöst von der Entwicklung seines Körpers zu erklären und umgekehrt auch die des Körpers nicht, ohne die psychischen Bedingungen zu berücksichtigen. Bezogen auf den ganzen Menschen stellen Organismus und Psyche eines Individuums eine koevolutive Einheit dar, d. h., die Veränderungen des einen wirken als Auslöser für Veränderungen des anderen."*

In dem handlungsorientierten Konzept „Bruchrechnung als Abenteuer" findet das seine Entsprechung. Theorie und Praxis, Denken und Handeln werden als zwei sich gegenseitig beeinflussende und irritierende Systeme gesehen.

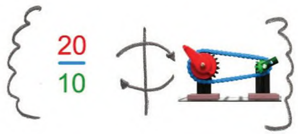


Abb. 7: Zwei strukturell gekoppelte Systeme

Anders formuliert: Die (realen) Getriebe sind die Umwelt der (abstrakten) Bruchrechnung, die (abstrakte) Bruchrechnung die Umwelt der (realen) Getriebe. Ein Wechselspiel zwischen Theorie und Praxis. Eine „koevolutive Einheit" also: Das geistige Gedankengebäude entwickelt sich mit der technischen Umsetzung – und anders herum.
Im Licht der koevolutiven Einheit zeigt sich die konventionelle Schule in ihrer Praxis unvollständig. Die psychische Entwicklung soll weitgehend ohne ihr körperliches strukturell gekoppeltes Gegenstück erfolgen. In Abschnitt 7.3.1 werden in einem Schulbuch Räder und Getriebe behandelt. Damit die Veränderungen des einen als Auslöser für Veränderungen des anderen wirken können, geht es nicht anders, als Räder und Getriebe in die Hand zu nehmen, ansonsten ist man zwei Schritte statt einem von der Realität entfernt. *„Wörter sind Anker für Sinneserfahrung, aber die Erfahrung ist nicht*

die Realität und das Wort ist nicht die Erfahrung. Sprache ist daher zwei Schritte von der Realität entfernt.“ (O’Connor 2015, S. 151). Möchte man zusätzlich die gedankliche Konstruktion, dann reicht das „in die Hand zu nehmen“ nicht aus. Es braucht die reale, vom Lernenden selbst durchgeführte, Konstruktion um eine Koevolution zu ermöglichen. *„Die Art, wie etwas gelernt wird, bestimmt die Art, wie das Gelernte im Gehirn gespeichert (repräsentiert) ist. (…) Ein Mausklick ist nichts weiter als ein Akt des Zeigens und gerade kein Akt des handelnden Umgangs mit einer Sache.“* (Spitzer 2010, S. 129). In diesem Zusammenhang scheinen digitale Medien meist wenig hilfreich, solange sie keine echte Handlung zulassen. Das Digitale an sich muss jedoch nicht „oberflächlich“ sein, beispielsweise zeigt die Robotik ein Zusammenspiel zwischen materiellem Bau und formaler Programmierung.
Im Bildungsplan 2004 steht unter „didaktische und methodische Prinzipien“ die Handlungsorientierung als erster Punkt: *„Das Lernen ist in einem doppelten Sinn handlungsorientiert, nämlich erstens auf seine spätere Anwendbarkeit – im Alltag und im Beruf – hin ausgelegt: Man weiß oder kennt eine Angelegenheit nicht nur, man kann in ihr handeln; das Lernen vollzieht sich zweitens zu einem großen Teil durch Handeln; im Bildungsplan 2004 kommt darum häufig der Ausdruck „im Handlungsvollzug“ vor; in der pädagogischen Theorie heißt dies „learning by doing“ (Lernen durch Handeln).*“ Die Idee der Koevolution geht einen Schritt weiter betrachtet die gegenseitige Irritation, also neben „learning by doing“ auch „doing by learning“.

1.4 Parallelitätsthese: körperliche und geistige Nahrung

Luhmann hat den Autopoiesis-Begriff von Maturana und Varela auf psychische und soziale Systeme übertragen. *„Psychische Systeme fungieren somit als eine Art Testfall, anhand dessen sich der Versuch einer Generalisierung und anschließender Respezifikation des Autopoieses-Begriffs überprüfen und deutlich machen lässt.“* (Kneer & Nassehi 2000, S. 59). Nach dem Vorbild Luhmanns übertrage ich das biologische Konzept auf ein psychisches bzw. geistiges. Dass sich beide autopoietische Systeme (Geist und Körper) aufeinander abbilden lassen, ist eine These, ich nenne sie im Folgenden die „Parallelitätsthese“. In Teil II wird ein weiterer Isomorphismus zwischen dem haptischen Umgang mit den Bauteilen und der Bruchrechnung gezeigt. Es ist das Herzstück des Konzeptes. Im Umgang mit den Bauteilen koppeln dann Körper und Geist. Schulischer Lernstoff wird dann in einem doppelten Sinne, d. h. von zwei sich gegenseitig irritierenden Systemen, „begriffen“.
Beide autopoietische Systeme (Körper und Geist) sind außerdem „strukturell gekoppelt“ und können aus systemischer Sicht nicht isoliert betrachtet werden – was aus didaktischer Sicht eine Handlungsorientierung nahe legt (vgl. Abschnitt 1.3.6). In diesem Abschnitt geht es jedoch nicht um die gegenseitige Irritation und Wechselwirkung, sondern nur um gegenseitige Abbildbarkeit.

Lernen und Lehren sichtbar machen
Während die körperliche Entwicklung offensichtlich ist, geschieht die geistige im Verborgenen. Unter Annahme der Parallelitätsthese lässt sich sichtbar machen, was für das Lernen förderlich ist. Bezogen auf mathematische Sachverhalte lautet die Parallelitätsthese Isomorphie. Es genügt demnach eine Struktur zu verstehen, um das gelernte dann auf die isomorphe anzuwenden. Da Körper und Geist jedoch real existieren, lässt sich ein solcher Isomorphismus nur plausibel machen, aber nicht beweisen. Die Parallelitätsthese bleibt also eine These, auch wenn sie als Homomorphismus verstanden werden möchte.

Der Abschnitt ist in drei Teile gegliedert. Im ersten geht es um die geistige bzw. körperliche Nahrung, welche als Umgebung des jeweiligen autopoietischen Systems (Bewusstsein bzw. Körper) gesehen wird. Im zweiten Teil wird die Umgebung der Nahrung betrachtet, d. h. die Umgebung (Nahrung) der Umgebung (Ort). Dabei wird unterschieden zwischen der unbelebten, materiellen Umgebung und der sozialen belebten, sozialen Umgebung. Im dritten geht es um die Genese der Nahrung.

1.4.1 Nahrung als Umwelt des Systems

„Wahrnehmung [eines autopoietischen Systems] arbeitet nur mit Unterschieden. Jede Informationsaufnahme ist notwendig die Aufnahme einer Nachricht von einem Unterschied und alle Wahrnehmung von Unterschieden ist durch Schwellen begrenzt. Unterschiede, die zu klein oder zu langsam dargestellt sind, können nicht wahrgenommen werden. Sie sind keine Nahrung für die Wahrnehmung." (Bateson 2002, S. 39, Klammer von mir).
Im Folgenden wird unter geistiger bzw. psychischer Nahrung ein „Denkangebot" (entsprechend dem körperlichen Fall eines Nahrungsangebotes) verstanden, welches den Schwellen der Wahrnehmung genügt. Mit Denkangebot ist etwas gemeint, was das Bewusstseinssystem irritiert und zum (eigenen, intern abgeschlossenen) Denken veranlasst. Unter körperlicher Nahrung soll Speise verstanden werden. Damit ist etwas gemeint, was den Körper irritiert und zum (eigenem, intern abgeschlossenen) Wachstum veranlasst.
Wird nur von „Nahrung" gesprochen, ist sowohl körperliche als auch geistige Nahrung gemeint. Dabei ist die Substanz der jeweiligen „Nahrung" (materiell oder geistig) radikal verschieden, ebenso die jeweilige Verarbeitung (biochemische Prozesse bzw. Kommunikationsprozesse), *„aber ihr Herstellungsprogramm hat dasselbe abstrakte Muster, dieselbe Struktur.*" (Simon 2013b, S. 27).

1.4.1.1 Nahrung als Umwelt des Systems

Niemand weiß, wie der Körper es anstellt, dass er wächst. Irgendwie wird die Speise durch die Zähne zerkleinert, im Magen weiterverarbeitet und schließlich werden in den Gedärmen die Nährstoffe entzogen. Ebenso weiß niemand, wie unser Bewusstsein es anstellt, dass es sich entwickelt. Sicherlich hat sowohl die körperliche als auch die geistige Entwicklung etwas mit der angebotenen Nahrung zu tun. Entzieht man dem jeweiligen System die Nahrung, so entwickelt es sich nicht und verkümmert. Ebenso ist eine Übersättigung nicht förderlich für das Wachstum. Im geistigen Bereich spricht man von Reizüberflutung.
Es ist unmöglich Wachstum von außen zu erzwingen, Wachstum geschieht stets und ausschließlich von innen. Allerdings lassen sich beide Arten von Wachstum von außen zerstören. Das gilt offensichtlich für den Körper, aber ebenso für den Geist: Stefan Zweig beschreibt in seiner Schachnovelle diese Form der „weißen Folter" recht eindringlich (Zweig 1974, S. 48 ff):
„Man tat uns nichts – man stellte uns nur in das vollkommene Nichts, denn bekanntlich erzeugt kein Ding auf Erden einen solchen Druck auf die menschliche Seele wie das Nichts. Indem man uns (…) in ein völliges Vakuum sperrte, in ein Zimmer das hermetisch von der Außenwelt abgeschlossen war, sollte, statt von außen durch Prügel und Kälte, jener Druck von innen erzeugt werden (…).
Auf dem Tisch durfte kein Buch, keine Zeitung, kein Blatt Papier, kein Bleistift liegen, das Fenster starrte eine Feuermauer an, rings um mein Ich und selbst an meinem eigenen Körper war das vollkommende Nichts konstruiert.
Es gab nichts zu tun, nichts zu hören, nichts zu sehen, überall und ununterbrochen war um einen das Nichts, die völlig raumlose und zeitlose Leere. Man ging auf und ab, und mit einem gingen die Gedanken auf und ab, auf und ab, immer wieder. Aber selbst Gedanken, so substanzlos sie scheinen, brauchen einen Stützpunkt, sonst beginnen sie zu rotieren und sinnlos um sich selbst zu kreisen; auch sie ertragen nicht das Nichts."

Nahrung entspricht der Umwelt des (lernenden) Systems. Ohne Nahrung kann nichts wachsen. Es braucht die Anregung/Irritation von außen. Obwohl das Wachstum von niemandem (!) verstanden worden ist, kennt man einige Voraussetzungen, um gesundes Wachstum wahrscheinlich werden zu lassen. Die Wortwahl „wahrscheinlich werden zu lassen" ist zentral, denn es gibt keine Garantie für gesundes Wachstum, selbst bei ausgewogener Ernährung.

1.4.1.2 Strukturdeterminiertheit, Nicht-Existenz direkter Vermittlung

Weder geistiges noch körperliches Wachstum lässt sich von außen erzwingen. Sowohl der Körper als auch das Bewusstsein sind im Sinne von Heinz von Foerster keine

„trivialen Maschinen", d. h. es gibt keinen Kausalzusammenhang zwischen Output und Input (vgl. Abschnitt 1.2).
Die maschinelle Unterrichtsidee von Input (was gesendet wurde) – Output (was hinterher im Schülerhirn geschieht) ist weder auf Bewusstseinssysteme, noch auf den Körper übertragbar.
Der Mensch ist nicht, was er isst! Man wird beim Spaghetti-Essen nicht länger und auch nicht zu einer Nudel. Was gegessen wurde, steht in keiner direkten Input-Output-Relation zu dem, was aus einem Menschen wird.
Eine direkte „Körpervermittlung" gibt es nicht. Es ist nicht so, dass der Mensch ein Stück Fleisch isst und dann daraus ein Arm wird, vielmehr generiert der Körper als autopoietisches System autonom eine eigenständige Struktur.
Ähnlich verhält es sich mit geistiger Nahrung. Aus dem geistigen Nahrungsangebot (z. B. eines Begriffes) konstruiert sich der Empfänger einen Sinnzusammenhang, der vom Sender nicht determiniert ist. Das lässt sich an einem Experiment leicht überprüfen: Sie nennen mehreren Personen einen Begriff (z. B. „Bruchrechnen"), und wenn Sie nachfragen, sind die unterschiedlichsten Konstrukte daraus entstanden. Je nach innerer Struktur des Empfängers (Vorgeschichte, Erfahrungen) entstehen andere Gedanken. Und trotzdem hat das Konstrukt etwas mit der angebotenen Nahrung zu tun. Die Konstruktion ist zwar nicht determiniert, aber dennoch nicht willkürlich. *„Dieses ‚auch anders möglich sein' bezeichnen wir mit dem traditionsreichen Terminus Kontingenz. Er gibt zugleich den Hinweis auf die Möglichkeit des Verfehlens der günstigsten Formung."* (Luhmann 2012, S. 47)
Und trotzdem ist es (für die günstigste Formung) nicht egal, was der Mensch isst. Ernährungsexperten wissen hier viel zu erzählen. Noch entscheidender als die Nahrung an sich (das „Was") ist die Art und Weise wie gegessen wird (das „Wie"). Freude und Lust wirken ebenfalls stark auf unseren Körper ein. Anders formuliert: Qualität und Ästhetik beeinflussen maßgeblich gesundes Wachstum (strukturelle Kopplung).
Damit Nahrung aufgenommen werden kann, muss diese zuerst verdaut werden, sie muss (vom autopoietischen System) „verinnerlicht" werden. Das Meiste wird wieder ausgeschieden, der gesunde Körper „weiß" (als autopoietisches System) selbst, was gut für ihn ist, was er braucht.[4] Das gilt ebenso für geistige Nahrung, etwa für Vorträge oder Schriften. Es ist nicht möglich den bisherigen Text der Arbeit nach einmaligem Lesen auswendig aufzusagen, obwohl der Leser (in groben Zügen) „weiß" was drin steht. Dieses Wissen ist wirklichkeitsabhängig. Ein anderer Leser „weiß" nach der Irritation des Lesens etwas anderes. Er konstruiert ja ebenfalls intern mit seinem (individuellen) Bewusstseinssystem.

---

[4] Allerdings hinken wir mit unser Esskultur ein paar Generationen hinterher: Früher wäre eine Tafel Schokolade ein passendes Essen gewesen, aber heute müssen wir unsere Nahrung nicht erjagen und bewegen uns zu wenig. Unser Essverhalten hat sich im Gegensatz zu unserer Umwelt nur wenig verändert.

1.4.1.3 Die Bedeutung des Inhaltes

Materielle und abbildende Vorstellungen vom Lernen und Lehren (vgl. Abschnitt 1.1) orientieren sich in erster Linie am Inhalt. Die Parallelitätsthese legt ein Experiment nahe. Beim Lesen kann gemäß der Parallelitätsthese „körperliche Nahrung“ durch „geistige Nahrung“ ersetzt werden. Das Experiment macht materiell (auf körperlicher Ebene) sichtbar, was es bedeutet, wenn es bei geistiger Nahrung in erster Linie um den Inhalt geht.

Das folgende Foto zeigt das Lieblingsessen meines Sohnes. Die Aufnahme wurde 2014 in Tübingen mit zwei entfesselten Blitzen, einer speziellen Unterlage und verschiedenen Lichtmessungen verwirklicht. Aus über 50 Aufnahmen wurde diese eine herausgenommen und mit dem Bildbearbeitungsprogramm GIMP nachbearbeitet. Ziel des Fotos war eine Maximierung der Ästhetik. Bildaufteilung, die Lage der Gabel und des Salates im Hintergrund, Farbkomposition, die Lichtspiegelungen auf dem Teller sind kein Zufall, sondern das Ergebnis absolut willentlicher Arbeit. Das Bild ist in dieser Arbeit absichtlich groß dargestellt, damit die ästhetische Wirkung möglichst stark ist.

Abb. 8: Lernen und Ästhetik

Wenn es nur um den Inhalt geht, dann spielt weder Form noch Ästhetik eine Rolle. Mithilfe eines Mixers wurde der Tellerinhalt in der obigen Abbildung zerkleinert und serviert. Wahrscheinlich ist durch die mechanische Zerkleinerung – rein mechanisch betrachtet – der Inhalt verdaulicher.

Abb. 9: Ästhetik und Inhalt

Offensichtlich wirkt derselbe auf dasselbe Kind völlig unterschiedlich:

Abb. 10: Ästhetische Wirkung

Wie die Nahrung dargeboten wird ist eine ästhetische Frage. Es macht einen Unterschied, *wie* die Nahrung präsentiert wird (vgl. Rittelmeyer 2016). „Heute gab es bei uns Spaghetti Carbonara!" trifft auf beide Bilder zu. An der Speisekarte lässt sich weder Qualität noch Ästhetik ablesen, nicht einmal die Genießbarkeit. Tagebucheinträge und Bildungspläne beschäftigen sich vornehmlich mit dem „Was" und erscheinen im Licht der Parallelitätsthese in einer ganz anderen Bedeutung: Das für den Menschen Wesentliche, seine individuelle Beziehung zu den Dingen, wird nicht erfasst. Beobachtet man Kinder beim Bauen und Konstruieren, dann wollen sie nicht nur, dass es funktioniert (sachbezogener Inhalt), es soll vielmehr auch schön sein (ästhetische Bewertung).

1.4.1.4 Bildungs- und Nahrungsangebot, Bildung als aktiver Prozess

„Bildung“ (egal ob körperlicher oder geistiger Art) geschieht nicht von außen, etwa durch Nahrungsaufnahme, diese ist lediglich die Voraussetzung (bzw. die Umwelt) dafür, dass sich etwas bildet. Offensichtlich brauchen Kinder Nahrung. Jedoch ist „Bildung“, der Prozess, dass sich etwas „bildet“, nicht das Verabreichen von Nahrung, sondern ein eigenständiger Prozess, der im Menschen stattfindet. Die Inhalte müssen vom System (Körper oder Bewusstseinssystem) „verdaut“ werden, damit (neue) interne Strukturen entstehen.
„Die Umwelt hat – wie die Nahrung für das Wachstum – weniger eine gestaltende als vielmehr eine Art nährende Rolle. (…) Die Umwelt wirkt also weit weniger als bisher angenommen aktiv auf das Kind ein, sondern das Kind selbst ist aktiv. Die Umwelt bestimmt jedoch das Angebot an Erfahrungen, die das Kind machen kann.“ (Largo & Beglinger 2009). So ist ohne (geeignetes) Angebot Lernen nicht möglich. Man kann z. B. ohne Gitarre (Umgebung) kein Gitarrenspiel (neuronale Aktivität) erlernen. Weiter gibt es Umgebungen, die eine bestimmte Erkenntnis bzw. ein bestimmtes Lernziel für einen bestimmten Schüler wahrscheinlicher als andere machen. Schnellere Nahrungsaufnahme oder Fastfood begünstigen keine gesunde Entwicklung.
Gemäß der Parallelitätsthese kommt es nur zu einem beschränkten Teil auf den Inhalt an. Sehr wesentlich für die Wirksamkeit sind Form und Ästhetik. Damit wird unterrichten zur Kunst und der Vermittler/Lehrer zum Künstler. Man betrachte die Bedeutung des Inhaltes in Abschnitt 1.4.1.3. Es ist für den Empfänger sehr entscheidend, in welcher Form die (geistige) Nahrung präsentiert wird.

1.4.1.5 Beschränktes Wachstum

Der menschliche Körper (ein autopoietische System) ist strukturdeterminiert: Selbst wenn Menschen dieselbe Nahrung zu sich führen, hätten sie trotzdem unterschiedliche Körper. Dieser entscheidet in seiner inneren Struktur, wo was wächst. (Largo & Beglinger 2009, S. 26). Mittels Essen und Training lässt sich nicht die Körpergröße bestimmen. *„Die Anlage schafft die Voraussetzungen für die Entwicklung und legt das Optimum fest, das ein Kind erreichen kann. Die Umweltbedingungen bestimmen, wie viel von dieser Anlage realisiert werden kann. Die individuelle Grenze ist also durch die Anlage festgelegt und lässt sich nicht überschreiten. Das Kind kann für seine Körpergröße nur so viel verwerten, wie sein Stoffwechsel zu leisten vermag.“* So gibt es beispielsweise Menschen, die „unmusikalisch“ sind. Diese können schlichtweg nicht den Ton treffen, egal wie viel sie üben, egal wie oft sie Bach, Beethoven oder Mozart hören. Ein jeder kommt mit einer Veranlagung auf die Welt, die maßgeblich über die

Körperlichkeit entscheidet. *„Ähnlich wie bei der Körpergröße können wir daraus Folgendes ableiten: Je besser das schulische Angebot, desto besser ist die mittlere Lesekompetenz und umso mehr gute Schüler gibt es (…). Je schlechter das schulische Angebot, desto niedriger ist die mittlere Lesekompetenz und desto mehr Kinder können kaum oder gar nicht lesen. Selbst Finnland gelingt es aber nicht, bei allen Kindern eine gute bis hohe Lesekompetenz zu erreichen."* (Largo & Beglinger 2009, S. 27).

1.4.1.6 Bildung und Nachhaltigkeit, Verdauungsprozesse

Damit Wachstum geschehen kann, muss Nahrung erst verdaut werden. Dabei ist Verdauung ein eigenständiger Prozess, er vollzieht sich systemintern (innengesteuert). Aus einem Stück Fleisch wird kein Finger oder ein anderes bestimmtes Körperteil. Mit dem Nahrungsangebot können lediglich Voraussetzungen dafür geschaffen werden, dass sich etwas bildet. Unverdauliches, z. B. Edelmetall, wird wieder ausgeschieden. Der Körper holt sich nach seiner eigenen internen Systemlogik das heraus, was für ihn wesentlich ist, was er zum Wachstum und Überleben braucht. Man kann bestimmte Nahrungsmittel auswählen und somit die Verdauung indirekt beeinflussen, trotzdem ist die Verdauung ausschließlich ein innengesteuerter und strukturdeterminierter Vorgang.

Dasselbe gilt für die Aufnahme geistiger Nahrung. So zeigt Sandra Scarr mittels Zwillingsforschung, dass sich Menschen ihre „Nahrung" (Erfahrungen) selbst aussuchen, bzw. dass Menschen mit weitgehend identischen Anlagen, in verschiedenen Umwelten nach ähnlichen Erfahrungen suchen – sofern die jeweilige Umwelt das zulässt: *„The idea that people sort themselves into environments according to their interests, talents, and personality has a long history in industrial/organizational psychology. People choose occupational environments that correlate with their personal preferences for social interaction or solitary work, for independent or supervised work, for salesmanship of social service. (…) Pervasive differences in reading choices and amount of reading were found by age, gender and ability levels – all of which are consistent with the theory that people choose and make their own environments."* (Scarr, 63/1992, S. 10–11).

Der Lernende lässt sich aus einem Vortrag, Unterricht oder Erlebnis von dem anregen, was ihm (seinem Bewusstseinssystem) als relevant erscheint. Es ist ein zeitabhängiges Phänomen, ähnlich, wie der Mensch für bestimmte Nahrungsmittel in bestimmten Jahren eher angetan ist. Dem Erwachsenen „schmecken" andere Dinge als einem Kind. So wirkt beispielsweise ein Film, der in der Kindheit gesehen wurde, Jahre später ganz anders. Es werden andere Dinge erlebt und gesehen, und somit stehen andere Denkweisen, Strukturen und Interpretationen zur Verfügung, mit denen aus dem Filmmaterial etwas konstruiert wird.

Die Tatsache, dass Schüler sich von anderen Dingen irritieren lassen als Erwachsene (unterschiedlicher „Geschmacksinn") hat konkrete Auswirkungen auf die Gestaltung von Lernumgebungen. So scheint das abstrakte Kürzen und Erweitern von Brüchen bzw. das Denken in Äquivalenzklassen ein seltsames „Nahrungsangebot“ für Zwölfjährige zu sein, auch wenn es vermutlich Zwölfjährige gibt, die diese „Nahrung“ verdauen können. Das Material Fischertechnik hingegen scheint in diesem Alter für fast alle Schüler zu passen (vgl. Abschnitt 6.2.1).

1.4.1.7 Ess- und Lernstörungen

Die körperliche bzw. geistige Nahrungsaufnahme ist die Voraussetzung, dass sich etwas körperlich bzw. geistig „bildet“. Aber auch wenn die Nahrung ästhetisch wunderbar angerichtet ist, ist es wichtig, dass der Essende bzw. der Lernende selbst entscheiden kann, wann er was und wie viel und in welcher Reihenfolge zu sich nimmt. Der Zwang zum Essen fördert Essstörungen. Zwangsernährung fördert keine Beziehungsarbeit. Es ist sogar sehr wahrscheinlich, dass man dem Schüler mit Zwangsernährung seine Beziehung zum Essen bzw. zur geistigen Nahrung austreibt.

1.4.2 Unbelebte, zeitliche und materielle Umgebung der Nahrung

1.4.2.1 Der Einfluss der Umgebung – die Umwelt von Unterricht

Ob etwas schmeckt oder nicht, hängt entscheidend von der Umgebung ab. Auch wenn das Essen ästhetisch ansprechend angerichtet ist, auch wenn es sich inhaltlich um das Lieblingsessen handelt: Eine minimale Veränderung der Umgebung kann extreme Folgen haben.

Abb. 11: Einfluss der Umgebung

Ein Haar in der Suppe oder eine Mücke haben extreme Folgen auf das ästhetische Empfinden. Rein „technisch“ handelt es sich um dieselbe Nahrung, jedoch machen soziale Systeme hier einen deutlichen Unterschied. Es macht einen Unterschied, ob Sie denselben Unterricht in einem schäbigen Klassenzimmer zu sich nehmen oder in einem wohlig eingerichteten Raum.

1.4.2.2 Ästhetik und Zweckhaftigkeit

Die Parallelitätsthese verdeutlicht die Bedeutung der Ästhetik der Umgebung im Gegensatz zur reinen Zweckhaftigkeit: Wenn es nur auf den Inhalt ankommen würde, dann könnte man ebenso gut den Gast von einem benutzten Teller essen lassen.

Abb. 12: Ästhetik vs. Zweckhaftigkeit

Für den reinen Zweck des „Inputs“ bzw. für die Nahrungsaufnahme spielt das praktisch keine Rolle. Aber offensichtlich macht es einen Unterschied, in welcher Umwelt die Nahrung aufgenommen wird. Das betrifft den Teller, als unmittelbare Umgebung, als auch den Tisch, die Luft, die Temperatur, die Einrichtung, … in der gegessen wird. Eine Nahrungsaufnahme im Keller auf dem Betonboden erzeugt eine völlig andere Wirksamkeit.

Klassenräume, Schulgebäude, Büro und Schreibtisch sind Orte der geistigen Nahrung. Im Sinne der Parallelitätsthese stört es den Lernprozess empfindlich, wenn das Klassenzimmer einer Kelleratmosphäre gleicht. Einen Unterrichtsraum nur zweckmäßig einzurichten, ist, im Sinne des Nachrichtenquadrates (Schulz von Thun 1981), nur sachlich gedacht. Auf der Beziehungsebene wirkt die Räumlichkeit ebenfalls. Nach Friedemann Schulz von Thun ist der Beziehungsaspekt zentral: *„Nach heutiger Auffassung vollzieht sich die Persönlichkeitsbildung weniger nach Maßgabe dessen, was gelehrt wird („sachlicher“ Lernstoff), sondern nach Maßgabe der Zigtausend von Beziehungsbotschaften, die das Kind und der Schüler zu seiner Person empfängt. Dass Unterricht und Erziehung immer gleichzeitig stattfinden, ist direkt an der Quadratur der Nachricht ablesbar.“* (Schulz von Thun 1981, S. 157). In Abschnitt 1.4.3 wird die Wirkung der sozialen Umgebung betrachtet.

Schule als Heimat vs. Schule als Ort

Schüler verbringen einen Großteil der Zeit in der Schule. Wenn „Schule als Heimat“ verwirklicht werden soll, dann kann das nur gelingen, wenn die Schüler selbst mitgestalten dürfen. Erst dann wird es zu *ihrer* Heimat. Eine „fremde Heimat“ gibt es nicht.

Das Entstehen der Empfindung Heimat ist ein innengesteuerter Vorgang des Bewusstseins. Die eigene Mitgestaltung des Schülers ist dabei wesentlich. Durch diesen kann Kontakt zu einer Umwelt des Lernens aufgenommen werden, die später als „schulische Heimat" bezeichnet werden kann.
Was die Orte des schulischen Lernens betrifft, werden im Allgemeinen Firmen beauftragt, die ohne Rücksprache oder der Einbindung von Schülern ans Werk geht. So wundert es nicht, dass die Schüler in der Regel wenig dankbar für die Einrichtung „Schule" sind. Belege über den Umgang mit Schulmöbeln bzw. der misslungenen Beziehungsarbeit zwischen Schüler und Einrichtung findet man in fast allen Schulen. Das äußere „Vorsetzen" einer vorgefertigten schulischen Umwelt bildet keine Heimat sondern lediglich einen Ort.
Die Aufgabe einer schulischen Einrichtung, die von Schülern mitgestaltet wird und somit wahrscheinlicher als Heimat erfahren werden kann, ist kein einfacher Prozess. Es ist ein gewaltiger Unterschied, ob ein einzelnes Kind sich seine Umwelt einrichtet, oder ob eine Gruppe sich ihre Welt gestaltet. Im zweiten Fall bedarf es im besten Fall einen gemeinsamen Konsens (im Gegensatz zu einem Kompromiss). Das erfordert einen professionellen Umgang mit sozialen Systemen (Schülerschaft, Lehrerschaft, Handwerker). Im Bild der Parallelitätsthese: Wer mitgekocht hat, dem schmeckt es besser und weiß das Ergebnis mehr wertzuschätzen, als wenn er das Essen als „Fertignahrung" vorgesetzt bekommt.

1.4.2.3 Zeitliche Umgebung: Pausen und Schlaf

Zeit stellt eine wichtige Umgebung für Wachstum dar. Kritiker warnen vor einem sog. „Bulimie-Lernen", d. h. Wissen in sich „reinzustopfen", um es dann auf Kommando wieder „auszuspucken". Der Körper kann Nahrung nicht zu schnell verarbeiten bzw. verdauen. Jeder (individuelle) Verdauungsvorgang braucht seine (eigene) Zeit. Alles Wachstum braucht Zeit, das weiß jeder, der es in irgendeiner Disziplin zu einer Meisterschaft gebracht hat.

Körperliches Wachstum
Der Körper wächst im Schlaf. Während des Tiefschlafes wird ein Wachstumshormon produziert, welches die Bildung neuer Körperzellen anregt. Wenn Kinder auf Dauer zu wenig schlafen, stellen sich mitunter Wachstumsstörungen ein.
Beim Muskelaufbau verhält es sich ähnlich: Muskeln wachsen nicht während des Trainings, sondern in den Ruhephasen. Die Regenerationsphase zwischen den Trainingseinheiten ist wichtig, um den Muskel wachsen zu lassen. Ausreichend Schlaf wird eine hohe Bedeutung zugemessen. So gelingt Wachstum: Anspannung und Forderung, den Muskel ausschöpfen, dann Entspannung und Erholung, um den Muskel wachsen zu lassen. Es versteht sich von selbst, dass schnellere Nahrungsaufnahme oder

Fastfood zu keinem gesünderen oder stimmigeren Lebensstil führen, ganz im Gegenteil.

Geistiges Wachstum

Auch bei geistiger Aktivität sollten Ruhephasen folgen. *„Im Schlaf werden Gedächtnisspuren von dem kleinen und flüchtigen Speicher Hippokampus in den großen und sicheren Speicher Kortex überführt".* (Spitzer 2009, S. 124). Wichtig ist hier der sogenannte REM-Schlaf. Die Aktivität des Gehirns (Hirnstromkurve) ist vergleichbar dem wachen Zustand, hingegen ist der Körper entspannter als im Tiefschlaf. Spitzer schreibt weiter: *„Das Gehirn ist elektrisch wach, lässt aber nichts hinein (höchste Weckschwelle) und nichts hinaus (geringste Muskelspannung) ."*

2010 fanden die Psychologinnen Ines Wilhelm und Susanne Diekelmann (Diekelmann & Born 2010, S. 11, 114–126) heraus, dass Studierende gelernte Wortpaare besser wiedergeben können, wenn sie genügend geschlafen haben. Schlafentzug führt zu Konzentrationsschwäche, Gereiztheit und Gedächtnisstörungen (Borbely 1984).

Pausen

Sowohl bei geistiger wie auch bei körperlicher Nahrung erhöhen Pausen und Schlaf den Wachstumseffekt. Das widerspricht einer maschinellen Vorstellung von Lernen und Lehren: Wesentliches Wachstum geschieht, wenn äußerlich scheinbar nichts geschieht. Gemäß der Parallelitätsthese bedeutet dies für das Lernen: Pausen spielen eine weit größere Rolle als „nur" der Erholung zu dienen. Viel wichtiger ist die Bedeutung der Pause als Möglichkeit zur Verdauung. Damit sich überhaupt etwas „bildet", dass Synapsen verbunden werden, dass Muskelfasern aufgebaut werden, muss Nahrung zuerst verdaut werden. Ohne Pausen lernt der Mensch weniger (!) und nicht mehr.

Auch bei der Gestaltung der Pausen geht es um das „Wie". Wenn nach dem Lernen der Fernseher einschaltet oder ins Internet gegangen wird, dann handelt es sich um eine Unterbrechung und keine Pause. Häufig weiß der Lernende am besten selbst, wann er genügend „gegessen" hat und eine Verdauungspause einlegen sollte.

1.4.3 Soziale Umgebung der Nahrung

1.4.3.1 Gemeinsames Essen, lebendige Umwelten

Eine zentrale Rolle spielt die belebte Umwelt. *„Alles was wir lernen, erfahren und erleben, vollzieht sich im Zusammenhang mit zwischenmenschlichen Beziehungen. Zwischenmenschliche Beziehungserfahrungen und das, was sie sowohl an Emotionen als auch an Lernerfahrungen mit sich bringen, werden in Nervenzell-Netzwerken des Gehirns gespeichert."* (Bauer 2013, S. 7). Es macht einen Unterschied, ob man mit seinem Chef, seinem Lebenspartner, seinem Kind, mit einem Fremden, mit einer

Schulklasse oder einer ZEN-Gruppe zu Mittag isst. Hier lässt sich eine Kritik zu vielen empirischen Untersuchungen über Unterricht anbringen: In der Forschung zu bestimmten Unterrichtsmethoden wird häufig versucht, die Lehrer- und die Mitschülerpersönlichkeit herauszumitteln. Das bedeutet (im Sinne der Parallelitätsthese), dass nur auf das Anrichten der Nahrung geachtet und die Beziehungsseite außen vor gelassen wird. Die Beziehungen entziehen sich empirischen Untersuchungen, da sie sich schlecht und höchstens indirekt quantifizieren lassen. Aus konstruktivistisch-kommunikativer Sicht bedeutet das: Nur was sich in Zahlen ausdrücken lässt, ist der empirischen Forschung zugänglich. Das System „empirische Forschung" ist auf Zahlen angewiesen. Ihre Stärke ist gleichzeitig ihre Schwäche: Sie kann einem Schüler nicht direkt ins Gesicht blicken.

Essen als Umgebung der (unterrichtlichen) Kommunikation

Die Untersuchung bzw. Forschung, wie das Essen durchschnittlich aufgenommen wird, ergibt stellenweise durchaus einen Sinn (angebranntes Essen schmeckt dem „Durchschnitt" nicht), dennoch besteht dabei die Gefahr, dass das Wesentliche (= Unmessbare) nicht gesehen wird. Aus zwei Gründen: (1) Weil Geschmäcker unterschiedlich sind und (2) weil beim gemeinsamen Essen ein Essen zwar da sein muss, es aber aus kommunikationspsychologischer Sicht nur eine Umgebung für Kommunikation darstellt. Kurz: Ein „durchschnittliches besseres" Essen erzwingt keine bessere Kommunikation, ist nicht einmal eine Voraussetzung dafür. Viel entscheidender ist, wer da am Tisch sitzt bzw. wer mit wem lernt.

1.4.4 Genese der Nahrung als Beziehungsarbeit

Bisher wurde Form, Inhalt und die Umgebung des Essens untersucht. Die Vorgeschichte des Essen bzw. dessen Herstellung fiel bisher sozusagen unter den Tisch. Lehrer bereiten häufig mit großem Aufwand, mitunter in Nachtschichten, ihren Unterricht vor und müssen dann erleben, wie die erstellten Arbeitsmaterialien so gar nicht wertgeschätzt werden. Es erinnert an die Mutter, die mit Liebe und Geduld das Essen für die Kinder zubereitet, das schließlich kaum Beachtung findet.

1.4.4.1 Verantwortung delegieren, „guter" Unterricht

Wer (mit-)kocht, mitbestimmt und Verantwortung übernimmt, der schmeckt mehr, ist zufriedener, kann selbst stolz auf sein Werk sein und erlebt sich als Selbstwirksam. Die Idee, dass der Unterricht nicht vom Lehrer „gemacht" wird und damit den Schülern nicht weggenommen wird bzw. die Idee des gemeinsamen Kochens oder „Mitkochens" findet sich in den meisten Schulkonzepten wieder. Im Bildungsplan 2004 wird darauf explizit hingewiesen: *„Die Schülerinnen und Schüler werden an der Planung des Unterrichtsverlaufs, an der Wahl der Anlässe und Gegenstände beteiligt, was wiederum die Teilnahme am Unterricht verstärkt.“* (Bildungsplan 2004).

Schuldfrage und Lehrergesundheit
„Schuld“ ist ein subjektives Konstrukt. Bei Streitigkeiten wird häufig die eigene Sichtweise so konstruiert, dass der andere die Schuld trägt. Wenn Schüler die Verantwortung (mit-)tragen, wird Schuldzuweisung in der Regel anders konstruiert, als wenn der Lehrer den Unterricht „macht“: Wenn etwas misslingt, dann liegt die Schuld zumindest nicht (allein) beim Lehrer. Das ist ein wichtiger Punkt in Bezug auf Lehrergesundheit.

1.4.4.2 Unterrichtsmaterial und Heftaufschrieb

Wer selbst darüber entscheidet, mit welchem Geschirr gegessen wird, wird den Tisch anders decken. In der Regel möchte man es „schön“ haben. Wer hingegen fremdbestimmt den Tisch so decken muss, wie es gewünscht wird, der wird versuchen dieses notwendige Übel hinter sich zu bringen.
Das Anrichten der Tafel entspricht dem Heftaufschrieb und den Materialien: Wer selbst über seinen Heftaufschrieb/sein Material entscheidet, wird anders aufschreiben/darauf aufpassen (Selbstwirksamkeit). Wem etwas für sich selbst (subjektiv) wichtig ist, wird das so tun, dass er es hinterher finden und damit arbeiten kann. Wer hingegen fremdbestimmt die Dinge aufschreiben/bedienen muss, wird versuchen die Sache möglichst schnell hinter sich zu bringen.

1.5 Modelle für das Lernen und Lehren aus einer systemisch-konstruktivistischen Sicht

Im Folgenden werden zwei Modelle für das Lernen und Lehren vorgestellt. Sie veranschaulichen das Modell der Autopoiesis, sowie die Beziehung von System und Umwelt.
Das Modell der Pflanze legt den Fokus auf das System bzw. das Bewusstseinssystem. Das Landkartenmodell stellt hingegen die Umwelt in den Vordergrund und kann als Hintergrundfolie nützlich bei der Gestaltung von Lernumgebungen sein, die ja eine Umwelt für die Bewusstseinssysteme im Klassenzimmer darstellen.
Beide von mir entwickelten Modelle versuchen dasselbe Lern- und Lehrverständnis zu beschreiben, aber sie sind nicht *die* sondern lediglich *mögliche* Beschreibungen. Modelle sind jedoch nie die Realität. Um es im Sinne des Landschaftsmodell (vgl. Abschnitt 1.5.2) zu formulieren: Sie sind eine Landkarte für das Verständnis.

1.5.1 Das Gehirn als Pflanze

„Wie kommt Wissen in unser Gehirn?“ scheint eine zentrale Frage für den Lehrenden zu sein. Und doch erweist sich die naheliegende Frage (zunächst) als wenig hilfreich. In einem konstruktivistischen Sinne lautet die passende Fragestellung: „Wie entsteht Wissen in unserem Gehirn.“ (Kramer 2013, S. V).
Das menschliche Gehirn kann nicht anders als zu Lernen. Mit Lernen ist die Schaffung einer internen Struktur, einer internen Landkarte gemeint, die die Wahrscheinlichkeit für das Überleben in der aktuellen Umgebung begünstigt.

Autonomer Datengenerator
Die Grundidee der hier besprochenen Didaktik besteht nicht darin, das Gehirn direkt zu verändern, sondern dass es in einer geeignete Umgebung, einer sogenannten vorbereiteten Lernumgebung, selbstständig lernt. Völlig autonom beginnt es in seiner (neuen) Umgebung Daten zu generieren. Das autonome generieren von Daten, der Ausbau des Netzwerkes bzw. die neuen Synapsenverbindungen sind im Modell als „Innerung“ angedeutet:

Abb. 13: Autonomer Datengenerator

Bedeutung der Umwelt
Die Umwelt (Lernumgebung, Erlebnisraum) ist für das Denken grundlegend. Ohne geistige Nahrung würde es verkümmern. Vergleiche die Beschreibung Stefan Zweig in seiner Schachnovelle (Zweig 1974, S. 74 ff) in Abschnitt 1.4.1.1 (Nahrung als Umwelt, Wahrscheinlichkeit von Wachstum).
„Man tat uns nichts – man stellte uns nur in das vollkommene Nichts, denn bekanntlich erzeugt kein Ding auf Erden einen solchen Druck auf die menschliche Seele wie das Nichts.“
Ohne Umgebung ist unser Gehirn weder denkbar noch kann es denken. Es braucht Sinneseindrücke unterschiedlichster Art, um Modelle entstehen lassen zu können. So pendeln über dem Säugling einfache Objekte nach denen es greifen kann. Was auch immer der Mensch mit diesen Objekten lernt, was immer sein Gehirn konstruiert, ist einem (äußeren) Beobachter nicht direkt zugänglich. Das ist eines der großen Probleme der Didaktik und der Psychologie: Man kann dem lebendigen Gehirn nur sehr,

sehr beschränkt beim konkreten Denken zuschauen – auch wenn man mittels Kernspintomographen einige, wenn auch nur sehr grobe Einblicke erhält. Ob im Kernspintomographen die Dreierreihe (3, 6, 9, 12, …) oder die Viererreihe (4, 8, 12, …) gedacht wird, das lässt sich heute schwerlich mit bunten Bildern verifizieren. Komplexe Gedanken sind nicht lesbar.

Die Rolle des Lehrers
Dem Lehrer kommt die Rolle des Gestalters von Lernumgebungen zu, als Künstler gestaltet er Erlebnisräume.

Abb. 14: Rolle des Lehrers

Das ist eine erweiterte Rolle, als die des „Gärtners“ bei Rousseau. Bei ihm wird der Lehrer/Erzieher mit einem Gärtner verglichen, der das Wachsende zu hüten und zu pflegen hat. Bei Rousseau darf der innere Vorgang nicht durch äußere Eingriffe gestört werden. Die pädagogische Aufgabe ist in dem skizzierten Modell mehr als „nur“ den natürlichen Entwicklungsvorgang des Zöglings zu hüten bzw. Störfaktoren fernzuhalten. (Rousseau 2014). Der Lehrer wird zum Spielleiter (Kramer 2016d) und Regelhüter. Statt eines Gartens stelle man sich besser ein Spielfeld (z. B. ein Fußballfeld) vor. Sicherlich schaut der Lehrer nach seinen „Pflanzen“, aber ebenso ermöglicht er das Spiel durch die strenge Einhaltung der Regel. Die Spielregel setzt eine klare Grenze, gibt eine klare Struktur vor. Im Gegensatz zu Rousseau sind äußere Eingriffe (Spielregel, Ressourcenknappheit, Forschungsauftrag) wichtig, um eine Richtung zu geben. Ein Fußballspiel ohne Begrenzung ist kein echtes Spiel. Gerade die Grenze (die Endlichkeit einer Ressource, hier der Raum) ermöglicht das Spiel. Allgemeiner geht es um die Einhaltung von Regeln, es gilt das Paradoxon des Spiels, wie Martin Mosebach in der Süddeutschen Zeitung schreibt: *„Keine Regel muss strenger eingehalten werden als eine Spielregel. Das Spiel fordert, wenn es einen Sinn haben soll, Unterwerfung unter die Regel. Das Spiel als die Betätigung höchster Freiheit ist möglich nur in der Zwangsjacke der Regel.“* (Mosebach 2006).

Der Lehrer als Teil der Lernumgebung

Wenn man jetzt die Umwelt bzw. die Lernumgebung genauer betrachtet, so ist der Lehrer bzw. der Spielleiter selbst ein Teil der Umgebung. Bei wissenschaftlichen Untersuchungen bzgl. der Qualität von Unterricht ist der „Parameter Lehrer“ der stärkste.[5] Nichts scheint so bedeutsam zu sein, wie die Rolle des Lehrers bzw. Spielleiters im Erlebnisraum Unterricht. Er ist zentraler Teil des Systems Unterricht bzw. der Umgebung des Schülers.

Bedeutsamkeit

Damit eine Pflanze wächst, benötigt sie Licht. Ohne Licht kein Wachstum. Der (junge) Geist möchte in seinem Schaffensdrang gesehen werden. Entsprechend gilt für das Bewusstseinssystem: Dort wo Licht bzw. Aufmerksamkeit hinfällt, geschieht Wachstum.

Die Sonne im Bild unten steht noch für einen zweiten Aspekt: Lernumgebungen sollen nicht nur in einer schulischen Wirklichkeit „spielen“, sondern in der realen Welt stattfinden bzw. von Bedeutung sein. Ein Appell also, das Schulbuch immer wieder zuzuschlagen, um stattdessen reale Dinge zu untersuchen.

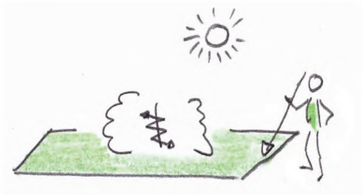


Abb. 15: Pflanzenmodell

Damit ist das Modell „Gehirn als Pflanze“ skizziert. Was an diesem Modell fehlt ist die Interaktion mehrerer, der Austausch verschiedener Gehirne, die Diskussion, der Diskurs und damit auch die Gesetze der Gruppendynamik. Manche Pflanzen können voneinander profitieren.

Pflanzenmodell und biologischer Körper als autopoietisches System

Das Pflanzenmodell erinnert an die Parallelitätsthese. Ob eine Pflanze oder der menschliche Körper wächst: Beides sind autopoietische Systeme. Ihre eigene innere Systemlogik lässt sie wachsen, eine Zerstörung kann hingegen leicht von außen geschehen (die Pflanze abschneiden bzw. in eine Umwelt packen, in der sie nicht lange überleben kann).

---

[5] In der Tat stellt der „Parameter Lehrer“ in vielen wissenschaftlichen Untersuchungen ein Problem dar: Seine Auswirkung ist so dominant, dass es sehr schwer ist, eine Unterrichtsmethode oder -technik „an sich“ zu untersuchen. Die Lehrerpersönlichkeit überlagert erst einmal alles und muss häufig erst (z. B. mittels Häufigkeitsanalysen und Stochastik) herausgemittelt werden.

1.5.2 Das Landschaftsmodell

Unterricht ohne konkrete Menschen (Lehrer und Schüler) ergibt ebenso wenig Sinn wie Kommunikation ohne Menschen. Auch wenn das eine Tatsache ist, wird häufig so über Unterricht gesprochen, als gäbe es den Unterricht an sich, also losgelöst von Schülern und Lehrerpersönlichkeit. Lehrproben zeigen ein Beispiel für diese Abstraktion: Bei der unterrichtlichen Planung stellt der Schüler für den Referendar den größten Störfaktor dar. Je größer der Spielraum der Schüler ist, desto höher ist die Gefahr, dass der Unterricht nicht mehr „funktioniert". Unterricht wird als Programm, im Sinne eines maschinellen Ablaufes, verstanden. Eine paradoxe Situation: Die Zielgruppe des vorbereiteten Unterrichts, wird selbst als Störung betrachtet.
Aus systemischer Sicht geschieht (unterrichtliches) Lernen durch eine Interaktion, einer Begegnung zwischen menschlichem Bewusstsein und Stoffgebiet. Es geht nicht darum, mit dem Stoff „durchzukommen", sondern um die Berührung zwischen konkretem Mensch und Wissensgebiet. In der gängigen Literatur findet man Merkmale und Voraussetzungen für „guten Unterricht", die alle losgelöst vom Schüler sind (vgl. z. B. Meyer 2014). Mit der Bezeichnung „guter Unterricht" kann stets, in Anlehnung an den genannten Autor, gefragt werden: Für wen ist dieser Unterricht gut? Für den Lehrer Meyer? Für den Schüler Klaus? Oder für die Schülerin Gesine? Für Schule XY? Für den Staat? Für Europa? Stillschweigend wird eine Objektivität unterstellt, die sich bei näherer Betrachtung nicht halten lässt. Die Bewertung von Unterricht kann immer nur von einem Subjekt (einem System) erfolgen.

1.5.2.1 Doppelte Passgenauigkeit von Unterricht

Statt von einem „guten Unterricht" zu sprechen, ergibt es aus systemisch-konstruktivistischer Sicht mehr Sinn, von einem „passenden Unterricht" zu sprechen. Und zwar im Sinne einer doppelten Passgenauigkeit: Passend zur Lehrerpersönlichkeit (innere Bedingungen), passend zur unterrichtlichen Situation (Klasse, Stoffgebiet, äußere Bedingungen), also um „das Individuum im System" (Stierlin 1994, S. 137). Es sind zwei Wahrheiten, die gleichzeitig erfüllt sein wollen. *„Das Ideal einer guten (= stimmigen) Kommunikation in der doppelten Übereinstimmung mit sich selbst und dem (systemisch geprägten) Gehalt der Situation."* (Schulz von Thun 2014, S. 15). Auch in der Gestaltung der Lernumgebung gilt die doppelte Sichtweise: Einerseits hat der Lehrer die Verantwortung für die Bedürfnisse und Ziele der Schüler (auf die Sache bezogen), andererseits soll die Sache an sich (fachliche Orientierung) nicht aus dem Blickfeld geraten (Lehner 2012, drittes Kapitel).

1.5.2.2 Stimmigkeit zwischen Stoffgebiet und Mensch

Das „Gebiet“, sei es die Mathematik, die Gitarre, die deutsche Sprache, das Fußballspiel, die deutsche Geschichte, die Musik, die Physik oder eine Fremdsprache, wird als zu erforschendes Gebiet verstanden.
Der Schüler beginnt seine Forschungsreise an der Stelle A und die Aufgabe besteht darin, zu B zu gelangen.

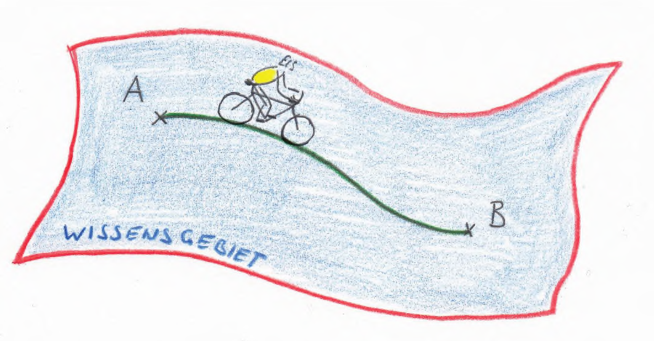


Abb. 16: Landschaftsmodell

Ein möglicher Weg von A nach B zu kommen ist eingezeichnet. Ein anderer Schüler hätte einen anderen Weg nehmen können.

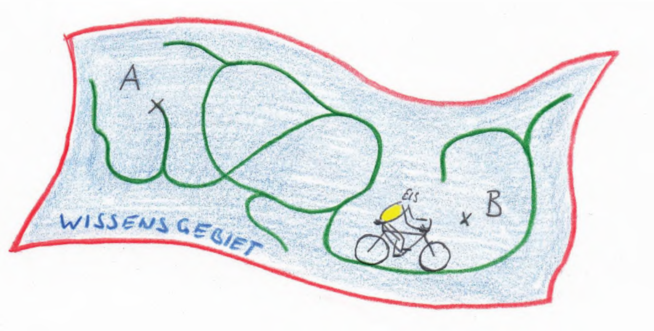


Abb. 17: Um- und Irrwege im Landschaftsmodell

Wie man sieht, hat er sich mehrmals verfahren, sowohl Um- und Irrwege genommen und im Falle eines „Tests“ hätte er es innerhalb der vorgegebenen Zeit nicht ins Ziel geschafft: Die Lösung (das Ergebnis) steht nicht als Antwort auf dem Fragebogen bzw. auf der Klausur. Der zweite Schüler bekommt folgerichtig keinen Punkt für die Aufgabe von A nach B zu kommen, er hat es nicht geschafft. Vielleicht bekommt er Teilpunkte, weil er ja ein Stück des Weges geschafft hat. Wie dem auch sei: Schüler Nr. 1 erhält eine gute Note, Schüler Nr. 2 eine schlechtere.

Aber wer von beiden weiß mehr um die Landschaft? Wer hat sie intensiver „erfahren“? Wer von beiden kennt sich besser aus? Schüler Nr. 1 ist wie auf einer Autobahn direkt ins Ziel gelangt. Von der Landschaft hat er nicht viel mitbekommen, er kann den Weg nicht verorten, das Gelernte in die gesamte Landschaft nicht einordnen. Vielleicht ist er einem Navigationsgerät oder seinem Lehrer „blind“ gefolgt und wäre heillos überfordert und verloren, wenn er nur wenig vom Weg abgewichen wäre. So betrachtet ist der Erkenntnisstand von Schüler Nr. 2 wesentlich besser, er kennt das Wissensgebiet besser, darum sollte besser er eine gute Note erhalten, auch wenn er noch nicht einmal das Ziel erreicht hat.

Eigene Wege, unterschiedliche Wege
„Viele Wege führen nach Rom.“ Diese banale Aussage hat im unterrichtlichen Kontext weitreichende Konsequenzen. Im Falle eines abbildenden Lehr- und Lernverständnis (vgl. Abschnitt 1.1) bestimmen Lehrer, Schulcurriculum oder Staat, welcher Stoff in welcher Reihenfolge „durchgenommen“ wird. Dort gibt es auch keine Umwege bzw. werden diese als Fehler konzeptualisiert („man ist falsch gefahren“). Die „Landkarte“ ist von außen vorgegeben.
In einem konstruktivistischen Lehr- und Lernverständnis, kann man prinzipiell den Weg nicht vorgeben. Was der Schüler (dessen Bewusstseinssystem) denkt, bleibt ihm überlassen. Aber wenn der Weg nicht von außen vorgegeben werden kann, wer entscheidet dann, wo es hingehen soll? Das ist keinesfalls so klar wie beim Trichter.
Die Antwort liegt in der Lernumgebung. Hier gestaltet der Lehrer durch die Aufgabenstellung, durch Fokussierung der Aufmerksamkeit. Der Lehrer kann jedoch Aufmerksamkeit nicht erzwingen, sondern lediglich wahrscheinlich machen. Es geht also nicht um eine äußere „Steuerung“ durch den Lehrer, sondern um gezielte Interventionen und „Irritationen“, um (eine geteilte) Aufmerksamkeit wahrscheinlich werden zu lassen. Der Lehrer „markiert“ etwas von der Umwelt (im Bild den roten Rand) und macht es dadurch zum Gegenstand der Betrachtung. Er zeichnet Landschaftsteile aus, die vom Schüler erforscht werden sollen. Er holt gleichsam etwas auf die Bühne. Was der Schüler in dem Bereich erkennt, hört und sieht, bleibt ihm selbst überlassen. Die Macht des Lehrers endet spätestens bei der Wissenskonstruktion des Schülers. Dieser entscheidet was gelehrt wurde.

Der Lehrer als Scout: Wie viel Struktur und wie viel Freiheit braucht der Einzelne?
Die Einschränkung des komplexen Gebietes mittels Fokussierung ist eine Komplexitätsreduktion. Es wäre gewiss nicht förderlich, den Schüler mit der „Freiheit des Weges“ bzw. der gesamten Wissenslandschaft ganz allein zu lassen. Alleingelassen im freien Weltraum, ganz ohne Scout und Begleiter, bedeutet Strukturverlust. Auf der anderen Seite wäre es falsch, den Lernenden in ein enges Korsett zu zwängen, wo er sich nicht entfalten kann (vgl. Lehner 2012).

Gangschaltung und eigenes Tempo

Die Gangschaltung lässt sich als didaktisches Modell verstehen. Eine feste Übersetzung steht selten in einem stimmigen Verhältnis zur Landschaft. Wer die Gänge wechseln kann, passt sich der Landschaft an. Mehrere Gänge sind deswegen für den einzelnen besser, weil er sich damit genauer der Umgebung anpassen kann.

Ein vorgegebenes „durchschnittliches" Vorgehen oder Tempo ist für den einzelnen nicht förderlich. Besser geht es individuell. Dahinter steckt die Idee der Stimmigkeit zwischen Lernumgebung (stofflicher und emotionaler Gehalt der Situation) und dem lernenden Menschen. Individuelle Förderung ist in diesem Kontext die Suche nach einer passenden Gangschaltung im Unterricht. *„Im Unterricht erfahren wir täglich die Notwendigkeit der Binnendifferenzierung. Man wird in der Regel den einzelnen Schülerinnen und Schülern mit einem gemeinsamen Vorgehen im Unterricht nicht mehr gerecht. Zu unterschiedlich sind die Leistungsfähigkeit und die Leistungsbereitschaft unserer Schüler, das Arbeitstempo, die Lernwege, das Interesse und auch das Vorwissen. Es scheint so, dass eine zunehmend individuelle Förderung der Schülerinnen und Schüler notwendig ist und diese sogenannte Binnendifferenzierung oder innere Differenzierung zu einer zentralen Aufgabe des Lehrers für den Unterricht wird."* (Utech 2018).

Äußere und innere Binnendifferenzierung

Das Modell des Radfahrens bzw. der Gangschaltung passt sehr gut zu Lernumgebungen bzw. Erlebnisräumen: der Schüler fährt selbst mit der ihm eigenen Geschwindigkeit. Er weiß am besten, wann er schalten muss. Da gibt es Stellen, an denen er mehr „Kraft" hat, er also schnell vorankommt, und es gibt Stellen, an denen ein Schieben oder sogar ein Verweilen sinnvoll ist. Und er entscheidet, was im Augenblick für ihn richtig ist. Das ist ein grundlegender Unterschied zu der üblichen Forderung nach Binnendifferenzierung (s. Zitat oben). Fast immer wird stillschweigend davon ausgegangen, dass der Lehrer diese Differenzierung „herstellt". *„In Bezug auf Schule und Unterricht ist mit Differenzierung das Bemühen gemeint, unterschiedlichen Eingangsbedingungen von Schülern gerecht zu werden."* (Utech 2018). Diese Form der Binnendifferenzierung möchte ich äußere oder senderorientierte Binnendifferenzierung nennen. Das Vorgehen einer fremdbestimmten äußeren Differenzierung, beispielsweise durch die Angabe des Schwierigkeitsgrades in Schulbüchern, erscheint aus einem systemischen Blickwinkel befremdlich. Prinzipiell kann kein Aufgabensteller oder Verlag wissen, wie schwer die jeweilige Aufgabe für ein Individuum ist. Dieser entscheidet über den Grad der Schwierigkeit.

Ganz anders ist es, wenn der Schüler selbst entscheidet, welche Aufgabe er bewerkstelligen möchte. Der Lehrer kann wenn nötig (d. h. die Kompetenz der eigenen Entscheidungsfähigkeit noch nicht entwickelt ist) die Rolle eines Beraters einnehmen. Die

Entscheidung an den Schüler zu delegieren, nenne ich im Folgenden innere Binnendifferenzierung. Aus rein pragmatischen Gesichtspunkten scheint die äußere Binnendifferenzierung praxisfern zu sein: Wie soll ein Lehrer – selbst wenn er direkten Zugang zum einzelnen Schülerhirn hätte – für jeden (!) seiner Schüler ein individuelles Lernprogramm herstellen? Anders ist es, wenn der Schüler darüber entscheidet, welchen Weg er in welcher Geschwindigkeit fährt. Selbstverständlich ist mit dieser Art des Unterrichtens ein radikaler Rollenwechsel des Lehrers verbunden. Die Entscheidungskompetenz, die Verantwortung für den eigenen Lernfortschritt, ist dem Schüler überlassen. Die grundlegende These ist, dass der Schüler selbst (besser) weiß, was für ihn gut ist – obwohl ihm für diese Entscheidung wichtige Daten der Außenperspektive fehlen. Hier zeigt sich ein didaktisches Paradoxon zwischen Führung und Wachstum, zwischen Außensicht und Innensicht.

Exemplarisches Lernen – Tiefe der Lernumgebung

Eine Lernumgebung (eine Landschaft) hat drei Dimensionen. Fachliches Weiterkommen kann in unterschiedlichen Dimensionen geschehen. Man kann in der Breite verschiedene Wege beschreiten, aber man kann auch in die Tiefe (Vertiefen) gehen.

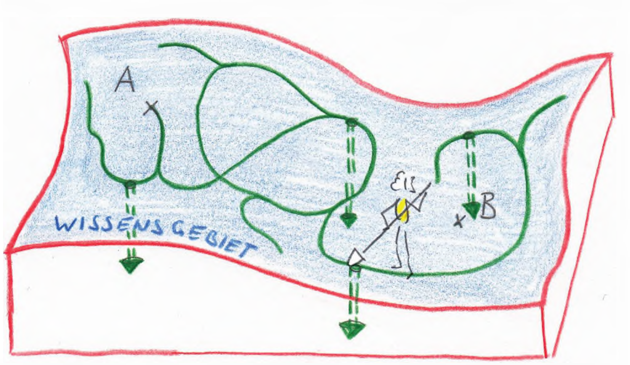


Abb. 18: Tiefe der Lernumgebung

Die Grundidee des exemplarischen Lernens besteht darin, an einigen Stellen vertieft zu forschen. Wenige Stellen reichen, um (exemplarisch) die Schichtung der Landschaft zu verstehen. Das ist besser, als überall ein bisschen zu graben. Mit den Worten von Martin Wagenschein: *„Mut zur Gründlichkeit. Mut zur Lücke*“. (Wagenschein 1959).

Reale Lernumgebungen

Reale Lernumgebungen besitzen einen beliebigen Tiefgang. Je tiefer man in ein Stoffgebiet eindringt, je genauer man hinschaut, je tiefer die Forschung ist, desto komplexer wird es. Es ist nicht so, dass man irgendwann einmal „fertig“ wäre. *„Sondern die Welt*

ist ein unermeßliches Potential für Überraschungen, ist virtuelle Information, die aber Systeme benötigt, um Informationen zu erzeugen (…)." (Luhmann 1997, S. 46).
Ganz anders ist es, wenn Sie über einen Baum in einem (Schul-)Buch oder auf einer anderen „oberflächlichen" fiktiven Darstellung nachdenken. Ein im Schulbuch abgebildeter Baum hat keinen Tiefgang. Man kann hier nicht beliebig vergrößern, irgendwann wird sieht man – anschaulich gesprochen – die Pixel vom Druck. Je nachdem wie detailliert gedruckt wurde, kommt man früher oder später zur Auflösungsgrenze.
Deutlich wird die „Tiefenschärfe" bei Computerspielen. Die Landschaft in komplexen Computerspielen ist stark ausdifferenziert. Sie können vom Weg abgehen, sie können genauer hinsehen und das Bild bleibt scharf – bis zu einem gewissen Grad bzw. zu einer gewissen Entscheidungstiefe. Einfache Spiele lassen nur wenige unterschiedliche Wege zu. Der Programmierer muss diese Wege ja erst schaffen, bevor sie nachgegangen werden können. In der Realität entstehen Wege beim Gehen (s. oben). In der Begegnung mit der Realität gibt es keine (äußeren) Grenzen des Denkens, die Welt hört nicht einfach irgendwo auf.

1.5.2.3 Lernen heißt Landkarten entwerfen

Es gibt keine Möglichkeit, die Realität unmittelbar bzw. direkt zu erfahren. *„Die reale Welt ist allerdings für die Erkenntnis nicht unmittelbar zugänglich. Sie ist so unerreichbar wie der „Horizont". ‚Welt' ist immer nur zugänglich als ‚Umwelt' aus der Sicht des Systems [dem Lernenden].* (Berghaus 2011, S. 39, Klammer von mir).
Beobachten kann also immer nur ein beobachtendes System (z. B. das Bewusstseinssystem eines Schülers). Das einzelne Individuum (Bewusstsein) geht durch die Landschaft (Wissensgebiet/Erfahrungsmöglichkeit) und konstruiert sich eine individuelle Umwelt bzw. eine eigene Landkarte (Wirklichkeit). *„Das bedeutet natürlich nicht, dass ein entsprechendes Angebot von Erfahrungsmöglichkeiten automatisch auch immer Erfahrungswirklichkeiten in allen Schülern hervorriefe."* (Winter 2016, S. 2). Was auf der Landkarte abgebildet ist, hängt einerseits von dem beobachtenden Individuum bzw. seinen internen Denkstrukturen ab, andererseits von der Landschaft. So hat beispielsweise ein Autofahrer eine andere Landkarte im Kopf als ein Radfahrer oder ein Fußgänger, ein Pflanzenliebhaber eine andere als ein Historiker, der sich für alte Gebäude interessiert.
Es gibt unendlich viele Möglichkeiten aus der realen Welt, Landkarten zu konstruieren. Dabei ist die Konstruktion nicht willkürlich. *„Es wäre absurd, dem operativen Konstruktivismus ein Bekenntnis zur Beliebigkeit der Erkenntnis (…) zu unterstellen. Das Gegenteil trifft zu."* (Luhmann 1994, S. 8). Die Aussage „Es ist doch allein meine Sache, wie ich meine Wirklichkeit konstruiert habe – da kannst Du sagen was Du willst." ist nur bedingt gültig. Die Konstruktionen des Systems (dessen interne Landkarten) müssen sich in der Realität behaupten. Eine Wüstenlandschaft für einen Dschungel zu halten, lässt sich nicht lange aufrechterhalten, eine Straßenkarte von Tübingen wird

nicht auf Stuttgart anwendbar sein. Aber die Suche nach einer passenden Landkarte (dem Aufbau von Wissen) ist kein Abbild oder eine irgendeine Form von Übereinstimmung bzw. direkter Korrespondenz mit der Landschaft. Es geht darum, ob die Landkarte kompatibel ist, ob der Beobachter damit zurechtkommt. Glasersfeld veranschaulicht das Prinzip der Viabilität an der Metapher des Waldläufers:
„Ein blinder Wanderer, der den Fluß jenseits eines nicht allzu dichten Waldes erreichen möchte, kann zwischen den Bäumen viele Wege finden, die ihn an sein Ziel bringen. Selbst wenn er tausendmal liefe und alle die gewählten Wege in seinem Gedächtnis aufzeichnete, hätte er nicht ein Bild des Waldes, sondern ein Netz von Wegen, die zum gewünschten Ziel führen, eben weil sie die Bäume des Waldes erfolgreich vermeiden. Aus der Perspektive des Wanderers betrachtet, dessen einzige Erfahrung im Gehen und zeitweiligen Anstoßen besteht, wäre dieses Netz nicht mehr und nicht weniger als eine Darstellung der bisher verwirklichten Möglichkeiten, an den Fluß zu gelangen. Angenommen der Wald verändert sich nicht zu schnell, so zeigt das Netz dem Waldläufer, wo er laufen kann; doch von den Hindernissen, zwischen denen alle diese erfolgreichen Wege liegen, sagt es ihm nichts, als daß sie eben sein Laufen hier und dort behindert haben. In diesem Sinn »paßt« das Netz in den »wirklichen« Wald, doch die Umwelt, die der blinde Wanderer erlebt, enthält weder Wald noch Bäume, wie ein außenstehender Beobachter sie sehen könnte. Sie besteht lediglich aus Schritten, die der Wanderer erfolgreich gemacht hat, und Schritten, die von Hindernissen vereitelt wurden. (...) Solange Gehen die einzige Erfahrensdimension des Waldläufers ist, kann er Bäume, Steine, Wald, Boden und worauf sonst er stoßen mag, überhaupt nicht anders begreifen und beschreiben als in Ausdrücken des Widerstandes, des Gehemmtwerdens, des Scheiterns.“ (Glasersfeld 2009, S. 19ff).
In der folgenden Abbildung haben drei Radfahrer (vgl. Abschnitt 1.5.2.3), die jeweils am Punkt A gestartet sind, verschiedene „Erfahrungen“ gemacht. Manche Gebiete sind noch gar nicht erforscht.

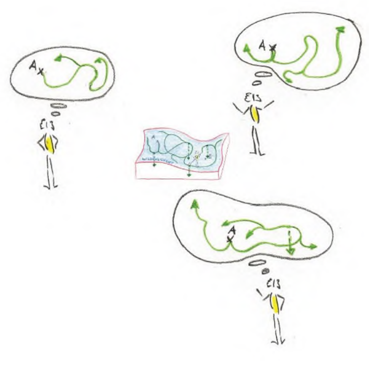


Abb. 19: Unterschiedliche Konstruktionen eines Wissensgebietes

Wissen entsteht dadurch, dass im Bewusstsein Wege entstehen bzw. wachsen. Das entspricht der Entstehung von Synapsenverbindungen im Gehirn. *„Unser Gedächtnis ist nichts anderes als die Summe der Spuren vergangener Erlebnisse, durch die Synapsen in ihrer Stärke verändert wurden. Wiederholung ist gut für das Lernen, weil dann Impulse immer wieder über die entsprechenden Synapsen laufen und sich diese durch den wiederholten Gebrauch eben auch nachhaltig ändern. (…) Wann immer das Gehirn gebraucht wird, ändert es sich, jeweils nur ein ganz klein wenig, aber eben doch. Es entstehen Spuren dieses Gebrauchs, so wie Spuren im Schnee oder auf einer Wiese entstehen, wenn die Leute immer wieder den gleichen Weg nehmen."* (Spitzer 2010, S. 55).
Man verwechsle jedoch nicht den real existierenden Weg (die Realität) mit der Landkarte. Auch wenn reale Wege bereits existieren, müssen diese erst begangen werden, bevor es eine Entsprechung im Gehirn gibt. Man kann also eigene bzw. neue Wege (er-)finden oder bereits vorgefertigte Wege nutzen – wie dem auch sei: Gehen (konstruieren) muss man selbst, um sich ein Bild (eine Landkarte) von der Landschaft zu machen.

„Bewertung" der Konstruktion

Sich in einem Gebiet auskennen bedeutet, dass man eine Landkarte im Kopf hat, die mit der Realität verträglich ist. (Wenn ein Weg nicht eingezeichnet ist, kann das zu Schwierigkeiten führen.) Die Landkarten als äußerer Beobachter zu bewerten, ist sehr schwer möglich, allerdings findet die „Bewertung" in der Anwendung unmittelbar statt: Die Realität „bestraft" den Konstrukteur. Wird er (von der Realität bzw. seiner Umwelt) irritiert, etwa dadurch, dass seine Karte nicht zur Realität „passt", wird er korrigieren müssen. Man achte darauf, wer „bestraft": Es ist kein (weiterer) Beobachter, wie zum Beispiel der Lehrer, die Landschaft selbst tut es. Da zumindest die unbelebte Landschaft bzw. das Material keine Erinnerung hat (die Realität ist einfach da, das „genügt" der Realität), gibt es auch keine Vergangenheit. Ein Weg kann nicht zum Konstrukteur sagen: „Du, das habe ich Dir aber jetzt schon fünfmal gesagt, dass Du hier rechts abbiegen musst!" Die Bewertung entsteht auf natürliche Weise in der Konfrontation mit der Realität statt und findet individuell im jeweiligen Bewusstseinssystem statt: Wenn die Wirklichkeitsvorstellung passt, dann ist sie gut – oder sie passt nicht und sorgt für eine Irritation. Dann erfolgt Anpassung und Modifikation bzw. Assimilation und Akkomodation (Piaget 2016, S. 53ff): Lernen geschieht.
Ein Beispiel: In einer vierten Klasse soll ein mobiler Roboter so programmiert werden, dass er eine spezielle Aufgabe erledigt, z. B. dass er ein Quadrat abfährt.

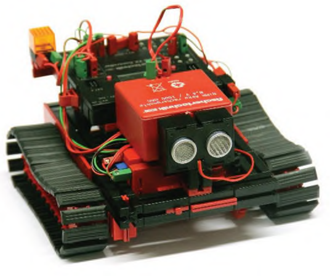


Abb. 20: Spielzeugroboter für Grund- und Mittelstufe

Der Roboter (das Material) macht genau das, was er aufgrund seiner Bauweise, seiner Programmiersprache tun kann. Angenommen, der Roboter wurde funktionstüchtig zusammengebaut und ein Schüler hat ein Programm geschrieben, das den Roboter ein Dreieck abfahren lässt oder ein Programm, das gar nicht funktioniert. Dann „straft“ das Material in natürlicher Weise, indem es schlichtweg nicht wie gewünscht reagiert. Die Landkarte (hier das Programm) passt nicht zur Realität. Der Schüler ist irritiert und wird die neuen Erfahrungen integrieren (Assimilation), oder er wird aufgeben, oder einen anderen „Weg“ versuchen (Akkommodation): Er wird seine Landkarte verändern.
Der Roboter hat keine Vergangenheit. Der Begriff „straft“ ist in diesem Zusammenhang anders verwendet, da der Roboter (allg. Material) kein Bewusstseinssystem besitzt. Das Material reagiert nicht verärgert, es lobt nicht – es ist Teil der Realität und einfach da. Die „Strafe“, sofern der Begriff überhaupt passend ist, findet nur innerhalb des Beobachters statt.

1.5.2.4 Lehrgänge und Landkarten – Bezug zu Martin Wagenschein

Das Landschaftsmodell impliziert, dass es verschiedene Lehrgänge durch ein bestimmtes Wissensgebiet gibt. Martin Wagenschein warnt vor der Versuchung des sogenannten systematischen Lehrgangs (Abb. 21, Bild I). *„Die Begründungen [für einen solchen Lehrgang] sind einleuchtend: eines baut sich aufs andere, sei es logisch oder chronologisch: Ordnung muss sein; Lücken rächen sich; man kann nie wissen, wozu man das Einzelne brauchen wird. Diese Begründungen ‚sind logisch‘, aber auch nur das. Sie sind nicht pädagogisch. Sie sehen das fertige Fach und im Grund nicht das Kind, sondern den fertigen Menschen, den Erwachsenen vor sich, nur im Kleinformat, nur quantitativ noch ‚beschränkt in der Auffassungsgabe‘. (…) Ein solcher systematischer Lehrgang verführt zur Vollständigkeit, (denn er will bereitstellen), damit zur Hast und also zur Ungründlichkeit. So baut er einen imposanten Schotterhaufen. Gerade, indem er sich an die Systematik klammert, begräbt er sie, und verstopft den Durchblick*

(Bild I). Er verwechselt Systematik des Stoffes mit Systematik des Denkens.“ (Wagenschein 1959, S. 6 ff).

Es braucht Schwerpunkte, sogenannte Plattformen: *„Anstelle also des gleichmäßig oberflächlichen Durchlaufens des Kenntniskataloges, Schritt für Schritt: die Erlaubnis, ja die Pflicht, sich hier und dort festzusetzen, einzugraben, Wurzel zu schlagen, einzunisten.“* (Abb. 21, Bild III).

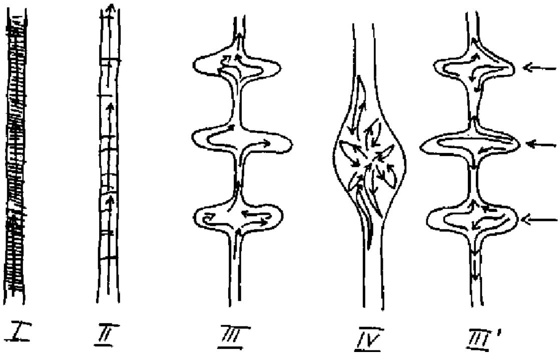


Abb. 21: Lehrgänge nach Wagenschein

Die „Ballungen“ entsprechen im Landschaftsmodell den zentralen Punkten, etwa den „Hauptstädten“. In einer Übung an der Universität Freiburg zeichneten Studierende im Rahmen der Vorlesung „Didaktik der Analysis und Algebra“ im Wintersemester 2016/17 in Freiburg ihre Landkarte zur Linearen Algebra. Man erkennt Hauptstädte (rot), mittelgroße Städte (gelb), Haupt- und Nebenstraßen (durchgezogene und gestrichelte Linien).

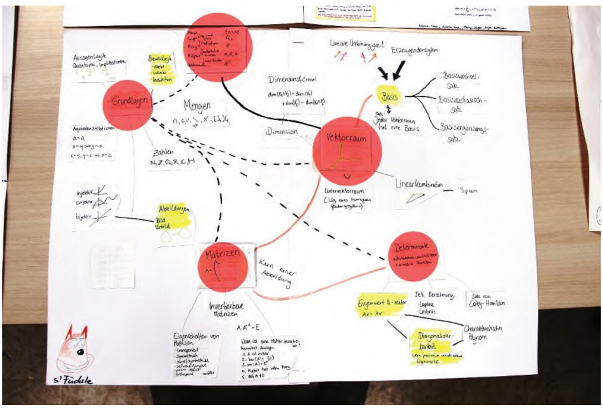


Abb. 22: Landkarte zur Linearen Algebra

Forschungsaufträge vs. Aufgaben

Mit der Ausarbeitung einer Landkarte wird man nie „fertig". Peter Gallin unterscheidet zwischen Forschungsaufträgen und Aufgaben (Gallin 2018): Der „gute" Schüler ist mit einer Aufgabe schneller fertig als seine Mitstreiter, bei Forschungsaufträgen ist es umgekehrt.
Im Landschaftsmodell lässt sich eine Aufgabe so beschreiben: Wie kommt man von A nach B? Je ausdifferenzierter die Landkarte, desto schneller findet der Schüler die Lösung. Ein Forschungsauftrag könnte so lauten: Wie sieht die Landschaft am Ort B aus? Je nach Vorwissen erkennt der Schüler mehr und kann somit differenzierter und genauer Beobachten. Mit dem Forschungsauftrag wird er nie abschließend fertig, er kann tiefer und tiefer gehen. Aus der realen Landschaft lassen sich beliebig viele Informationen gewinnen. Das Forschen hört erst auf, wenn der Beobachter aufhört.

1.5.2.5 „Richtig und falsch" – ein typisches Landkartenphänomen

„Das Ideal der zweiwertigen Logik, wonach Aussagen entweder „wahr" oder „falsch" zu sein haben bzw. sind und etwas Drittes nicht möglich ist, ist ein typisches Landkartenphänomen (…)." (Simon 2013a, S. 116). Ein „falscher" Weg kann erst falsch werden, wenn (von einem Beobachter) bestimmt worden ist, wohin die Reise gehen soll. Die Begriffe „richtig" und „falsch" ergeben nur subjektiv (für das jeweilige beobachtende) einen Sinn. Wer so schnell wie möglich von A nach B kommen möchte, für den (bzw. in dessen Wirklichkeit) ist der direkte Weg „richtig". Wer die Landschaft erkunden und erforschen möchte, für den sind andere Wege „richtig".
Die Realität ist einfach so, wie sie ist. Sie „kennt" kein richtig oder falsch. Es braucht ein Bewusstseinssystem, um die Unterscheidung „richtig" oder „falsch" zu konstruieren. Um in und mit der beliebig hohen Komplexität der Realität umzugehen, konstruiert der Mensch Landkarten, Abbildungen bzw. Modelle. Diese ermöglichen ihm, die Komplexität zu reduzieren und helfen ihm dabei, Entscheidungen zu treffen. Er sieht dann die Dinge (aus seiner Sicht, in seiner konstruierten Landkarte) als „richtig" oder „falsch" an. Erst durch die subjektive Wirklichkeitskonstruktion können Dinge (subjektiv) bewertet werden.
Ein alltägliches Beispiel: Ob „gutes" oder „schlechtes" Wetter ist, entscheidet jedes Subjekt für sich. So beschwert sich der Bauer, der sich für sein Getreide Regen wünscht, über den „schönen" sonnigen Tag, ebenso sehnt sich der Allergiker Regen herbei, … kurz: Wie „gut" das Wetter ist, die der individuelle Beobachter für das reale Wetter vergibt, fällt je nach Individuum anders aus. Die Leistung eines Schülers (das Wetter) ist wirklichkeitsabhängig und kann prinzipiell nicht objektiv bewertet werden. Damit Noten überhaupt vergeben werden können, muss zuerst eine Umwelt definiert werden.

1.6 Kartografie und Wissenskonstruktion

Wissen als Landkarte bzw. Wissenskonstruktion als Zeichnen von Landkarten, als Kartografie zu deuten, lässt viele Vergleiche durch Veranschaulichung zu. Die Hinweise, dass *„unser Gedächtnis nichts anderes als die Summe der Spuren vergangener Erlebnisse ist"*, motivieren den Vergleich zwischen dem realen Gehen und den Spuren des Denkens: *„Es entstehen Spuren dieses Gebrauchs, so wie Spuren im Schnee oder auf einer Wiese entstehen, wenn die Leute immer wieder den gleichen Weg nehmen."* (Spitzer 2010, S. 55)

1.6.1 Strukturbildung, interne Landkarten entwickeln

1.6.1.1 Unterscheidungen

Unterscheidung, Wegverzeigung

Unterscheidung ist die grundlegende Operation eines Systems und bedeutet (im Falle eines Bewusstseinssystems) Wissenszuwachs. *„Informationen bestehen aus Unterschieden, die einen Unterschied [für das beobachtende System] machen."* (Bateson 2002, S. 122; Klammerbemerkung von mir). Ich entscheide mich für diesen und nicht für den anderen Weg. Ich unterscheide zwischen einer Geige und einer Bratsche, zwischen einer Tanne und einer Fichte. Was zuvor eine Einheit war (Musikinstrument, Nadelbaum) ist mit der gewachsenen Erkenntnis ein Unterschied.

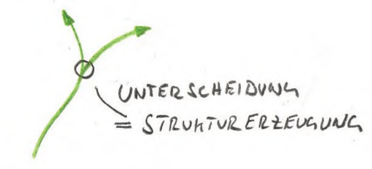


Abb. 23: Unterscheidung

„Mit Fortschreiten dieses Prozesses werden Unterscheidungen an Unterscheidungen gefügt, bis irgendwann eine differenzierte Struktur entstanden ist." (Simon 2013a, S. 60). Je nachdem, welchen Weg man eingeschlagen hat, bestimmt das die künftigen Wegentscheidungen. Wenn ich eine Fichte von einer Tanne unterschieden kann, dann habe ich jetzt die Möglichkeit, zwischen verschiedenen Tannen- und Fichtenarten Unterscheidungen zu treffen. Mit anderen Worten: Die Vorgeschichte meines bisherigen Denkens bestimmt mein jetziges Denken.

1.6.1.2 Anschlussfähigkeit

Ein Weg muss an den anderen anschließen, sonst kann man ihn nicht gehen. Ebenso verhält es sich mit dem System Bewusstsein: Nur Denken kann Denken produzieren. So schreibt Luhmann, *„dass das System in jeder, also in noch so günstiger Umwelt schlicht aufhören würde zu existieren, wenn es die momenthaften Elemente, aus denen es besteht, nicht mit Anschlussfähigkeit ausstatten und so reproduzieren würde.*" (Luhmann 2012, S. 28).

Abb. 24: Anschlussfähigkeit

Möchte man etwas konstruieren, kann man nur Gedanken fort- oder weiterführen. Wohl kann man an einer anderen Stelle (neu) beginnen, aber dann entwickelt sich an dieser Stelle ein neues Konstrukt. Für einen realen Wandere wäre das so, als wenn er mit dem Hubschrauber an einer anderen Stelle abgesetzt werden und dann erneut beginnt die Landschaft zu erkunden. Es entstehen isolierte, d. h. nicht verbundene bzw. vernetzte, Inseln des Wissens.

1.6.1.3 Erschließung eines Wissensgebiets

Wer mehr weiß, sieht mehr. Wie Wissen wächst, lässt sich im Landschaftsmodell nachvollziehen: Ein Wanderer wacht in einer ihm vollkommen fremden Umgebung bzw. Umwelt auf, (man kann z. B. an die Geburt eines Babys denken oder an einen Forscher zu Beginn der Erschließung eines neuen Wissensgebietes). Er weiß nicht, wo er ist, im Augenblick gibt es in seiner Wirklichkeit noch keinerlei Struktur. Er öffnet die Augen und „erkennt", dass er nach links oder nach rechts gehen kann. Der erste Erkenntnisschritt ist vollzogen.

Abb. 25: Strukturbildung (1)

An beiden Enden verzweigt sich der Weg erneut. Die erste Unterscheidung links-rechts führt zu einer zweiten, in diesem Fall geht es nach oben oder nach unten.

Abb. 26: Strukturbildung (2)

Die Wege des Wanderers entstehen erst durch das Begehen. Strukturentstehung – sei es in der materiellen Welt (Wege erzeugen, Strukturen/Ordnung schaffen, Muster bilden) oder geistigen Welt (Synapsenverbindungen / komplexe Gedankengänge) – geschieht nicht von selbst, sondern ist stets mit einem Energieaufwand verbunden. In der Physik ist dieser Sachverhalt als Diffusion beschrieben. Aufgrund der thermischen Bewegung (Brown'sche Molekularbewegung) durchmischen sich verschiedene Stoffe mit der Zeit völlig. Der Physiker Boltzmann erkennt, dass *„der wahrscheinlichste Zustand, den ein System erreichen kann derjenige ist, in dem die massenhaften Ereignisse, die gleichzeitig in dem System stattfinden, sich in ihrer Wirkung statistisch ausgleichen."* (Prigogine 1980, S. 133).

Der wahrscheinlichste Zustand ist also ungeordnet bzw. strukturlos. Eine Unterscheidung bzw. Wachstum ist also mit einem Energieaufwand verbunden. Vielleicht hilft die Vorstellung, dass unserer Wanderer die zugeschneiten Wege freischippt. Hier arbeitet sich der Wanderer in alle Richtungen gleichmäßig vor, so dass seine Landkarte gleichmäßig wächst. Ein anderer Wanderer würde nicht gleichmäßig die Straßen freischippen. Entscheidend ist: Nur wo der Wanderer gegangen ist bzw. geschippt hat, ist ein Weg entstanden. Mit jeder Verzweigung ist mehr Struktur entstanden. Die Landkarte wächst wie eine Pflanze, die neu hinzukommenden Wege bzw. Triebe sind in grün dargestellt. Jede Verzweigung erzeugt neue Möglichkeiten. Hier die Struktur nach fünf Verzweigungen bzw. nach fünf binären Entscheidungen:

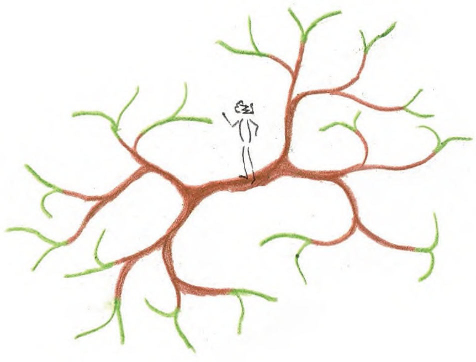


Abb. 27: Strukturbildung (3)

Bewusstseins als Sinnesorgan

Wer bereits viel konstruiert hat, kann feinere Unterscheidungen treffen. In der Skizze sind die äußersten grünen Wege gleichsam der Apparat, der dem Wanderer bei seiner Forschung und in der Diskussion zur Verfügung steht. Seine Beobachtung der Umwelt ist differenzierter, die grünen Triebe sind das Sinnesorgan des Bewusstseins. Jede Aufspaltung stellt eine begriffliche Differenzierung dar. In der Formulierung „einen Sinn für etwas haben“ lässt sich die Idee der Differenzierung als Sinnes- und somit Wahrnehmungsorgan des Bewusstseins verstehen. Wer mehr weiß, sieht mehr (vgl. oben).

Auf Wissen verzichten?

Auf den ersten Blick könnte es so wirken, als ob eine differenzierte Landkarte vorteilhaft wäre. Jedoch muss ein differenzierteres Wissen kein Vorteil für den einzelnen sein. Das Wissen, wie sich ein Verkehrsunfall anfühlt oder das Wissen darüber, dass man an einer sehr schweren Krankheit leidet, kann, aber muss (für das beobachtende System) kein Vorteil sein. Tatsächlich wünschen manche Menschen, etwas nicht zu wissen oder wollten auf ein bestimmtes Wissen verzichten. Wenn ein Mensch eine für ihn schlimme Erfahrung gemacht hat, so existiert dieser Weg in seiner Landkarte. Ob es für ihn positiv oder negativ ist: In ähnlichen Situationen wird er wieder daran erinnert. Das zweite Mal zu versagen ist wahrscheinlicher als das erste Mal, weil dann (leider) schon die Möglichkeit des Versagens gelernt wurde und (leider) auch für Konstruktionen zur Verfügung steht.

In diesem Sinne erscheinen vor allem für junge Geister brutale Bilder wie etwa Folter, Horror oder pornographische Darstellungen erkenntnistheoretisch gefährlich. Das gezeigte Material wird sehr wahrscheinlich für neue Konstruktionen angewendet werden.

Üben und wiederholen

Wege, die häufig begangen werden, werden breiter und schneller begehbar. Wege, die nicht verwendet werden, wachsen wieder zu. Im Modell können dicke und ausgefahrene Wege entsprechend dicker gezeichnet werden.

Abb. 28: Häufig begangene Wege

Je größer die Bedeutsamkeit, desto stärker werden im Querschnitt die Wege. Emotionen „graben sich tiefer ein“, da sie für Menschen eine hohe Bedeutsamkeit besitzen.

1.6.1.4 Beispiel zur Strukturbildung/Ausdifferenzierung

Zu Beginn gibt es in der Landschaft für den Wanderer keine Unterschiede, alles in seinem Forschungsgebiet sind lediglich Pflanzen. Der Wanderer macht noch keinen Unterschied. Es gibt auch noch keinen anderen Begriff als „Pflanze“, um etwas zu bezeichnen. Dann trifft der Wanderer im Kontakt mit seiner Umwelt eine Unterscheidung: Es gibt Bäume und Nicht-Bäume (z. B. Sträucher und Gräser), offensichtlich ist eine erste Struktur entstanden. Wir lassen den Wanderer in Richtung Bäume weiterforschen bzw. -gehen.
Im zweiten Schritt macht er eine Unterscheidung zwischen Nadelbäumen und Nicht-Nadelbäumen (z. B. Laubbäumen) und er schafft mit diesem Unterschied (in seiner Wirklichkeit) Information. Fritz B. Simon formuliert sein Handeln als ein Gebot des systemischen Denkens: *„Wenn Du Informationen (be)schaffen willst, triff Unterscheidungen!“* (Simon 2013a, S. 113).
Als nächstes unterscheidet er vielleicht zwischen sommergrünen Laubbäumen und immergrünen Laubbäumen. Er hätte auch eine Unterscheidung nach der Wuchshöhe vornehmen können. Oder nach botanischen Pflanzenfamilien. Entscheidend ist, dass der Wanderer selbst die Unterschiede trifft bzw. in ihm getroffen werden.[6] Wie Unterscheidungen entstehen ist so grundlegend, dass es vollkommen unklar ist, ob diese

---

[6] Wie Unterscheidungen passieren ist so grundlegend, dass es vollkommen unklar ist, ob diese aktiv oder passiv vollzogen werden. Spencer-Brown schreibt darüber: „Wir [haben] hier einen Ort erreicht haben, der so primitiv ist, dass Aktiv und Passiv sowie auch eine Anzahl anderer eher peripherer Gegensatzpaare schon lange ineinander kondensiert sind und fast jede Form von Worten mehr Kategorien suggeriert, als tatsächlich vorhanden sind“. Spencer-Brown, George, dt. Übersetzung, *Laws of Form – Gesetze der Form*, Bohmeier Verlag Leipzig 1979, S. 72.

aktiv oder passiv vollzogen werden. *„Wir [haben] hier einen Ort erreicht haben, der so primitiv ist, dass Aktiv und Passiv sowie auch eine Anzahl anderer eher peripherer Gegensatzpaare schon lange ineinander kondensiert sind und fast jede Form von Worten mehr Kategorien suggeriert, als tatsächlich vorhanden sind".* (Spencer-Brown 1969, S. 72). Die Unterschiede sind nicht von Natur aus gegeben, erst das Bewusstsein des Systems unterscheidet und generiert dadurch Information. Es ist also nicht so, dass Information in der Welt vorhanden ist und der Wanderer sie auf seinem Weg einsammelt. Das System selbst generiert die Information bzw. die Weggabelung. Es erschafft jedoch nicht die Welt selbst, sondern durch seine Beobachtung Unterschiede und dadurch Information und Wissen. Die Welt „weiß" nichts, sie ist einfach nur da, erst das Bewusstsein des Wanderers „weiß".
Im nächsten Schritt unterschiedet er Ahorn von Nicht-Ahorn (z. B. Birke, Eiche, Ulme, Weide, ...), dann erneut unterschieden zwischen Feldahorn und Nicht-Feldahorn (z. B. Bergahorn, Spitzahorn, ...). Die Unterscheidungen können immer weiter und weiter gehen, es gibt kein Ende, da der Wanderer selbst die Unterscheidungen entstehen bzw. wachsen lässt. Insgesamt hat unser Wanderer einen Zweig erforscht bzw. erschaffen. Entsprechend lässt sich seine innere Landkarte skizzieren:

Abb. 29: Ausdifferenzierung. Von der „Pflanze" zum „Feldahorn"

Er könnte jetzt an dieser Stelle den Feldahorn in den Mittelpunkt seiner Forschung stellen, dann würde sich hier das Zentrum weiterer Verästelungen bilden. Er entfernt sich dadurch vom „Normalen", d. h. in seiner Wirklichkeit spielen Unterschiede von Feldahornbäumen eine Rolle, die in der Alltagswelt der meisten Bewusstseinssysteme nicht nur keine Rolle spielen, sondern überhaupt nicht existieren. Unser Wanderer kann nicht mehr mit jedem über sein Forschungsgebiet sprechen, da gibt es nur noch wenige, die Landkarten in seinem (Wissens-)Gebiet entwickelt haben. Er ist (aus der Sicht eines zufällig auf der Straße ausgewählten Bürgers) *ver-rückt* (nicht im Sinne von Irrsinn, sondern im Unterschied zu „gewöhnlichen" Landkarten).

Das Kommunizieren über unterschiedliche Landkartenentwürfe ist konstruktiv, was im nächsten Abschnitt näher betrachtet wird.

1.6.1.5 Konstruktive Diskussion = Landkarten vergleichen

In einer Diskussion bzw. in einem konstruktiven Streit werden Landkarten miteinander verglichen und ausdifferenziert. Eine Diskussion ergibt natürlich nur Sinn, wenn alle Beteiligten vom selben Wissensgebiet Landkarten angefertigt haben. Der einzelne Wanderer hat in der Diskussion zwei Möglichkeiten: Entweder er findet etwas (bzgl. seiner subjektiven Landkarte) richtig[7] und ergänzt bzw. baut seine Landkarte entsprechend um, oder er findet etwas falsch und baut entsprechend um oder auf (Assimilation und Akkommodation). In beiden Fällen differenziert der Wanderer seine Landkarte weiter aus.

Für eine Diskussion ist es förderlich, wenn die Teilnehmer nicht nur dasselbe Gebiet untersuchen, sondern dass sie bereits ungefähr gleich differenzierte Landkarten konstruiert haben. Eine Diskussion zwischen einem Laien und einem Experten ergibt nicht unbedingt Sinn. Dem Laien fehlt die Begrifflichkeit, der Experte mag versuchen, sich einfach auszudrücken, aber er hat – inhaltlich betrachtet – kein echtes Gegenüber, die Rollen „Lehrer-Schüler" lassen zumindest selten eine echte fachspezifische Diskussion zu. Wenn Sie beispielsweise als Mathematiker verschiedene Anwendungen des schwarzen Lemmas in der Funktionentheorie diskutieren möchten, dann brauchen Sie einen Diskussionspartner, der sich zumindest ein bisschen in Ihrer Landschaft auskennt und mit grundlegenden mathematischen Begriffe (in diesem Wissensgebiet), wie etwa „holomorphe Selbstabbildungen", vertraut ist. Mit anderen Worten: es ist für die Arbeit an der eigenen Landkarte hilfreich die Sprache des anderen zu sprechen.

---

[7] Hinweis: „Richtig" und „falsch" sind typische Landkartenphänomene. In der individuellen Wirklichkeit bzw. bei deren Landkartenkonstruktion ergibt „richtig" bzw. „falsch" Sinn. Objektiv gibt es diese Begriffe jedoch nicht, da die Beschreibung von „richtig" und „falsch" wirklichkeitsabhängig ist. Aus konstruktivistischer Sicht gibt es keine Objektivität, jede Aussage wird von einem Beobachter geäußert. „Richtig" oder „falsch" ist somit immer eine Frage des (individuellen) Standpunktes.

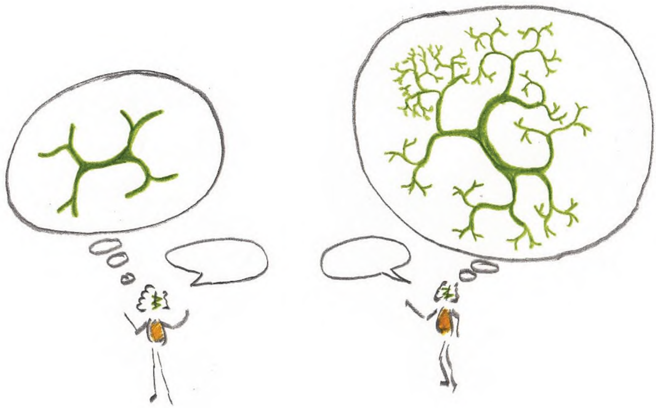


Abb. 30: Unterschiedliche Ausdifferenzierung bei Diskussionspartnern

Die Wahrscheinlichkeit, dass viele Unterscheidungen/Verzweigungen/Konstruktionen im jeweiligen Wissensgebiet durch eine Diskussion stattfinden, ist vermutlich am höchsten, wenn beide Gesprächsteilnehmer sich in etwa gleich gut auskennen. Das hat didaktische Konsequenzen: Wer effektiv (durch Diskussion und Austausch) lernen möchte, sucht sich keinen Profi der alles weiß (den Lehrer), sondern einen ebenbürtigen Partner (den Mitschüler). Das steht einem abbildendem Lehr- und Lernverständnis entgegen.

Lernen durch lehren

Wenn die Rollen anderes verteilt sind, zum Beispiel der eine versucht, ein Gebiet (genauer: seine Sicht bzw. seine Landkarte auf dieses Gebiet) zu erklären, dass also der eine „Lehrer“ und der andere „Schüler“ ist, kann gerade Ungleichheit förderlich sein. Der „Lehrer“ muss hier seine eigenen Begriffe erklären, die Dinge vereinfachen, den Komplexitätsgrad reduzieren, muss Fragen standhalten und sich in Frage stellen lassen. Wer gut in einem Thema werden möchte, unterrichtet dieses am besten selbst. Wer den Unterricht oder die Vorlesung gehalten hat, kennt sich besser aus. R. Feynman soll in ähnlichem Zusammenhang geäußert haben, dass wer eine Sache einem Fünfjährigen nicht erklären kann, diese selbst nicht verstanden hat. Der Anekdote nach meinte er damit „Sachen“ aus der Quantenmechanik oder der Relativitätstheorie.

1.6.2 Übertragung von Landkarten

1.6.2.1 Erfolgreiche Übertragungen, Verallgemeinerung im Landschaftsmodell

Häufig lassen sich entwickelte Strukturen auf andere übertragen. Man hat etwas in einem Gebiet verstanden bzw. eine Landkarte entwickelt und versucht diese auf das neue Gebiet anzuwenden. Man denkt in Assoziationen und Vergleichen.

Ein Beispiel aus der Naturwissenschaft

Wir nehmen an, jemand hat über das Strömungsverhalten in einem Wasserschlauch geforscht und findet dabei unterschiedliche Strukturen heraus. Etwa, dass die Flüssigkeit in der Mitte des Querschnittes am Schnellsten ist oder dass bei halbem Schlauchdurchmesser nur ein Sechzehntel des Wassers durch den Schlauch strömt, während eine Verdopplung der Länge die Wassermenge nur halbiert ... kurz: Unser Forscher hat eine Landkarte über das Strömungsverhalten in einem Wasserschlauch entworfen. Per Zufall hat unser Forscher eine Begegnung mit einem Arzt. Und so kommt ihm die Idee, seine Forschung (seine Landkarte) auf das Kreislaufsystem des menschlichen Körpers anzuwenden. Röhren werden zu Adern, Wasser zu Blut. Die Theorie (die Landkarte) scheint auch hier zu passen. Es lässt sich erklären, wie über den Durchmesser der Adern die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in den Kapillaren reguliert wird. Sogar die Formeln für Verzweigungen lassen sich anwenden. Daher legt unser Forscher seine Landkarte auf ein anderes Gebiet und folgt dessen Strukturen. Er kennt sich quasi aus, bevor er in dem Gebiet überhaupt war.
Auf wie viele Bereiche lässt sich seine Landkarte noch anwenden? Er untersucht Belüftungssysteme in Bürogebäuden und wieder passt seine Landkarte. Die Theorie lässt sich nicht nur auf Flüssigkeiten anwenden, sondern auch auf Gase, sie beginnt universell zu werden. Die Abbildung illustriert die Anwendung einer Landkarte auf drei verschiedene Gebiete.

Abb. 31: Übertragung von Landkarten

Doch mit der strömenden Luft passt die Landkarte nur bedingt, genauer: Sie stimmt nur, wenn die Luft durch das Belüftungssystem langsam strömt. Bei hohen Geschwindigkeiten ändert sich etwas. Es ist also nicht ganz genau die gleiche Karte bzw. der gleiche Plan. Als unser Forscher elektrische Ströme untersucht, entdeckt er, dass sich sogar die Elektrizität bei Verzweigungen so zu verhalten scheint wie strömendes Gas und Flüssigkeit. Jedoch gibt es auch hier Unterschiede. Halbiert man den Kabeldurchmesser, strömt immerhin noch ein Viertel (und nicht wie bei laminaren Flüssigkeiten ein Sechzehntel) durch das Kabel. Die Landkarten beginnen sich unterscheiden.

Abb. 32: Ähnliche Landkarten

Zurück zu Gasen und Flüssigkeiten. Es gibt noch eine weitere Schwierigkeit. Die Gemeinsamkeit der Landkarten bezieht sich plötzlich nicht mehr auf das Materielle, die fließende Flüssigkeit oder das strömende Gas. Die Gemeinsamkeit gilt genauer für die Art des Strömungsverhaltens. Sobald Wirbel aufkommen, braucht es eine andere Landkarte. Um dem gerecht zu werden, wird ein neuer Begriff definiert: Man spricht von sog. „laminaren Strömungen“. In der Umwelt/Landschaft „Naturwissenschaft“ ist dieser Begriff „griffiger“ als Gas oder Flüssigkeit. Ein hilfreicher Begriff ist ein Begriff, der sich (zumindest innerhalb des Wissensgebiets) universell anwenden lässt. Eine andere Sichtweise fordert und erschafft andere Begriffe. Es ist wichtig einzusehen, dass die Begriffe nicht von sich aus existieren, sondern durch Systeme (Forscher) geschaffen werden.

Ändert sich die Umwelt der Begriffe, dann erhalten diese im Allgemeinen einen völlig anderen Sinn. Beispielsweise zeigte sich im Scout Projekt „Spielerisch die Welt erforschen“ der Stiftung BW (eine Brücke zwischen Theaterpädagogik und Fachwissenschaft), wie unterschiedlich der Begriff „Energie“ verwendet wurde. Im Theater ging es um Fokus, Konzentration, Anspannung und Wirkung, in der Naturwissenschaft um das Produkt von Kraft mal Weg.

1.6.2.2 Beispiele für Übertragungen

Übertragung bei der Parallelitätsthese

Mit der Parallelitätsthese in dieser Arbeit, dem Vergleich zwischen geistiger und körperlicher Nahrung, lassen sich unsichtbare geistige Vorgänge veranschaulichen. Dabei bedeutet „veranschaulichen“ eine Übertragung von einem vertrauten Gebiet, in welchem eine differenzierte Landkarte bereits besteht (körperliche Nahrung), auf ein weniger bekanntes oder unvertrautes Gebiet anzuwenden. Die Parallelitätsthese legt nahe, körperliche Prozesse auf geistige zu übertragen. Auf den ersten Blick ist der Körper etwas völlig anderes als der Geist. Und doch scheint dieselbe Landkarte zu passen:

Körper	**Geist**
Wachstum geschieht von innen, es gibt keine direkte Schnittstelle zwischen (körperlicher) Nahrung und Körperwachstum.	Wachstum geschieht von innen, es gibt keine direkte Schnittstelle zwischen (geistiger) Nahrung und Wissenswachstum.
Es gibt keinen direkten Weg der Vermittlung, alles muss von innen her konstruiert werden.	Es gibt keinen direkten Weg der Vermittlung, alles muss von innen her konstruiert werden.
Der Körper entscheidet darüber, was er aus der dargebotenen Nahrung aufnimmt und was nicht.	Das Bewusstsein entscheidet darüber, was es aus der dargebotenen Nahrung aufnimmt und was nicht.
Der Körper stellt ein nach außen abgeschlossenes System dar. Er ist operativ abgeschlossen.	Das Bewusstseinssystem stellt ein nach außen abgeschlossenes System dar. Es ist operativ abgeschlossen.
Gleichzeitig ist der Körper umweltoffen. Ohne Nahrung würde er verkümmern.	Gleichzeitig ist das Bewusstseinssystem umweltoffen. Ohne (geistige Nahrung, z. B. Gespräche) würde der Geist verkümmern.
Nur Zellen erschaffen Zellen.	Nur Denken erschafft Denken.
Wachstum kann prinzipiell nicht von außen erzwungen werden.	Wachstum kann prinzipiell nicht von außen erzwungen werden.
Die Umwelt beeinflusst (indirekt, etwa durch Nahrung und Sport) den Körper.	Die Umwelt beeinflusst (indirekt, durch Kommunikation) das Bewusstseinssystem.
Der Körper hat (für einen äußeren Beobachter) erkennbare Grenzen.	Der Geist hat (für einen äußeren Beobachter) erkennbare Grenzen.

Der Anspruch der Parallelitätsthese ist: Was für den Körper gilt, soll auch für das Bewusstseinssystem gelten. Ob sich jedoch die Landkarte für den Körper auf die geistige Welt übertragen lässt, muss erst noch gezeigt werden. Es scheint so, aber es ist nicht sicher, deswegen handelt es sich „nur“ um eine „These“. Lassen sich beide Systeme aufeinander abbilden?

In der Umgebung der Soziologie wird ein neuer Begriff eingeführt: Sowohl das Bewusstseinssystem als auch der biologische Körper bilden ein sog. *autopoietisches System* („Autopoiesis“ oder „Autopoiese“, altgriechisch αὐτός (autos) „selbst“ und ποιεῖν (poiein) „schaffen", „bauen"). Das entspricht dem Vorgehen bei strömenden Gasen und Flüssigkeiten, wo mittels des neuen Begriffs „laminare Strömung" verallgemeinert wurde.

Gezieltes Forschen aufgrund einer Landkarte am Beispiel von Energieerhaltungssatz und Neutrinos

Überträgt man eine Landkarte ein unbekanntes Wissensgebiet geschehen zwei Dinge: Einerseits kann Vergleiche und Analogien herstellen und damit illustrieren, lässt sich gezielt forschen. Aufgrund von Analogien hat man einen Hinweis, wo man erfolgsversprechend forschen kann. Ein populäres Beispiel zeigt die Entdeckung des Neutrinos. Beim Beta-Zerfall von Atomkernen wandelt sich ein Kernbaustein in ein Proton und sendet dabei ein Elektron aus. *„Die Beteiligung eines dritten Teilchens neben Elektron und „Restkern" am ß-Zerfall wurde zunächst indirekt aus der „fehlenden Energie" und der Unstimmigkeit in der Drehimpulsbilanz erschlossen."* (Hilscher 1996, S. 108). Den Zerfallsprodukten fehlte Energie und damit wäre der Energieerhaltungssatz verletzt! Nun gilt und galt der Energieerhaltungssatz (die Landkarte) als etabliert und wird sogar zur Definition der Energie selbst herangezogen. Die „fehlende" Energie wurde durch das Postulat eines neuen Teilchens von Wolfgang Pauli erklärt. Der Glaube an den Energieerhaltungssatz war so groß, dass sogar ein neues Teilchen „erfunden" wurde, statt an dem Erhaltungssatz zu zweifeln! (Winter 2000). Das sog. „Neutrino" wurde erst 23 Jahre später tatsächlich beobachtet. Für die sog. Mittlerteilchen der schwachen Wechselwirkung wurde *„eigens für das Aufspüren dieser seit langem gesuchten Teilchen am europäischen Kernforschungszentrum CERN bei Genf eine Riesenbeschleunigeranlage gebaut (…). Die gigantischen Anstrengungen waren Anfang 1983 von Erfolg gekrönt."* (Hilscher 1996, S. 113).

1.6.2.3 Unglückliche Übertragungen: Verwechslung von Landkarte und Landschaft

Es ist naheliegend, dass erfolgreiche Konzepte auf neue bzw. andere Gebiete anwendet werden, und die Beispiele oben zeigen deutlich die Erfolgsgeschichte von übernommenen Landkarten. Und dennoch ist große Vorsicht geboten. Mit den Worten von Alfred Korzybski: *„A map <u>is not</u> the territory it represents, but, if correct, it has a <u>similar structure</u> to the territory, which accounts for its usefulness. (Die Landkarte <u>ist nicht</u> die Landschaft, aber wenn die Landkarte der Struktur der Landschaft <u>ähnlich</u> ist, ist sie brauchbar)"*. (Korzybski 1933, S. 58).

Fachliche Übertragungen beim Bruchrechnen

Der junge Geist, der mit der Bruchrechnung konfrontiert wird, begeht typische Fehler (vgl. Padberg 2015, S. 56).

Aufgabe	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$2 \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{9}{10} : \frac{3}{10}$	$2 : \frac{2}{3}$	$\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{5} + 4$	$0{,}2 \cdot 0{,}3$	$0{,}64 + 7$
typische Fehler	$\frac{2 \cdot 3}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{9:3}{10}$	$\frac{2:2}{3}$	$\frac{3+1}{5+4}$	$\frac{3+4}{5}$	$0{,}6$	$0{,}71$

Die typischen Fehler lassen sich verstehen: Wer $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{5+4}$ rechnet, der versucht das Rechnen ganzer Zahlen (die bisherige Landkarte) auf Brüche anzuwenden. Im Fall der Bruchrechnung klappt das leider nicht. Das Konzept des Bruches ist ein anderes.

Übertragung in der Psychologie

In der Kindheit und auch später lernen wir Menschen und deren Verhaltensweisen kennen. Wenn wir sagen, dass wir jemanden kennen, so haben wir eine „Landkarte" von ihm entworfen. Je besser wir einen Menschen kennen, desto detailreicher wird sie. Aufgrund der Landkarte können wir besser abschätzen bzw. raten, wie der Vertraute, die Freundin, der Ehegatte sich verhalten wird, ob er sich beispielsweise über ein Geschenk freut oder nicht. Bei neuen Beziehungen werden häufig Wünsche, Befürchtungen und Erwartungshaltungen übertragen. Das kann zu erheblichen Spannungen und Problemen führen, zumal der Partner keine Ahnung hat, was er mit einem bestimmten Verhalten auslöst. Die „Landkarte" der früheren Beziehung passt in der Regel nicht auf einen anderen Menschen.

Ein häufiges Beispiel findet sich in der Schule: Hier spüren Geschwisterkinder Übertragungen am eigenen Leib. Vor allem das jüngere erfährt mitunter Vermutungen, Wünsche, Befürchtungen und Vorstellungen von Lehrern, die schon den Bruder oder die Schwester unterrichtet haben. Die Gefahr besteht, dass das ältere Geschwisterkind als Modell bzw. als Landkarte für das jüngere dient. Die erste Begegnung ist nicht frei, sie hat bereits eine Geschichte und irritierenderweise (das ist die Übertragung) eine fremde Geschichte. Meist wirkt das belastend auf das Kind, weil es mit impliziten, häufig unausgesprochenen Forderungen konfrontiert wird, wobei es fast egal ist, ob das ältere Geschwister als Überflieger oder als „Pappenheimer" eingestuft wird.[8] Es fällt ihm schwer, die fremde und auferlegte Vergangenheit abzustreifen. Die (eigene bzw. gemeinsame) Geschichte ist für Beziehungen zentral. Ohne Vergangenheit, ohne die Erinnerung daran, ist keine Beziehung möglich. (Es gäbe keine *gemeinsame* Vergangenheit und man müsste stets wieder bei „Null" beginnen.) Das Leidvolle an der Übertragung ist, dass eine fremde Vergangenheit die (neue) Beziehung gestaltet. Es gibt bei psychologischen Übertragungen somit keine (unvoreingenommene) erste Begegnung.

[8] Die Übertragung ist eng verwandt mit dem gestaltpsychologischen *Gesetz der Ähnlichkeit* (vgl. Abschnitt 3.3.1.2). Ähnlichen Dingen wird automatisch ein Zusammenhang bzw. eine ähnliche Verhaltensweise zugeschrieben. Eine Landkarte wird auf ein ähnliches Phänomen übertragen.

Kulturelle Übertragungen
Mit der Übertragung lässt sich auch manche kulturelle Irritation erklären: Ich war längere Zeit in Indien (Okt. 2000 – Juli 2001) und habe es nicht geschafft, die Mimik „richtig“ zu deuten. Das typische Kopfwackeln eines Inders wird fälschlicherweise häufig von Europäern als „nein“ verstanden, obwohl „ja“ gemeint ist. Wer hingegen in Indien groß geworden ist, hat passende Landkarten entwickelt, um selbst feine Nuancen im Gesichtsausdruck zu entschlüsseln. Vor dieser Reise war ich mir kaum meiner religiösen Prägung bewusst, in Indien wurde mir klar, dass ich christliche Grundwerte (in meiner subjektiven Landkarte) tiefer verinnerlicht hatte, als mir bisher bewusst war. Als ich einem Rikschafahrer helfen wollte, spürte ich deutlich, wie unverständlich mein Verlangen zu helfen für meine indischen Begleiter war.

Übertragungsfehler bei sozialen Systemen (Unterricht)
Bei einem maschinellen Lernverständnis wird das erfolgreiche Konzept der Maschine auf den Menschen übertragen. Man nimmt „einen Stoff durch“, „das Gedächtnis ist wie ein Sieb“, … Je erfolgreicher Konzepte in einem Bereich sind, desto naheliegender ist es, diese auf ein anderes Gebiet zu übertragen. Dennoch sind Menschen keine „triviale Maschinen“ (Foerster 2015). Die Grundidee dieser Arbeit ist, statt einer „Landkarte für Maschinen“ eine „Landkarte für Pflanzen“ zu verwenden.
Und doch ist bei Vergleichen bzw. der Anwendung oder Übertragung einer Landkarte auf ein anderes/neues Gebiet Vorsicht geboten. Das gilt insbesondere auch für das Landschaftsmodell oder das Gehirn als Pflanze zu betrachten. Weder Pflanzen noch Trichter befinden sich in Klassenzimmern. Es spricht vieles für die Pflanzenvorstellung, da die Pflanze ein autopoietisches (sich selbst erschaffendes) System darstellt, dass Wege und Triebe ähnlich aussehen wie Synapsenverbindungen. Und es spricht einiges gegen den Trichter und eine materielle Vorstellung von Wissen. So ist Materie beispielsweise unlebendig. Dennoch ist das hier dargestellte Modell „nur“ ein Modell und reduziert damit die Komplexität von Bildungsprozessen (vgl. letzten Abschnitt).

1.6.3 Vernetzung von Wissenskonstruktionen im Landkartenmodell

1.6.3.1 Beginn der Erforschung eines unbekannten Wissensgebiets

Mit einem neuen Thema zu beginnen bedeutet, im Landschaftsmodell von einem Startpunkt anzufangen, die Landschaft zu erkunden.

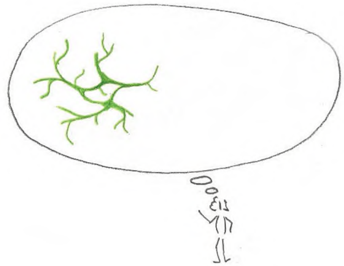


Abb. 33: Beginn der Forschung

Dabei gibt es günstigere Startpunkte und weniger günstige. Möchte man beispielsweise eine fremde Stadt erkunden, wird man häufig versuchen, an einem zentralen Ort zu beginnen, etwa um eine Übersicht zu bekommen. Ebenso könnte man aber auch mit etwas Typischem beginnen und einer Empfehlung eines Freundes folgen oder einem Tipp des Hotels. Interessant ist, dass es keinen „richtigen“ Startpunkt gibt, man kann überall auf der Oberfläche mit der Erkundung beginnen.[9]

Vom Standpunkt des Landschaftsmodells aus zeigen Bildungs- und Lehrpläne einen möglichen Weg. Sicherlich wird es ein Weg sein, auf dem man ziemlich viel sieht. Aber es ist nicht *der* Weg und schon gar nicht der „richtige“ oder der „beste“ Weg. Selbiges gilt für jeden Lehrgang. In diesem Sinne sind Lehrgänge nichts anderes als Stadtrundfahrten. Jetzt kommt es auf den Schüler als Subjekt an: Bevorzugt er (geführte, strukturierte) „Stadtrundfahrten“ oder erobert er lieber die „Stadt“ frei, selbstverantwortlich und individuell auf eigene Faust?

Forschen ist ein Prozess, der an vielen Stellen beginnen kann. Im Gegensatz dazu steht ein maschinelles Lern- und Lehrverständnis, welches sowohl einen definierten Anfang und auch ein definiertes Ende hat. So spricht man von „Ausbildungen“, „Ausbildungsprogrammen“ oder davon, dass jemand „vollständig ausgebildet“ ist. Ein Forscher wird nie fertig sein. Vielleicht hört er selbst irgendwann auf zu forschen, aber es geht immer weiter und weiter.

1.6.3.2 Vernetzung zweier Wissensgebiete

Wird an einer anderen Stelle (ohne Anschluss) geforscht, entsteht eine separate Landkarte. Es gibt noch keine Verbindung bzw. keinen Transfer. Die verschiedenen Gebiete können aus unterschiedlichen Fächern stammen (vgl. folgenden Abschnitt 1.6.4), etwa aus Musik und Mathematik. Zuerst scheint es keine Verbindung zwischen den Land-

[9] Das Landschaftsmodell ist dreidimensional. Man wird aber schwerlich in der Tiefe beginnen können, man braucht gewissermaßen einen „Landeplatz“, um anzukommen.

karten zu geben. Gitarre zu spielen hat scheinbar nichts mit Mathematik zu tun. Zumindest in der Wirklichkeit des Lernenden gibt es keinen Zusammenhang, beide Landkarten sind isoliert.

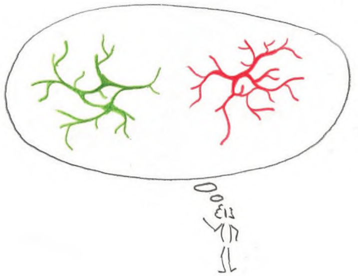


Abb. 34: Zwei isolierte Wissensgebiete

Mit der (Forschungs-)Zeit entwickeln sich die Landkarten zunehmend und eine Verbindung wird immer wahrscheinlicher. So erging es mir mit dem Studium der Theaterpädagogik und der Mathematik. Die Verbindung oder gar die Vereinigung zweier bisher getrennten Gebiete, wird vom Lernenden häufig als ein Glücksmoment erlebt. Um zum Beispiel der Gitarre zurückzukehren: Die Lage der Bünde (Verkürzung der Saitenlänge) gehorchen einer Exponentialfunktion und Intervalle sind Schwingungsverhältnisse.

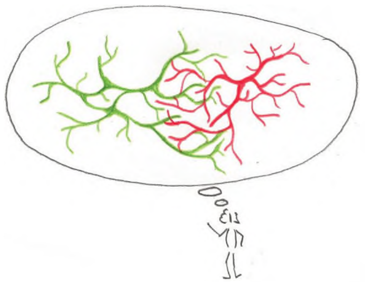


Abb. 35: Vernetzung zweier Wissensgebiete

1.6.4 Fächer und fächerübergreifendes Lernen

1.6.4.1 Länder und Gebietseinteilungen

Die Landschaft, die Realität wird in einem radikalen konstruktivistischen Sinne (Luhmann 2012) nicht in Frage gestellt, sie ist auf natürliche Weise einfach da. Hingegen sind Länder (Fächer) Gebietseinteilungen, die künstlich (von einem beobachtenden System, etwa dem Bundesland bzw. dem Kultusministerium) konstruiert werden.

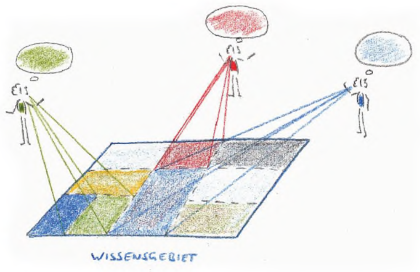


Abb. 36: Fächereinteilung als Konstruktion

Offensichtlich gibt es solche Einteilungen von Natur aus bzw. in der Realität nicht, sondern lediglich auf Landkarten – Gebietseinteilungen sind ein typisches Landkartenphänomen. Mitunter werden diese Einteilungen bzw. Grenzziehungen so bedeutsam, dass versucht wird, diese materiell nachzuziehen. So werden Grenzzäune und Mauern gebaut. Auch diese materiellen Grenzziehungen sind konstruiert und von Beobachtern bzw. deren Bewusstseinssystemen gebildet worden und können, wenn sich das Denken verändert, wieder verändert werden. Der Mauerfall in Deutschland zeigt ein Beispiel einer sich veränderten Landkarte.
Im schulischen Bereich entstehen und vergehen Fächer – ebenso wie Länder entstehen und vergehen und sich Grenzen verschieben können. In der Wirklichkeit des Beobachters (und nur dort), kann einem Fach eine bestimmte Bedeutung, eine Größe oder ein Wert zugeschrieben werden. Die Anzahl der Wochenstunden ist ein Maß bzw. eine Beschreibung für die Größe des Gebietes.[10]

Bemerkung: Natürliche Grenzen
Die politischen Grenzen sind Konstruktionen des autopoietischen Systems „Menschheit". Aber es gibt auch sogenannte natürliche Grenzen. England ist eine Insel, Deutschland und Frankreich haben den Rhein als Grenze. So gibt es durchaus (für menschliche Beobachter) gedanklich naheliegende Fächer (wie beispielsweise Mathematik und Physik). Im Landschaftsmodell blicken die MINT-Fächer durch ähnliche Brillen bzw. haben eine ähnliche Sichtweise.

[10] Achtung: Es handelt sich um eine Beschreibung des Gebietes bzw. um eine Landkarte und nicht um das Gebiet an sich. Die Zuordnung der Wochenstunden ist somit eine Selbstbeschreibung des Systems (der schulischen Wirklichkeit). Andere Systeme, zu anderen Zeiten und an anderen Orten, erschaffen eine andere Einteilung.

1.6.4.2 Fächereinteilung und Reduktion der Komplexität

Die Einteilung in bestimmte Zuständigkeitsbereiche oder -gebiete entspricht dem Wunsch nach Reduktion der Komplexität. *„Das Ausschließen einer Masse von Ereignissen in der Umwelt von möglichen Einwirkungen auf das System ist die Bedingung dafür, dass das System mit dem Wenigen, was es zulässt, etwas anfangen kann. Oder, ganz abstrakt formuliert: Reduktion vom Komplexität ist die Bedingung der Steigerung von Komplexität."* (Luhmann 2011, S. 121).

Das ganze Gebiet ist zu komplex, damit man etwas anfangen kann, wird es aufgeteilt. Dabei besteht die Gefahr, dass die Länder bzw. Fächer mit dem Wissensgebiet verwechselt und ihnen sogar eine Realität zugesprochen wird. In der Praxis gibt es für bestimmte Fächer bestimmte Orte: Physik im Physiksaal, Chemie im Chemiesaal, Sport in der Sporthalle, Informatik im Computerpool, Deutsch im Klassenzimmer, usw. Die Trennung wird zusätzlich personalisiert: Physik beim Physiklehrer, Chemie bei der Chemielehrerin, Sport bei den Sportlehrern ...

Offensichtlich wird diese Fächer-, Länder- oder Schubladeneinteilung durch Schüleräußerungen in dieser Art: *„Das ist doch Physik und keine Mathematik!", „Häh? Ich dachte, wir sind hier im Deutschunterricht und nicht in Bio?!", „Ist das jetzt Physik oder Sportunterricht?"*[11]

Paradoxie der Fächereinteilung

Die Einteilung nach Fächern hat zwei Seiten: Einerseits wird damit die Komplexität reduziert, auf der andern Seite ein „Schubladendenken" erzeugt. Didaktische/fachliche Reduktion und der Wunsch nach fächerübergreifendem Wissen erzeugen für den Lehrer eine paradoxe Situation.

1.6.4.3 Die Landschaft ist prinzipiell fächerübergreifend

Geht man durch eine Landschaft, so kann man verschiedene „Brillen" aufsetzen bzw. verschiedene Sichtweisen einnehmen. Im Modell hat der „grüne Beobachter" eine grüne Brille auf und nimmt entsprechend nur den grünen Anteil wahr. Einfach deswegen, weil er ein grünes Bewusstseinssystem hat und entsprechend nur „grün" denken kann. Wohlgemerkt: Er betrachtet die ganze Landschaft, aber er kann nur wahrnehmen, was sein Bewusstseinssystem erkennen kann und konstruiert daraus Information bzw. eine Landkarte. Der rote Beobachter sieht entsprechend den roten Anteil und konstruiert daraus Informationen bzw. seine Wirklichkeit (rote Landkarte in der Denkblase).

---

[11] Die Schülerschaft ist ein äußerer Beobachter der Fächereinteilung. Für das System Schule, welche die Grenzen selbst gezogen hat, ist es viel schwieriger, die Einteilung wahrzunehmen, aber nicht unmöglich, was sich in dem Wunsch und der Forderung nach fächerübergreifendem Unterricht deutlich zeigt.

So wird der Flug eines Flugzeuges (Wissensgebiet) in einem Biologen, einem Historiker, einem Mediziner, einem Soziologen und einem Physiker unterschiedliche Informationen erzeugen. So denkt der Biologe an die Verschmutzung der Umwelt, der Historiker an Otto Lilienthal, der Mediziner an Höhenstrahlung, der Soziologe an die sich immer schneller drehende und beschleunigende Welt und der Physiker an Auftrieb.

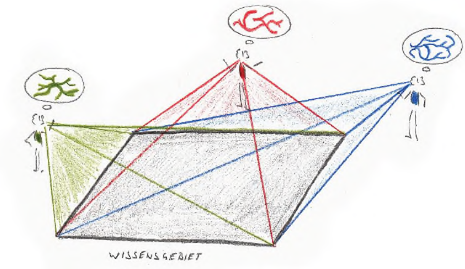


Abb. 37: Verschiedene Sichtweisen

Drei Beobachter entwickeln demnach drei verschiedene Landkarten. Eine objektive Sichtweise bzw. eine „richtige" Landkarte (unabhängig von Bewusstseinssystemen) kann es nicht geben, da Information erst durch ein Bewusstseinssystem entsteht und nicht unabhängig von einem Beobachter gedacht werden kann. So schreibt Luhmann: *„Informationen kommen nicht in der Umwelt, sondern nur im System selbst vor. Sie können also nicht als identische Einheiten aus der Umwelt in das System transportiert werden. (…) Solche Konstruktionen sind aber stets Eigenleistungen des Systems und nicht ‚Daten' der Umwelt."* (Luhmann 1990, S. 104). Die verschiedenen Beobachter können eine gemeinsame Sichtweise zwar anstreben, aber letzendes nicht erreichen. Eine „gemeinsame Sichtweise" würde ja bedeuten, dass beide Systeme sich am selben Ort befinden müssten (das ist physikalisch nicht möglich) und die identische Konstruktion besitzen, um auch dasselbe wahrzunehmen. „Gemeinsame Sichtweise" ist somit ein Grenzfall.

Fächerübergreifender Unterricht

Im Landschaftsmodell erscheint die Forderung nach einem „fächerübergreifenden Unterricht" seltsam bis irritierend, da Schubladen bzw. Fächer künstlich eingeteilt wurden. Die Dinge wurden ja künstlich getrennt, um die Komplexität zu reduzieren, um einen Fokus zu schaffen. Die Landschaft ist von sich aus zusammenhängend. Sobald reale Dinge (Landschaften) in den Unterricht kommen, ist dieser in natürlicher Weise fächerübergreifend. Anders formuliert: Wenn Sie einen realen Baum vor sich haben (beispielsweise soll die Höhe im Mathematikunterricht bestimmt werden), wird es nicht möglich sein, fächerübergreifende Betrachtungen zu vermeiden. Nur mithilfe von Landkarten (Schülerbücher und Arbeitsblätter) kann konsequent fächerübergreifender

Unterricht verhindert werden. Ein Baum ist ein Baum und er kann mathematisch, biologisch, ethisch, … betrachtet werden. Konkretes Material ist in natürlicher Weise fächerübergreifend!

1.6.4.4 Beispiele für die fächerübergreifende Eigenschaft des Materials

Eine Kerze (= Wissensgebiet, Landschaft) kann unterschiedlich betrachtet werden bzw. eine unterschiedliche Rolle im Unterricht spielen. Im Folgenden skizziere ich die „Projektion", also die Sicht auf eine Kerze aus verschiedenen fachlichen Richtungen. Da ich als autopoietisches System strukturdeterminiert bin (wie jedes Bewusstseinssystem) und nur innerhalb meiner eigenen Wirklichkeit denken und schreiben kann, wird die Darstellung entsprechend mathematisch und naturwissenschaftlich eingefärbt sein.[12] In für mich fremden Fächern werden die Beispiele für einen Beobachter vermutlich viel unkonkreter und weniger differenziert ausfallen als in meinen Heimatgebieten.

Beispiel Kerze
Die Rolle einer Kerze kann in den verschiedenen schulischen Fächern eine verschiedene Bedeutung besitzen.
Vorab: Eine Kerze ist eine Kerze. Das genügt der Kerze.[13] Sie braucht keinen Beobachter (kein System), der sie wahrnimmt. Aber erst ein Beobachter konstruiert eine Möglichkeit bzw. einen Möglichkeitsraum, was alles mit der Kerze geschehen könnte. Die Überschriften „Mathematik als Beobachter", „Physik als Beobachter", usw. beschreiben das beobachtende System, konkrete Anwendungsmöglichkeiten bzw. Informationen (innerhalb des Systems) stehen darunter:

1. *Mathematik als Beobachter*

- Volumen- und Oberflächenberechnung: Eine Kerze setzt sich näherungsweise zusammen aus einem Zylinder und einem Kegel.
- Visualisierung der Strahlensätze: Im Klassenzimmer wird eine Kerze (punktförmige Lichtquelle, Strahlungszentrum *S*) aufgestellt.

---

[12] Es handelt sich um eine Selbstbeschreibung meines Bewusstseinssystems und kann somit weder vollständig noch objektiv sein. Die verschiedenen Aussagen über die Möglichkeiten einer Kerze lassen sich auf zwei Arten lesen: (1) wegen dem Inhalt an sich und (2) um etwas über den Beobachter (über mich) herauszufinden, da ich mit jeder Äußerung etwas über mich selbst preisgeben. So erkennt der Leser, wie wenig Beispiele ich für Geschichte angegeben habe und wie viel in Mathematik.

[13] Strenggenommen ist die Aussage „eine Kerze ist eine Kerze" schon zu viel. Der Begriff „Kerze" ist ja schon eine Zu- bzw. Beschreibung und enthält eine Funktionalität. Eine Reihe an Möglichkeiten ergibt sich durch unsere Vergangenheit, unsere Erfahrung mit Kerzen. Gäbe man einem Außerirdischen einer Kerze in die Hand, würde er vielleicht erst einmal hineinbeißen oder hineinsprechen … Er wäre noch weit von Flamme, Anzünden, Licht und Feuer entfernt.

- Lineares Wachstum: Die Länge einer brennenden Kerze nimmt linear ab ($l(t) = h - mt$).[14]
- Wahrscheinlichkeitsrechnung: Wie wahrscheinlich ist es, dass zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben? Das Foto zeigt die Veranschaulichung in einem gemeinsamen Kalender:

Abb. 38: Wahrscheinlichkeit von Geburtstagen

- Exponentielle Wahrnehmung: Ob eine Kerze mehr den Raum sichtbar heller macht, hängt von der bereits vorhandenen Menge ab: Ob 99 oder 100 Kerzen einen Raum erleuchten, ist kaum zu unterscheiden, wohl aber, ob eine oder zwei Kerzen brennen. Der Grund: Die Sinneszellen im Auge nehmen logarithmisch war. Es gilt das Weber-Fechner-Gesetz: Die subjektive empfundene Stärke von Sinneseindrücken ist proportional zum Logarithmus der objektiven Intensität des Reizes. Auf dem rechten Foto brennt eine Kerze weniger – sehen Sie den Unterschied?

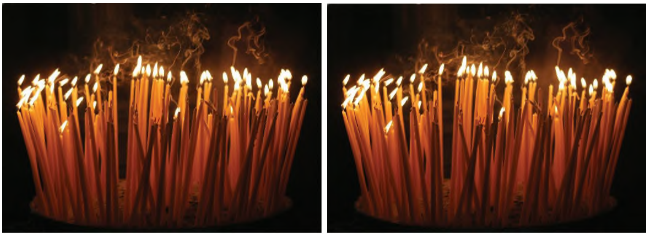


Abb. 39: Exponentielle Wahrnehmung

2. *Physik als Beobachter*

- Rotationsenergie: Eine dicke und eine dünne Kerze rollen eine geneigte Ebene hinunter. Welche ist zuerst unten?
- Abstand von einer Strahlungsquelle (vgl. Gammastrahlung): Verdoppelt man den Abstand (r) zu einer Kerze (punktförmige Lichtquelle), so nimmt die Strahlungsdichte bzw. die Strahlungsintensität (I) auf ein Viertel ab ($I \sim r^2$).
- Beugung am Spalt: Man beobachtet eine Kerzenflamme durch einen dünnen Spalt. Im Bild wurde die Kerze durch den Schlitz zweier senkrecht aneinander-

[14] Dabei steht h für die Anfangslänge der Kerze, $l(t)$ für die aktuelle Länge, t für die Zeit und m ist ein Maß für die Dicke der Kerze und entspricht der Steigung.

gehaltenen Bleistifte beobachtet. Die Flamme verbreitet sich waagrecht, bei genauem Hinsehen erkennt man einzelne Beugungsordnungen.

Abb. 40: Beugung am Spalt

- Experiment: Schatten eines Gegenstandes bei Beleuchtung mit einer (ausgedehnten) Lichtquelle.

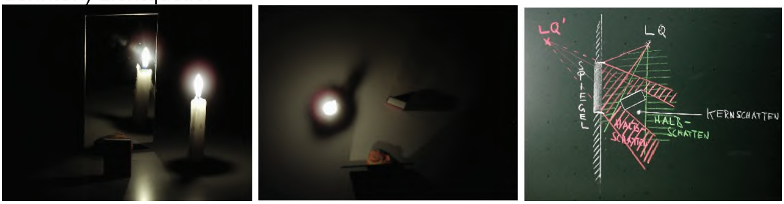


Abb. 41: Virtuelle Lichtquelle

- Virtuelle Lichtquelle, Reflexion und Brechung an einer Fensterscheibe. Erstes Bild: Der Baum scheint zu brennen. Zweites Bild: Wie kommen die vier Flammen zustande?

Abb. 42: Brechung

- Virtuelles Bild hinter eine Linse:

Abb. 43: Virtuelles Bild

- Interaktives Planetarium (nach Kramer 2015, S. 126). Die Kerze steht in der Mitte des Klassenzimmers, die Schüler nehmen die Rolle der Erde ein.

Abb. 44: Interaktives Planetarium

- Wärmequelle in Experimenten: Hier wird beispielsweise Wasser in einem Papiergefäß zum Sieden gebracht. (nach Kramer 2016c, S. 53).

Abb. 45: Wärmequellen

- Bestimmung der Temperatur einer Kerzenflamme.

3. *Chemischer Beobachter*

- Verbrennungsprozesse: Wo ist die Kerze, nachdem sie verbrannt ist?
- Erklärung der unterschiedlichen Farben der Flamme: Wo ist der heißeste Punkt einer Kerze?
- Kerzen brauchen Sauerstoff: In einen Suppenteller wird eine brennende Kerze in einem Wassersee mit etwas Knete befestigt, anschließend wird ein Glas übergestülpt. Nach einiger Zeit entsteht ein Unterdruck und das Wasser wird in das Glas angesaugt. (nach Kramer & Schmidt-Halewicz 2010, S. 88).

Abb. 46: Unterdruck

4. *Historischer Beobachter*
- Wann wurde die Kerze erfunden?
- Was veränderte sich durch das künstliche Licht?

5. *Sozialer / pädagogischer Beobachter*
- Bei Festlichkeiten werden Kerzen entzündet: an Weihnachten, an Geburtstagen. In vielen Klassenzimmern steht ein Adventskranz.

6. *Religiöse / kulturelle Beobachter*
- Die Kerze kann für ein Lebenslicht stehen. In vielen Religionen ist das Anzünden einer Kerze bedeutsam. So gibt es beispielsweise Grablichter.
- Weiter erinnert das „ewige“ Licht in Synagogen und katholischen Kirchen an die ständige Gegenwart Gottes.

1.6.4.5 Eine große schulische Gefahr: Die Landkarte des Lehrers lernen?

In der Vermittlung zwischen Mensch und Wissen bzw. in der Begegnung zwischen Bewusstsein und Wissensgebiet übernimmt der Lehrer die Rolle eines Scouts. Er ist mit der Landschaft vertraut,[15] so wie jemand sich in seiner Heimat auskennt. Seine Aufgabe besteht darin, eine Begegnung des Schülers mit der Landschaft zu ermöglichen. Wie kann er vorgehen, dass der Lernende sich gut in einem Wissensgebiet zurechtfindet? Ein Weg bzw. eine Hilfe besteht darin, ihm Landkarten zu zeigen. Aber Achtung: Die Landkarte ist nicht die Landschaft! Wenn der Lernende nur Landkarten begegnet und nur von Landkarten lernt, dann fehlt ihm der Kontakt zur Landschaft. Er lernt/erfährt dann nicht die Landschaft in einer direkter Beziehung/Begegnung, sondern lernt Landkarten. Die folgende Skizze zeigt das Bild eines äußeren Beobachters, also die Sichtweise, die der Text aus Sicht des Lesers einnimmt:

[15] Auch der Lehrer kennt die Landschaft nicht „vollständig“. Die Landschaft selbst ist unendlich komplex.

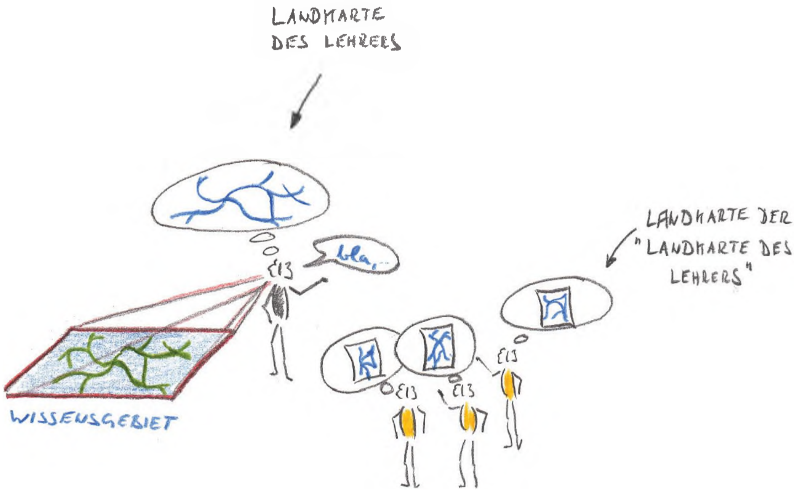


Abb. 47: Landkarte des Lehrers

Der Lehrer als Forscher[16] steht in Kontakt zu seinem Wissensgebiet. Er ist viele Wege in seinem Fach (Ausschnitt eines Wissensgebietes) gegangen. In seinem Kopf wird allerdings nicht die Landschaft konstruiert, sondern eine Landkarte von der Landschaft. Das wurde in Abb. 47 dargestellt, indem die grünen Wege das Blau des Wissensgebietes übernommen haben und die Schraffur in der Gedankenblase weggelassen wurde. Die Darstellung soll gleichzeitig an die Gefahr erinnern, dass die Landschaft mit der Landkarte verwechselt werden kann.

Wenn die Landschaft im Unterricht keine Rolle mehr spielt, wenn etwa reale Bäume durch Arbeitsblätter, Schulbuch und Laptop ersetzt werden, dann wird die Landschaft durch eine Landkarte ersetzt. Die Umgebung des Schülers ist dann nicht mehr die Wissenslandschaft, sondern der Lehrer mit seinem Denken (seiner Landkarte) über die Landschaft. Autopoietische Systeme (insbesondere das Bewusstseinssystem des Schülers) müssen sich in ihrer Umgebung zurechtfinden, wenn sie überleben wollen. Anders formuliert: Seine „Landschaft" ist die Landkarte im Bewusstseinssystem des

[16] Es soll angenommen werden, dass der Lehrer wirklich in Kontakt mit der Realität gekommen ist, dass er also sein Wissen nicht lediglich durch Landkarten erworben hat. Diese Bemerkung ist nicht harmlos, wenn man den Bildungsweg eines Lehrers beobachtet. Er startet in der Schule, geht an die Universität oder PH bzw. an einer Hochschule, um dann schließlich wieder an die Schule zu gehen, um zu unterrichten. Es besteht die Gefahr, dass er nur Landkarten erfahren hat (sofern man eine Landkarte „erfahren" kann). Wenn es in der Schule und Hochschule darum geht, Prüfungen zu bestehen und nicht um die Wissenslandschaft an sich, besteht der Verdacht, dass es in erster Linie um Landkarten und nicht um Landschaften geht.

Lehrers. Und genauso verhält er sich auch in Prüfungsfragen und bei Bewertungen: *„Kommt das in der Klausur dran?", „Ist das (Ihnen) wichtig?", „Fragen Sie das in der Klassenarbeit?"*.
Systeme passen sich so an ihre Umgebung an, dass sich ihre Überlebenswahrscheinlichkeit erhöht. Das bedeutet in dieser Situation: In dieser Landschaft (erzeugt durch die Landkarte des Lehrers) muss der Schüler überleben, nicht in dem realen Wissensgebiet. So interessiert es den Schüler, der an seinem schulischen Überleben interessiert ist, nicht, warum der Himmel blau ist, sondern ob seine Physiknote gut ist. Überleben hängt nicht von der Physik (der Landschaft bzw. der Kenntnis der Naturgesetze) ab, sondern von dem Unterrichtsfach Physik (der Landkarte)! Erkenntnistheoretisch hat hier eine Verschiebung bzw. Übertragung stattgefunden (vgl. Abschnitt 1.6.2). Der Lehrer, der direkt am Stoff (an der Landschaft) ist, ist dann enttäuscht, dass „die Schüler nur für die Klausur lernen und sie es eigentlich gar nicht interessiert." Bei der Übertragung (der Lehrer steht im Kontakt mit dem Wissensgebiet und unterstellt dem Schüler ebenfalls den direkten Kontakt, während dieser nur in Kontakt mit der Landkarte des Lehrers ist) tauchen diese typischen Symptome auf.
Man beachte: Das Verhalten des Schülers ist intelligent. Intelligenz wird hier aufgefasst als die Fähigkeit, sich an die Umgebung anzupassen. Ein System, welches sich nicht an die Umwelt anpasst, wird aufhören zu existieren. Der Schüler, der danach fragt, *„ob er das lernen muss", „ob das in der Klassenarbeit drankommt"*, versucht sich anzupassen – an eine Umwelt, die es von ihm abverlangt.

1.7 Fazit

Das menschliche Bewusstseinssystem sowie der biologische Körper sind autopoietische Systeme, welche ausschließlich innengesteuert operiert. Die Idee der Übertragung von Wissen ist aus einer konstruktivistischen Sichtweise nicht nachvollziehbar, da Informationen außerhalb von Bewusstseinssystemen nicht existieren. Die Parallelitätsthese ist eine Möglichkeit „geistige Wachstumsvorgänge" durch „körperlicher Bildung" zu modellieren.
Beide Systeme sind strukturell gekoppelt. Das bedeutet insbesondere, dass es kein Zuerst von einem körperlichen oder einem geistigen Begreifen gibt, sondern dass sich Geist und Körper gegenseitig irritieren und im Sinne einer Koevolution gemeinsam entwickeln. Das ist die Grundlage von handlungs- und erlebnisbasiertem Lernen und Lehren.
Weiter kann Lernen modellhaft als (interne) Konstruktion von Landkarten betrachtet werden. Dabei ist die Konstruktion viabel: Die Landkarte muss zur Landschaft passen, aber ist gibt keine „richtige" Landkarte. Weiter kann vom Lernenden eine Landkarte (Wissen) auf andere Landschaften (Wissensgebiete) angewendet werden. Typische Fehler von Schülern beim Bruchrechnen können als solche Übertragungsfehler identifiziert werden.

Kapitel 2 Unterrichtliche Kommunikation

2.1 Kommunikationsvorgang als Emergenz

2.1.1 Unterricht als emergentes Ereignis – ohne Übertragung von Wissen

Der Ansatz unterrichtliche Kommunikation im Sinne Luhmanns vom Empfänger her aufzurollen (vgl. Abschnitt 2.3) konzeptualisiert Didaktik völlig neu. Meist wird unter „Schülerorientierung“ ein vom Lehrer durchdachter Unterricht verstanden, der für den Schüler wirksam ist – der jedoch vom Sender erschaffen und ausgedacht wird.
„Das alles geht aber immer noch von einem handlungstheoretischen Verständnis der Kommunikation aus und sieht den Kommunikationsvorgang deshalb als eine gelingende oder mißlingende Übertragung von Nachrichten, Informationen oder Verständigungszumutungen. Dem gegenüber wird bei einem systemtheoretischen Ansatz die Emergenz der Kommunikation selbst betont. Es wird nichts übertragen.“ (Luhmann 1995, S. 117).
Ein Unterrichtsverständnis ohne die Idee der Übertragung von Information (!), das Unterrichtsgeschehen als emergentes Ereignis – das bedeutet eine ungewohnte Sichtweise. Häufig wird der (radikale) Konstruktivismus als eine Art Methode gesehen, die man mehr oder weniger in den Unterricht implementieren kann. Eine Handlung oder eine Methode ist allerdings ebenso wenig „systemisch“ oder „konstruktivistisch“, wie sie „grün“ oder „katholisch“ ist, auch wenn die oftmals verkürzte Darstellung („konstruktive Methoden“, „systemische Methoden“) das vermuten lässt. (Reich 2002, S. 275, 293). Ein konstruktivistisches Unterrichtsverständnis ist keine bestimmte Technik oder Methode, die einmal mehr oder weniger im Unterricht eingesetzt werden kann. Systemtheorie und Konstruktivismus ermöglichen Erklärungen aus einer bestimmten Sichtweise, einer philosophischen Haltung heraus. Auch ein sog. lehrerzentrierter Unterricht und dessen Wirkung kann durch eine systemisch-konstruktivistische Brille *erklärt* werden, die Unterrichtsmethode an sich ist nicht konstruktivistisch oder systemisch. Anders formuliert: Ein „bisschen konstruktivistisch zu denken“ entspräche auf der körperlichen Ebene (vgl. Parallelitätsthese in Abschnitt 1.4) „ein bisschen schwanger zu sein“.

2.1.2 Unterricht ohne geradlinige Ursache-Wirkungs-Beziehung

Wenn Information nicht übertragen werden kann, wird der Beruf des Lehrers zu einem „unmöglichen Beruf“, vergleichbar mit dem Psychotherapeuten oder der Führung von Unternehmen, der Politik usw. *„Die Autonomie des Schülers macht die Lehrer zu einem ‚unmöglichen‘ Vorhaben und die Profession des Lehrers zu einem ‚unmöglichen*

Beruf'." Dem *„Rollenträger (hier: dem Lehrer) wird die Verantwortung für einen zielgerichteten Prozess zugeschrieben, dessen Zielerreichung er nicht unter Kontrolle hat. Kein Lehrer kann sicherstellen, dass sein Schüler lernt … Hierin liegt die Unmöglichkeit dieses Berufs."* (Fritz Simon zitiert nach Kramer 2017, S. 8ff).
Nach aktuellem Stand der Wissenschaften ist *„(1) Lehre eine Form der Kommunikation, an der immer (mindestens) zwei Parteien beteiligt sind: die oder der Lehrende und die oder der Lernende (bzw. Nicht-Lernende, der aber lernen soll). (2) Die Kommunikation zwischen Menschen funktioniert prinzipiell anders als die technische Kommunikation, bei der ein Sender bestimmt, welches Signal beim Empfänger ankommt. (…) Es besteht keine geradlinige Ursache-Wirkungs-Beziehung zwischen dem, was die eine Person sagt oder tut, und dem, wie eine andere Person diese Worte oder Taten interpretiert."* (ebd.)
Hier dürfen sog. neue Medien, wie z. B. interaktive Whiteboards, kommunikationspsychologisch hinterfragt werden. Es geht beim Lernprozess nicht darum, was an der Tafel multimedial gezeigt werden kann (= senderorientiert), sondern um das, was beim Empfänger konstruiert wird. Es *kann* sein, dass hierbei moderne Medien förderlich sind, aber die Diskussionen darüber, was das Witheboard (nicht der Schüler!) alles kann und ermöglicht, legen den Fokus auf den Sender:
„Zweifelsohne bringt der Einsatz des interaktiven Whiteboards eine große Menge an neuen Möglichkeiten, den Unterricht interessanter, attraktiver, zeitgemäßer und abwechslungsreicher zu gestalten. (…) Die digitale Tafel ermöglicht es, wenn richtig eingesetzt, den Schüler aktiver in den Unterricht mit einzubinden." (Schlieszeit 2001, S. 13). Stillschweigend wird Unterricht vom Sender aus gedacht, ein Unterricht, in dem der Schüler (vom Lehrer) aktiver in den Unterricht eingebunden wird. Die Verwendung von moderner Technik impliziert nicht zwangsweise eine moderne Didaktik.

2.1.3 Bezug zur Resonanzpädagogik

Aus der Kommunikationspsychologie ist bekannt, dass der Empfänger bestimmt, was gesagt wurde (Schulz von Thun 1981). Er interpretiert bzw. konstruiert aus der Nachricht (z. B. dem vom Lehrer, Arbeitsblatt, usw. dargelegten Schulstoff) seine eigene Wirklichkeit. Die Äußerung des Senders stellt das „Material" zur Verfügung aus dem sich der Empfänger (s)einen „Reim" macht. Die Mitteilung des Senders (Lehrers) wird nicht in einem technischen Sinne auf den Empfänger (Schüler) übertragen. *„Die Mitteilung ist aber nichts weiter als ein Selektionsvorschlag, eine Anregung."* (Luhmann 2013, S. 193). Dabei ist es nicht egal *was* oder *wie* der Sender etwas äußert, sonst wäre die Idee Unterricht und Bildung nicht möglich. Der Begriff „Reim" schließt mit ein, dass die vom Empfänger gehörte Äußerung mit seiner eigenen inneren Welt (Innerung) in „Einklang" steht. *„Kompetenz bedeutet das sichere Beherrschen einer Technik, das jederzeit Verfügen-Können über etwas, das ich mir als Besitz angeeignet*

habe. Resonanz dagegen meint das prozesshafte In-Beziehung-Treten mit einer Sache. (…) Kompetenz ist Aneignung, Resonanz meint Anverwandlung von Welt.“ (Rosa & Endres 2016, S. 7).
Es muss für den Schüler „stimmig“ sein, damit er sich der Welt anverwandeln kann. Die musischen Begriffe wie „Reim“, „Einklang“, „Stimmung“, „Klang“, „auf derselben Wellenlänge“, „Resonanz“, „der Ton macht die Musik“ (eigenen sich für einige Modelle der Kommunikationspsychologie sehr gut. So gilt für das freie Improvisieren, dass jeder in einer vorgegebenen „Tonart“ (im System) spielen kann, was er will. Aber es wird nicht alles „passend“ bzw. „stimmig“ sein. Und: bevor man miteinander spielt bzw. kommuniziert, ist es nötig sich gegenseitig „abzustimmen“ und „einzustimmen“.

2.2 Konstruktion als Eigenleistung des Systems (Schüler)

Was im Bewusstsein des Schülers konstruiert wird, liegt sowohl am Sender, als auch am Empfänger.

2.2.1 Macht des Senders

Liest man Bildungspläne nicht als beschulendes Diktat, sondern als Landschafts- bzw. Gebietsverzeichnis die erforscht werden sollen, so ergibt dies aus einer konstruktivistischen Perspektive Sinn. Der Unterrichtsgestalter stellt das Material zur Verfügung aus dem sich die Lernenden ihre Wirklichkeit konstruieren. Dabei können sowohl Lehrer als auch Schüler die Rollen „Unterrichtsgestalter“ und „Lernenden“ einnehmen, auch wenn häufig mit „Sender“ der Lehrer assoziiert wird. Der Gestalter wird zum Scout[17], er begleitet die Schüler auf ihrem Weg durch die Landschaft (vgl. Abschnitt 1.5.2).

2.2.2 Macht des Empfängers

Der Empfänger konstruiert sich aus dem Material, dem Gebiet sein Wissen. Im Kopf des Lernenden entsteht keine Senderkopie oder Abbild. Lernen ist kein Aufnehmen (materielle Vorstellung) oder abbilden (abbildendes Lernverständnis), sondern ein aktiver Prozess: erschaffen, aufbauen, konstruieren. Das entstehende Konstrukt kann sich von der Intension des Lehrers entfernen. Ein gutes Bild liefert eine atomistische Vorstellung der Materie: Besteht die Äußerung des Senders aus Atomen, so kann der Sender daraus Moleküle herstellen.

[17] Der Scout der ihn begleitet, wird die Wissenskonstruktion des Lernenden beeinflussen. Er wird ihm bewusst oder unbewusst eine mathematische, biologische, physikalische, dichterische oder künstlerische Brille aufsetzen. Je nachdem, ob er Mathematiker, Biologe, … ist.

2.2.3 Neues Rollenverständnis für den Lehrer

Häufig wird die Methodik diskutiert, *wie* „gesendet" wurde. Zu schnell, zu langsam, mit der falschen Technik. Der Wechsel vom Sendermodell zum Empfängermodell ist radikal insofern, dass er einen Rollenwechsel des Lehrers, ein neues Unterrichtsverständnis und Selbstverständnis des Lehrers impliziert. Rolle und Aufgabenbereiche ändern sich: (1) Der Lehrer wird zum Strukturgeber von Lernprozessen, (2) die Verantwortung des Lernfortschritts liegt zum großen Teil beim Schüler[18], der Lehrer bestimmt nicht in erster Linie den Informationsfluss ins Schülerhirn, sondern die Lernsituation, die Lernatmosphäre. An die Stelle des Nürnberger Trichters rückt die Lernumgebung. An Stelle des „Stoffvermittlers" tritt der „Gestalter von Lernprozessen". Der Lehrer nimmt die Rolle eines Spielleiters bzw. Regelhüters ein und ermöglicht so Lernen (Montessori 2007, S. 47ff, S. 155f). Die Aufgabe besteht nicht darin die Gehirne der Schüler wie Speicher zu füllen, sondern eine geeignete Situation, eine Atmosphäre zu schaffen, in der Erkenntnisgewinn wahrscheinlich wird. Das ist die Idee einer indirekten Pädagogik bzw. indirekten Didaktik. Über diese indirekte Wirkung schreibt Maria Montessori: *„Bisher glaubte man, dass der von den Erziehern unmittelbar erteilte Unterricht der wirkungsvollste sei, während es in Wirklichkeit der der Umgebung ist."* (Montessori 1989, S. 76).

Abb. 48: Sender- und empfängerorientiertes Lernverständnis

Senderorientierte Vorstellung (= direktes Lehren):
Der Lehrer (= Sender) bestimmt die Inhalte.

Empfängerorientierte Vorstellung (indirektes Lehren):
Der Lehrer (= Sender) gestaltet eine Lernumgebung. Der Schüler bestimmt, was er davon auswählt oder damit konstruiert.

Viele konkrete Beispiel für indirektes Lernen mittels Lernumgebungen habe ich zu zentralen Themen der schulischen Mathematik und Physik – vom Kindergarten bis zur Universität – realisiert und dokumentiert (vgl. Kramer 2011–2017b).

[18] Aus konstruktivistischer Sicht ist dieser schon immer beim Empfänger, der Lehrer kann lediglich anregen, aber nicht bestimmen, was der Schüler denkt bzw. denken soll.

2.3 Kommunikation nach Niklas Luhmann

2.3.1 Unübertragbarkeit von Information/Wissen

Eine direkte Übertragung von Information gibt es nicht. Luhmann schreibt hierzu: *„Es geht um die Klärung des Kommunikationsbegriffs. Üblicherweise bedient man sich hierbei der Metapher ‚Übertragung'. Man sagt, die Kommunikation übertrage Nachrichten oder Informationen vom Absender auf den Empfänger. (…). Die Übertragungsmetapher ist unbrauchbar, wie sie zu viel Ontologie impliziert. Sie suggeriert, dass der Absender etwas übergibt, was der Empfänger erhält. Das trifft schon deshalb nicht zu, weil der Absender nichts weggibt in dem Sinne, dass er selbst es verliert. Die gesamte Metaphorik des Besitzens, Habens, Gebens und Erhaltens, die gesamte Dingmetaphorik ist ungeeignet für ein Verständnis von Kommunikation."* (Luhmann 2012, S. 193).
Die Möglichkeit einer direkten Vermittlung von Stoff oder Schulwissen gibt es nicht. Eine etwaige maschinelle Vermittlung von Unterrichtsinhalten, im Sinne einer Input-Output-Relation ist unbrauchbar. Anstelle des „Trichters" (direkten Vermittlung) rückt die Lernumgebung (indirekte Vermittlung).

2.3.2 Kommunikation als dreiteiliger Selektionsprozess

Nach Luhmann ist Kommunikation ein dreiteiliger Selektionsprozess, der zwischen Sender[19] und Empfänger vollzogen wird. *„Sie kommt zustande durch eine Synthese von drei verschiedenen Selektionen – nämlich Selektion einer Information, Selektion der Mitteilung dieser Information und selektives Verstehen oder Mißverstehen dieser Mitteilung und ihrer Information. Keine dieser Komponenten kann für sich allein vorkommen. Nur zusammen erzeugen sie Kommunikation."* (Luhmann 1995, S. 115). Im Folgenden ist der dreiteilige Prozess dargestellt.

2.3.2.1 Selektion einer Information

Im ersten Schritt konstruiert sich der Sender Information aus der Umwelt. Das entspricht der Landkartenkonstruktion in Abschnitt 1.6. Auch hier gilt: Die Natur kennt keine Landkarten, die Natur ist einfach, dort gibt es auch keine richtigen oder falschen Wege – es gibt dort überhaupt keine Wege. Erst ein beobachtetes Bewusstsein macht daraus Wege oder (im Vergleich mit anderen Bewusstseinssystemen) sogar „richtige" oder „falsche Wege".

[19] Luhmann versucht sich von der konventionellen Betrachtung zu distanzieren, indem er neue Begriffe einführt. Für ihn ist der Sender „der andere" und wird mit „Alter" bezeichnet. Der Empfänger heißt bei ihm „Ego".

Die Umwelt des Senders ist beliebig komplex. Der Beobachter kann beliebig viel Information aus ihr herstellen. Es wird ihm nie gelingen, seine Umwelt „vollständig" zu beschreiben, da er es ist, der die Daten generiert. Sein Bewusstsein wählt aus, es selektiert und reduziert damit die Komplexität.

2.3.2.2 Selektion der Mitteilung

Alle Informationen, die sich der Beobachter erschafft, kann er nicht mitteilen. Wiederum muss er sich entscheiden bzw. selektieren was überhaupt in die Kommunikation soll.
Der Empfänger spielt bisher noch eine passive Rolle. Und trotzdem ist die Nachricht des Senders nicht unabhängig vom Empfänger. So hängt die Selektion des Senders davon ab, was der Empfänger (aus Sicht des Senders) interessant findet, was er hören soll oder gerade nicht hören soll.

2.3.2.3 Selektion des Empfängers, Verstehen einer Mitteilungsabsicht

Noch ist der Empfänger nur indirekt beteiligt. Damit es zur Kommunikation kommt, braucht es das Verstehen eines Empfängers. „Verstehen" ist nicht im Sinne eines Konsens gedacht, etwa in dem Sinne „jetzt endlich verstehe ich, was Du meinst!", also anschaulich der Versuch zwei individuelle Landkarten übereinanderzulegen bzw. einander anzugleichen. „Verstehen" bedeutet bei Luhmann, verstehen, dass es sich um eine Mitteilungsabsicht handelt. *„Verstehen ist nie eine bloße Duplikation der Mitteilung in einem anderen Bewußtsein, sondern im Kommunikationssystem selbst Anschlußvoraussetzung für weitere Kommunikation, also Bedingung der Autopoiesis des sozialen Systems."* (Luhmann 1995, S. 116).
Unterricht wird damit von der Empfängerseite verstanden, unterrichtliche Kommunikation bzw. Wissensvermittlung im Sinne von Niklas Luhmann gleichsam von hinten aufgerollt (vgl. Abschnitt 2.3): *„Die Kommunikation wird sozusagen von hinten her ermöglicht, gegenläufig zum Zeitablauf des Prozesses."* (Luhmann 2012, S. 198).

2.3.3 Bedeutung des Materials im Kommunikationsprozess

Die Umgebung des Lernenden besteht aus einer belebten Umwelt (Lehrer, Mitschüler) und einem unbelebten (Material). Der große Unterschied zwischen der direkten Begegnung mit dem Materials und einem Lehrer ist, dass Material kein Bewusstsein besitzt. Material kennt keine Absicht, es „versteckt" nichts, es selektiert nicht.
Im Gegensatz hierzu selektiert ein Bewusstseinssystem (Lehrer oder Mitschüler) mit jeder Äußerung zweimal (1. Information und 2. Mitteilung). Ein Empfänger weiß, dass der Sender eine Auswahl getroffen hat, und weiß somit auch, dass der Sender etwas *nicht* sagt! Einerseits erfährt er etwas, was er zuvor nicht wusste, auf der anderen Seite bleibt er im Ungewissen: Was hat der Sender verschwiegen, wie hat er ausgewählt,

hat er die Nachricht manipuliert? Der Empfänger (Schüler) muss mit diesem Zweifel umgehen. *„Aufrichtigkeit ist nicht kommunizierbar."* (Luhmann 1993, S. 365).
Material kann hingegen nicht lügen, nichts verbergen oder gar einen „vollständigen" Datensatz zur Verfügung stellen. Es kann auch keine „Schuld" auf sich nehmen (wobei ihm natürlich von einem Bewusstsein Schuld zugesprochen werden kann). Die Wirkung des Materials wird an einem sehr einfachen Material (Papier) und einem komplexen (Roboter) aufgezeigt. Das Prinzip ist jeweils dasselbe.

2.3.3.1 Beispiel 1: Material Papier

Beim Falten eines Papierfliegers ist Achtsamkeit erforderlich. Wer exakt arbeitet, dessen Flieger wird gut fliegen. Das Material (genauer: die Daten/Informationen, die das Bewusstseinssystem des Schülers im Umgang mit dem Material, durch dessen „Begreifen" herstellt) „rügt" den Schüler in direkter, unmittelbarer Weise. Das Material (das Papier, aus welchem die Flieger geformt werden) erinnert sich nicht an eine Vergangenheit, etwa an vergangenen Fehlversuche.
Anders ist es, wenn der Lehrer die gebastelten Flieger benotet. Jetzt hängt es von dessen Wirklichkeitsvorstellung (dessen Landkarte) ab, was ein „guter" Flug bzw. ein gutes Flugzeug ist. Möchte der Schüler eine gute Note erzielen, sollte er sich in der Landkarte des Lehrers auskennen. Der häufig gehörte Vorwurf an den Lehrer *„man muss ja in der Klassenarbeit eh' das schreiben, was Sie hören wollen!"* bringt die Sache auf den Punkt: Die Bestnote wird erreicht, wenn der Schüler sich in der Landkarte seines Lehrers zurechtfindet oder zumindest sein Konstrukt mit ihr übereinstimmt. In der Klassenarbeit geht es nicht um die Sache (das Wissensgebiet), es geht darum, in der Bewertungswirklichkeit des Lehrers zu bestehen. Sobald ein Bewusstsein mit im Spiel ist, besteht die Gefahr, dass der Schüler das sagt, was der Lehrer (in der Vorstellung des Schülers) hören möchte (vgl. Abschnitt 1.6.4.5).

2.3.3.2 Beispiel 2: Material Roboter

Ein zweites Beispiel zeigt der Roboter in Abschnitt 1.5.2. Auch dieser hat kein Bewusstsein. Seine „Bewertung" folgt der Programmierung des Lernenden (er tut das, was der Schüler möchte – oder nicht) wirkt „gerecht", aber auch dieser Begriff ist nicht passend, da ja kein Bewusstsein vorhanden ist, welches Gerechtigkeit konstruieren könnte. Material kann nicht gerecht sein. Recht und Gerechtigkeit gibt es nur innerhalb eines sozialen Systems.[20] Letzten Endes bewertet der Schüler selbst sein Handeln.

[20] Bemerkung: Recht und Gerechtigkeit sind generell wirklichkeitsabhängig. Was der eine als rechtmäßig empfindet, kann für den anderen Unrecht sein. Es gibt keine Objektivität, vielmehr konstruiert jedes System seine eigene Vorstellung von Recht und Gerechtigkeit. Das ist beispielsweise ein großes Problem bei der Formulierung von Menschenrechten, die ja schließlich für alle Menschen gelten sollen. Auch in diesem Fall gibt es keine Objektivität, sondern maximal die Einigung auf eine gemeinsame Sichtweise der Dinge.

Als „falsch“ wird er die Vorgehensweisen betrachten, die nicht zu seinem (subjektiv) erhofften Erfolg geführt haben. Der Roboter hat wie das Material „Papier“ keine Vergangenheit, er tadelt nicht, er lobt nicht, er ist einfach real da und der Schüler produziert im Umgang mit ihm Daten bzw. eine interne Landkarte, die ihm hilft, künftig besser mit einer Programmierungsaufgabe umzugehen. Mit anderen Worten: er lernt.

2.4 Experiment zur Demonstration subjektiver Konstruktionen

Die Unübertragbarkeit von Wissen, die Konstruktion von Wissen als autonome und strukturdeterminierte Eigenleistung des Systems (hier des Bewusstseinssystems des Lernenden) kann in einem Experiment sehr einfach demonstriert werden. Das beschriebene Experiment habe ich für die Didaktikvorlesung im Sommersemester 2014 entwickelt und in zwei Gruppen mit insgesamt 70 Studierenden an der Universität Freiburg und auf vielen Vorträgen und Workshops durchgeführt.

2.4.1 Das Gehirn als Datengenerator

Unser Gehirn generiert ständig Daten. Es speichert nicht ab und wird nicht (von außen) gefüllt: „*Das Gehirn ist kein Datenspeicher, sondern ein autonomer Datengenerator.*“ (Herrmann 2009, S. 11). Aus dem Wahrgenommenen werden Daten konstruiert. Was genau wahrgenommen wird, hängt von unserer Vergangenheit ab, von unserer internen Struktur. So nimmt der eine „nur“ einen Baum war, während der andere einen Spitzahorn „erkennt“ (vgl. 1.6.1.4). Im Vorlesungsexperiment zeigte ich das folgende Bild:

Abb. 49: Experiment zu subjektiver Wissenskonstruktion

Über 90 % von 80 Studierenden dachten an „schneiden“ bzw. „Papier schneiden“ in einem ganz allgemeinen Sinne, manche waren konkreter und erinnerten sich an eine Symmetrieübung, wo anschließend das Papier aufgefaltet und das entstandene Muster bewundert wird. Wenige andere haben das Papier gar nicht beachtet und nur die Schere gesehen.

Aus der realen Welt (hier Schere, Papier und Holzunterlage) konstruiert das Gehirn selbstständig Daten. Das Konstrukt ist subjektiv und abhängig von der individuellen Vorgeschichte (wer noch nie eine Schere gesehen hat, wird schwerlich auf „schneiden" kommen). Ganz allgemein konstruiert jedes Bewusstseinssystem aus dem Gegebenen seine eigene individuelle Wirklichkeit:

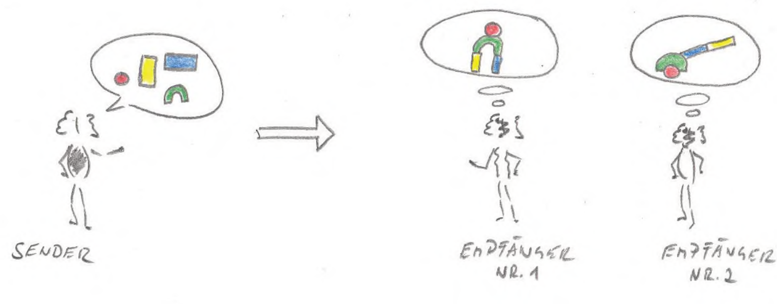


Abb. 50: Unterschiedliche subjektive Wissenskonstruktion

Es wurden auch Dinge hinzugefügt, die gar nicht abgebildet waren. „Schere und Papier" wird zu „Schere, Stein, Papier".
Der Stein wurde vom System hinzugefügt, es wurde etwas von einem Betrachter hinzugefügt. Dieser hat sich „er-innert". In seinem Inneren ist ein Spiel mit „Schere, Stein, Papier" bereits angelegt. Und so hat er der Äußerung (das erste Bild mit Schere und Papier) einen Teil seiner Innerung hinzugefügt. Dem Beobachter, dem „Schere, Stein, Papier" nichts sagt, wundert sich, wie man überhaupt auf einen Stein kommen kann. Es bleibt dann völlig unverständlich und verwunderlich. Es gab ja bisher keine Äußerung, keinen Hinweis in Richtung „Stein".
Die Skizze oben ist demnach eine Vereinfachung, der Empfänger kann aufgrund seiner Vorgeschichte Dinge hinzufügen oder gar nicht wahrnehmen bzw. schlichtweg übersehen oder überhören.

2.4.2 Einfluss der Umgebung, verborgene Parameter bei der Wissenskonstruktion

Ein Beispiel für die Nichtwahrnehmung von Empfänger Nr. 2: Die wenigsten Betrachter wird die Umgebung des Holzbodens bewusst. Gezeigt wurde Holzboden, Schere und Papier und nicht nur Schere und Papier.

Abb. 51: Wahrnehmung der Umgebung

In dem gezeigten Bild wurde die Umgebung bzw. die „Umwelt“ von Schere und Papier entfernt. In der Bildbearbeitung wie auch in Gedanken lassen sich Dinge freistellen (z. B. in diesem Text) – in der (unterrichtlichen) Realität nicht. Da entscheiden viele Faktoren (die Vorgeschichte des Individuums, der Klassenkamerad, der Lehrer, das Wetter, die Uhrzeit, das Klassenzimmer, die physische und psychische Verfassung …) über die individuelle Schülerkonstruktion. Ein außenstehender Beobachter kennt einige dieser Parameter, andere bleiben ihm verborgen. Diese „verborgenen Parameter“ (in der konkreten Unterrichtsrealität) machen die (empirische) Untersuchung von Unterricht sehr schwierig. Einerseits weil der Forscher nicht wissen (können) kann, was der Schüler wahrnimmt, andererseits weil er nicht weiß, ob er „alles“ entscheidende selbst wahrgenommen hat. *„Wir sehen nicht, dass wir nicht sehen.“* (Foerster 2015, S. 17). Der Forscher kann nie die ganze Umwelt sehen. Das ist einerseits unmöglich, weil sich aus der Umwelt eine beliebige Datenmenge herstellen lässt und diese nicht „vollständig“ gedacht werden kann (Wissen ist stets „nur“ eine Landkarte im Kopf des Systems), andererseits hat jedes wahrnehmende System prinzipiell einen blinden Fleck: *„Bei der Handhabung einer Unterscheidung haben Sie immer einen blinden Fleck oder eine Unsichtbarkeit im Rücken. Sie können sich als denjenigen, der eine Unterscheidung handhabt, nicht beobachten.“* (Luhmann 2011, S. 146).

2.5 Grundlegende Kommunikationsmodelle zur Gestaltung von Unterricht

Wenn Unterricht als Kommunikation betrachtet wird, so liegt die Betrachtung und Anwendung grundlegender Kommunikationsmodelle nahe. Die beiden vorgestellten Modelle können und dürfen kritisch betrachtet werden, auch sie sind „nur“ konstruiert. In der unterrichtlichen Praxis geben sie eine Orientierungshilfe und vergrößern den Handlungsspielraum und die -möglichkeiten.

2.5.1 Quadratur von Nachrichten (Schulz von Thun)

Es gibt keine direkte Schnittstelle zwischen Bewusstseinssystemen. Unsere interne Landkarte liegt nicht frei, sondern ist von „Wänden“ umgeben. Gäbe es diese Wände nicht, so wäre Kommunikation (so wie wir sie kennen) überflüssig. Ein Austausch untereinander wäre nicht nötig, weil bereits alles ausgetauscht wurde. Aufgrund der Trennung zu unseren Mitmenschen gibt es ein Innen und ein Außen. Da jede Äußerung erst einmal durch zwischenmenschliche Wände gelangen muss, um anzukommen, liegt es nahe, diese genauer zu untersuchen. Zwei Seiten beschreibt davon Watzlawick: *„Jede Kommunikation hat einen Inhalts- und einen Beziehungsaspekt.“* (Watzlawick, Beavin & Jackson 2011, S. 53ff). Das Organon-Modell von Bühler enthält die Aspekte Ausdruck, Appell und Darstellung. (Bühler 1999, S. 33). Schulz von Thun kombiniert die psychologischen (Watzlawick) und sprachtheoretischen (Bühler) Aspekte in Form eines Quadrates. Sein Nachrichtenquadrat besteht aus vier unterschiedlichen „Wänden“ bzw. Ebenen: Es gibt eine Sach-, Beziehungs-, Appell- und Selbstkundgabenebene. (Schulz von Thun 1981).

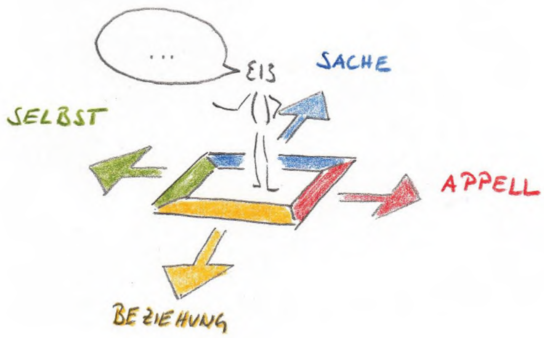


Abb. 52: Nachrichtenquadrat

Jede nach außen gerichtete Nachricht (Äußerung), wird vom Empfänger durch diese (zwischenmenschlichen) Wände eingefärbt. Entsprechend können wir auf vier verschiedenen Ohren „hören“. Dabei hat der Empfänger die Macht, auf welchem Ohr er hört.

Kritik am Nachrichtenquadrat
Das Nachrichtenquadrat ist kompakt, übersichtlich und als Modell in vielen Situationen hilfreich. Dennoch steht es im Widerspruch zum Kommunikationsbegriff von Niklas Luhmann. Allein der Begriff „Nachrichtenquadrat“ impliziert, dass da etwas ist, was „gesendet“ und „empfangen“ oder in irgendeiner Weise übertragen werden kann. *„Die Übertragungsmetapher ist unbrauchbar (…). Sie suggeriert, dass der Absender etwas übergibt, was der Empfänger erhält. (…) Die gesamte Metaphorik des Besitzens, Habens, Gebens und Erhaltens, die gesamte Dingmetaphorik ist ungeeignet für ein Verständnis von Kommunikation.“* (Luhmann 1984, S. 193ff). Luhmann verwendet die Begriffe „Alter“ und „Ego“ für „Sender“ und „Empfänger“.

2.5.2 Duale Didaktik

2.5.2.1 Nachrichtenquadrat als Landschaft

Das folgende Modell zur Gestaltung von Lernumgebungen, welches sich aus meiner beratenden Praxis heraus entwickelt hat, lehnt an das Nachrichtenquadrat von Schulz von Thun an. Allerdings werden nur die „Qualitäten“ der Seiten übernommen, diese werden nicht im Sinne einer Kommunikation betrachtet.

Botschaften im Nachrichtenquadrat	Qualität in der Lernumgebung
Sachebene	Wissensgebiet
Beziehung	Rollendefinition (z. B. Forscher)
Selbstkundgabe	Handlungs- und Entscheidungsfreiheit
Appell	Regeln und Struktur, Aufgabe, Material

Das Wissensgebiet (hier die Mathematik) ist beliebig groß. Der Lehrer wählt durch die Aufgabenstellung und das vorhandene Material einen bestimmten Bereich aus. Weiter bekommen die Schüler eine Rolle zugeschrieben, in dieser sie sich in dem „Aufgabenfeld“ frei bewegen können.

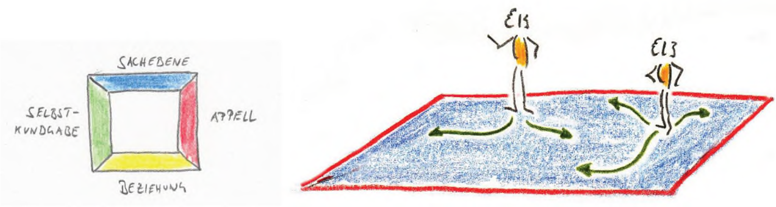


Abb. 53: Lernumgebung als Landschaft in Anlehnung an Schulz von Thun

Die beiden im Quadrat gegenüberliegende Aspekte werden als zwei gegensätzliche (duale) Pole gesehen: (1) Beziehungs- und Sachebene, (2) Freiheit und Struktur. Auf den zweiten Blick zeigt sich, dass die beiden Pole zwar Gegensätze sind, sich aber gleichzeitig auch gegenseitig bedingen. Ziel ist es, dass die eine Qualität in der anderen enthalten ist. Grundlage hierfür ist das Wertequadrat.

2.5.2.2 Wertequadrat und Paradoxieentfaltung

Alle Wahrnehmung beruht auf Unterscheidungen (vgl. Bateson 1967). Daher existiert keine Freiheit ohne Unfreiheit, keine Struktur ohne Nicht-Struktur. Man erhält alles stets im Doppelpack der Unterscheidung. Mit dem sog. Wertequadrat lassen sich widerstrebende Wertepaare darstellen. Es stammt in seinen entscheidenden gedanklichen Elementen von Nicolai Hartmann und ist eine Weiterentwicklung der aristotelischen Tugendlehre (Schulz von Thun 2018). Zu jedem Wert (z. B. Großzügigkeit) existiert der zugehörige Gegenwert (Sparsamkeit). Beide Werte bedingen sich einander, denn ohne den jeweiligen Gegenwert ist der ursprüngliche Wert entwertet. Im Beispiel: Ohne einen Funken Sparsamkeit wird Großzügigkeit zur Verschwendung, ohne einen Funken Großzügigkeit verkommt die Sparsamkeit zum Geiz.
Der Lehrer ist in der Gestaltung von Lernumgebungen in einer paradoxen Situation. Zum einen soll er das Fach unterrichten, zum anderen geht es um Beziehungsarbeit. Zum einen soll er Strukturieren, zum anderen Freiheit lassen. Entsprechend werden die Quadrate der paradoxen Situation aufgezeigt. Das hohe Ziel ist, beide Werte bzw. Qualitäten zu verbinden. Nicht im Sinne einer Vermischung (ein bisschen Freiheit und ein bisschen Struktur), sondern so, dass das eine vollständig im anderen enthalten ist.

2.5.2.3 Das „Herz der Sache“

Die reine Fachlichkeit im Unterricht, die reine Fokussierung auf den Inhalt, führt zu einem trägen Wissen. *„It contains within itself the problem of keeping knowledge alive, of preventing it from becoming inert, which is the central problem of all education.“* (Whitehead 1923). Auf der anderen Seite würde eine reine Fokussierung auf Beziehungsarbeit ebenfalls ins Absurde führen.
Die Idee ist die Verschränkung von beiden Qualitäten. Diese kommt in der Frage des Schülers zum Ausdruck: „Was hat das mit mir zu tun?“ Es ist die Beziehungsfrage zur Sache. Man kann den Stoff (Inhalt) als das Medium auffassen, in der Beziehung stattfinden kann.

2.5.2.4 Freiheit und Struktur

Eine weitere Paradoxie ist die Frage nach Freiheit und Struktur. Freiheit ohne einen Funken Struktur verkommt zum Chaos, Struktur ohne Freiheit zum Zwang. Wieder bedingen sich beide Qualitäten gegenseitig. Die Verbindung beider Qualitäten zeigt sich zum Beispiel in dem bekannten Zitat von Maria Montessori *„Hilf mir, es selbst zu tun!“*. Hier vereinigt sich die Bitte um Führung und Struktur („Hilf mir“) mit der Sehnsucht nach eigenem Gestaltungsraum („es selbst zu tun“).

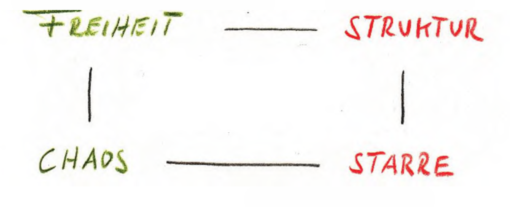


Abb. 54: Wertequadrat zu Freiheit und Struktur

Es gilt sogar: Ohne Struktur ist Freiheit gar nicht möglich. Man betrachte ein Schachspiel. Die Struktur (64 Felder, Regeln für Züge) engen auf den ersten Blick die Freiheit ein. Aber gäbe es kein Schachbrett, keine Struktur, so würde es auch gar keine Entscheidungsmöglichkeit geben. Es wäre schlichtweg egal, wo der König steht. Die Struktur reduziert die Anzahl an Möglichkeiten (eine Figur kann nicht mehr überall stehen), aber schafft gerade dadurch Unterscheidungen in denen Entscheidungen getroffen werden können, weil ihnen unterschiedliche Bedeutungen zugeschrieben werden können. So schafft Reduktion Komplexität. Es gilt das Paradoxon des Spiels (vgl. Abschnitt 1.5.1): *„Keine Regel muss strenger eingehalten werden als eine Spielregel. Das Spiel fordert, wenn es einen Sinn haben soll, Unterwerfung unter die Regel. Das Spiel als die Betätigung höchster Freiheit ist möglich nur in der Zwangsjacke der Regel.“* (Mosebach 2006). „Das Spiel fordert unbedingte Ordnung. (…) Es schafft Ordnung, ja es ist Ordnung.“ (Huizinga 2015, S. 19). Das unterstreicht die Wichtigkeit eines „spielerischen Lernverständnisses“, da es gleichsam die Paradoxie entfaltet.

2.5.3 Nachrichtenquadrat und Rollendefinition

Die Kommunikationspsychologische Lupe des Nachrichtenquadrates erfährt bei näherer Betrachtung eine weitere Unterteilung auf der Beziehungsseite. Beziehungen enthalten eine Rollendefinition in zweifacher Hinsicht: Erstens wird die Rolle des Gesprächspartners definiert („So einer bist **Du**!“), zweitens erklärt der Sender, wie er die Beziehung zum Empfänger betrachtet („So stehen **wir** zueinander.“). (Schulz von Thun 1981, S. 159ff).

Die Rolle ist ein Teil der Umgebung des Empfängers. Ändert sich die Rolle (bzw. die Umgebung), ändert sich alles (vgl. Abschnitt 3.3 über Rolle und Bühne).

Es stellen sich zwei zentrale Frage: Welche Rolle(n) spielt der Schüler im Unterricht? Welche Rolle spielt der Lehrer im Unterricht?

2.5.3.1 Rolle des Schülers

Wenn der Schüler im Unterricht eine Rolle spielen soll, dann muss er mitgestalten dürfen (im Bild der Parallelitätsthese „mitkochen"), d. h. eigenständige Entscheidungen treffen können. Ansonsten stellt er (für den Lehrer) eine triviale Maschine dar, die nach einer Input-Output-Relation funktionieren soll (vgl. 1.2.1). Hierzu muss dem Schüler Verantwortung übertragen werden, ansonsten ist kein eigenständiges Handeln möglich.

2.5.3.2 Rolle des Lehrers

Wenn geistiges Wachstum prinzipiell nicht von außen erzwungen werden kann, dann bleibt als Unterrichtender nur der indirekte Weg, die Kunst Lernumgebungen zu gestalten.
Der Ansatz „Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser" enthält eine Beziehungsbotschaft. In einem maschinellen Verständnis von Lehren und Lernen kann man scheinbar sehr gut kontrollieren, was und wie viel an Stoff „durchgenommen" wurde. Notengebung lässt sich als ein Produkt aus Menge und Durchsatzgeschwindigkeit beschreiben. Man schaut was ankommt und legt damit die Note fest.
Im Modell der Pflanze (vgl. 1.5.1) geht es um Entwicklung: Der Lehrer „muss" hier vertrauen, da er nicht genau weiß noch voraussehen kann, wie die Pflanze wächst („Kontrolle ist gut, Vertrauen ist besser."). Irgendwie wächst sie schon nach oben, dem Licht entgegen, aber da die Pflanze selbstorganisiert ihr Wachstum vorantreibt, ist eine (äußere „objektive") Notengebung (die Ausrichtung an einem vorgegebenen Maß) nicht möglich: Soll die Pflanze nach der Höhe, nach der Ästhetik, nach der Blüte, nach dem Gewicht, nach der Farbe oder nach der Wachstumsgeschwindigkeit bewertet werden?

Vertrauen bedeutet nicht „nicht hinschauen"
Mit Vertrauen ist nicht „nicht hinschauen" gemeint. Vertrauen ist kein Desinteresse. Der Unterschied zwischen Vertrauen und Kontrolle besteht nicht, im „Nicht-Hinschauen" oder im „Hinschauen", sondern in der Art und Weise des Beobachtens: Wer kontrolliert, schaut defizitorientiert auf die Sache: „Das stimmt noch nicht ganz, hier muss noch etwas getan werden, warum fehlt hier die Hälfte?" Die Warenausgangskontrolle wird mit einem Istwert verglichen, der Schüler hat eine Norm zu erfüllen. Abweichungen erhalten Punktabzug.
Entscheidend ist, *wie* hingeschaut wird: Nimmt der Lehrer die Rolle eines „Kontrolleurs" ein oder ist er ein „Gärtner", der auf selbstgesteuertes Wachstum stärkenorientiert vertraut?

2.5.4 Das Kommunikationsmodell von Riemann-Thomann

Fritz Riemann beschreibt 1961 in seiner tiefenpsychologischen Studie vier Grundformen der Angst: Die Angst vor der Hingabe, die Angst vor der Selbstwerdung, die Angst vor der Veränderung, die Angst vor der Notwendigkeit (Riemann 2017). Aus Gesprächen zwischen Friedemann Schulz von Thun und Christoph Thomann entstand das von Schulz von Thun sog. Riemann-Thomann-Modell. Anstelle die Stelle der Grundängste rücken Grundstrebungen des Menschen. Das Streben nach Nähe, das Streben nach Distanz, das Streben nach Wechsel und das Streben nach Dauer. Je zwei Strebungen beziehen sich auf dieselbe Dimension, stehen jedoch diametral zueinander: *Nähe – Distanz* und *Wechsel – Dauer*. So lässt sich das Modell in einem Achsenkreuz darstellen:

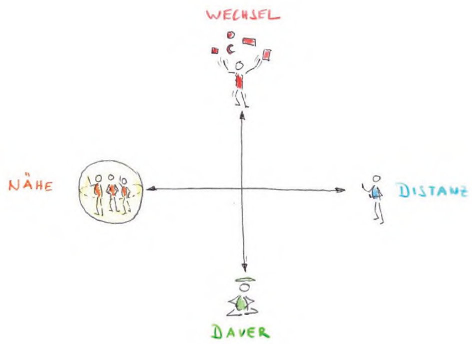


Abb. 55: Riemann-Thomann-Modell

Ich habe das Riemann-Thomann-Kreuz an der horizontalen Achse gespiegelt, da es in dieser Darstellung besser zum Pflanzenmodell passt: Das Dauer- bzw. Sicherheitsstreben entspricht in diesem Sinne der Wurzelbildung und das Wechselstreben dem Aufbruch bzw. dem Abheben.

2.5.4.1 Dauer- und Wechselstreben im Unterricht, Flow

Die senkrechte Achse von Riemann-Thomann findet sich im unterrichtlichen Alltag. Es braucht eine sichere Basis (Dauerstreben), so dass der Geist sich erheben (Wechselstreben) kann. Der Unterricht soll auf Bekanntem anknüpfen und aufbauen (vgl. Abschnitt 1.1.1). Es braucht eine solide Grundlage, um etwas aufzubauen.
Wechsel- und Dauerstreben stehen zwar diametral zueinander, aber sie bedingen sich auch gegenseitig. Nur wer einen sicheren Stand hat, kann nach den Sternen greifen. In der Spannung zwischen Dauer und Wechsel entspringt die Schaffenskraft. In der Psychologie wird der als beglückend erlebte mentale Zustand völliger Vertiefung in

eine Tätigkeit als „Flow“ bezeichnet. *„Flow weist immer auf einen Versuch hin, etwas so gut wie nur möglich zu vollziehen (Dauerstreben), aber im Bewusstsein, dass man niemals etwas voll im Griff hat (Wechselstreben).“* Nach Csikszentmihalyi verlangt Flow ein Streben nach Sicherheit ebenso, wie das Wissen um die Unberechenbarkeit (Csikszentmihalyi 2010).
Im Pflanzenmodell (vgl. Abschnitt 1.5.1) entspricht der Flow der individuellen Wachstumsgeschwindigkeit. Die „Pflanze“ (autopoietisches System) wächst in einer geeigneten (Lern-)Umgebung von selbst in der „richtigen“ Geschwindigkeit. Für eine indirekte Didaktik, welche auf Lernumgebungen setzt, ist der Zugang von Csikszentmihalyi interessant, da sowohl zu wenig Anregung, als auch zu viel an Anregung eine Unter- bzw. Überforderung bewirkt und so das Wachstum gestört ist. In diesem Sinne lässt sich lange über den weiter unter vorgestellten Materialkasten (vgl. Abschnitt 8.1) nachdenken. Zu viele Teile (Überforderung), zu viele Möglichkeiten sind ebenso schädlich für das Wachstum, als zu wenige (Unterforderung).
Das Material erzeugt im Beobachter (Schüler) Möglichkeiten. Er erkennt so viel, wie er zum (geistigen) Wachstum braucht. Etwa so, wie die Pflanze sich das aus der Erde (geeignete Umgebung) nimmt, was sie zum Wachstum braucht. Das unterscheidet das reale Material vom geschriebenen Schulbuch. Durch die symbolische Darstellungsweise des Buches, sind die Möglichkeiten der „Datenerzeugung“ direkt vorgegeben und werden weitgehend nicht vom Beobachter erschaffen. Somit besteht im Umgang mit konkretem Material viel weniger die Gefahr einer Über- oder Unterforderung, da die „Aufnahme des Lernstoffes“ bzw. die Wissenswachstumsgeschwindigkeit vom Schüler individuell reguliert wird.

2.5.4.2 Nähe- und Distanzstreben im Unterricht

Das *Streben nach Nähe* sucht im Gegenüber Austausch und Diskussion. Das Streben nach Distanz sucht die Selbstreflexion und das eigenverantwortliche Arbeiten. Die Umsetzung der waagrechten Achse, also einer dynamische Balance zwischen Nähe- und Distanzstreben, scheint in der schulischen Praxis schwieriger zu sein als die senkrechte. So bezieht sich das Werte- bzw. Bewertungssystem „Noten“ sehr deutlich auf das Distanzstreben. Wichtige Prüfungen wie z. B. die Mittlere Reife oder das Abitur werden distanziert geschrieben. Es wird sehr genau darauf geachtet, dass keine Interaktion stattfindet. Das geht soweit, dass protokolliert wird, wann ein Schüler während der Prüfung auf die Toilette geht und wann er wieder kommt.
Natürlich gibt es auch Nähestreben in der Schule, das beispielsweise in Gruppenarbeit und -unterricht seinen Ausdruck findet. Allerdings handelt es sich selten um „echte“ Gruppenarbeit. Wesentliche Merkmale von Gruppenarbeit sind nach Hacker ein gemeinsamer Auftrag, eine gemeinsame Handlungsorganisation, gemeinsame Entscheidungen, Kommunikation und gemeinsame Ziele und Kenntnisse (Hacker 1994, S. 49–

80). Häufig wird Gruppenarbeit damit verwechselt, dass Aufgaben, die für einen Einzelnen entworfen wurden, nun in der Gruppe bearbeitet werden. Auf diese Weise entsteht schwerlich ein Gruppenvorteil – *„die Gruppe erzielt ein besseres Ergebnis als jeder Einzelne“.* (Wellhöfer 2001, S. 65).
Ich sehe einen Grund für die Schwierigkeit im Umgang mit Gruppen, dass Interaktionen ihrer Natur gemäß unsichtbar sind. Das, was eine Gruppe zur Gruppe macht (die Interaktionen), lässt sich nicht direkt mit einer Kamera abbilden. Das Foto zeigt „nur“ die Teilnehmer einer Gruppe. Das was zwischen den Teilnehmern stattfindet, also das, was eine Gruppe zur Gruppe macht, wird nicht abgebildet.

2.5.5 Riemann-Thomann als Diagnoseinstrument für Lernumgebungen

Sucht man nach der Bedeutsamkeit für den Schüler („Was hat das mit mir zu tun?“) kann man mit dem Riemann-Thomann-Modell Lernumgebungen nach den Grundstrebungen ausrichten. Damit lässt sich verstehen, welche Strebungen in einer Lernumgebung vorherrschen bzw. wie stark diese Empfunden wurden. In den Vorlesungen zur Didaktik und in meinen Seminaren „Jenseits des Klassenzimmers“ und „Robotik als Abenteuer“ welche an der Universität Freiburg von 2013 – 2018 angeboten wurden, wurde das Modell zur Diagnose bei der Gestaltung von Lernumgebungen verwendet.

Diagnose am Beispiel einer Symmetrieübung
Das Beispiel zeigt die Diagnose anhand der Übung „Vom Chaos zur Symmetrie“ (Kramer 2017b). Dabei wurde zuerst der Raum in ein Chaos verwandelt. Jeder nahm dabei einen Gegenstand und platzierte ihn so, dass die Wirkung einer maximalen Unordnung entstand. Anschließend wurde solange aufgeräumt, bis eine Achsensymmetrie entstand, in der sich schließlich die Studierenden symmetrisch bewegten. Nach der Übung wurde die Grundstrebungen von Riemann-Thomann auf die konkret erlebte Symmetrieübung projiziert.

Wechsel	▪ Mobiles Mobiliar im wörtlichen Sinne. Ein Stuhl oder ein Tisch ist nicht nur zum Sitzen oder Schreiben da, sondern kann anders verwendet werden. ▪ Noch nie hat der Raum so ausgesehen.
Dauer	▪ Streben nach Ordnung. ▪ Das Thema Ordnung bleibt die ganze Zeit. ▪ Ein Grenzwertprozess wird erlebt.
Nähe	▪ Ein symmetrisches Bewegen. Partnerarbeit. ▪ Als gesamte Gruppe den Raum verändern. ▪ Der Fokus auf: „Wer gleicht mir? bzw. wer ist zu mir etwa symmetrisch?“

Distanz	▪ Das Zug-um-Zug-Prinzip: Jeder, der wollte, konnte in einer bestimmten Übungsphase einen bestimmten Gegenstand verändern, wobei alle anderen zuschauten. ▪ Jeder sollte selbständig einen Gegenstand so verändern, dass sich das Chaos vergrößerte.	

Im Anschluss setzte jeder Studierende ein Kreuzchen an die Stelle im Riemann-Thomann-Modell, die für ihn passend erschien. Da das Erleben der Übung von der Vorgeschichte abhängt, gibt es keine allgemein „richtige Stelle". Die Vergangenheit bzw. das aktuelle Landkarte im Bewusstseinssystem des Lernenden definiert den Ursprung, das, was (für ihn) „normal" ist.
Auch wenn das Setzen der Kreuzchen subjektiv ist, erhält man einen guten Eindruck, in welche „Richtung" die Lernumgebung wahrgenommen wurde.

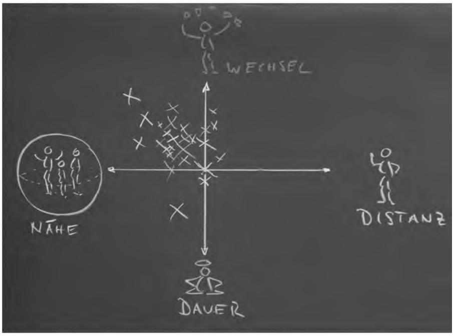


Abb. 56: Diagnose nach Riemann-Thomann

2.5.6 Didaktische Anwendung des Riemann-Thomann-Modells: individuelle Beispiele, die Regel durch die Gruppe

2.5.6.1 Strukturbildung durch Beispiele

Wir können nur konkrete Dinge (körperlich) „begreifen". Die Flasche *an sich*, das Buch *an sich*, den Baum *an sich* können wir offensichtlich nicht im Allgemeinen begreifen. Wir begreifen stets konkrete Beispiele. Wenn wir mehrere Beispiele *begriffen* haben, dann haben wir häufig das Allgemeine begriffen. Unser Gehirn ist darauf spezialisiert Strukturen und Regeln aus Beispielen zu erschaffen, das wundert nicht, da der Mensch in einer regelhaften Welt existiert. *„Gehirne sind Regelextraktionsmaschinen"* (Spitzer 2009, S. 75). *„Unser Gehirn ist – abgesehen vom Hippokampus, der auf Einzelheiten spezialisiert ist – auf das Lernen von Allgemeinem aus. Dieses Allgemeine wird aber nicht dadurch gelernt, dass wir allgemeine Regeln lernen. – Nein! Es wird* *dadurch gelernt, das wir Beispiele verarbeiten (…) und aus diesen Beispielen die Regeln selbst produzieren.“* (Spitzer 2009, S. 76).

Dieses „*selbst* produzieren“ lässt sich einfach demonstrieren: Betrachtet man einen einziges Beispiel (z. B. Abb. 58), so lässt sich daraus noch keine Regel ableiten. Man kann aus dem folgenden Bild das Allgemeine nicht „begreifen“, schlichtweg deswegen, weil noch kein Muster da ist, welches erkannt werden kann.

Abb. 57: Keine Mustererkennung erkennbar

Das Beispiel genügt dem Allgemeinen, aber ob es um Holz, Federspannung, um eine bestimmte Farbe oder Größe, um Haushalt, um Modellbau oder was auch immer geht, lässt sich nicht lernen.

Mit wenigen konkreten Beispielen lässt sich das Allgemeine erkennen (Mustererkennung):

Abb. 58: Mustererkennung durch wenige Beispiele erkennbar

Meist genügen drei Beispiele, um das Allgemeine zu erfassen. Hier geht es um die (abstrakte) Zahl 2.

2.5.6.2 Verallgemeinerung mit Riemann-Thomann

Die waagrechte Achse im Riemann-Thomann-Modell kann didaktische genutzt werden. Die Idee dabei ist, dass jeder einzelne Schüler ein eigenes, individuelles und konkretes Beispiel kreiert (Distanzstreben) und dadurch entstehen im Klassenraum viele Beispiele, woraus das Gehirn eine Regel extrahieren kann.

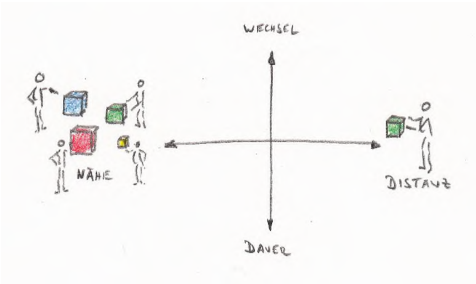
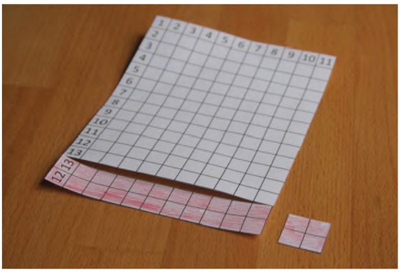


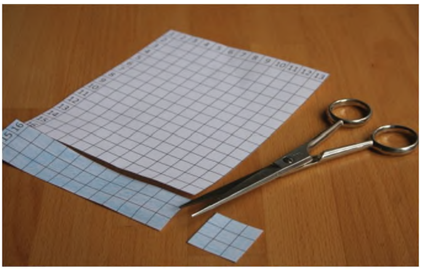
Abb. 59: Das Allgemeine im Konkretem

Die vorgestellte Methode bezieht sich auf alle Unterrichtsmomente, in denen eine Regel eingeführt werden soll. Das kann in Deutsch die Rechtschreibung, in Englisch die Grammatik oder in Mathematik eine Rechenregel sein. Das folgende Beispiel „Dritte binomische Formel“ habe ich in Mathematik als Abenteuer ausführlich beschrieben (Kramer 2016a, S. 60ff).

Jeder Schüler schneidet ein Quadrat aus seinem Heft aus. Als Folge entstehen viele unterschiedliche Quadrate im Klassenraum. Anders formuliert: Durch die Beispielquadrate geht es nicht mehr um ein bestimmtes Quadrat, sondern um das Quadrat an sich. Der Begriff „Quadrat“ hat sich von den konkreten Darstellungen gelöst.

Anschließend soll jeder Schüler einen Streifen vom Quadrat abschneiden. Erneut darf er wählen (variabel sein, genauer: Eine Variable belegen) und erneut geht es nicht mehr um den abgeschnittenen Streifen, sondern um die Idee einen parallelen Streifen abzuschneiden.





$$\mathbf{13^2 = (13 - 2) \cdot (13 + 2) + 2^2} \qquad \mathbf{16^2 = (16 - 3) \cdot (16 + 3) + 3^2}$$

Abb. 60: Drittes binomische Gesetz

Möchte man im Unterricht *gemeinsam* über die Wirkung der Streifendicke sprechen, wird man Verallgemeinern und von „der Breite“ sprechen, weil ja jeder ein anderes

Beispiel geschnitten hat. Im Grunde ist die Variable durch die freie Wahl bereits eingeführt, es fehlt nur noch eine Bezeichnung, z. B. ein „**b**" für die Breite des Streifens. Analog kann z. B. mit „**a**" die Seitenlänge eines beliebigen Quadrates benannt werden. Es gibt nur eine Möglichkeit, das Erlebte *für alle* gleichzeitig gültig und kompakt aufzuschreiben: $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)}$.

Die Gruppe fordert die Regel

Aus den einzelnen konkreten Beispielen in der Gruppe entsteht das Allgemeine. In der Vielfalt lässt sich die Regel, das Konzept, das Muster erkennen. Wenn man jetzt darüber reden möchte, braucht man Begriffe, die sich auf das Allgemeine beziehen. Es gibt ja nicht mehr das (eine) Beispiel. Wenn der Streifen eine bestimmte Dicke haben soll, die für alle gilt, dann ist es die Dicke „**d**". Oder eine andere Bezeichnung, ein Begriff, auf den sich die Gruppe einigt. Die Gruppe fordert die Regel, sie erschafft eine gemeinsame Sprache (Begriffsbildung) ebenso wie die Abstraktion.[21]

2.5.6.3 Konsequenzen für den Unterricht: Konkrete Beispiele vs. allgemeine Merksätze

Das menschliche Gehirn braucht konkrete Beispiele um eine Regel zu extrahieren (vgl. Abschnitt 2.5.6.1). Spitzer unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen Können und Wissen und gibt als Beispiel das Fahrradfahren an: Man kann es, weiß aber nicht, wie es geht. Die Unterscheidung ergibt auch beim Lösen von Gleichungen Sinn: *„Ein guter Mathematiker ‚sieht es einer Gleichung schon an', wie er ihr beikommt. Er wird bei Nachfrage auch die Regeln, die seiner Auflösung zugrunde liegen, angeben können, aber für sein praktisches Handeln ist wichtig, dass er diese Regeln ‚beherrscht'. Hierbei geht es wiederum um nichts weiter als um das Können, nicht um das Wissen."* (Spitzer 2009, S. 60).

Das aus Können (beschreibbares) Wissen wird, ist ein weiterer Schritt. Da Wissen nicht von außen erzwungen werden kann, tragen fremdformulierte Merksätze wenig oder nichts zu einer Wissenskonstruktion bei. „*Wenn es nicht möglich ist, instruktiv zu interagieren, so ist es auch unmöglich, dass ein Individuum oder ein System („Sender") einem anderen („Empfänger") Informationen „übermitteln" kann. Denn dies würde bedeuten, dass der Sender die Zustände des Empfängers determinieren kann.*" (Simon 2013a, S. 54ff). Aber das Bewusstseinssystem (des Schülers) ist strukturdeterminiert und autonom, das heißt es kann nur in seinen eigenen Strukturen denken. *„Autopoietische Systeme (Schüler) verhalten sich „immer und ausschließlich selbstbezogen und innengesteuert."* (ebd.) Der Schüler muss mit Hilfe seiner eigenen (internen) Strukturen und Prozesse das Allgemeine beschreiben.

---

[21] In einem konstruktivistischen Sinne handelt es sich um eine Wirklichkeitsüberlagerung. Die Teilnehmer einer Gruppe wollen untereinander einen bestimmten Begriff „richtig" verstehen.

Fazit
Statt Merksätze abzuschreiben oder auswendig zu lernen, sind konkrete Beispiele für den Lernenden essentiell. Allerdings genügt ein einziges Beispiel nicht, um eine Regel zu extrahieren. Zur Strukturerkennung braucht es mindestens zwei. Aus konstruktivistischer Sicht ist es sinnvoller zwei, drei konkrete Beispiele aufzuschreiben als einen allg. Merksatz.
Letzterer kann indirekt gefunden werden, indem der Lehrer die Schüler dazu auffordert, mit ihren eigenen Worten das Prinzip bzw. das Allgemeine zu formulieren, also selbst einen eigenen Merksatz aufzustellen. Dem Lernenden kann es prinzipiell nicht abgenommen werden aus Können Wissen zu konstruieren.

2.5.6.4 Mustererkennung bei negativer Erfahrung

Wenige Beispiele genügen auch für Dinge, die Pädagogen den Kindern nicht beibringen möchten. Zwei oder drei negative Erfahrungen mit einem Thema (das bezieht sich auf die erste Begegnung bzw. der ersten Erfahrung, also zu dem Zeitpunkt, wo sich die Verallgemeinerung bildet) reichen. Zwei schlechte Mathenoten, zweimal auf eine Arbeit vorbereit und gescheitert. Zweimal im Ton vergriffen ... Zwei- oder dreimal Dinge gelernt, die man nicht braucht – das stellt schulische Bildung (aus Schülersicht) in Frage. Verständlicher Weise.
Das Gehirn lernt immer, es lernt ebenso schnell Versagen.
Es ist nicht einfach, dieses zuerst gelernte Muster wieder zu verlernen. Das sog. *„Extinktionslernen ist viel komplizierter und für unser Gehirn bedeutend aufwändiger als das Neulernen.“* (Drießen 2010). Negativ-Lernen, absichtliches Vergessen ist sehr schwierig. Was da ist, ist da und kann nicht bewusst vergessen werden. Lernen bedeutet immer ein positives Konstrukt zu erschaffen. Anders formuliert: Es gibt keinen „Radierer“ für Landkarten. Das einzige was dem Pädagogen bleibt ist, eine andere Möglichkeit aufzuzeigen bzw. danebenzustellen. Beispielsweise, dass es doch möglich ist, in Mathematik etwas zu verstehen, *obwohl* zwei Arbeiten schlecht ausgefallen sind, obwohl das Muster „ich bin schlecht“ bereits existiert. Die gute Leistung erzeugt eine Irritation und damit muss das Gehirn umgehen. Und hier hat es zwei Möglichkeiten: Es assimiliert die Erfahrung und baut diese somit als eine „Ausnahme“ ein oder es verwirft das positive Beispiel.

Erste Begegnung
Es ist viel einfacher etwas neu aufzubauen bzw. etwas zu konstruieren, als ein negativ bewertetes Muster zu durchbrechen. Daher ist die erste Begegnung so wichtig, so entscheidend. Aus diesem Grund sollte dem jungen Kind, wenn es zum ersten Mal mit Mathematik, Sprachen, Naturwissenschaften in Berührung kommt, sehr behutsam und vorsichtig begegnet werden. So kommen den Orten der ersten Begegnung eine hohe

Bedeutung zu: In unserer Bildungslandschaft sind das Kindergärten und Grundschulen.
Die im zweiten Teil vorgeschlagene erste Begegnung mit dem Thema Bruchrechnen geschieht aus diesem Grund über ein konstruktives Spielzeug. Im Regelfall ist dieses positiv belegt. Damit stehen die Chancen für einen positiven Beginn recht gut. Bilder aus dem Unterricht zeigen das deutlich.

2.6 Fazit

Es gibt keinen geradlinig-kausalen Zusammenhang zwischen dem, was der Lehrer „sendet“ und dem, was der Schüler „empfängt“. Das bedeutet insbesondere, dass es keinen „richtigen“ Unterricht gibt und nicht vom Sender ausgedacht werden kann. Unterricht ist das, was im Raum zwischen Sender und Empfänger entsteht und lässt sich als Resonanz beschreiben und stellt ein emergentes Ereignis dar.
Das wird durch Luhmanns Konzeption von Kommunikation als dreiteiligen Prozess deutlich: Im ersten Schritt selektiert der Sender durch seine Wahrnehmung. Aus dieser kann er nur einen kleinen Teil mitteilen, das ist die zweite Selektion. Damit Kommunikation überhaupt standfindet, ist der dritte Schritt fundamental: Erst, wenn der Empfänger versteht, dass es sich um eine Mitteilungsabsicht handelt, findet Kommunikation und somit Unterricht überhaupt statt. Unterricht wird gleichsam vom Empfänger, vom Schüler her aufgerollt. Der Schüler entscheidet nicht „nur“, was gelehrt wird, vielmehr findet der Unterricht (in seiner Wirklichkeit) überhaupt nicht statt, wenn er keine Mitteilungsabsicht unterstellt.
Da alle Konstruktionen Eigenleistungen des Bewusstseinssystems des Lernenden sind, wird je nach Vorgeschichte und Erfahrung in einer Lernumgebung anders gelernt. Damit Unterricht bedeutsam wird, helfen Kommunikationsmodelle zur Orientierung und zur Gestaltung von Lernumgebungen. Die Wertequadrate zu *Freiheit und Struktur* und zu *Beziehung und Sache* zeigen die die paradoxe Situation, in der sich der Unterrichtende befindet. Die Qualitäten der Seiten des Nachrichtenquadrats (Schulz von Thun) lassen sich auf das Landschaftsmodell übertragen. Das ist eine Hilfe im Umgang mit dem Paradoxen. Innerhalb dieser Landschaft gibt das Riemann-Thomann-Modell eine Orientierung. Mit dessen Hilfe lassen sich Lernumgebungen an den Grundstrebungen des Menschen ausrichten.

Teil II

Gestaltung von Lernumgebungen

Wie soll unterrichtet werden, wenn das Bewusstseinssystem des Schülers ein autopoietisches System darstellt, welches ausschließlich (!) innengesteuert ist? Welche Mittel stehen dem Lehrer zur Verfügung?
Da es keine direkte kausal-geradlinige Möglichkeit der Vermittlung gibt, wird der Fokus nicht auf den Lernenden selbst, sondern auf dessen Umgebung gelegt.
Die folgenden drei Kapitel zeigen grundlegende Werkzeuge zur deren Gestaltung.
In „Rolle und Bühne“ geht es um die Möglichkeiten zur Lenkung der Aufmerksamkeit im Klassenraum. Hier spielen Gestaltgesetze eine zentrale Rolle. Mittels Rollendefinitionen kann der Lehrer intervenieren.
Im Kapitel über nonverbale Kommunikationssysteme werden Möglichkeiten vorgeschlagen, die Unterrichtssequenzen ermöglicht, wo jeder in der Klasse sich gleichzeitig äußern kann und dabei eine klare Struktur erhalten bleibt. Da die die Menge an Kommunikationen im Klassenraum das soziale System Unterricht bilden, verändern nonverbale Möglichkeiten grundlegend die unterrichtliche Struktur.
Schließlich wird auf die Bedeutung von Material im Kontext von Lernumgebungen eingegangen.

Kapitel 3 Rolle und Bühne

Da es keine Schnittstelle zwischen Bewusstseinssystemen oder Bewusstseinssystemen und der realen Welt gibt, kann der Lehrer seinen Schülern nichts *bei*-zu-bringen. Stattdessen besteht seine Aufgabe darin, ihnen etwas *nahe*-zu-bringen. Es geht darum einen Kontakt zwischen Wissensgebiet und Schüler zu ermöglichen („Anverwandlung der Welt" in Rosa & Endres 2016).

Die Umwelt des Lernenden besitzt zwei zentrale Komponenten. Eine sichtbare (1) und eine unsichtbare (2). Letztere ist für kommunikativ-soziale Prozesse von zentraler Bedeutung.

(1) Die Bühne als Ort des Geschehens mit dem Fokus der Aufmerksamkeit.

(2) Die Rolle der Person, die eine (verbale oder nonverbale) Äußerung von sich gibt.

3.1 Rolle und Bühne als Umgebung einer Äußerung

Wenn sich jemand verbal oder nonverbal äußert, so nehmen wir als direkter Beobachter[22] häufig nur die Äußerung bzw. die Handlung wahr. Aber jede Äußerung besitzt eine Umwelt (einen Kontext, eine Umgebung) in der sie stattfindet. Erst durch sie, kann die Wirkung einer Äußerung verstanden werden. Wörtliche Zitate („Genau das hast Du gesagt!") hängen stets von der Umgebung ab, dieselben Worte können in einer anderen Situation eine völlig andere Bedeutung besitzen. Nicht die Äußerung an sich erzielt eine Wirkung, sondern das Produkt aus Äußerung und Umwelt: Äußerung · Umwelt = Wirkung[23]. Wird ein Faktor in dieser Gleichung geändert, ändert sich die Wirkung.

Die Umwelt einer Äußerung besteht aus der Rolle und dem situativen Kontext (Bühne). Wenn zwei Menschen (verschiedene Rollen) dasselbe sagen, ist es noch lange nicht das Gleiche. Wenn der Fachleiter zu einem Referendar sagt: „Die Stunde hat mir gut gefallen. Machen Sie weiter so!" erzielt das eine andere Wirkung, als wenn ein Fünftklässler so zu dem Referendar spricht.

Auch die Situation ändert die Wirkung einer Äußerung. In einem öffentlichen Vortrag sind manche Begriffe und Worte „nicht am Platz".

Aus ökonomischen Gründen lassen wir im Alltag häufig den Kontext, die Umwelt der Äußerung, weg. *„Das Risiko ist allerdings, dass dadurch die Rolle des Kontextes bzw.*

[22] Der Beobachter einer Situation oder eines Gegenstandes wird als „direkter Beobachter" oder – wie in der Systemtheorie üblich – als „Beobachter 1. Ordnung" bezeichnet. Der Beobachter, der einen Beobachter beobachtet, wird Beobachter 2. Ordnung genannt.

[23] In dem Kommunikationsseminar „Grundkurs Kommunikation: Modelle und Menschen" (3.–6. Februar 2014, Hamburg, Friedemann Schulz von Thun und Kathrin Zach) bin ich einer additiven Schreibweise begegnet: Äußerung + Rolle = Wirkung. Bei dieser Schreibweise würde auch bei Nichtbeachtung der Rolle (bzw. allg. der Umwelt) eine Äußerung etwas bewirken. Aber tatsächlich kann ein und dieselbe Aussage in einer anderen Rolle eine gegenteilige Wirkung erzielen (die Rolle bekommt ein negatives Vorzeichen) oder verliert völlig an Bedeutung.

der jeweiligen Umwelt ‚weggedacht' wird, d. h., dass von einem elementaren Bestandteil des Bedingungsgefüges, das die beobachteten Phänomene erst möglich macht abstrahiert wird. Es gerät aus dem Blickfeld und wird zum blinden Fleck des Beobachters." (Simon 2013a, S. 65). Wenn unser Gegenüber die Äußerung in derselben Umwelt einordnet, dann redet man nicht aneinander vorbei. Wenn wir allerdings von einer Sache sprechen und der andere stellt sich dabei eine andere Umwelt vor, dann redet man im wahrsten Sinne des Wortes „aneinander vorbei".

3.1.1 Gleichzeitigkeit von Rolle und Bühne

Bühne und Rolle lassen sich nicht isoliert voneinander betrachten. Sobald jemand im Fokus steht (er sich auf einer „Bühne" befindet), wird ihm (vom Beobachter) eine Rolle zugeschrieben. Beide beeinflussen sich gegenseitig. Ohne eine „Bühne" existiert keine Rolle. Andersherum gilt: Jede Rolle braucht eine Bühne, damit sie wirken kann. Anders formuliert: Was nicht kommuniziert wird, was nicht den Weg in das Kommunikationssystem „Unterricht" findet, hat – aus Sicht des kommunikativen Systems – gar nicht stattgefunden. Was sich nicht auf einer Bühne befunden hat (= was nicht wahrgenommen wurde) ist nicht geschehen! Kommunikationssysteme brauchen Rolle und Bühne, um existieren zu können.

3.1.2 Implizite und explizite Rollen und Bühnen

Rollen sind– sofern keine Uniformierung stattfindet oder Rollenhüte aufgesetzt werden – auf den ersten Blick unsichtbar. So betrachtet geschieht Wesentliches im Unterricht im Verborgenen. Rolle und Bühnenwirkung liegen selten im Fokus der Betrachtung. Dabei lässt sich in der Gleichung *Äußerung · Umwelt = Wirkung* am einfachsten der Umweltfaktor durch den Lehrer beeinflussen. Etwa in dem er einem Schüler eine bestimmte Rolle zuweist oder eine Bühne definiert.

Ob eine Rolle oder eine Bühne implizit (ohne spezielle Markierung) oder explizit (durch Zuweisung) vergeben wird hat für die Wirkung keine Bedeutung. Es reicht, wenn der Lernende die Rolle oder die Bühne empfindet. Unter „Bühne" wird in dieser Arbeit eine Fokusbildung verstanden. Dort, wo die Aufmerksamkeit ist, wo hingeschaut wird, entsteht eine Bühne. Wenn ein Lehrer einen Schüler aufruft, entsteht unmittelbar eine Bühne im Raum um den Aufgerufenen, da dieser nun im Fokus der Aufmerksamkeit ist. Gleichzeitig ist der Schüler in der „Rolle" des Befragten. Rolle und Bühne treten häufig in der Kombination auf. So erzeugt eine Bühne häufig eine Rolle.

3.2 Die Bühne als Umwelt des Lernenden

3.2.1 Pädagogische Bühne

Stellt der Lehrer im Unterricht einem Schüler eine Frage, so befindet dieser sich im Fokus der Aufmerksamkeit und somit auf einer „Bühne“. Damit prüft der Lehrer den Schüler *nicht* nur auf sachlicher Ebene, sondern *gleichzeitig* auf sozialer (Schulz von Thun, Sach- und Beziehungsaspekt). Alle Augen sind auf den Befragten gerichtet, die Antwort findet *immer* in einem sozialen Kontext statt. Ist dem Lehrer im Unterricht das Zusammenspiel zwischen Schüleräußerung und Bühne bewusst, so kann er die Bühne nutzen, wie folgende Beispiele zeigen.
Die Bühne hat eine doppelte Wirkung: Zum einen zwingt sie zur Selbstkundgabe und birgt immer auch die Gefahr einer Bloßstellung mit sich, zum anderen ermöglicht gerade die Selbstkundgabe zu zeigen, was man (tolles) geleistet hat. Die folgende „Zerstörung der Bühnenwirkung“ ist nicht als die „richtige“ Methode zu verstehen, mitunter kann es sehr hilfreich sein, wenn jemand eine Bühne erhält.

3.2.1.1 Zerstörung der Bühnenwirkung

Mittels nonverbaler Kommunikation kann eine Abfrage über den Körper, den Ort oder das Material erfolgen (vgl. Abschnitt Kapitel 4). Damit können alle Schüler sich gleichzeitig äußern bzw. auf die „Bühne“ geholt werden. Wenn jedoch alle Schüler gemeinsam auf der Bühne stehen, existiert kein Fokus mehr und damit ist die Bühnenwirkung zerstört. Niemand wird bloßgestellt, man hat als außenstehender Beobachter nicht einmal das Gefühl, dass hier Schüler abgefragt werden. *„Sie verwenden wesentlich mehr Energie darauf, ihren Status innerhalb der Gruppe zu heben oder zu verteidigen, als darauf, etwas für sich zu lernen. ‚Die Unterrichtsinhalte treten gegenüber den Statuskämpfen deutlich zurück.“* (Plath 2010, S. 78). Man beachte den Unterschied zur konventionellen Abfrage: Mit Hilfe nonverbaler Äußerungen können *alle* Schüler gleichzeitig abgefragt werden, *keiner* wird dabei bloßgestellt! Konventionell wird *ein* Schüler abgefragt und die Gefahr ist hoch, dass er eine falsche Antwort als Bloßstellung empfindet.

Abb. 61: Beispiel für nonverbales (materielles) Abfragen

3.2.1.2 Bühne als Schutzraum

Auf einer Bühne dürfen Dinge gesagt werden, die keine Konsequenz haben. Man darf in eine Rolle schlüpfen und in einem klar definierten Raum (der Bühne) sich versuchen. Die Bühne ermöglicht ein Als-Ob-Handeln. Im Gegensatz zum klassischen Abfragen geht der Schüler selbst auf die Bühne. Beispiele finden sich bei Kramer: „Vom Chaos zur Symmetrie“ und „Absurde Geschichten“ (Kramer 2017b, S. 16f, S. 206f).

Abb. 62: Vom Chaos zur Symmetrie

3.2.2 Didaktische Bühne

Am Anfang aller Erkenntnis steht die Wahrnehmung. Wahrgenommen kann nur das werden, was fokussiert wird. Das „Werkzeug“ hierzu ist die „Bühne“ und beschreibt den „Ort des Geschehens“ und den „Ort der Aufmerksamkeit“.
Der Lehrer versucht die Aufmerksamkeit des Empfängers in eine bestimmte Richtung zu forcieren, er trägt damit wesentlich dazu bei, was der Gegenstand der unterrichtlichen Kommunikation ist. Was der Schüler in diesem Umfeld lernt kann nicht durch Lehr-, Bildungs- oder Stoffverteilungspläne vorherbestimmt werden, da das Bewusstseinssystem des Schülers autopoietisch ist. Es generiert bzw. konstruiert autonom und innengesteuert Wissen. Jedoch lässt sich die Wahrscheinlichkeit erhöhen, dass das gelernt wird, was (aus sich eines bestimmten Beobachters, z. B. Lehrer, Staat, …) gelernt werden soll. Das Instrument hierzu ist die Gestaltung von Lernumgebungen.

3.2.2.1 Didaktische Reduktion

Der Empfänger konstruiert aus und mit dem Material, was ihm zur Verfügung steht. Mit was er nicht in Kontakt bzw. in Berührung kommt, wird nicht zum Gegenstand seiner Konstruktion. Es ist daher entscheidend, was auf die „Bühne des Unterrichts“ gestellt wird. Dieses „Was“ entsteht nach Luhmann durch zwei Selektionen (vgl. Abschnitt 2.3). Das Bewusstsein des Lehrers konstruiert Information als subjektiver Vorgang (!); ein anderer Lehrer würde anders auf die Mathematik blicken. *„Jede Form von Reduktion* *bezeichnet bewusst vorgenommene Unterscheidungen.“* (Lehner 2012, S. 12) Im zweiten Schritt (zweite Selektion) wählt der Lehrer bestimmte Dinge aus, die er „mitteilen“ möchte, was gleichsam auf „die Bühne“ des Unterrichts kommt. *„So kann auf der curricularen Ebene zwischen wichtigen und weniger wichtigen Inhalten und Themen unterschieden werden und auf der vermittlungstechnischen Ebene zwischen dem Kern und dem Rand eines Sachverhalts- jeweils vor dem Hintergrund einer bestimmten Zielgruppe mit fixierten Lernzielen und verfügbarem Zeitbudget.“* (ebd.) Ob der Schüler schlussendlich auf diese Bühne schaut oder nicht, ob es zum „verstehen“ im Sinne Luhmanns kommt, liegt in der Macht des Empfängers. Allerdings lässt sich die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Aufmerksamkeit erhöhen: Ist der Stoff didaktische reduziert, entsteht wahrscheinlicher ein gemeinsamer Fokus, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass Schüler und Lehrer auf denselben unterrichtlichen Gegenstand blicken wird größer.

3.2.2.2 Experiment zur didaktischen Reduktion

Ein Experiment verdeutlicht die Bühnenwirkung bzw. die Bedeutung der didaktischen Reduktion (vgl. Kramer 2017b). Das folgende Bild zeigt einen Gegenstand. Der Rahmen des Bildes stellt die Bühne dar bzw. den Unterricht.

Abb. 63: Didaktische Reduktion I

Der Empfänger (der Betrachter des Bildes bzw. der Schüler, der den Unterricht erlebt) konstruiert mit diesem Material. Die Konstruktionen sind daher subjektiv durch die Vorerfahrung geprägt und so wird je nach der individuellen Vergangenheit etwas anderes konstruiert. So wird der Katzenliebhaber an etwas anderes denken als der Paketdienst.

Kommt ein zweiter (unterrichtlicher) Gegenstand hinzu, wird vom Betrachter automatisch ein Zusammenhang generiert. Es wird eine Beziehung zwischen den Gegenständen hergestellt. Die Schnur ist nicht einfach nur Schnur, die Schnur steht im Kontext zu dem zweiten Gegenstand, hier den Tabletten.

Abb. 64: Didaktische Reduktion II

Wird die (didaktische) Bühne überfrachtet, so weiß der Beobachter nicht mehr, wohin er seine Aufmerksamkeit richten soll. Es entsteht (in der Wirklichkeit des Beobachters) häufig eine Kategorie: Chaos, Unordnung oder wie er auch immer den Gesamteindruck benennen will. Alternativ kann der Empfänger selektiv etwas wahrnehmen. Er fokussiert dann einen Gegenstand und blendet alles andere aus.

Abb. 65: Didaktische Reduktion III

Der ursprüngliche Gegenstand, die Schnur, ist nicht mehr im Fokus. Auch die Tabletten stehen in keinem direkten Bezug mehr, obwohl „nur“ etwas hinzugefügt wurde. Der Empfänger hat es durch dieses „mehr“ schwerer. *„Als Resultat führt dies zum sogenannten Stoffmengenproblem.“* (Lehner 2012, S. 16) „Weniger ist mehr“ ist die grundsätzliche Idee einer didaktischen Reduktion. Konzentration bzw. Fokussierung entsteht durch Reduktion.

3.3 „Grammatik der Bühne“: Gestaltpsychologie im Unterricht

In Abschnitt 3.2.2.2 wird gezeigt, dass das Gehirn stets Daten erschafft, mit denen es die eigene individuelle Wirklichkeit aufbaut. *„Das Gehirn ist kein Datenspeicher, sondern ein autonomer Datengenerator“* (Herrmann 2009, S. 15).
Im folgenden Abschnitt geht es darum, dass die Konstruktion des Gehirns nicht beliebig erfolgt. Es versteht eine Art Grammatik, es steht von selbst Bezüge zwischen den

Dingen her. Ein Beispiel: Das Telefon klingelt und gleichzeitig fällt etwas um. Der Beobachter unterstellt automatisch einen Zusammenhang, allein aus der Tatsache heraus, dass die Dinge *gleichzeitig* erlebt wurden[24]. Die Grammatik der Konstruktion (die Gestaltpsychologischen Gesetze), setzt im ersten kommunikativen Schritt (vgl. Abschnitt 2.3 „Kommunikation nach Luhmann“) der Wahrnehmung des Menschen an.

3.3.1 Gesetz der Ähnlichkeit

Ähnlichkeit bei Texten

Werden zwei Dinge in der gleichen Farbe dargestellt, wird automatisch ein Bezug hergestellt. Farbkodierung basiert auf dem gestaltpsychologischen *Gesetz der Ähnlichkeit*: Einander ähnliche Elemente werden eher als zusammengehörig erlebt als einander unähnliche.

Wenn mehr als vier Farben verwendet werden, ist die Darstellung nicht mehr farbig, sondern bunt. Für die Farbkodierung gilt selbiges wie für die Assoziationen im letzten Abschnitt. Der Begriff „bunt“ entspricht der Vereinfachung „Chaos“. In diesem Sinne könnte man „bunt“ als „Farbchaos“ bezeichnen.

3.3.1.1 Ähnlichkeit bei Dingen

Das Gesetzt der Ähnlichkeit ist nicht auf Tafel- oder Textarbeit beschränkt, sondern gilt viel allgemeiner. Hier sehen Sie materielle Auswirkungen:

[24] Die Formulierung „gleichzeitig erlebt wurden“ ist bewusst und in einem konstruktivistischen Sinne gewählt. „Dass die Dinge gleichzeitig stattgefunden haben“ ist nicht das entscheidende. In der Relativitätstheorie (Physik) verliert der Begriff „Gleichzeitigkeit“ an Bedeutung. Nach Einstein ist „Gleichzeitigkeit“ bezugssystemabhängig, d. h. von der einen Wirklichkeit bzw. dem eigenen individuellen Erleben abhängig. In der klassischen Physik gibt es eine absolute Zeit und in dieser einfacheren Theorie ist klar, was mit „Gleichzeitigkeit“ gemeint ist. Obwohl die Relativitätstheorie heute als richtig angesehen wird, ist die Vorstellung, dass eine Wahrnehmung (das Telefon klingelt und gleichzeitig etwas umfällt) in einer anderen Wirklichkeit nicht gleichzeitig geschehen muss.

Es ist ebenso naheliegend wie naiv, dass wir davon ausgehen, dass der andere die Dinge genauso wahrnimmt, wie wir selbst. So scheint die aktuelle Bildung klassischer Natur zu sein, man geht (ebenso stillschweigend wie in der früheren Physik) davon aus, dass es eine absolute Wirklichkeit gibt. Beispielsweise erheben Noten den Anspruch absolut zu gelten. Ansonsten würde beispielsweise ein Vergleich von Abiturdurchschnitten keinen Sinn ergeben.

Abb. 66: Ähnlichkeit

Von links betrachtet ist die zweite und die letzte Schachtel gleich (ähnlich) eingefärbt. Auch die anderen Schachteln besitzen zueinander eine Ähnlichkeit. Die beiden roten treten in den Vordergrund, weil sie weniger häufig als die blauen vorhanden sind und dadurch besonders werden[25].

Hier fällt eine Schachtel aus der Ähnlichkeit heraus. Durch die Drehung zieht die *letzte* Schachtel die Aufmerksamkeit auf sich. Hier wurde nicht die Farbe, sondern die *„Haltung“* verändert. Derselbe Effekt wird in der nonverbalen Kommunikation mit unterschiedlicher Körperhaltung ausgenutzt.
Der aufmerksame Beobachter hat bemerkt, dass die dritte Schachtel ebenfalls ihre „Haltung“ verändert hat. Sie steht „nur“ auf dem Kopf, was sie der Mehrzahl der Schachteln ähnlicher macht und daher nicht so auffällt.

Ein unterrichtliches Beispiel: In der Übung „Gleichungen – eine Waage für Streichhölzer“ (Kramer 2016a, S. 237) wird ein Stift gewählt, der dem als Waage agierendem Schüler farblich *ähnlich* ist.

3.3.1.2 Ähnlichkeit bei Menschen

In der Übung „vom Chaos zur Symmetrie“ (Kramer 2017b) findet eine symmetrische (ähnliche) Zuordnung zu Paaren statt. Was für Formales wie Worte und Formeln gilt, was für Bilder und Material gilt, gilt auch für uns Menschen. Bei Begegnungen suchen Menschen sehr häufig nach Ähnlichkeiten. Es fällt Menschen leichter ein Gespräch zu führen, wenn unser Gegenüber uns ähnlich ist, wenn es eine Gemeinsamkeit gibt.

3.3.2 Gesetz der Nähe

Dinge mit geringem Abstand zueinander werden als zusammengehörig empfunden.

[25] Es werden bevorzugt Elemente wahrgenommen, die sich von anderen durch ein bestimmtes Merkmal abheben (Prägnanztendenz). Dieses Phänomen wird auch *Gesetz der Prägnanz* genannt.

Abb. 67: Gesetz der Nähe

Die fünf Päckchen links bilden eine Gruppe, ebenso die drei rechts. In der Übung „Erste Erfahrungen mit Bruchteilen“ (Kramer 2017b, S. 80ff) habe ich dieses Gesetz verwendet. Es wird dort sogar doppelt angewandt: Zum einen entstehen aus einem Ganzen acht Achtel, zum anderen rücken die drei Achtel nach links, die fünf Achtel nach rechts.

Abb. 68: Gesetz der Nähe im Unterricht

In diesem Beispiel wurde stillschweigend und zusätzlich das Gesetz der Ähnlichkeit verwendet (Farbkodierung). Es ist ein typisches Phänomen, dass die Gestaltgesetze vom Zuschauer nur schwer bemerkt werden. Gestaltpsychologie wirkt häufig nicht offensichtlich. Das ist ein Grund, warum die Werbung sich ihrer so stark bedient.

Abb. 69: „Paradoxon des Strukturierens“

Jetzt werden zwei Strukturen bzw. Gesetze verwendet. Dadurch wird das ganze komplexer und die Wirkung ist nicht mehr so stark, als wenn nur das *Gesetz der Nähe* angewendet würde. Mit jeder zusätzlichen Struktur geht Prägnanz, Klarheit und Wirkung verloren. Ich möchte es das „Paradoxon des Strukturierens“ nennen: Strukturverlust durch (zu viele) Strukturen.
Das gilt auch im übertragenen Sinne: Wenn eine Schule jede Struktur, jede Ausrichtung verwirklichen will (verschiedenste Reisen und Klassenfahrten in ferne Länder, verschiedenste sprachliche Angebote und dazu noch eine sportliche Ausrichtung), so besteht die Gefahr der Strukturlosigkeit.
Für das Strukturieren gilt allgemein: Mit jeder Struktur (Gesetz der Ähnlichkeit, Gesetz der Nähe, Gesetz der Gleichzeitigkeit, ...) wird die Gesamtwirkung chaotischer und dadurch schwächer. Innerhalt einer Strukturart (z. B. Ähnlichkeit bzw. Farbkodierung) sollten ebenfalls nicht mehr als vier Elemente (hier Farben) überschritten werden. Kurz: Weniger ist mehr.

3.3.2.1 Unterschiedliche Nähe, noch mehr Gestaltung

Mittels dem *Gesetz der Nähe* kann noch feiner strukturiert werden. Die folgenden drei Bilder haben drei unterschiedliche Wirkungen:

Abb. 70: Unterschiedliche Nähe

Je nach Ihrer persönlichen Vorgeschichte, wird unterschiedlich interpretiert, vielleicht so: „Blatt zerschneiden, dann anzünden“, „Blatt verbrennen, dann sicherheitshalber noch die Asche zerschneiden“ und „Zündköpfe abschneiden, damit das Blatt nicht gefährdet wird“.

3.3.2.2 Verwendung in der Sprache

Das Gesetz der Nähe gilt auch für formale Aufschriebe. So schreibt man die Bedeutung einer Variablen wenn möglich sehr nahe bzw. direkt daneben auf:

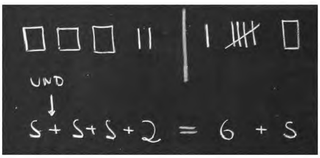


Abb. 71: Bezug von Bild und Schrift

Hier wird einerseits die „Nähe“ mit dem Wort „UND“ verwendet, andererseits die „Ähnlichkeit“ sowohl durch das exakte untereinander der beiden Zeilen und der Farbe Blau (vgl. Kramer 2017b, S. 240).
Eine bekannte Technik ist das sogenannte Mindmapping, wo versucht wird, zusammengehörige Dinge an dieselbe Stelle zu schreiben.

3.3.2.3 Schülerexperimente

Wenn der Lehrer ein Experiment vorführt, welches die Schüler von ihrem Platz aus beobachten, ist es ihnen nicht *nahe*. Das Experiment findet woanders statt. Mitunter verbessert sich die Anteilnahme, wenn man die Schüler nach vorne bittet. Im Abschnitt *neidfreies Teilen unter zwei Personen* (Kramer 2017b, S. 180ff) steht die ganze Klasse ums Pult. Ein weiteres Beispiel zeigt das haptische Lösen einer Gleichung (Kramer 2017b, S. 250). Natürlich hätten die Kinder auch sitzen bleiben können, aber nur wer *nahe* dran ist, kann auch berührt werden.

Abb. 72: Nähe von Experimenten

Schülerexperimente (wie sie beispielsweise in dieser Arbeit mit Fischertechnik beschrieben werden) besitzen im gestaltpsychologischen Sinne einen großen Vorteil. Beim eigenen Experimentieren ist man nahe dran, das Experiment „tangiert“ einen und nach dem Gesetz der Nähe entsteht automatisch zwischen Experimentator und Experiment ein Zusammenhang. Natürlich gibt es viele weitere Vorteile vom eigenen Erleben und Forschen, an dieser Stelle geht es nur um den gestaltpsychologischen Aspekt.

3.3.2.4 Schulische Welt und Wirklichkeit

Betritt der Schüler die Schule betritt er damit auch einen bestimmten Ort. Es ist nicht egal, wo man etwas erlebt. Auch hier gilt das Gesetz der Nähe. Hierin liegt eine Bedeutung von Schullandheimen und Klassenfahrten. Dort wird der Lehrer häufig „ganz anders“ als im Klassenzimmer (Umgebung) empfunden. Die erzeugte Wirkung ist immer ein Produkt aus Äußerung und Umgebung (vgl. Abschnitt 3.1).

Dieselben Worte, auf einer Klassenfahrt gesprochen, können eine völlig andere Wirkung entfalten. Wenn im Mathematikunterricht draußen die Höhe eines Baumes vermessen wird, „bleibt“ die Mathematik nicht im Klassenzimmer und somit in einer schulischen Wirklichkeit zurück, sondern wandert in die Natur. Eine ähnliche Wirkung wird erzielt, wenn die Schüler Dinge aus ihrem Alltag untersuchen, z. B. ihr Kinderzimmer bzw. Wohnhaus nachbauen (vgl. Kramer 2016b).

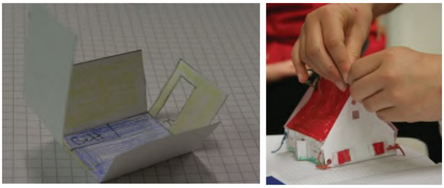


Abb. 73: Nachbau

3.3.3 Gesetz der Gleichzeitigkeit

Was für den Ort die Nähe ist, entspricht bei der Zeit der zeitlichen Nähe bzw. der Gleichzeitigkeit: Dinge, die sich gleichzeitig verändern bzw. die gleichzeitig geschehen, wird ein gemeinsamer Zusammenhang unterstellt: Das Telefon klingelt und etwas fällt gleichzeitig vom Tisch. Unmittelbar wird ein Zusammenhang zwischen dem Klingelzeichen und dem Absturz hergestellt.

3.3.3.1 Gleichzeitigkeit von Themen

Werden zwei Dinge im Unterricht zeitlich nahe oder gleichzeitig behandelt, wird vom Beobachter ein Zusammenhang unterstellt. Für fächerübergreifenden Unterricht kann das hilfreich sein: Parallel zur Differentialrechnung werden in Physik die Fallgesetze, genauer der Zusammenhang von Strecke, Geschwindigkeit und Beschleunigung untersucht. Entsprechen lassen sich bedeutsame Entdeckungen in einem historischen Kontext unterrichten.

3.3.4 Weitere Gestaltgesetze

Es gibt viele weitere Gesetze (Gesetz der Kontinuität, Gesetz der Geschlossenheit, Gesetz der gemeinsamen Bewegung, Gesetz der fortgesetzt durchgehenden Linie, Gesetz der gemeinsamen Region, Gesetz der verbundenen Elemente, usw.), die sowohl didaktische wie pädagogisch von Bedeutung sein können, jedoch in dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle spielen.

3.4 Rolle und Rollenbelegung

Der bewusste Umgang mit Rollen, d. h. eine bewusste Rollenbelegung, ist ein sehr wirkungsvolles Instrument, um Kommunikation und somit den Unterricht zu gestalten. Dem Umgang mit Rollen kommt sowohl eine pädagogische als auch didaktische Bedeutung zu.

3.4.1 Pädagogische Rollenbelegung

3.4.1.1 Direkte und indirekte Interventionen

Da soziale Systeme aus Kommunikationen bestehen und diese wiederum zwischen Rollen stattfinden, verändert eine neue Rollendefinition (Umgebung des Schülers) das gesamte System. Verhaltensänderungen können auf zweierlei Weisen verändert werden können: (1) Durch direkte Einwirkung auf den Schüler (z. B. in Form von Strafandrohung) und (2) durch eine Veränderung der Umwelt (andere Rolle, andere Situation (Bühne)). Möchte man also eine Wirkung bzw. eine Verhaltensänderung erzielen, so kann man (klassisch) versuchen direkt das System (Bewusstseinssystem des Schülers) zu beeinflussen. Alternativ kann man die Umgebung beeinflussen.
Eine direkte Intervention, ein erzieherischer „Rat“: *„Komm‘, spiel doch mit!“* oder gar die Drohung: *„Wenn Du nicht mitspielst, dann bist Du ein Spielverderber!“* oder Ängste herbei zu führen: *„Wenn Du nicht mitspielst, dann lassen die Dich später wahrscheinlich auch nicht mehr mitspielen!“* baut einen Druck auf. Das Kind spielt dann nicht wirklich mit, sondern gibt dem vom Erzieher erzeugten Druck nach.
Geschickter ist es, wenn man einen Situation (eine Umweltbedingung) schafft, wo das Kind gebraucht wird, wo es nötig ist, damit das Spiel besser funktioniert. Geschieht die Intervention indirekt (über den situativen Kontext), dann wird das Kind nicht von der spielenden Gruppe geduldet und muss als Bittsteller auftreten, sondern es steht in der Rolle des Helfenden, des Unterstützenden auf.
Eine Situation so zu betrachten, dass sich die Rolle für das Kind ändert, der Weg über das indirekte, erfordert eine systemische Betrachtung der Dinge.
Die Bedeutung der indirekten Intervention durch die Umwelt ist vor allem bei Gruppen (im Gegensatz zu einer Einzelbetreuung wie etwa in der Nachhilfe) sehr interessant, da sich alle Schüler in derselben Realität des Unterrichts befinden.

3.4.1.2 Beispiel zur direkte Intervention – Rollenzuweisung

Ein Beispiel verdeutlicht die Bedeutung der Rolle: Dominik[26] ist ein Klassenclown. Er nützt jede Situation im Unterricht des Lehrers, um Aufmerksamkeit zu bekommen. Ermahnungen, Strafandrohungen, Elterngespräche scheinen keine Wirkung zu erzielen. Häufig folgen stärkere und noch stärkere Ermahnungen und Strafen. Die Idee „viel hilft viel" ergab keine Änderung.
Statt auf Dominik direkt (mit Strafen, Belehrungen, …) einzuwirken, versuchte der Lehrer dessen Umwelt (genauer: seine Rolle) zu verändern bzw. in einen neuen Kontext (bzw. neuen Umgebungsrahmen) zu stellen (Reframing).[27] Offensichtlich wollte Dominik Aufmerksamkeit. Die indirekte Intervention bestand darin, Dominik eine Bühne zu geben, wo er gesehen wird, welche jedoch für den Unterricht förderlich ist. So erhielt Dominik statt einer weiteren Strafe eine Situationsbeschreibung aus der Sicht des Lehrers („der Unterricht kann so nicht weitergehen", „deine Gags unterbrechen so häufig, dass kein Fluss zustande kommt") und dem Vorschlag eine Unterrichtsstunde zu übernehmen. Es bestand die Auflage, dass die Klasse etwas lernt.
Statt Dominik einen Vorschlag zu unterbreiten, kann Dominik auch direkt gefragt werden, welche „Umweltbedingungen" er braucht, um den Unterricht konstruktiv mitzugestalten. Eine klare Ansprache, was die unterrichtlichen Ziele sind, zusammen mit der Frage, wie er sich einbringen könnte, kann häufig einen Rollenwechsel vom „Störer" zum „Mitgestalter" bewirken.

3.4.1.3 Verbindlichkeit durch Rollen

Eine Gruppe (als Ganzes, d. h. ohne personale Rollendefinitionen) kann nur sehr schwer Verantwortung übernehmen, Verantwortung ist fast immer personal. Fragen des Lehrers, warum z. B. ein Bauteil nach der Stunde fehlt, bleiben in der Regel unbeantwortet. In der Praxis des Schulaltages „war es dann keiner". In der Psychologie spricht man von der „Diffusion der Verantwortung" (vgl. Bierhoff 2009, S. 107). Verantwortung kann nur auf Personen, aber nicht auf Gruppen übertragen werden. „Bruchrechnen als Abenteuer" zeigt das Delegieren von Verantwortung mittels Rollen innerhalb der Gruppe in zwei Beispielen:

---

[26] Es handelt sich um die Beschreibung einer realen Situation im Uhlandgymnasium in Tübingen 2010, der Name wurde geändert.

[27] Reframing ist eine Technik der systemischen Familientherapie die den Bezugsrahmen (den „Frame") bewusst in einen anderen Kontext setzt bzw. umdeutet. Der Hintergrund ist, dass Handlungen aus Erklärungen erfolgen. Die Erklärungen sind jedoch Konstrukte eines Beobachters und bilden nicht die Realität ab. Ein anderes Erklärungsmodell liefert eine andere Handlungsstrategie:
„Unterschiedliche Erklärungen liefern nun einmal unterschiedliche Modelle der Generierung von Zuständen oder Ereignissen. Sie sind gewissermaßen die Rezepte, die sagen, was wer wann wie tun oder lassen muss, um ein bestimmtes Ergebnis oder Ziel zu erreichen oder dessen Erreichen zu verhindern. Handlung orientiert sich immer an Erklärungen" (Simon 2013a, S. 75).

Materialwart
Eine mögliche Lösung zur Vermeidung von Materialverlust besteht in der Rollenvergabe des Materialwartes. Fehlt nach dem Unterricht ein Teil, wird dieser (und nicht die Gruppe (!)) danach gefragt. Nach Einführung der Regel lag in beiden Klassen des Schulversuches mit Fischertechnik („Bruchrechnen sichtbar machen") in der französischen Schule Tübingens in keiner Stunde (!) der über zwei Monate laufenden Lerneinheit etwas auf dem Boden. Die Diffusion der Verantwortung entspricht so der Nichtdiffusion der Bauteile.

Zeitmanager
Der Zeitmanager blickt regelmäßig auf die Uhr und ist dafür verantwortlich, dass das Modell zum gegebenen Zeitpunkt fertig ist. Denn die Gefahr besteht, dass man sich bei Konstruktionen zu sehr im Detail verliert oder zu große Projekte plant, die nicht mit der Zeitvorgabe kompatibel sind.
Ist eine Zweiergruppe nicht rechtzeitig fertig, fragt der Lehrer ihn persönlich, was los ist, und nicht die Gruppe. Strenge war in dem Schulversuch nicht erforderlich, allein die Tatsache, dass die Verantwortung jetzt von einem Schüler allein getragen wurde (personalisiert wurde) und nicht irgendwo, undefiniert und ungeklärt im Zweierteam („Diffusion der Verantwortung") liegt, schaffte eine sehr hohe Verbindlichkeit.

3.4.1.4 Eigenständige Rollenbelegung und -klärung

Die Rollen müssen nicht von außen (etwa durch den Lehrer) vorgegeben werden. Die Schüler können selbst (!) die Rollen mitsamt den Verantwortlichkeiten klären. Es zeigt sich hier ein hohes Maß an Kompetenzentwicklung, wenn die Rollen nicht durch den Lehrer, sondern durch die jeweilige Gruppe selbst definiert werden.

3.4.2 Didaktische Rollenbelegung

Den Begriff der *Rollenklärung* findet man im sozialen Miteinander. So wie dort Rollendefinitionen sehr hilfreich sind, z. B. in der Delegation von Verantwortung (päd. Rollenbelegung), kann auf didaktischer Ebene das Verständnis eines fachlichen Inhaltes durch Rollendefinitionen für die Beteiligten viel klarer in Erscheinung treten. So können Schüler zu mathematischen Operatoren, zu Elektronen oder Planeten werden.
Weiter ermöglichen Rollen eine unterschiedliche Sichtweise desselben Lernstoffes. Dadurch kann der Unterrichtsgegenstand auf unterschiedlichen Ebenen wahrgenommen werden.

3.4.2.1 Verschiedene Sichtweisen durch verschiedene Rollen:

Der Schüler kann im Unterricht drei verschiedene Rollen einnehmen: (1) Prüfer, (2) Prüfling und (3) Teilnehmer einer Prüfungskommission. Mit jeder Rolle verändert sich die Perspektive auf die Unterrichtsgegenstände.

(1) Schüler als Prüfer

Schüler erstellen oder wählen eine Aufgabe für ihre Mitschüler aus. Das kann z. B. durch den Bau eines Getriebes zusammen mit einer geeigneten Fragestellung erfolgen. In der Rolle als Prüfer ist es zu überlegen, welche Aufgabentypen überhaupt möglich sind und für wen sie bestimmt sind. Der Schüler tut etwas für einen anderen Schüler, nicht für sich selbst. Er denkt sich in die Sichtweise der Prüflinge hinein. *„Im Übrigen regen selbstgemachte Aufgaben dazu an, sie zu hinterfragen, sie zu verändern und nach Kriterien zu untersuchen – sie erheben nicht den Perfektionsanspruch einer Schulbuchaufgabe. Somit steigern gegenseitig gestellte Aufgaben die Authentizität für die Lernenden und damit in der Regel die Motivation."* (Ehret 2010, S. 18).

(2) Schüler als Prüflinge

Die Schüler lösen die Aufgaben ihrer Mitschüler. Das entspricht der konventionellen Situation im Unterricht. Mit dem Rollenwechsel (vom Prüfer zum Prüfling) ist ein Statuswechsel (Keith Johnstone, Maike Plath) verbunden. Johnstone untersucht mittels Übungen, seinen „Status-Spielen", wie sich soziale Hierarchie im Verhalten äußert (Johnstone 1993). Ebenso experimentiert Augusto Boal in seinem „Theater der Unterdrückten" mit Status und dessen sozialen Bedeutung (Boal 1989). Der Prüfer ist im Hoch-, der Prüfling im Tiefstatus. Arbeitet der Schüler Aufgaben eines Schulbuches ab, so ist er stets im Tiefstatus, er ist nie Prüfer. Durch das andauernde Verweilen im Tiefstatus verschwindet einerseits häufig die Lust am Lernen (er kann nicht mitgestalten), andererseits wechselt der Schüler nicht die Perspektive: das Entwerfen von Aufgaben.

(3) Schüler als Teilnehmer einer Prüfungskommission

Schließlich besteht mittels Aufstellungen (jeder geht zu der Aufgabe bzw. dem Exponat, welches ihm am schwierigsten/leichtesten erscheint) die Möglichkeit, auf einer Metaebene die Qualität der Aufgaben zu reflektieren. Diese Betrachtung geht prinzipiell auch mit Schulbuchaufgaben.

Die Aufstellung im Raum hebt zusätzlich die subjektive Betrachtung des Einzelnen hervor. In Analogie zum Landkartenmodell können die Aufgaben als Landschaft gesehen werden, jeder Teilnehmer der Prüfungskommission entscheidet (subjektiv) für sich, welche Aufgabe „leichtes Gelände" ist. Das ist ein systemischer Blick auf das Unterrichtsgeschehen: Was einfach und was schwierig ist, entscheidet immer (!) ein

Beobachter. Häufig rückt die Abhängigkeit der Schwierigkeit vom Standpunkt des Beobachters in den Hintergrund und der Lehrer oder das Schulbuch nimmt einen scheinbar „objektiven“ Standpunkt über die Vergabe von Schwierigkeitsstufen ein.

3.4.2.2 Didaktische Bedeutung der verschiedenen Sichtweisen

Mit jeder Rolle wechselt der Schüler seine Wahrnehmungsperspektive. Da die Rolle zur Umgebung bzw. zur Umwelt des Bewusstseinssystems des Schülers gehört, kann man den Rollenwechsel als „Reframing“ verstehen. Das Bewusstsein wird in einen anderen Kontext (in einen anderen „Rahmen“ = frame) gesetzt und ermöglicht, fordert und fördert eine andere Betrachtungsweise.
Man beachte die unterschiedliche Wahrnehmungsqualität durch Rollenvergabe: Dieselbe Aufgabe wird auf drei verschiedenen Ebenen bzw. Sichtweisen reflektiert.

3.4.2.3 Verschiedene Rollen von Material und Begriffen

Das Material (hier Ketten und Zahnräder) wie auch ein bestimmter Begriff (hier der „Bruch“) kann verschiedene Rollen einnehmen. Je nachdem, welche Bedeutung konstruiert wird, wechselt er seine Rolle. In Abschnitt 6.3.1 werden vier verschiedene Rollen des Bruches an ein und demselben Material aufgezeigt. Das ist aus einem konstruktivistischen Blickwinkel sehr interessant: Es handelt sich immer um dasselbe Material, aber die Konstruktionen bzw. Beobachtungen sind anders.
Wechselt der Lehrer innerhalb seiner Erklärung seine Sichtweise auf den Bruch (seiner internen Landkarte), entspricht das der Benutzung einer anderen „Landkarte“ (im Sinne des Landschaftsmodells in Abschnitt 1.5.2). Ohne Rollenklarheit ist die Gefahr der Verwirrung groß.

3.4.2.4 Theatrale Möglichkeiten didaktischer Rollen

Die Schüler können in die Rolle eines mathematischen Gegenstandes, z. B. eines „Operators“ schlüpfen. Didaktische und pädagogische Rollen können gleichzeitig im Unterricht wirksam werden, ohne sich gegenseitig zu stören, weil sie auf unterschiedlichen Ebenen wirken. Im ersten Beispiel gibt es parallel zu der didaktischen Rollenbelegung eine pädagogische: Die Schüler werden zu Forschern und fühlen sich ein in das „Unteilbare“ bzw. in die Sichtweise des Griechen Demokrit. Die Beispiele stammen aus *Mathematik als Abenteuer*.

Beispiel 1: Schüler wird zum Operator
Der Lehrer schreibt „$\frac{1}{2}$“ an die Tafel, die Schüler halbieren daraufhin ihr mitgebrachtes Nahrungsmittel. Das „Halbe“ wird zur Seite gelegt, es entspricht dem „$\frac{1}{2}$“ an der Tafel.

Im nächsten Schritt nehmen die Schüler vom Rest wiederum die Hälfte. Der Schüler mit dem Messer wird so zum Operator „Halbierer“, er nimmt auch im Folgenden stets die Hälfte. Das „Hälftenehmen“ wird gleichzeitig an der Tafel notiert: „$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$“. Während die Schüler handelnd (= enaktiv) das Halbieren erfahren, entsteht auf der Tafel folgende formale (= symbolische) Sprache.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2}}_{\frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{2}}_{\frac{1}{16}} \cdot \frac{1}{2}}_{\frac{1}{32}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}$$

So entsteht ein Wechselspiel zwischen Theorie (an der Tafel) und Praxis (auf den Schülertischen). Die Schüler sollen selbstständig bis $\frac{1}{1024}$ oder noch weiter das Halbieren fortführen.

Abb. 74: Schüler als Operator

Meist entwickeln die Schüler einen immensen Ehrgeiz und es werden fast unsichtbare Teile noch geteilt. Bis es nicht mehr geht. An dieser Stelle kann man gerne die Frage stellen, ob die Teilung prinzipiell immer weitergehen wird oder ob es irgendwann ein nicht teilbares Reststück existiert. So führt das Croissant bzw. die Karotte zur Atomtheorie (*á-tomos* = nicht teilbar) bzw. zum Griechen Demokrit.

Beispiel 2: Schüler erzeugt Zufälligkeit

Überlegt sich der Lehrer eine beliebige Zahl, so ist diese für die Schüler meist nicht beliebig. Der Lehrer hat die Rolle eines mathematischen Profis und weiß (aus Schülersicht) worauf alles hinausläuft. „Er wird sich schon etwas dabei gedacht haben, wenn er sich eine „beliebige“ Zahl überlegt …“.

Ganz anders ist es, wenn der Lehrer einen Schüler auffordert eine (beliebige) Zahl zu nennen. Angenommen es wird dieselbe Zahl genannt, die sich der Lehrer gedacht hat, so kommt jetzt kein Schüler auf die Idee, dass sich der Lehrer etwas dabei gedacht hat, es könnte jede Zahl gewesen sein können. (Kramer 2016a: 238).

3.5 Fazit

Jede Äußerung findet in einer Umgebung (Kontext) statt. Die soziale Umgebung einer Äußerung ist die Rolle. Die Belegung von Rollen ist eine wirksame Möglichkeit zur Intervention, da Unterricht aus Kommunikationen besteht und Kommunikation zwischen Rollen stattfindet. Ändert sich die Rolle, ändert sich die soziale Struktur.
Rollendefinitionen ermöglichen im pädagogischen Bereich das Personalisieren von Verantwortung, im fachdidaktischen können Inhalte klarer dargestellt werden. Hier ist die Theaterpädagogik ein starkes Hilfsmittel.
Die „Bühne“ ist der Ort der Aufmerksamkeit. Wahrnehmung ist die Voraussetzung für Wissenskonstruktionen, daher kommt der „Bühne“ als Ort der Aufmerksamkeit bei der Unterrichtsgestaltung eine hohe Bedeutung zu. Hier kann der Lehrer einen Fokus setzen oder diesen Bewusst zerstören. Gestaltgesetze stellen eine Art „Grammatik der Konstruktion“ dar.
Mit „Rolle und Bühne“ beschreiben zusammen *die* zentrale Umgebung des Lernenden und sind daher ein sehr mächtiges Mittel zur Gestaltung von Lernumgebungen.

Kapitel 4 Nonverbale Kommunikationssysteme und „stille“ Feedbackschleifen

4.1 Unterricht als soziales System

Unterricht wird im Folgenden als ein soziales System gesehen, dessen Elemente Kommunikationen sind. *„Das heißt, die Elemente sozialer Systeme sind (…) nicht irgendwelche materiellen Einheiten, sondern Ereignisse, vergleichbar den Spielzügen eines Spiels, den Bruchstücken einer Konversation: ein gesprochener Satz und ein Kopfnicken als Ausdruck des Verstehens.“* (Simon 2013a: 88). In dieser Modellierung von Unterricht („Unterricht ist Kommunikation“) besteht dieser nicht aus Schülern und Lehrer, sondern aus Kommunikationen. Die beteiligten Bewusstseinssysteme stellen die Umwelt des sozialen Systems dar, die sich aufgrund der Kommunikation anpassen bzw. genauer sich in ihrer strukturellen Kopplung gegenseitig irritieren und somit eine Koevolution durchlaufen (vgl. die strukturelle Kopplung in Abschnitt 1.3.6 zwischen Geist und Körper).

In dieser sehr abstrakten Sichtweise wird deutlich, wie essentiell Kommunikation ist. Die im Folgenden aufgezeigten *nonverbale Kommunikationssysteme* wirken sich in doppelter Hinsicht auf das soziale System Unterricht aus: (1) Der Lehrende erhält während er spricht zeitgleich ein nonverbales Feedback. Senden und Empfangen ist somit gleichzeitig möglich, was wiederum *„Resonanz im Klassenzimmer“* (Rosa & Endres 2016) ermöglicht. (2) Alle Beteiligten können sich mittels Nonverbalität *gleichzeitig* äußern und können wahrnehmen, was jeder Einzelne äußert.

Da die „Elemente“ sozialer Systeme Kommunikationen sind, also die „Spielzüge“ des Unterrichts darstellen, baut sich durch Nonverbalität ein völlig anderes soziales System auf. Damit wird Unterricht (Kommunikationsereignisse) elementar verändert.

Verbal kann immer nur ein Kommunikationsteilnehmer sich äußern. Das hat rein physikalische Gründe: das Ohr nimmt Druckschwankungen der Luft auf und das ist ein eindimensionaler Kommunikationskanal. Sobald einer der Anwesenden spricht ist dieser „voll“. Optisch lassen sich hingegen zwei Dinge gleichzeitig wahrnehmen.

4.1.1 Nonverbale Feedbackschleifen

Der Sprecher erhält unmittelbar (am Gesichtsausdruck seines Zuhörers) eine Rückmeldung über dessen Verwirrungszustand. Für das gesprochene (symbolische) Wort ist die (enaktive) Nonverbalität die Umwelt. Ohne Kontext (Umwelt) geht jedoch der Bezug und die Deutungsklarheit weitgehend verloren. Das ist ein Grund für die Bedeutung des persönlichen Gespräches. Am Telefon fehlt dem Sender die optische Rückkopplung (Mimik und Gestik), in einer E-Mail gehen weiter der Klang der Stimme, Intonation und Artikulation und die Pausen verloren. Während am Telefon das Gespräch in Echtzeit verläuft, weiß der Empfänger nicht, wie lange der Sender gebraucht hat, um einen Abschnitt zu verfassen. Ein handgeschriebener Brief speichert im Vergleich mehr Informationen über das Schrift*bild*, da sich am Bild der Schrift erahnen lässt, ob radiert oder durchgestrichen wurde, ob mit Zeit oder in Hektik geschrieben wurde.

Rückmeldungen in Echtzeit
Über den Gesichtsausdruck des Empfängers erhält der Sender fortlaufend Informationen, <u>ohne</u> dass das Gespräch ins Stocken gerät. Verständnis wird nonverbal sichtbar gemacht. Der nonverbale Gesichtsausdruck des Empfängers entspricht der nonverbalen Schülerhandlung im Unterricht. Der Unterricht (als unterrichtliche Kommunikation verstanden) muss nicht stocken, nonverbal kann der Lehrer laufend Rückmeldungen erhalten.
Ein Beispiel: Schreibt der Schüler eine Klassenarbeit, so ist der Informationsgehalt weit geringer als im persönlichen Gespräch (s. o.). Beobachtet man Schüler hingegen beim Handeln, z. B. während er mit Fischertechnik ein Exponat aufbaut, so sieht man unmittelbar (in Echtzeit) wie die Schüler mit den Dingen umgehen. Durch das (enaktive) Handeln erhält der Lehrer stets nonverbale Rückmeldungen während des Unterrichts. Diese Rückmeldung ist vielfach differenzierter, als wenn die Schüler ein Aufgabenblatt (symbolisch bzw. formal) bearbeiten. Im Abstand von 10 Metern lässt sich mit einem Blick erfassen, wie weit die Schüler (mit ihrem Exponat) sind, das ist bei einer Klassenarbeit unmöglich. Nonverbalität macht Unterrichtsgeschehen in Echtzeit sichtbar.

4.1.2 Information im System – alle sehen alles

Dadurch, dass <u>alle</u> Schüler sich gleichzeitig äußern können – verbal würde das ein Chaos bedeuten (!) – kann prinzipiell jede Äußerung von allen im Unterricht wahrgenommen werden. Damit entsteht nicht nur eine Interaktion Lehrer-Schüler oder Schüler-Schüler, sondern das ganze System liegt offen. Am deutlichsten wird das bei den Aufstellungsarbeiten in Abschnitt 4.3, wo mithilfe der Ortskodierung der Schüler über seinen Standort eine (nonverbale) Äußerung tätigt. Einerseits sieht man die Verteilung der verschiedenen Standpunkte als Gesamtheit im Raum (im Sinne eines Meinungsbildes), auf der anderen Seite ist jeder Standpunkt adressiert: Man weiß über jeden Einzelnen, welchen Standpunkt er vertritt. All das kann gleichzeitig nur nonverbal geschehen. Verbal ist Gleichzeitigkeit nicht möglich.

4.1.3 Drei Möglichkeiten von Nonverbalität

Ich teile im Folgenden die Möglichkeiten nonverbaler Feedbackschlaufen systematisch in drei Kategorien ein. Die Möglichkeiten der körperlichen Ausdrucksweise habe ich vom Theater gelernt[28].

(1) Über den (eigenen) Körper
(2) Über den Ort (der Körper in seiner Umwelt)
(3) Über das Material (Stellvertreter)

In Teil II werden vor allem (2) und (3) eine große Bedeutung zukommen. Für gewöhnlich findet im Unterricht das „Melden“, welches in den Bereich (1) gehört, die häufigste Anwendung. Die enthaltene Äußerung beschränkt sich auf den Inhalt: „ich möchte jetzt etwas sagen“. Die folgenden Abschnitte zeigen den Möglichkeitsraum nonverbaler Äußerungen.

4.2 Äußerungen über den Körper

4.2.1 Ja-Nein-Äußerungen

Abb. 75: Entscheidung

Entscheidungsfindung (ich bin bereit, ich bin noch nicht bereit)
„Wer sich Entschieden hat, verschränkt zum Zeichen die Arme. Es geht weiter, wenn alle Arme verschränkt sind.“
Mit dieser Anweisung wird sichergestellt, dass sich jeder Schüler ohne Einfluss der anderen entscheiden kann.
Beispiele: Welches Gedicht gefällt Dir am meisten? Welche Meinung hast Du zu … (ein aktuelles Thema einfügen)? Wie viel Hausaufgabe findest Du pro Tag gut? Sollte Mathematik in der Schule unterrichtet werden? Was ist Dein Lieblingsbuch?
Wenn alle Arme verschränkt sind, darf man sich äußern. Nach dem Redebeitrag wird die Verschränkung geöffnet.
Bemerkung: Von Vorteil ist es, wenn die nonverbale Äußerung mit dem Nachrichteninhalt übereinstimmt (Arme öffnen = sich verbal öffnen), wenn also das nonverbale dem verbalen entspricht, ansonsten besteht die Gefahr von Inkongruenz (verbale und nonverbale Botschaften widersprechen sich.)

---

[28] Ich absolvierte eine mehrjährige Ausbildung zum Theaterpädagogen (Bundesverband Theaterpädagogik) in der Landesarbeitsgemeinschaft (LAG) in Reutlingen.
Bemerkung: Es erscheint mir wichtig zu betonen, dass mein Wissen darüber nicht aus der schulischen Wirklichkeit stammt. Die theaterpädagogische Brille hat mir eine neue Sicht auf Unterricht ermöglicht. Das ist in einem konstruktivistischen Sinne interessant: Erst der Blick vom Theater bzw. von außen (außerhalb der schulischen Wirklichkeit) ermöglicht Strukturbildung. Es ist die Begegnung zweier Welten, welche Strukturen erzeugt.
Ich betone es an dieser Stelle, weil meine Entdeckungen nicht unabhängig von meinen eigenen Erfahrungen gesehen werden kann, es war ein glücklicher Umstand beide Welten miteinander zu verbinden.

Ich bin dafür, ich bin dagegen.

„Wer möchte noch ein weiteres Beispiel? Bitte mit dem Daumen anzeigen."

Ja-Nein-Abfragen können sehr gut mit der „Entscheidungsfindung" bzw. mit dem Arme verschränken kombiniert werden. Die Äußerung ist jetzt nonverbal (durch anzeigen mit dem Daumen).

Abb. 76: Ja-Nein-Aussage

Drehsinn nach links bzw. rechts

Angezeigt wird die Drehachse mit dem Daumen der rechten Hand. Die anderen Finger deuten den Drehsinn an.

Abb. 77: Drehsinn anzeigen

Aufstehen, sitzenbleiben.

„Wer das Beispiel so verstanden hat, dass er es einem anderen erklären kann, steht bitte auf."

Diese Technik kann sehr gut nach der ersten Begegnung mit einer Regel (Kommasetzung, englische Grammatik, Rechengesetze, …) angewendet werden. Wenn knapp die Hälfte der Klasse steht, soll sich jeder der Stehenden einen Sitzenbleiber suchen, dem er die Sache erklären darf. Wer es verstanden hat, steht ebenfalls auf. In den vielen Einzelgesprächen gibt es keinen Fokus mehr, was die Sitzenbleiber nicht auf die Bühne befördert.

Achtung: Es stehen diejenigen auf, die die Sache verstanden haben. Wer aufsteht ist im Fokus (vgl. auch den Abschnitt über die „Bühne" in Abschnitt 3.2.1.1. Als Sitzenbleiber hat man keine große Lust auf das Rampenlicht. Häufig gibt es im Unterricht von Seiten des Lehrers das gutgemeinte Angebot: „Wer es nicht verstanden hat, darf gerne nachfragen." Jedoch äußerst sich der Schüler damit nonverbal zuallererst mit: „Hier bin ich, der, der es nicht kapiert hat. Schaut alle her: Ich habe es immer noch nicht kapiert". Alternativ kann der Lehrer danach fragen, wer die Sache kapiert hat. Da fällt es leichter die Hand zu heben und die Antwort wird vermutlich etwas ehrlicher ausfallen.

4.2.2 Zahlen und Skalen

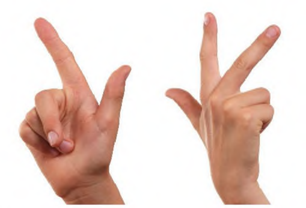


Abb. 78: Zahlen anzeigen

Mit den Fingern können einfach mengenmäßige Antworten gegeben werden. Das linke Foto zeigt „2“, das rechte die „3“.

Beispiele:

- Was ergibt 1 + 1? Was ist die Quadratwurzel aus 9? Was ergibt der Zweierlogarithmus von 8?
- Bitte zeigt an, ob ihr mit Thema Nummer eins, zwei oder drei beginnen möchtet.
- „Wie bedeutsam ist Dir das Thema: Kein Finger (die Faust) bedeutet „Das interessiert mich Null!“, fünf Finger bedeuten „Das Thema ist für extrem relevant bzw. wichtig.“

Abb. 79: Negative Zahlenwerte

Es sind auch Kommazahlen und negative Zahlen möglich. Die Hand auf dem Foto unten links zeigt die Wurzel aus 13 an (ca. 3,5), die rechte „-4“.

Der Kreativität sind keine Grenzen gesetzt. So lassen sich *x*- und *y*-Werte von Funktionen anzeigen oder zweistellige Zahlen im Fünfersystem (Kramer 2017b), gedanklich kann sogar ein Komma zwischen den Händen gesetzt werden. Entscheidend ist, dass die Bedeutung der Äußerung zuvor geklärt wurde.

Bis 20 zählen

„Schätzt ab, wie groß das Klassenzimmer ist. Wer sich entschieden hat, verschränkt die Arme.“ – Wenn alle soweit sind, wird angezeigt: Ein Finger steht für 10 m^2.

Abb. 80: Zahlen über 10

Auf den ersten Blick kann mit Fingern bis 10 gezählt werden. Führt man ein, dass das „X“ Überkreuzen der Arme wie bei den römischen Zahlen eine Zehn darstellt, lässt sich bis 20 zählen. Der Junge auf dem Bild links zeigt die Zahl 13 an, auf dem Bild rechts 17.

Man kann weiter vereinbaren, dass wer mehr als 20 anzeigen möchte mit den Fingern zu blinken beginnt (Hände werden auf und zu gemacht).

Abb. 81: Daumenskala I

Manchmal ist es hilfreich mithilfe einer Skala einen Wert anzeigen zu können. Auf die Frage wie die Klassenarbeit lief kann mittels der Daumenlage recht genau geantwortet haben. Interessanterweise ist in diesem Fall die nonverbale Darstellung häufig genauer als die verbale. So wird auf dem Bild links nach der Aussage „lief nicht so gut“ mit dem Daumen nicht die totale Niederlage angezeigt.

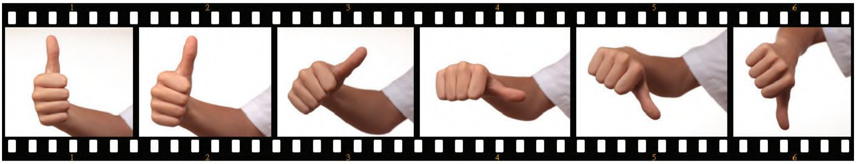


Abb. 82: Daumenskala II

4.2.3 Über darstellendes Spiel

Die Darstellung durch Standbilder ist eine bekannte theaterpädagogische Methode. *„Standbilder sind bildliche Darstellungen von sozialen Situationen, Personen, Konstellationen, Beziehungsstruktuen oder Begriffen. (…) Die Arbeit mit Standbildern ist einfach und schnell zu erlernen. (…)“* (Scheller 2007, S. 59). Wichtig ist die Exaktheit in der Umsetzung. So warnt Scheller: *„Das Bauen von Standbildern ist einfach, verführt aber zur Oberflächlichkeit. Wenn nicht präzise gearbeitet wird, bleiben die Bilder beliebig, es wird nicht erfahrbar, was das Verfahren leisten kann.“* (Scheller 2007, S. 63).

Abb. 83: Schaubilder anzeigen

Schaubilder

Mit dem Körper können Schaubilder gestellt werden. Links wird eine Normalparabel angezeigt, rechts wird ebenfalls eine Parabel angezeigt, bei Darstellung ist der Definitionsbereich (nur negative x-Werte) eingeschränkt.
Mithilfe der Ortskodierung (nächster Abschnitt) lassen sich Schaubilder verschieben.

Abb. 84: Schaubild einer linearen Funktion

Möchte man Schaubilder linearer Funktionen darstellen, so muss zuvor definiert werden, wie die x-Achse verläuft. Am einfachsten wird zur Orientierung ein Achsenkreuz an die Tafel gezeichnet.

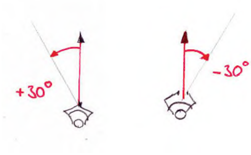


Abb. 85: Winkel anzeigen I

Richtung anzeigen
Man kann ebenfalls Richtungen anzeigen. Ein Beispiel zeigt eine Übung zum Winkelschätzen:
Die Schüler nehmen die Hände zu einem Zeiger zusammen. Eine positive Gradzahl bedeutet eine Linksdrehung.

Abb. 86: Winkel anzeigen II

Zu Beginn zeigen alle Schüler senkrecht zur Tafelwand. Dann werden die Augen geschlossen und der Lehrer gibt eine Winkelweite, z. B. +30° an. Jetzt müssten sich alle Schüler etwas nach links drehen. Danach folgen weitere Angaben. Zum Schluss werden die Augen geöffnet und jeder kann kontrollieren ob er richtig steht.

Abb. 87: Koordinatensystem I

Abb. 88: Koordinatensystem II

Rollenbelegungen für die Hand
Eine Hand kann bestimmte Rollen einnehmen. So kann Sie zur einer Ebene (flache Hand) werden oder zu einem (rechtshändigen) Koordinatensystem. Zwei mögliche Übungen:

- Gegenseitiges Abfragen: Der Prüfer zeigt mit der rechten Hand ein Koordinatensystem an und gibt eine Ebenengleichung vor, z. B. $2x + 3y + 5z = 0$. Der Prüfling markiert mit seiner flachen Hand die Lage der Ebene.
- Der Mächtige zeigt mit der rechten Hand ein Koordinatensystem, der Untergebene hat die Aufgabe die Koordinaten seines Kopfes (bzw. seiner Nase) konstant zu halten. Gedanklich ist die Nasenspitze fest mit dem Koordinatensystem verknüpft. Geht der Mächtige einen Schritt vor, so geht auch der Untergebene in dieselbe Richtung. Auf diese Weise führt der Mächtige den Untergebenen durch den Raum. Anschließend Rollenwechsel.

Bemerkung: Im zweiten Teil erfährt der Schüler im Spiel das er die Macht hat, das Koordinatensystem frei zu wählen.

4.2.4 „Zerstörung“ der Bühne

Geben alle Schüler gleichzeitig (nonverbal) eine Äußerung von sich, etwa durch das Anzeigen einer bestimmten Fingerzahl, so gibt es keinen Fokus mehr. Wenn alle auf der „Bühne“ sind, dann ist diese so groß, dass keine Bühnenwirkung mehr existiert.

Die Bühne ist gleichsam „zerstört". Da nur jemand bloßgestellt werden kann, der auf einer Bühne ist, ist die Gefahr weitgehendst gebannt. Ebenso kann sich auch niemand besonders präsentieren. Beide Aspekte der Selbstkundgabe (Bloßstellung, Selbstdarstellung) sind verschwunden.
Für Abfragen oder Antworten braucht es keine Bühne. Der Lehrer kann prinzipiell von allen Schülern optisch eine Antwort erhalten. Damit werden alle Schüler abgefragt und keiner ist in Gefahr bloßgestellt zu werden. Üblicherweise geschieht im Unterricht gegenteiliges: Ein Schüler wird gefragt, damit steht er im Fokus (bzw. auf der Bühne) und die Gefahr einer Bloßstellung ist hoch.

4.3 Äußerungen über den Ort (2)

Die zweite Möglichkeit zu einer nonverbalen Äußerung besteht in der Ortskodierung. Eine Aussage wird über den Standpunkt im Raum vollzogen. Bereits bei der Äußerung über den Körper zeigt sich, dass im Gegensatz zu einer verbalen, sich jeder gleichzeitig äußern kann und damit auch prinzipiell jede Äußerung von jedem gesehen werden kann. Die eigene und die fremde Wahrnehmung des Gesehenwerdens werden durch eine räumliche Aufstellung verstärkt. Jeder Schüler bezieht körperlich und geistig Stellung.

4.3.1 Beispiel einer Aufstellungsarbeit im Klassenzimmer: Einführung der Multiplikation

In der in dieser Arbeit beschriebenen Lehrgangsskizze wird die Multiplikation als Operator anschaulich mit folgender Frage eingeführt:
„Wie oft dreht sich der Winker, wenn an der Kurbel einmal gedreht wird?"

Abb. 89: Modell für Multiplikation

Wenn es keine Fragen mehr gibt, soll jeder für sich eine Lösung finden. Das Exponat darf dabei nicht berührt werden, sonst könnte ja im Versuch die Antwort gefunden werden. Nach etwa zwei Minuten Bedenkzeit geben die Schüler Lösungsvorschläge. Der erste Schüler meint z. B., dass „4" die richtige Anzahl sein, und geht mit seiner Meinung in eine Raumecke. Wer sich ebenfalls für „4" entschieden hat folgt ihm. Insgesamt gab es in dieser Klasse drei unterschiedliche Lösungsvorschläge: 4, 6 und 8. Entsprechend verteilten sich die Schüler auf drei verschiedene Raumecken.

Abb. 90: Standpunkte körperlich und geistig einnehmen

Das Ziel der folgenden Diskussion ist, dass sich alle auf eine Raumecke einigen. Es gelten folgende Kommunikationsregeln (vgl. Kramer 2016d, S. 109ff):

(1) Es darf nur der sprechen, der das Modell in der Hand hat. Flüstern und Tuscheln ist nicht erlaubt. Jeder hört dem Sprecher zu. Wer die Regel bricht geht für eine Minute vor die Tür.
(2) Jeder darf jederzeit schweigend seinen eigenen Standpunkt wechseln.
(3) Nach jedem Beitrag übergibt der Redner das Modell einem weiteren Diskussionsteilnehmer aus einer anderen Ecke.
(4) Die Kurbel am Exponat darf nicht gedreht werden. Die Lösung darf nicht haptisch gefunden werden.

Abb. 91: Strukturierte Schülerdiskussion

4.3.2 Spielfelder

Statt „nur“ Ecken oder Orte mit Aussagen zu belegen, kann auch ein „Spielfeld“ verwendet werden. So kann ein Koordinatensystem „bespielt“ werden. Die Schüler nehmen dann die Rolle von Punkten ein (vgl. didaktische Rollenbelegung in Abschnitt

3.4.2). Auf dem Bild links werden die Koordinaten zusätzlich mit den Fingern angezeigt.

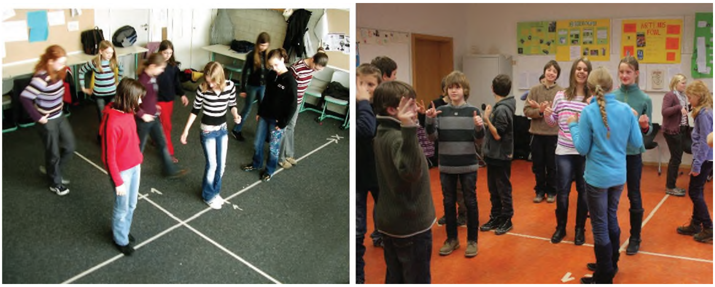


Abb. 92: Schüler als Punkte im Koordinatensystem

4.3.3 Skalen

4.3.3.1 Lineare Skalen

Entlang einer Achse (z. B. Wand) wird eine Skala angelegt, das konkret mit Kreppband erfolgen oder einfach sprachlich festgelegt werden kann. Das Beispiel stammt aus der Wintervorlesung „Didaktik der Mathematik und Analysis“ 2014 in Freiburg. Die Studierenden hatten unabhängig voneinander für eine Klassenarbeit den Erwartungshorizont und die Punkteverteilung festgelegt, anschließend korrigiert und eine Note festgelegt. Da alle dieselbe Klassenarbeit korrigierten, wurde um keinen Austausch untereinander gebeten.

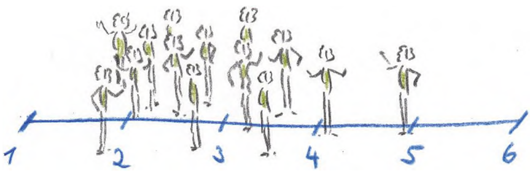


Abb. 93: Lineare Aufstellungsarbeit

Jeder im Raum erkennt unmittelbar die Verteilung. Weiter ist jeder „Eintrag“ „personalisiert“.

4.3.3.2 Logarithmische Skalen

Eine Skala muss nicht linear sein. Gerade bei Schätzungen geht es um Größenordnungen. Hier eigenen sich exponentielle bzw. logarithmische Skalen.

Ein Beispiel: Wäre die Sonne so groß wie eine Kerzenflamme, so würde diese von einem Staubkorn, der Erde, in einem Meter Entfernung umkreist werden. Wie weit wäre in diesem Modell der nächste Stern entfernt?

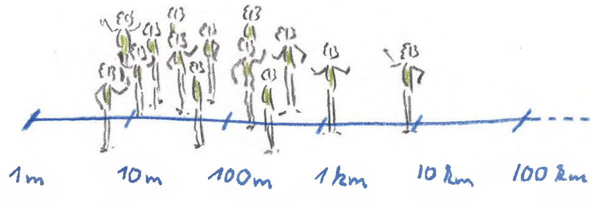


Abb. 94: Exponentielle Skala

4.3.4 Zeitstrahl und Kalender

Die Zeit ist eine eindimensionale Größe und so eignet sich der Zeitstrahl auf natürliche Art und Weise. Auf diese Weise können historische Abläufe abgeschritten werden. Schätzungen über Zeit, Altersverteilung der Gruppe, … können so sichtbar gemacht werden.
Eine besondere Art Zeit darzustellen ist der Jahreskalender. Die Ecken des Raumes werden mit einem Datum versehen und so entsteht beispielsweise ein Geburtstagskalender. Die Frage, wie wahrscheinlich es ist, dass mindestens zwei Personen am selben Tag in der Klasse Geburtstag haben, kann beispielsweise damit illustriert werden (vgl. Kramer 2017b).

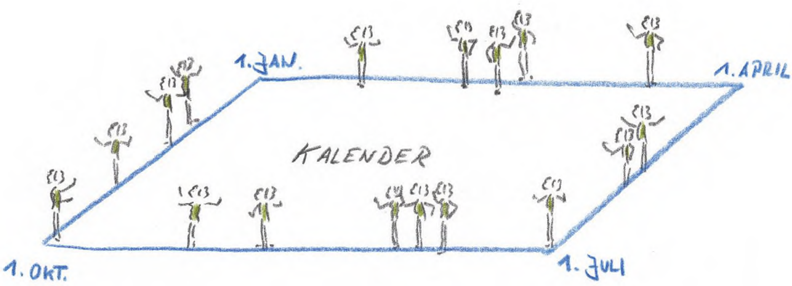


Abb. 95: Kalenderaufstellung

4.3.5 Raumhöhe

Die Höhe kann ebenfalls skaliert werden. Das ist vor allem interessant, wenn der Ort auf der Fläche bereits eine Bedeutung hat und zusätzlich etwas ausgedrückt werden soll. Praktikabel sind sechs Höhenstufen (Kramer 2005, S. 63).

Abb. 96: Skalierung nach der Höhe

4.3.6 Rund- und Lehrgänge

Diese Technik eignet sich gut für komplexe oder längere Erklärungen. Der Lehrer beschreitet einen Lehrgang, indem er in mehreren Etappen Erklärungen oder Hinweise auf den Boden zeichnet.

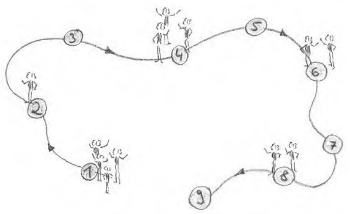


Abb. 97: Lehrgänge

In einer zweiten Phase gehen die Schüler in ihrer individuellen Geschwindigkeit den Lehrgang ab. Der Lehrer erhält so eine Rückmeldung, wo die Schüler „hängenbleiben“. Je mehr Leute sich an einer Station festgebissen haben, desto größer das Problem und desto eher kommen Helfer, die das Problem auflösen.

Ein weiteres Beispiel zeigt das Abschreiten von Lösungen. Dabei wird eine Aufgabe auf den Boden geschrieben und „schrittweise“ gelöst (vgl. Kramer 2017b).

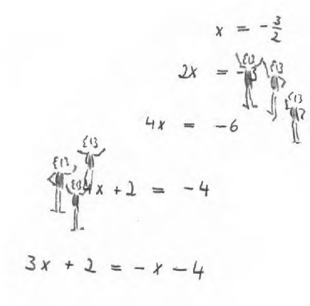


Abb. 98: Abschreiten von Lösungen

4.4 Äußerungen über das Material (3)

Die dritte Möglichkeit einer nonverbalen Äußerung besteht im Material bzw. im Umgang mit dem Material. Durch die Haptik werden gedankliche Konstruktionen teilweise unmittelbar sichtbar.

Im Beispiel erhielten die Schüler die Aufgabe den Term 2 x 3 aufzubauen. Der Lehrer erhält über das Bauwerk des Schülers nicht nur einen Einblick über das Verständnis, sondern auch über den Entwicklungsstand und über die Konzentration (wie sehr die Schüler bei der Sache sind). Und zwar über mehrere Meter hinweg (!), ohne dass er intervenieren (nachfragen) muss bzw. den Prozess der Schüler stört. Die folgenden Fotos zeigen zwei Fehlvorstellungen, die bei der Übung „2 x 3“ aufgetreten sind.

$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1}$ $\qquad\qquad$ $\frac{3}{2}$

Abb. 99: Abfrage über das Material

4.5 Systemischer Blick auf nonverbale Kommunikationssysteme

Die verschiedenen Äußerungen treten miteinander in Interaktion: Jeder entscheidet für sich, nimmt aber gleichzeitig die Entscheidung der anderen wahr (vgl. die Möglichkeit der Verallgemeinerung im Modell von Riemann-Thomann in Abschnitt 2.5.6). Das gilt für alle drei beschriebenen Formen der nonverbalen Kommunikation. Im Beispiel sollen die Schüler abschätzen, wie oft sich das letzte Zahnrad dreht, wenn einmal an der

Kurbel gedreht wird. Der Lehrer hat die Aufmerksamkeit nach dem Anzeigen (ein Finger steht für eine Umdrehung) auf die Gruppe gelenkt. Auf dem Foto rechts schauen sich die Schüler gegenseitig ihre Vermutungen an.

Abb. 100: Gegenseitige Wahrnehmung

4.6 Fazit

Mittels nonverbaler Kommunikation ist es möglich, dass alle Schüler im Raum sich gleichzeitig äußern können. Dabei sind alle Schüler gleichzeitig Sender *und* Empfänger. Weiter kann die „Bühne“ so stark vergrößert werden, dass alle Unterrichts-Teilnehmer abgefragt werden können und dabei eine Bloßstellung unwahrscheinlich wird. Das soziale System Unterricht besteht aus Kommunikationen. Werden diese elementaren Einheiten verändert, ändert sich Unterricht grundlegend.

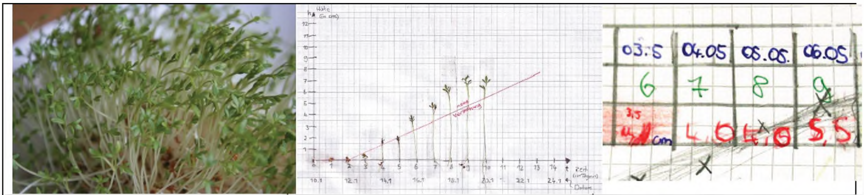
Kapitel 5 Material in Lernumgebungen

5.1 Lernen mit Körper und Geist

Die beiden autopoietischen Systeme „Körper“ und „Geist“ sind strukturell miteinander gekoppelt (vgl. Abschnitt 1.3.6). Das eine System irritiert das andere. Damit ist Lehren auch immer ein Lehren auf verschiedenen Repräsentationsebenen.

5.1.1 EIS-Prinzip

Bruner unterscheidet drei Repräsentationsebenen in der Vermittlung (Bruner, Oliver & Greenfield 1971): die **e**naktive (handelnde), die **i**konische (bildhafte) und die **s**ymbolische (sprachliche bzw. formale). Die verschiedenen Repräsentationsebenen stehen dabei in keinem hierarchischen Verhältnis.
Ein typisches Beispiel zeigt „Wachstum von Kresse“ (Kramer 2016b, S. 34ff): Über einen Zeitraum von zwei Wochen wird das Wachstum von Kresse beobachtet und als Graph dargestellt.



Enaktiv (handelnd): Kressewachstum zu Hause	**I**konisch (bildhaft): Kressepflanzen gepresst im Heft	**S**ymbolisch (formal): Tabelleneinträge

Abb. 101: Wachstum von Kresse

Die verschiedenen Ebenen sind mit Hilfe gestaltpsychologischer Gesetze miteinander verknüpft. So ist z. B. die ikonische Ebene mit der symbolischen über das Gesetz der Ähnlichkeit (vgl. Abschnitt 3.3.1) verbunden. Da das Ernten eines Pflänzchens mit dem Einkleben und dem Tabelleneintrag zeitlich zusammenfällt, werden alle drei (!) Ebenen mit dem Gesetz der Gleichzeitigkeit zusätzlich verknüpft. Dingen, die gleichzeitig geschehen, wird unmittelbar ein Zusammenhang unterstellt (vgl. Abschnitte 3.3.3 und 5.1.3).

5.1.2 Verschränkung von körperlichem und geistigem Lernen

Ein Aspekt des EIS-Prinzips ist die Verschränkung von körperlichem (enaktiven) und geistigem (symbolischen) Lernen. So kann der Mensch enaktiv etwas begreifen indem er handelt, und er kann abstrakte Begriffe verstehen, indem er diese in sein (bisheriges) Wissenskonstrukt einordnet. *„Begreifen um zu begreifen“* (Duff 2018). Das Ziel ist

dabei nicht die Handlung als solche. Vielmehr geht es darum Handeln und Denken miteinander zu verschränken. Das Ziel ist ein ständiges Hin und Her zwischen beiden Welten. *„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden.“* (Malle 2004, S. 4).
Dabei sind *„Zahlen und Formeln allein keine Ausweise der Exaktheit und Wissenschaftlichkeit, denn man kann sie auch einsichtslos gebrauchen. Was man ohne sie verständlich machen kann, hat man besser verstanden als das, wozu man unnötigerweise ihr schweres Geschütz auffährt.“* (Wagenschein 1971).

So ist das „Begreifen“ von Algebra etwas anderes als das formale bzw. blinde Anwenden von Rechengesetzen. Die Nachfrage *„was ergibt* $\frac{3}{0}$*“* in neunten und zwölften Klassen am Uhland Gymnasium Tübingen (2011), wurde „juristisch“ beantwortet: *„Das darf man nicht!“* Sobald die Formalitäten beiseitegelassen werden, wenn also nicht nach formal-regelhaftem Anwenden sondern nach Strukturerkennung gefragt wird, scheitern viele Schüler. Aber wer kein Modell zur Verfügung hat, wer keine Struktur erlernt hat, der hat auch keine Chance bei einer echten mathematischen Fragestellung, sondern kann lediglich wie eine Maschine Rechnungen ausführen.

5.1.2.1 Reihenfolge der Repräsentationsformen in der Vermittlung

Während bei einer Einführung z. B. in Klasse 6 häufig zuerst eine konkrete, mengenmäßige Vorstellung geschaffen wird, um schließlich formale Gesetze abzuleiten (von „enaktiv“ nach „symbolisch“), kann man in höheren Klassen umgekehrt vorgehen. Sind die formalen Rechenregeln bekannt, soll auf Konkretes modelliert werden.
Ein Unterrichtsthema (hier die Bruchrechnung) kann gehirngerecht durch ein konsequentes Nebeneinander von formaler und handelnder Repräsentationseben unterrichtet werden. Kennzeichnend für diese Wissenskonstruktion ist das ständige Wechselspiel der Darstellungen.

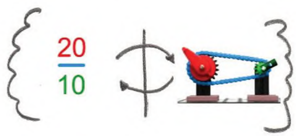


Abb. 102: Verschränkung von Enaktivität und Abstraktion

Theorie und Praxis befinden sich in den beschriebenen Lernumgebungen in einem stetigen Wechselspiel, es ist fast nicht möglich hinterher zu erkennen, wodurch Wissen entstanden ist.[29]

In höheren Klassen steht das formale Regelwerk zur Verfügung, die meisten Schüler können Brüche erweitern und kürzen, addieren und multiplizieren, aber sie verbinden damit keine konkrete Vorstellung. Sie haben häufig (noch) kein Modell zur Verfügung und daher kann es (noch) kein Wechselspiel zwischen Theorie und Praxis geben. Die Gefahr besteht, dass das Gelernte nicht in die Praxis übertragen wird, dass der Schüler wie ein Roboter Prozeduren anwendet ohne den Inhalt zu verstehen. Diese Prozeduren existieren dann nur in einer schulischen Wirklichkeit.

Abb. 103: Fehlende Modellvorstellung

Damit ein vernetztes Wissen entstehen kann, müssen erst Modelle geschaffen werden. Zentral für Wissenskonstruktionen sind Warum-Fragen: „Warum gilt Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner?“ „Warum darf man nicht durch null teilen?“… Die Fragen kleiner Kinder beginnen mit „Warum?“ in ganz natürlicher Art und Weise, sie fragen nach der Struktur einer Sache. Entsprechend wird ein Lehrgang zur Modellierung der Bruchrechnung mit Ketten und Zahnräder auch für höhere Klassen vorgeschlagen: Das bereits vorhandene formale Wissen wird hinterfragt.

5.1.3 „4D-Lernen“

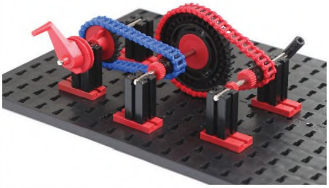
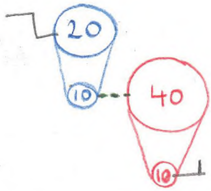
5.1.3.1 Gleichzeitigkeit verschiedener Repräsentationsebenen (4D-Lernen)

Ein und derselbe Sachverhalt kann auf verschiedene Weise präsentiert werden. So kann beispielsweise ein formaler, bildhafter und handelnder Zugang *gleichzeitig* erfolgen. 4D-Lernen ist somit eine Ausweitung des EIS-Prinzips (Bruner, Oliver & Greenfield 1971), die das gestaltpsychologische Gesetz der Gleichzeitigkeit berücksichtigt.

In der Darstellung formaler Rechnungen mittels Fischertechnik geschieht die Vermittlung von formalem und handelndem Zugang *gleichzeitig* in natürlicher Art und Weise. Die Berücksichtigung der verschiedenen Repräsentationsebenen (enaktiv, ikonisch,

[29] Ob zuerst die Praxis und dann die Theorie oder anderes herum ist die bekannte Ei-Huhn- bzw. Huhn-Ei-Problematik. Letztendlich entscheidet sich im Schüler individuell, was den Anstoß zum Wachstumsschub gibt. Für die unterrichtliche Praxis ist es interessanterweise egal, wie Wissen wächst – auch wenn Wachstum ein höchst spannendes und weitgehend unerforschtes Gebiet ist.

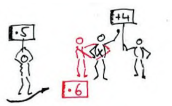
symbolisch) führt nicht zu einem Multitasking, wo unterschiedliche Dinge bearbeitet werden, sondern dazu, dass ein und derselbe unterrichtliche Gegenstand gleichzeitig von verschiedenen Richtungen (Repräsentationsebenen) betrachtet wird.

		$2 \cdot 4$
Getriebe	Konstruktionsplan	Zahl bzw. Term
E (enaktiv)	I (ikonisch)	S (symbolisch)
Gleichzeitige Darstellung der drei Repräsentationsebenen (4D-Lernen)		

Es handelt sich demnach um ein vielkanaliges Lernen: Der Schüler wechselt den Kanal, jedoch nicht das Thema. Es ist sogar so, dass das Material, welches das Thema in den Raum stellt, räumlich fixiert: Das geistige Abschweifen wird durch einen materiellen Anker (Fischertechnik) unwahrscheinlicher.

5.1.3.2 Weitere Beispiele für vielkanaliges Lernen

- Das Zusammenspiel von (ikonischen) Zeichnen des Schaubildes, der (enaktive) Bewegungsablauf und das (symbolische) kommentieren des konkreten Handlungsablaufes mittels eines Reporters.
- Ein Term wird gleichzeitig handelnd und formal dargestellt (vgl. Kramer 2017b, Abschnitt 6.9):



$[6 \cdot x + 4] \cdot 5$

Abb. 104: Termdarstellung

- Während der realen Drehbewegung des Schattens, schreibt der Lehrer *gleichzeitig* die formale Interpretation für konkrete Winkel an die Tafel (Kramer 2016c):

$$sin(-45°) = -sin(+45°), \ldots$$

Abb. 105: Winkelfunktionen

5.1.3.3 Vieldimensionales Lernen

Es lassen sich weitere gestaltpsychologische Gesetze, etwa das „Gesetz der Nähe“ oder das „Gesetz der Ähnlichkeit“ nutzen, um somit ein fünf-, sechs- oder vieldimensionales Lernen zu ermöglichen. Etwa können handelnde Schüler farblich kodiert ausgewählt werden, indem die zugehörige symbolische Darstellung an der Tafel entsprechend gewählt wird. Ein Beispiel für ein fünfdimensionales Lernen (E + I + S + Gleichzeitigkeit + Ähnlichkeit) zeigt die Übung *„Der Weg einer Ameise oder Zeit-Weg-Diagramme“* (Kramer 2016b). Hier wird ein Schaubild zu zweit gezeichnet: Einer übernimmt die Rolle der Zeit (grüne Zeitachse) der andere die Rolle des Weges (rote Wegachse). Entsprechend der Rollen tragen die Schüler dieselbe T-Shirt-Farbe.

5.2 Wirkung des Materials

5.2.1 „Äußerung“ des Materials

Material äußert sich nicht in dem Sinne, wie Personen sich äußern. Das Material ist vielmehr eine Art Spiegel der Vergangenheit. Der Betrachter erinnert sich (Innerung) an die Vorgeschichte, genauer: Seine Wirklichkeitskonstruktion, welche durch die individuelle Geschichte geprägt wurde bzw. gewachsen ist, gibt dem Gegenstand seine Bedeutung bzw. Wirkung Somit „spricht“ der Betrachter über den Gegenstand mit sich selbst: Man sieht eine Schere und ein Blatt Papier und denkt an schneiden (vgl. Abschnitt 2.4.1). Eventuelle Außerirdische mit einer anderen Sozialisierung, würden vielleicht die Schere als Nahrung und das Papier als Teller betrachten.
Somit entscheidet die (individuelle) Geschichtlichkeit des einzelnen Schülers über die Wirkung des Materials. Anders formuliert: Auf jeden Schüler in der Klasse äußert sich das Material verschieden.

5.2.1.1 Denken als Abhängigkeit von der individuellen Vorgeschichte

Mitunter ist die Vorgeschichte aller Beobachter (Schüler) so ähnlich, dass fast alle Konstruktionen gleich verlaufen. Es scheint, als könnte man ein bestimmtes Denken aufzwingen bzw. diktieren: Etwa „schreiben“, „schneiden“ oder „anzünden“:

Abb. 106: Vorgeschichte und Konstruktion

Der Zuschauer, der Schüler scheint beim Anblick der oberen Bilder nichts anderes als „schreiben“, „schneiden“ und „anzünden“ denken zu können. Der Leidensweg des Papiers ist vom Kontext, seiner Umgebung (Bleistift, Schere, Zündhölzer) abhängig. Wenn sich „schreiben“, „schneiden“ oder „anzünden“ (sehr wahrscheinlich) unmittelbar vermitteln lässt, sollten sich dann nicht auch komplexere Themen ins Gehirn diktieren lassen? Auch abstrakte Dinge wie z. B. ein Grenzwert? Die Addition zweier Zahlen? Integral- und Differentialrechnung?

Abb. 107: Assoziation

Mit Assoziationen zu arbeiten ist ein sehr starkes Werkzeug und der Lehrer, der sich der Wirkung bewusst ist, wird klarer unterrichten können. Allerdings lassen sich komplexe Themen wie Integral- und Differentialrechnung nicht allein durch assoziieren vermitteln. Zwei Gründe sprechen dagegen:

5.2.1.2 Uneindeutigkeit der Assoziation durch Vorerfahrung

Der Mensch ist keine triviale Maschine (vgl. Abschnitt 1.2). Es kommt auf die Vorerfahrung des Betrachters an. Die obigen Beispiele funktionieren wenn die Beobachter in einem gemeinsamen Kulturkreis aufgewachsen sind, wo sie unzählige Male gesehen haben, dass man mit einem Stift schreiben, mit einer Schere schneiden und mit Streichhölzern ein Papier anbrennen kann. Die Bilder docken unmittelbar an ihrer Erfahrung an. Wenn „nur“ Schere und Papier auf der Bühne sind, ist es sehr wahrscheinlich – zumindest wenn die Beobachter dieselbe kulturelle Bildung durchlaufen haben

– „Schneiden von Papier“ zu konstruieren. Mit weiteren Gegenständen wird der Interpretationsspielraum größer und die Konstruktionen der Beobachter individueller.

Weitere Beispiele
Wenn der Lehrer eine Kerze im Unterricht anzündet, dann besteht eine hohe Wahrscheinlichkeit, dass sich Schüler an Geburtstage, Weihnachten, andere Festlichkeiten oder schöne Momente erinnern.
Es ist nicht möglich, „einfach so“ eine Kerze im Unterricht anzuzünden. Material beeinflusst unsere Emotionen. Wenn der Physiklehrer ein Katzenfell im Unterricht an einem Kunststoffstab reibt, um damit Ladungstrennung aufzuzeigen, dann denken einige Schüler nicht an positive und negative Ladungsträger, sondern an die tote Katze – ob der Lehrer das will oder nicht. Professionelle Werbung und Film und Theater arbeiten intensiv mit Assoziationen: Wenn ein Apfel auf die Bühne liegt, dann ist – ob der Regisseur will oder nicht – „Adam und Eva“, „der Sündenfall“ und „kontrolliert biologischer Anbau“ mit auf dem Tisch.

5.2.2 Selbstbewertung durch das selbsterschaffene Bauwerk

Die Begegnung mit dem realen Material entspricht der Begehung des Wissensgebietes (vgl. Abschnitt 1.5.2). Die Bewertung über die eigene Konstruktion bleibt beim Schüler selbst. Das Material an sich ist einfach da, erst der Schüler konstruiert sich (genauer sein Bewusstseinssystem) eine Bewertung (vgl. Abschnitt 2.3.3 zur „Bedeutung des Materials im Kommunikationsprozeß“). Das hat eine unterrichtliche Konsequenz: Der Lehrer wird in der konkreten Situtation zum Helfer, zum Berater, zum Coach – statt zum Bewerter (vgl. „Rolle des Lehrers“ in Abschnitt 2.5.3.2).

5.2.3 Pädagogische Wirkung des Materials „Spielzeug“

Fischertechnik ist Spielzeug. Daher ist die Vorgeschichte des Schülers mit „Spielzeug“ wahrscheinlich positiv belegt. Die positive Erfahrung ist allerdings lediglich wahrscheinlich, aber nicht zwingend (vgl. Abschnitt 5.2.1). So könnte es sein, dass ein Kind unter diesem Material gelitten hat, vielleicht deswegen, weil es ihm von den Eltern „zwangsverordnet“ und etwas sehnlichst Erwünschtes vorenthalten wurde. Das ist nicht wahrscheinlich, aber möglich. Entscheidend ist: Der Lehrer weiß nicht, was für Gedanken das Material im einzelnen Schüler bewirkt und dennoch hat es unmittelbar eine Auswirkung auf den Unterricht.

Rollenbruch: Spielzeug im Unterricht
Mit dem Spielzeug Fischertechnik geschieht ein Rollenbruch. Für gewöhnlich hat Spielzeug nichts im Unterricht verloren, auch nicht im Mathematikunterricht. Hier verknüpft das Material Alltag und Schule. Mathematik verlässt mit Ketten und Zahnrädern das Klassenzimmer.

5.3 Didaktische Wirkung des Materials

5.3.1 Fächerübergreifende Wirkung

Material ist Teil der Lernumgebung und damit prinzipiell fächerübergreifend. Das Beispiel „Kerze“ wurde in Abschnitt 1.6.4.4 ausführlich behandelt. Hier nun der Bezug zum Material Fischertechnik. Es verknüpft drei „Buchstaben“ von MINT: Mathematik, Naturwissenschaft und Technik. Dass das Fachgebiet Technik eine Rolle spielt ist offensichtlich. Naturwissenschaft kommt nur bedingt zum Ausdruck, z. B. in der Reibung oder bei der Hintereinanderschaltung vieler Zahnräder („exponentielles Wachstum“). Weiter kommt dem Zahnrad eine kulturelle Bedeutung zu. Steht es doch als Symbol für die Maschine schlechthin.

5.3.2 Binnendifferenzierende Wirkung

Reale Materialien lassen sich beliebig tief erforschen. Die Fragestellung hört nie auf, man kann es immer noch besser, noch geschickter und noch passender machen. Jedes gelöste Problem bekommt Kinderprobleme. Das Prinzip der Anschlussfähigkeit (vgl. Luhmann in Abschnitt 1.6.1.2) gilt auch für die Forschung. Ganz anders verhält es sich mit „unechten“ Materialen wie z. B. Schulbücher. Ist dort ein Problem gelöst, stellt sich dadurch kein anschließendes.
Das Material selbst gibt dem Schüler die Möglichkeit der eigenen Gestaltung. Je nach seiner internen Entwicklung wird er komplexere oder einfache Lösungen finden. Die Lösung gestaltet sich nach seinen eigenen internen (Denk-)Strukturen. Das ist die Grundidee von offenen Aufgabestellungen im Unterricht. Die Aufgaben geben Gestaltungsraum. Bei dem Material Fischertechnik in den vorgestellten Lernumgebungen ist das offensichtlich.
Marion Kessler schreibt in ihrer Unterrichtsdokumentation: *„Während die schwächsten Schüler das simple, einführende Beispiel nachbauen und damit ausreichend gefördert werden, baut der Großteil der Klasse ein ähnliches Beispiel, bei dem einzelne Räder oder deren Reihenfolge ausgetauscht werden. Für sehr starke Gruppen, die schnell fertig sind, besteht die Möglichkeit, die Aufgabe zu erweitern und beispielsweise bei einer Multiplikationsaufgabe einen dritten Bruch zu multiplizieren. Das Material bietet immer die Möglichkeit, die Aufgabe auszuweiten oder genauer zu untersuchen. Dadurch hat der Lehrer keinen zusätzlichen Aufwand, und trotzdem kann jede Gruppe*

auf ihrem Leistungsstand in einer streng vorgegebenen Zeit arbeiten. Die verschiedenen Niveaus sind vom Lehrer in einem kurzen Blick auf das Bauwerk zu erfassen." (Kessler 2016, S. 11).

5.3.3 Mit Material lassen sich Daten erzeugen

Es gilt allgemein beim Forschen, dass der Forscher (Empfänger) entscheidet, welche Daten für ihn interessant sind. Dabei kann unter dem Begriff „Forscher" ein einzelner Mensch, eine Abteilung oder ein ganzes Institut verstanden werden. Immer trifft das System selbst eine Auswahl bzw. (er-)schafft Informationen.

5.3.3.1 Beispiel zur Datengenerierung

Ein Beispiel für das Forschen im Unterricht bzw. des Generierens von Informationen ist bereits in der skizzierten Übung über die Aufstellungsarbeit in Abschnitt 4.3.1 enthalten. In diesem Abschnitt liegt der Fokus nicht auf dem Ermöglichen einer Diskussion bzw. dem Einnehmen verschiedener Standpunkte im Raum, sondern auf der Konstruktion von Informationen aus einem gegebenen Material.
Der Lehrer stellt folgenden Forschungsauftrag: *„Wie oft dreht sich der Winker, wenn an der Kurbel einmal gedreht wird?"*
Die Schüler dürfen Fragen an das Exponat stellen und das Material „gibt Antworten", etwa in dem ein Schüler selbst mit einem Maßband Daten generiert oder dass indirekt der Lehrer Fragen nach seinen Möglichkeiten beantwortet.
Aus konkretem Material, wie etwa das hier verwendete Exponat „2 x 4", kann beliebig viel Informationen erzeugt werden, einen Teil lässt sich durch den Lehrer oder einen Zollstock oder durch andere Messinstrumente generieren, ein anderer Teil bleibt im Verborgenen. So ist es unwahrscheinlich, dass der Lehrer den verwendeten Kunststoff, den Reibungskoeffizient zwischen Kurbel und Metallstange, usw. kennt. Für die Lösung der Aufgabe sind diese Daten für den Lehrer (!) wahrscheinlich nicht notwendig. Und es herrscht darüber auch weitestgehend eine gemeinsame Sichtweise zwischen Schülern und Lehrer. So habe ich nie erlebt, dass ein Schüler nach Farbe und Kunststoff fragt.
Typische Fragen (wie sie etwa die beiden sechsten Klassen in der Französischen Schule gestellt wurden) sind:

- Wie viele Zähne haben die einzelnen Zahnräder?
- Wie lange ist die Kette?
- Was ist der Durchmesser der Zahnräder?
- Welche Räder sind beweglich?
- ...

Das Foto zeigt die Zahnräder ohne Ketten, da diese zur Längenmessung entfernt wurden.

Abb. 108: Datenerzeugung mit dem Material

Das Material beantwortet indirekt die Fragen, d. h. indem Messungen vorgenommen und damit Daten erstellt werden. Damit unterscheidet es sich deutlich von einem Arbeitsblatt. Hier entscheidet ein fremdes Bewusstseinssystem (der Sender bzw. der Lehrer), welche Daten auf dem Blatt stehen. Das Material ist nicht in der Lage den Forscher „hereinzulegen“ oder auf die falsche Fährte zu locken. Es kann nicht gemein und hinterhältig sein, schlichtweg deswegen, weil es *kein* Bewusstsein hat. Alle Vorwürfe dem Material gegenüber ergeben keinen Sinn, da es ohne Bewusstsein keine Verantwortung übernehmen kann (vgl. 2.3.3). Das Material handelt nicht, es denkt nicht, es will nicht und es verfolgt keine Absicht. Ganz anders als ein Lehrer, der auf einem Arbeitsblatt Daten zur Verfügung stellt. Das Exponat (das Material) ist einfach da, es gibt keinen „Schuldigen“.

5.4 Gestaltung von Lernumgebungen durch Material

5.4.1 Appellcharakter des Materials

Material besitzt einen appellierender Charakter. Das verwendete Spielzeug „Fischertechnik“ möchte sofort in die Hand genommen und „begriffen“ werden. Der Appell ist so stark, dass dieser häufig als „Trieb“ oder „Spieltrieb“ bezeichnet wird. Es fällt vielen Kindern schwer, die Dinge nicht eigenständig zu begreifen (Gray 2015). Der Appell wirkt umso stärker, je näher das Material ist. Wird Material ausgegeben, kommen die autopoietischen Systeme (Körper und Geist des Schülers) damit in Kontakt und beginnen automatisch mit Forschung und Spiel.
Die Kenntnis des Appellcharakters ist für den Unterrichtenden wichtig, ansonsten könnte der natürliche Spieltrieb als ungehöriges Verhalten gesehen werden. Wenn der Lehrer etwas erklären möchte, ist es sinnvoll, dies vor der Materialausgabe zu tun, ansonsten wird das Kind sich mit dem beschäftigen, was vor ihm ist. Es ist im doppelt näher. Erstens ist das Begreifbare weniger abstrakt als Worte, zweitens ist es räumlich näher.

5.4.2 Gestaltung von Lernumgebungen

Material besitzt einen großen Einfluss auf die Lernumgebung (z. B. Höhenbestimmung eines Baumes). Es ändert den Blick auf die Landschaft der Lernumgebung. Mit einem Zollstock ändert sich die Sichtweise und es werden andere Daten generiert, als wenn kein Messgerät vorhanden wäre. Im Modell ändert sich mit dem Material der Rahmen im Landschaftsmodell (vgl. Abschnitt 2.5.2.1).

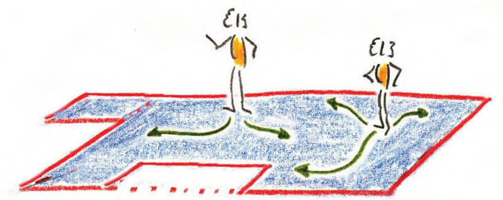


Abb. 109: Einfluss des Materials auf die Lernumgebung

Der Lehrer kann somit die Lernumgebung gestalten. Es gilt dabei jedoch zu bemerken, dass jeder Schüler prinzipiell seine eigene individuelle Lernumgebung erschafft, je nach Vorgeschichte wird er Materialien (z. B. Messgeräte) anders einsetzen. Es ist klar, *„daß nicht alle Beobachter durch die gleichen physikalischen Sachverhalten zu einem gleichen Weltbild geführt werden, es sei denn, ihre linguistischen Hintergründe sind ähnlich oder können in irgendeiner Weise auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden (be calibratetd).“* (Whorf 2008, S. 12).

Auch hier kann vom Sender nicht sichergestellt werden, was der Zollstock beim Empfänger bewirkt oder was er damit tun soll. Dennoch kann er klare Anregungen geben. Fragt man danach, welche Daten vom Lernenden konstruiert werden, ist es natürlich wichtig, um welches Material es sich handelt: Geodreieck oder Zollstock, zusätzlich eine Schnur … Das ist die sichtbare Seite des Materials. Die „unsichtbare“ Seite erscheint im Umgang mit dem sozialen System Unterricht von hoher Bedeutung. Während es für eine triviale Maschine keinen Unterschied macht, von wem das Material stammt, macht das für autopoetische Systeme (= nicht-triviale Maschinen) einen Unterschied. Die folgenden Fragen geben Vorstellung der Interventionsmöglichkeiten durch den Umgang mit dem Material:

- Wer bringt das Material mit? Wenn die Schüler einen Zollstock von zu Hause mitbringen sollen, dann obliegt ihnen die Verantwortung. Der Lehrer muss hinterher das Material nicht aufräumen und der Unterricht beginnt schon beim Packen des Schulranzens. Weiter bleibt nach dem Unterricht die Mathematik am benutzten oder erforschten Material am Gegenstand „haften“ und „transportiert“ es in den Alltag.

- Wer bestimmt darüber, welches Material verwendet werden darf? Die Schüler können eventuell selber entscheiden, was sie zur Problemlösung benötigen. „Vollständig“ kann eine Materialliste nicht sein.
- Ist die Benutzung von Material zeitlich beschränkt? Es macht einen großen Unterschied, ob ich einen Taschenrechner nur 60 Sekunden verwenden kann oder ihn immer bei mir habe.
- „Kostet“ mich das Material etwas? Wenn das Budget (Materialbasar) nur für einen Teil von Werkzeugen reicht, wird darüber nachgedacht, was für das Problem wichtig ist (Kramer 2016, S. 20).

5.5 Fazit

Jedes der autopoietischen Systeme des Lernenden (Bewusstseinssystem und Körper) kann auf zwei Ebenen „begreifen“: auf körperlicher und auf geistiger. Dabei sind diese Ebenen nicht als parallel verlaufende Kanäle zu verstehen (etwa im Sinne eines vielkanaligen Lernens), sondern als gegenseitige Irritationen und Anregungen: Was die Hand begreift, begreift der Geist. Und was der Geist begreift, lässt die Hand anders zugreifen (4D-Lernen).

Das Material äußert sich für den Lernenden als „subjektiver Spiegel“. Er bewertet sich selbst durch seinen eigenen Blick auf das was er geschaffen hat. Weiter ist Material auf natürliche Weise fächerübergreifend und binnendifferenzierend. Schließlich besitzt Material einen Appellcharakter und kann den Rahmen von Lernumgebungen gestalten.

Fazit: Der Lehrer hat über das Material Interventionsmöglichkeiten, es besitzt genügend Tiefe zum (eigenständigen und binnendifferenzierten) Forschen und es verschränkt geistiges und enaktives Lernen.

Teil III

Bruchrechnen mit Ketten und Zahnrädern

Kapitel 6 Typische Schwierigkeiten in der Bruchrechnung

6.1 Bestandsaufnahme

6.1.1 Probleme und typische Schülerfehler

Die typischen Fehler (vgl. Padberg 2015, S. 56) lassen sich von Mathematiklehren nahezu „fehlerfrei“ voraussagen.

Aufgabe	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$2\cdot\frac{1}{5}$	$\frac{9}{10}:\frac{3}{10}$	$2:\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}+4$	$0{,}2\cdot 0{,}3$	$0{,}64+7$
Typische Fehler	$\frac{2\cdot 3}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{9:3}{10}$	$\frac{2:2}{3}$	$\frac{3+1}{5+4}$	$\frac{3+4}{5}$	$0{,}6$	$0{,}71$

In meinen Vorlesungen an der Universität Freiburg zur Didaktik der Algebra und Analysis im WS 2014/15, im WS 2015/16 sowie an Fortbildungen für Mathematiklehrer 2016 („Räder in der Alltagswelt“) sagten Studierende wie Lehrer bis auf wenige Ausnahmen alle Fehler voraus.
Offensichtlich weisen die Fehler eine Struktur auf, ansonsten könnten diese nicht vorhergesagt werden. Es handelt sich nicht um zufällige, sondern um systematische Fehler. Die Schüler rechnen demnach mit einem System falsch: Sie versuchen altes Wissen auf neue Aufgaben zu übertragen. In einem konstruktivistischen Sinne hat sich die „Umwelt“ der Rechenoperationen geändert. Das bekannte (Rechen-)System passt nicht mehr zur veränderten Umwelt (den Bruchzahlen). Um die Fehler vorherzusehen, muss man lediglich so rechnen, als wüsste man nichts über Brüche. Man überträgt quasi blind die alten Konzepte bzw. die interne Landkarte auf ein anderes Wissensgebiet (vgl. Abschnitt 6.2.4).

6.2 Warum fällt Schülern Bruchrechnen schwer?

6.2.1 Erster Grund: Außerhalb der Mathematik

Das Kalkül der Bruchrechnung, vor allem die Addition, passt nicht in die Umwelt eines Sechsklässler. Welchen Vorteil hat er davon, wenn er den Term $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ berechnen kann? Wo taucht Hauptnennerbildung bzw. der Umgang mit Äquivalenzklassen in seiner Welt auf? Didaktisch betrachtet liegt die Addition von Brüchen für den jungen Menschen im wörtlichen Sinne daneben. Man denke etwa zum Vergleich an Themen wie „Rechnen mit Größen“, wo er seine Umwelt mit Zahlen erfassen und in Einklang bringen kann. Es ist die Zeit, wo riesige Zahlen interessant sind, wo über Unendlichkeit nachgedacht wird, wo das Maß entdeckt wird, ein Vergleich möglich wird und Modelle gebaut werden (Kramer 2017b, S. 194).

6.2.2 Zweiter Grund: Innerhalb der Mathematik

Je nach Betrachtung bzw. Anwendung nimmt ein Bruch unterschiedliche Rollen ein. Die Rolle ist jedoch die Umgebung einer Aussage (vgl. Abschnitt 3.1). Denkt der Schüler an eine andere Rolle als der Lehrer, wird dessen Äußerung anders interpretiert. Der Lehrer spricht aufgrund der unterschiedlichen Rollenvorstellung am Schüler vorbei.

Rolle	**Formale Beschreibung**	**Enaktive Umsetzung**
Anteil	Einmal bezeichnet er einen bestimmten Anteil, sagen wir z. B. „ein Drittel" von einem Kuchen. Bei einer Kurbelumdrehung hat sich die hintere Achse um ein Drittel einer ganzen Umdrehung gedreht.	
Verhältnis	Und dann kann ein Bruch für ein Verhältnis stehen. Es geht um die Beziehung zwischen den Zahnräder bzw. den ganzen Zahlen 10 und 30. Sie stehen im Verhältnis von 1:3. Es ist egal wie oft man an der Kurbel dreht, im *Verhältnis* dreht sich die hintere Achse dreimal so häufig.	
Zahl	Dann ist ein Bruch eine Zahl bzw. eine Bruchzahl. Verschiedene Brüche können dieselbe Bruchzahl darstellen. Es ist schon ein bisschen gemein für den Lernenden, dass $\frac{1}{3}$ ganz anders aussieht als beispielsweise $\frac{204}{612}$ und dennoch „dasselbe" sein soll.	
Operator	Wiederum eine andere Deutung ist die eines Operators. Ich kann ein Drittel *von* etwas nehmen, zum Beispiel drei Viertel von drei Halben. Ohne den Bruch als Operator zu deuten, wird man die Multiplikation nicht einführen können.	

6.2.3 Dritter Grund: Unsichtbare Mathematik, gestaltpsychologisches Gesetz der Nähe

In der Schülerwirklichkeit, z. B. in der Küche, kommen Brüche als Anteile und Operatoren vor. Die Idee des Anteils lässt sich leicht verstehen, sie ist „greifbar". Auch der operative bzw. funktionale Gedanke („ein Drittel von") lässt sich als Ursache-Wirkungsprinzip in einem Nacheinander verstehen. Beispielsweise wird in Abschnitt 3.4.2.4 das Messer bzw. der Schüler zum Operator, indem er die Hälfte von etwas nimmt.
Abstrakter ist das Verhältnis. Hier geht es um Beziehungen zwischen ganzen Zahlen statt um die konkret dargestellten ganze Zahlen an sich: Betrachtet man z. B. den Bruch $\frac{204}{612}$ so geht es weder um die „204" noch um die „612" – es geht um die Beziehung der beiden Zahlen zueinander, um deren Verhältnis. Es liegt in der Natur der Sache, dass Beziehungen unsichtbar sind, sie lassen sich schlecht darstellen. Im obigen Abschnitt habe ich versucht, die Beziehung zwischen den Rädern als Kette darzustellen.

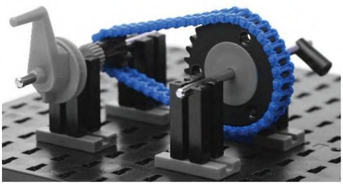


Abb. 110: Darstellung des Verhältnis im Modell

Der Lernende, der zum ersten Mal dieses Bild sieht, wird sehr wahrscheinlich denken, dass es um die Kette geht. Das wäre naheliegend. Aber das ist nur zum Teil richtig. Die Kette ist lediglich ein Symbol, um das Verhältnis darzustellen. Bei negativen Brüchen verschwindet die Materialisierung des negativen Verhältnisses durch eine direkte Verzahnung.

6.2.3.1 Gestaltpsychologie

Für den Lernenden macht es die Sache schwierig. Das was gleich ist, ist unsichtbar. Das gestaltpsychologische Gesetz der Ähnlichkeit (vgl. Abschnitt 3.3.1) versagt beim Bruch: $\frac{204}{612}$ sieht $\frac{-6}{-18}$ so gar nicht ähnlich und doch wird dasselbe Verhältnis beschrieben. Es widerspricht dem natürlichen Verstand, dass $\frac{204}{612}$ dasselbe sein soll wie $\frac{-6}{-18}$. Man muss um den Kontext wissen, ansonsten liegt man gestaltpsychlogisch „daneben".

6.2.4 Vierter Grund: Gelernte Konzepte lassen sich nicht übertragen

Der lernende Mensch versucht bestehende und erfolgreiche Konzepte auf Neues zu übertragen (vgl. die vertikale Achse bei Riemann-Thomann „Streben nach Dauer",

„Streben nach Wechsel“ in Abschnitt 2.5.4.1). Forschen und Lernen ist vor allem an den Stellen möglich, wo Entwicklung kontinuierlich fortschreitet. Lernen und Verstehen an sprunghaften Entwicklungsstellen ist für den Menschen fast nicht zu bewältigen. Ein eindrückliches Beispiel liefert die Quantenmechanik, die zwei Generationen brauchte, um die „Verrücktheit“ der Natur zu akzeptieren (Gribbin 1996). Von Einstein, der noch zur ersten Generation gehörte, stammt das Zitat „Gott würfelt nicht!“. Die Vorstellung, dass die Basis unserer Welt auf Zufall aufgebaut ist, stellt eine völlig andere Wirklichkeitsauffassung dar. Man möchte an dem Alten festhalten.
Aus diesem Blickwinkel lassen sich Schwierigkeiten des Bruchrechnens verstehen. Er sieht vor sich eine Aufgabe, etwa $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$ und versucht sein gelerntes, bisher erfolgreiches Wissen zu übertragen und rechnet gemäß seiner Wirklichkeitsvorstellung „3+1“ und „5+4“ zusammen. *„Meist hängen Denkhürden mit Vorstellungen, Ideen und Deutungen zusammen, die für den Umgang mit dem (vorhergehenden) Begriff charakteristisch sind.“* (Prediger 2004).
In meiner Vorlesung an der Universität Freiburg (WS 2014/15) habe ich Studierende für das Lehramt Mathematik einem kleinen Test unterzogen. Sie sollten sich überlegen, wie die Schüler typischerweise in der Bruchrechnung falsch rechnen. Bei den folgenden Aufgaben (vgl. Abschnitt 6.1.1) errieten ca. 90 % (!) das von Padberg untersuchte Schülerergebnis (vgl. Abschnitt 6.1) Ebenfalls konnten die „typischen Fehler“ nahezu von einer Lehrergruppe (innerhalb des KooBO-Projektes (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2015)) „richtig“ vorhergesagt werden.
Offensichtlich „können“ Studenten des Lehramtes Schülerfehler ohne eine theoretische Einführung voraussagen und das bedeutet, dass diese Fehler nicht zufällig geschehen, sondern eine einfache Struktur besitzen. Der Schüler versucht das umzusetzen, was bisher erfolgreich war.
In einem konstruktivistischen Sinne hat sich die Umwelt der Rechenoperationen geändert. Typische konzeptionelle Beispiele aus der Schülerwirklichkeit sind:

- Multiplizieren macht stets größer
- Teilen macht stets kleiner

„Wird mit dem Multiplizieren von Brüchen keine oder keine klare Grundvorstellung verbunden, wundert es nicht, dass sich die über Jahre vertraute Vorstellung des Vergrößerns bei der Multiplikation auch bei den Bruchzahlen hält und dort eine weit verbreitete Fehlvorstellung ist.“ (Padberg 2015, S. 113). *„Dabei konnte in einer empirischen Studie für das Beispiel der Multiplikation nachgewiesen werden, dass die Aufrechterhaltung der intuitiven Regel ‚Multiplizieren vergrößert immer‘ unmittelbar verknüpft ist mit nicht vollzogenen Konzeptwechseln auf der Ebene individueller Vorstellungen, sie also mit den Interpretationen mathematischer Objekte zusammenhängt.“* (Prediger 2007). Das Festhalten wollen an alten Vorstellungen ist auch

Gegenstand der Forscherwelt. So fiel es den Forschern der modernen Physik schwer eine neue Wirklichkeitsvorstellung zu akzeptieren, z. B. dass bewegte Uhren langsamer gehen, die Zeit keine Konstante darstellt (Relativitätstheorie) oder von einem Teilchen der Ort und der Impuls nicht gleichzeitig scharf messbar sind (Quantenmechanik, Unschärferelation).

6.3 Ausweg: Modellbildung und Anschaulichkeit.

Für den jungen Geist erscheint die neue Zahlenwelt der Brüche seltsam, etwa dass Ergebnis einer Multiplikation kleiner werden kann, als jeder einzelne Faktor (vgl. Abschnitt 6.2.4). Das wundert nicht, da sein Konzept der Multiplikation auf der Vervielfältigung natürlicher Zahlen beruht. *„Woher soll er [der Schüler] vor der Thematisierung der Bruchrechnung auch wissen, dass diese zentrale Grundvorstellung aus dem Bereich der natürlichen Zahlen bei den Bruchzahlen nur noch in einem Sonderfall (natürliche Zahl als Multiplikator) aufrechterhalten werden kann. In allen anderen Fällen muss ein radikaler Grundvorstellungsumbruch erfolgen."* (Prediger 2015, S. 113; Klammerbemerkung von mir) Es muss sich in seinem Gehirn erst ein komplexeres Modell entwickeln, bevor er verstehen kann. So kritisiert Günther Malle den traditionellen Mathematikunterricht (vgl. Abschnitt: 5.1.2). *„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden."* (Malle 2004, S. 4).

Es braucht ein neues Modell, um zu verstehen. *„Es darf nicht der Eindruck entstehen, Bruchzahlen seien nur abgewandelte („kompliziertere") natürliche Zahlen: vielmehr muß das Umgekehrte deutlich werden; natürliche Zahlen sind bezüglich des Rechnens spezielle Bruchzahlen."* (Winter 2009, S. 3). Das neue Modell muss nicht nur für die neuen Zahlen (den Brüchen") stimmig sein, es muss nach wie vor auch noch richtig mit dem Spezialfall der ganzen Zahlen umgehen können. Wieder wird man an die moderne Physik erinnert: Die Relativitätstheorie muss, möchte sie allgemeine Gültigkeit besitzen, auch für den Spezialfall langsamer Geschwindigkeiten gelten. Man möchte ein Modell, welches alles leistet. Zu Beginn der Quantenmechanik rechnete man einmal klassisch und das andere Mal quantenmechanisch, was aus heutiger Sicht seltsam und unvollständig erscheint.
Im Sinne des Landschaftsmodells wird eine Landkarte benötigt, die verträglich mit der alten Struktur ist, aber die neuen Herausforderungen meistert. Der folgende Vorschlag der Zahnräder leistet diese Theorieerweiterung. Es erinnert tatsächlich stark an die moderne Physik: Man kann mit Zahnrädern und Ketten auch lediglich mit ganzen Zahlen rechnen, aber dafür würde man das Material in der Regel nicht heranziehen,

ebenso wenig, wie man für die Addition langsamer Geschwindigkeiten relativistisch rechnen würde, auch wenn das möglich wäre.[30]

6.3.1 Vier Gesichter eines Bruches und deren materielle Vereinigung in Übersetzungen

Die Verwendung von Zahnrädern und Getrieben zeigt den Bruch anschaulich in den verschiedenen Rollen. Die Stärke des vorgeschlagenen Lehrgangs beruht darauf, dass es sich stets um dasselbe Material handelt, sich aber dessen Rolle ändert. Die verschiedenen „Gesichter eines Bruches" sind altbekannt und stellen aus didaktischer Sicht einen sehr zentralen Grund für Verständnisschwierigkeiten dar. So braucht es das „Gesicht des Operators", um die Multiplikation zu verstehen.
Es fällt bereits schwer, mit verschiedenen Gesichtern bzw. Rollen eines realen Gegenstandes (man spricht in diesem Fall von verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten[31]) oder einer realen Person umzugehen.
Der Lernende wird in der Bruchrechnung mit vier verschiedenen Gesichter eines *abstrakten* Gegenstandes konfrontiert: dem Bruch. Ketten und Zahnräder bieten die Möglichkeit, die Gesichter am *selben* Material zu zeigen. Mit jeder Rolle wird ein anderer Fokus gesetzt, die Betrachtung ändert sich, aber es handelt sich nach wie vor um denselben (unterrichtlichen) Gegenstand. Es geht immer um Zahnräder und Ketten – egal, ob es sich um Anteile, Verhältnisse, Zahlen oder Operatoren dreht. Ändert sich die Rolle, dann ändern sich der Aufbau und die Vorgehensweise in natürlicher Art und Weise. Das Material zeigt sich von einer anderen Seite bzw. mit einem anderen Gesicht. So wird beispielsweise der Operatorgedanke bzw. der Malpunkt materialisiert durch eine Zwischenachse. Die verschiedenen Gesichter (Anteil, Verhältnis, Zahl und Operator) sind in Abschnitt 6.2.2 dargestellt.

6.4 Fazit

Die häufigsten Schülerfehler lassen sich von einem Beobachter zweiter Ordnung voraussagen. Aus dieser Sicht lässt sich erkennen, dass die Fehler eine Struktur besitzen: Der Schüler versucht Konzepte aus der Grundschule auf das neue Wissensgebiet der Bruchrechnung zu übertragen. Die „alte Landkarte" passt nicht mehr auf die neue Landschaft. Um zu verstehen muss der Schüler eine neue Struktur, eine neues Modell

[30] Der Umgang mit Ketten und Zahnräder kann somit auch einen allgemeinen Erkenntnisprozess anschaulich skizzieren. Auch dieser Aspekt darf im Unterricht, der sich um fächerverbindende Aspekte bemüht, gerne betrachtet werden. Der Umgang mit Modellen, der Weg zur Erkenntnis, lässt sich als eine kulturelle Bildung begreifen. Die Bedeutung an kultureller Bildung zeigt sich beispielsweise an der aktuellen Entstehung sogenannter Kulturschulen. In Hessen gibt es derzeit zehn verschiedene solcher Schulen.

[31] Ein Beispiel: Ein Feuerzeug zeigt in der Regel das Gesicht eines Feuerspenders. Aber es kann sich ebenso als Flaschenöffner zeigen und beim Gitarrenspiel als „Bottle-neck" zum Erzeugen fließender Klänge Verwendung finden, um nur drei Gesichter zu zeigen.

für Zahlen entwerfen, welches nicht im Widerspruch zum alten steht. Weitere Verständnisschwierigkeiten sind, dass Bruchrechnung (z. B. Kürzen und Erweitern) nicht in seine Lebenswirklichkeit passt und dass der Bruch verschiedene Rollen annimmt. Aus kommunikationspsychologischer Sicht wird von dem Kind ein Denken in Verhältnissen/Beziehungen gefordert, wobei immer wieder die Rollen wechseln, häufig ohne dass das im schulischen Alltag herausgestellt wird.
Fazit: Der Schüler braucht ein neues Modell, um Bruchrechnen zu verstehen, möglichst anschaulich und nahe an seiner Lebenswirklichkeit.

Kapitel 7 Konzeption „Bruchrechnen als Abenteuer“

7.1 Flächen- vs. Operator- bez. Maschinenkonzept

Um ein Verständnis für Zahlen bzw. der Algebra aufzubauen, hilft eine mengenhafte Vorstellung von abstrakten Dingen ungemein. Bekannt ist die Rechteckvorstellung der Multiplikation (im Bild links), weniger verbreitet ist die alternative Getriebevorstellung als Hintereinanderschaltung zweier Übersetzungen. Dargestellt ist das Produkt $2 \cdot 4$ einmal geometrisch als Fläche, einmal als Hintereinanderausführung zweier Operatoren. Links ergibt sich eine Fläche mit 8 Flächeneinheiten bzw. Münzen, rechts dreht sich die durch den Winker markierte hintere Achse 8 mal bei einer Kurbelumdrehung.

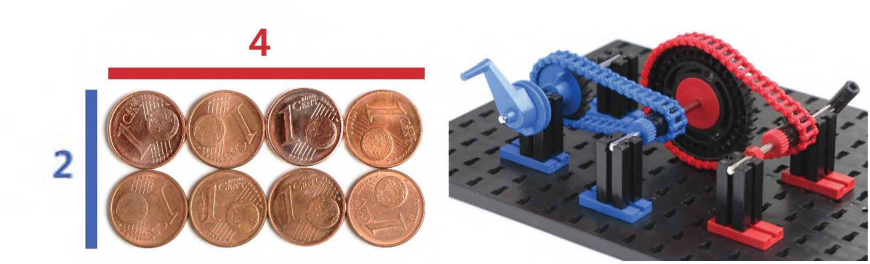


Abb. 111: Zwei Modelle zur Multiplikation

Möchte man zeigen, dass $2 \cdot 4$ kommutativ ist bzw. dass $4 \cdot 2$ dasselbe ergibt, werden im Flächenkonzept Zeilen und Spalten vertauscht bzw. das Rechteck um 90° gedreht. Rechts muss die Reihenfolge der Übersetzungen bzw. der Operatoren vertauscht werden. Das ist charakteristisch für das hier vorgestellte Konzept: Formal und haptisch passiert das Gleiche.

Ich möchte auf eine Parallele zwischen Rechteckvorstellung und Operator- bzw. Getriebevorstellung hinweisen. Die analoge Frage bei der Rechteckvorstellung wäre: Warum soll ein Rechteck eine Multiplikation darstellen? Die Antwort findet sich, indem im konkreten Fall die einzelnen „Zeilen“ aufaddiert werden. Anschaulich kann das wie in der Abbildung mit Münzen geschehen. Beim Rechteck von $2 \cdot 4$ entspräche das dem Zusammenzählen zweier Zeilen, also 4 (Münzen) + 4 (Münzen).

Im Fall des Getriebes wird analog vorgegangen. Statt der einzelnen Zeilen zählt man pro Kurbeldrehung (Zeilennummer) die Umdrehungen des hintersten Rädchens (Anzahl der Münzen in einer Zeile).

Beide Fälle sind im selben Maße komplex, da sie dieselbe Struktur aufweisen. Möchte man den Übergang von „von“ zu „mal“ bewerkstelligen, also den Übergang von Anteilen von Anteilen zum einfachen Produkt vollziehen, braucht man wieder die Erklärung der Multiplikation, entweder (a) als Rechteck oder (b) als Getriebe (Kramer 2016a, S. 144ff, S. 147). Man erweitert beide Prinzipien auf Bruchzahlen, das bedeutet für (a), dass sich die Seitenlängen auf Bruchzahlen erweitern lassen und im Fall (b), dass die Verhältnisse keine ganzen Zahlen bilden müssen. Beides ist offensichtlich, aber entscheidend ist, dass es *gleich* offensichtlich ist, da die Struktur dieselbe ist. Der einzige Vorteil besteht darin, dass das Rechteck für den Sender/Lehrer (!) vertrauter ist, weil er die Rechteckvorstellung bereits kennt. Für den Schüler, der keine Vorstellung kennt, besteht *kein* Unterschied im Schwierigkeitsgrad des Verständnisses.

7.1.1 Kritik am Operatorkonzept

Probleme des Operatorkonzeptes liegen (Padberg 1989, S. 39) in folgenden Punkten:

(1) „Zu Beginn des Lehrganges erfolgt *keine Anknüpfung an die Vorerfahrungen* der Schüler mit Bruchzahlen.“

(2) „Die Behandlung der *Multiplikation* rein im Sinne des Operatorkonzeptes verdrängt bei den Schülern die wichtigen *inhaltlichen Vorstellungen* bei der Multiplikation, denen gerade bei *anwendungsbezogenen* Fragestellungen ein besondere Bedeutung zukommen, zugunsten eines *mehr formalen* Umgehens mit Operatoren.“

(3) „Bei der Einführung der *Multiplikation* im Sinne der oben vorgestellten Variante können wir gegenüber dem Von-Ansatz *keine* Vorteile, sondern nur Nachteile (stärker formal, weniger inhaltliche Vorstellungen) erkennen.“

(4) „Die bislang für die Multiplikation genannten Argumente treffen auch weiterhin für die *Division* zu, d. h. es fehlt jeder Bezug zu irgendeiner Anwendung oder anschauliche Vorstellung.“

In der dritten Auflage äußert sich Padberg zum Problem der vermeintlichen Unanschaulichkeit des Operatorkonzeptes, in der fünften Auflage wird keine Stellung bezogen:

(5) „Die Behandlung des Erweiterns und Kürzens durch das Einschieben bzw. Herausnehmen insgesamt wirkungsloser Operatorpaare vermittelt den Schülern *keine anschauliche Vorstellung* davon, warum zwei gegebene Brüche gleichwertig sind.“

(6) „Das Operatorkonzept trägt *nicht* zu einer Lösung des alten Problems im Bereich der *Multiplikation* bei, den Schülern einsichtig zu machen, *warum* man die durch die Verkettung von Bruchoperatoren eingeführte Verknüpfung als *Produkt* bezeichnet.“

Mit Hilfe von Ketten und Zahnrädern sind die genannten Argumente im Wesentlichen entkräftet.
Aber es ist nicht so, dass ich allein aufgrund der Anschaulichkeit die Probleme gelöst habe. Vielleicht noch wichtiger ist die Lernumgebung „Fischertechnik“, wo unter anderem Spielfreude, das Wechselspiel zwischen enaktiven und symbolischen Zugängen (EIS-Prinzip), Praxis- und Anwendungsbezug, Kompetenzorientierung eine große Rolle spielen. Mir ist es wichtig klarzustellen, dass der Spieltrieb in meiner Forschung Federführend war und ist. Dass sich mit Ketten und Zahnrädern das Operatorkonzept veranschaulichen lässt, freut mich, aber es war im Vorfeld nicht beabsichtigt. Ich vermute sehr, dass ich das Problem nicht gelöst hätte, wenn ich von vornherein danach gesucht hätte.

7.2 Reihenfolge im Lehrgang: Multiplikation vor Addition?

In fast allen Lehrbüchern im deutschen Sprachraum wird aktuell die Addition von Brüchen vor der Multiplikation behandelt. So schreibt etwa Friedhelm Padberg: *„Das Operatorkonzept hat in Deutschland für etwa 15 Jahre in den 1970er und 1980er Jahren eine dominierende Rolle gespielt und zu dieser Zeit die konkurrierenden Konzeptionen wie das Größenkonzept in seiner damaligen Form fast restlos vom Markt verdrängt – und dies, obwohl es in weiten Bereichen einen abrupten Bruch zur Tradition vollzog. Gegenwärtig ist das Operatorkonzept in seiner formalisierten Form – so wie es seinerzeit in den Unterrichtskonzeptionen vorherrschte – in Deutschland wieder restlos vom Markt verschwunden.“* (Padberg 2015, S. 15).
Wer Bruchrechnen mit Ketten und Zahnrädern lehren möchte, wird mit der Multiplikation beginnen. Zahnräder und Übersetzungen sind auf natürlicher Weise multiplikativ. Es ist sogar so, dass man sich wundern kann, dass ein multiplikatives Konzept überhaupt mit der Addition verträglich ist.

Die Reihenfolge, zuerst Addition, dann Multiplikation, erscheint auf den ersten Blick naheliegend. So schreibt Arnold Kirsch: *„In neueren Schulbüchern für das 6. Schuljahr wird durchweg die Multiplikation der Bruchzahlen (positiven rationalen Zahlen) vor der Addition behandelt. Hierin zeigt sich eine Auswirkung der seit den Vorschlägen von P. Braunfeld und G. Pickert in der Mathematikdidaktik verbreiteten Operatorauffassung der Bruchzahlen. Diese Auswirkung ist recht schwerwiegend, verstößt sie doch gegen den „gesunden Menschenverstand“, der die Multiplikation als eine höhere Rechnungsart, verglichen mit der Addition, ansieht.*“ (Kirsch 1975, S. 7).
Der „gesunde Menschenverstand“ scheint das zu meinen, was „normal“ bzw. gewöhnlich ist. In der Grundschule wird die Multiplikation von der Addition abgeleitet. Für das viermalige Aufsummieren der Zahl drei (3 + 3 + 3 + 3) schreibt man kürzer 4 mal 3 (4 x 3). Ganz analog baut die Potenz auf der Multiplikation auf. Der „gesunde Menschenverstand“ versucht Vertrautes auf Neues zu übertragen. Das ist ein gefährlicher Schritt,

da sich ein Übertragungsfehler einschleichen kann. Im Sinne von Abschnitt 1.6.2.3 nutzt man dieselbe Landkarte für ein anderes Wissensgebiet: Die Reihenfolge, die bei natürlichen Zahlen didaktisch sinnvoll war, soll auch bei der Behandlung von Brüchen gelten. Aber das Wissensgebiet der Bruchzahlen ist „regelhaft monsterhaft“ und grundlegend neu: *„In der Welt der Bruchzahlen ist trotz weitgehender Übereinstimmung mit den natürlichen Zahlen dennoch vieles so neu, dass es gemessen an den gewachsenen Evidenzen in der Welt der natürlichen Zahlen regelhaft monsterhaft (im Sinne von Lakatos), also unverständlich, paradox, in sich widersprüchlich unglaublich, erscheinen muss.“* (Winter 2004, S. 15).

7.2.1 Vorbemerkung: Lässt sich Wissensvermittlung ohne konkrete beteiligte Personen denken?

Eine große Schwierigkeit in der didaktischen Forschung ist es, den Schüler bzw. den Lehrer vom Lerngegenstand zu trennen. Ansonsten kann man keine allgemeinen Aussagen über das Stoffgebiet treffen bzw. Daten erzeugen. Im Landschaftsmodell bedeutet das beispielsweise die absolute Höhe eines Berges in Form eines Datums (z. B. 1584 Meter) zu bestimmen. Bei der Untersuchung, was denn nun die „bessere“ Reihenfolge ist, zuerst die Addition und dann die Multiplikation, muss man zwangsläufig die konkreten Schüler und den unterrichtenden Lehrer außer Acht lassen. Bei wissenschaftlichen Untersuchungen ist es häufig sehr schwer, die Didaktik vom konkreten Lehrer und vom konkreten Schüler zu abstrahieren. Das ist insofern befremdlich, weil es ja in erster Linie genau um die Personen geht, die im Unterricht auf den Schulstoff (hier die Bruchrechnung) treffen. Daher sollte der erste Blick immer auf die gerichtet sein, die den Unterricht erleben. Aus dem Blickwinkel der Stimmigkeit für Klasse, Lehrer und Stoffgebiet ist somit die Wahl der Reihenfolge zweitrangig.
Dennoch ist auch ein zweiter, didaktische Blick, von Interesse. Weniger deswegen, weil die eine Reihenfolge geschickter als die andere wäre, vielmehr geht es um das Hinterfragen der Schülerwirklichkeit und der Sichtweise des Schulsystems auf „den Schüler“.
Über die Reihenfolge lässt sich streiten – solange man nicht handlungs- und erlebnisorientierte Konzepte verfolgt. In der hier konstruierten Lernumgebung „zwingt“ das Material die Reihenfolge auf. Mag es allgemein eine Wahl für die Reihenfolge geben, mit Ketten und Zahnrädern ist es sehr ungeschickt mit der Addition zu beginnen:

7.2.2 Gründe für die Multiplikation vor der Addition

7.2.2.1 Der Bruch ist ein multiplikatives Konzept

Zahnräder und Übersetzungen sind in natürlicher Weise multiplikativ: Man sucht zu einer vorgegebenen Zahl eine weitere, so dass das Produkt 1 ergibt. Brüche werden durch eine „umgekehrte“ Multiplikation gefunden, der Bruch ist ein multiplikatives Konzept. Somit ist es natürlich bzw. genetisch[32] mit der Multiplikation von Brüchen zu beginnen.

7.2.2.2 Handlungsorientierung

Wer mit Ketten und Zahnrädern Getriebe baut, konstruiert multiplikativ. Es liegt an der Natur der Sache bzw. am Material „Zahnrad“. Vergleiche hierzu die Ausführungen in Abschnitt 7.3.2.3 über die Anordnung des Stoffes.

7.2.2.3 Innermathematische Gründe

Die Addition von Brüchen erfordert den Umgang mit Äquivalenzklassen (kürzen und erweitern). Es ist höchst fragwürdig, ob die Unterstufe für dieses Kalkül der richtige Zeitpunkt ist, zumal die Bruchrechnung als eines der schwierigsten didaktischen Themen gilt.
Die Addition von Brüchen bildet in der Lehrgangsskizze „Bruchrechnen als Abenteuer“ das Schlusslicht. Das ist dem Material geschuldet. Die Addition geht nicht so einfach von der Hand, wie die Multiplikation. Es knarzt und ächzt, es ist umständlich – sowohl in der formalen Rechnung als auch in der handelnden Umsetzung. Dass es mit der Addition knirscht und knarzt wundert nicht. Es wundert vielmehr, dass ein multiplikative Konzept sich überhaupt mit der Addition widerspruchsfrei verträgt. Es erscheint unnatürlich beim Bruch mit der Addition zu beginnen.

7.2.2.4 Die Multiplikation in der Lebenswelt der Schüler

Die Addition von Brüchen ergibt in der Erlebniswelt eines Sechstklässler wenig Sinn. In seiner Lebenswelt ist die Berechnung von $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ nicht bedeutsam (vgl. Abschnitt 6.2.1). Es ist recht schwer ein Beispiel anzugeben, wo Addition oder Subtraktion von Brüchen bzw. die Äquivalenzklassenbildung einen Sinn ergibt. Mit Pizzen und Kuchen zu rechnen, reicht für eine Sinngebung nicht aus! Vielleicht besteht ein möglicher Wert in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hier könnten Pfade addiert werden. Trotzdem scheint die Multiplikation bzw. der Operatoraspekt direkter und naheliegender zur Lebenswelt der Schüler. Diese taucht in der Küche auf: Ein Rezept für sechs Personen soll auf zwei Personen „gekürzt“ werden. Statt einem halben Liter Milch wird ein Drittel von einem halben Liter benötigt. Es ist noch ein weiter Schritt vom Operator „ein Drittel von“ zur Multiplikation $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Jedoch ergibt in der Welt eines Sechstklässlers die Berechnung einen unmittelbaren Sinn.

[32] Der Begriff „genetisch“ wird im Sinne von Martin Wagenschein verwendet.

Typische Fehler bei Schülern und Didaktikern

Es gibt einen Grund, warum häufig die Bruchrechnung mit der Addition begonnen wird: Die Multiplikation ganzer Zahlen leitet sich aus der Addition ab. *„Die zentrale Grundvorstellung bei der Multiplikation natürlicher Zahlen ist die Deutung als wiederholte Addition“.* (Padberg 2015, S. 113). So steht $3 \cdot 2$ abkürzend für $2 + 2 + 2$. Die Addition ganzer Zahlen ist offensichtlich grundlegender und so wird, ganz natürlich, ein Unterricht bei der Addition beginnen.

Es ist verständlich, dass die erste Idee darin besteht, es mit den Brüchen wie mit den ganzen Zahlen zu versuchen. Aber der Bruch ist nun einmal keine ganze Zahl sondern steht für ein multiplikatives Konzept. Es ergibt keinen Sinn, dass man die Didaktik der ganzen Zahlen auf Brüche überträgt.

An dieser Stelle lässt sich eine bemerkenswerte Beobachtung anstellen. Betrachten wir einen typischen Fehler eines Schülers bei der Addition zweier Brüche: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{2+3}$. (vgl. Abschnitt 6.2). Seine Vorgehensweise lässt sich verstehen: Er wendet ein Konzept an, was er bereits kennt. Was bei der bekannten Addition funktioniert hat, möchte er übertragen. Eine naheliegende, verständliche Herangehensweise („Assimilation“ nach Piaget 1976)). Aber leider ist der Bruch ein anderes Konstrukt, alte Konzepte lassen sich nicht übertragen. Leider. Seine Vorgehensweise ist nicht dumm sondern unpassend.

Vielleicht ist das der Grund, warum es aktuell in der Didaktik naheliegend ist, mit der Addition zu beginnen. Etwa in dem Sinne, dass das ein gutes Konzept für die Vermittlung ganzer Zahlen auch eines für Brüche sein könnte. Tatsächlich erging es mir selbst so (vgl. die Anordnung von Addition und Multiplikation von Brüchen in (Kramer 2016a)). Erst mit Ketten und Zahnrädern ist mir die Bedeutung des multiplikativen Konzeptes als grundlegend klar geworden.

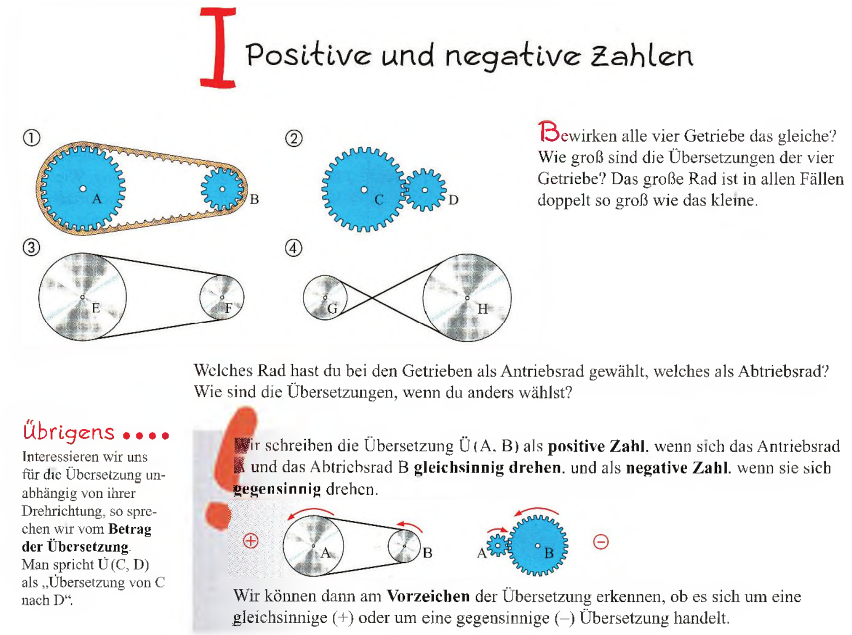
7.3 Ketten und Zahnräder – ein neues Konzept?

7.3.1 Ketten und Zahnräder in der Literatur

7.3.1.1 Räder und Getriebe in mathe live, Schülerbuch 7

In dem Schulbuch „mathe live“ für die 7. Klasse werden mit Rädern und Getrieben Verhältnisse eingeführt (mathe live, Schulbuch 2000). Der Umfang des Themas beträgt 26 Seiten.

Zu Beginn wird das Fahrrad untersucht. Die Definition der Übersetzung ist analog und verwendet ebenfalls Kettenblatt und Ritzel. Weiter werden negative Zahlen bzw. das Vorzeichen im Operator mit der Unterscheidung einer gegensinnigen und gleichsinnigen Übersetzung eingeführt:



I Positive und negative Zahlen

Bewirken alle vier Getriebe das gleiche? Wie groß sind die Übersetzungen der vier Getriebe? Das große Rad ist in allen Fällen doppelt so groß wie das kleine.

Welches Rad hast du bei den Getrieben als Antriebsrad gewählt, welches als Abtriebsrad? Wie sind die Übersetzungen, wenn du anders wählst?

Übrigens ....
Interessieren wir uns für die Übersetzung unabhängig von ihrer Drehrichtung, so sprechen wir vom **Betrag der Übersetzung**. Man spricht Ü(C, D) als „Übersetzung von C nach D“.

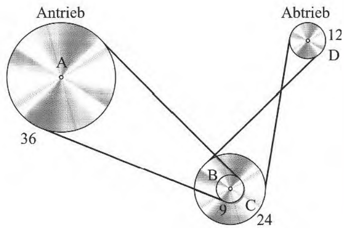
Wir schreiben die Übersetzung Ü(A, B) als **positive Zahl**, wenn sich das Antriebsrad A und das Abtriebsrad B **gleichsinnig drehen**, und als **negative Zahl**, wenn sie sich **gegensinnig** drehen.

Wir können dann am **Vorzeichen** der Übersetzung erkennen, ob es sich um eine gleichsinnige (+) oder um eine gegensinnige (–) Übersetzung handelt.

Abb. 112: Ketten und Zahnräder im Schulbuch *mathe live*

Der Kehrwert eines Bruches wird durch vertauschen der beiden Zahnräder veranschaulicht. Weiter wird die Multiplikation zweier rationaler Zahlen als Hintereinanderschaltung zweier Übersetzungen (ohne Beweis) gezeigt. Die Erklärung erfolgt jedoch über die bekannte Flächenvorstellung (Rechteckschema): *„Die Multiplikation von zwei Brüchen kann man sich mit Hilfe eines Rechtecks veranschaulichen. Dabei beschreiben die Länge und die Breite des Rechtecks jeweils einen der beiden Faktoren.“* (mathe live, Schulbuch 2000, S. 45).

I Multiplizieren von rationalen Zahlen



Die Räder in der Zeichnung haben die folgenden Umfänge: A: 36 cm, B: 9 cm, C: 24 cm, D: 12 cm.
Wie groß sind die beiden Teilübersetzungen Ü (A, B) und Ü (C, D), wie groß ist die Gesamtübersetzung Ü (A, D)? Achte auch auf das Vorzeichen der Übersetzung!
Beachte, dass die Scheiben B und C auf derselben Achse fest miteinander verbunden sind. Es gilt Ü (B, C) = 1.

Die **Gesamtübersetzung** eines Getriebes ergibt sich durch die **Multiplikation der Teilübersetzungen**:

$$Ü(A, D) = Ü(A, B) \cdot Ü(C, D)$$

oder, da Ü (B, C) = 1.

$$Ü(A, D) = Ü(A, B) \cdot Ü(B, C) \cdot Ü(C, D).$$

Haben bei der Multiplikation von zwei Faktoren beide das **gleiche Vorzeichen**, so ist der Produktwert **positiv**. Haben die beiden Faktoren **verschiedene Vorzeichen**, so ist der Produktwert **negativ**.

Abb. 113: Multiplikationsregel im Schulbuch *mathe live*

Der Bildungsverlag Klett schlägt folgenden Stoffverteilungsplan vor (Ernst Klett Verlag 2018):

Kapitel 2: Räder und Getriebe	23
2.1 Lerne dein Rad kennen	
- Übersetzungen, Bruchschreibweise	24-29
- Brüche vervielfachen	
- Anteile und Vielfache	
2.2 Wir dreh'n am Rad	
- Brüche multiplizieren	30-34
- Anteile von Anteilen	
2.3 Rückwärts schieben	
- Kehrwert	35-38
- Brüche dividieren	
2.4 Jetzt geht's rund	
- positive und negative Zahlen	39-41
- Vorzeichen	
2.5 Wir bauen Getriebe	
- Rationale Zahlen multiplizieren	42-45
Thema: Komplexe Getriebe	46
Zusammenfassung	47
Test	48

7.3.1.2 Multiplikation von Brüchen als Übertragungskette in Mathematik Lehren

Die Idee der Multiplikation durch Übersetzungen findet sich bereits 1995 bei Jannack, der die Gangschaltung eines Bountain-Bikes als Übertragungskette verallgemeinert (Jannack 1995, S. 50f).

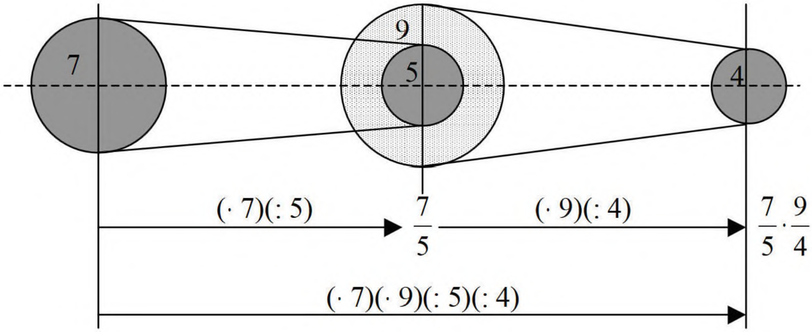


Abb. 114: Multiplikation von Bruchzahlen nach Jannack

7.3.2 Bruchrechnen als Abenteuer – ein neues Konzept!

7.3.2.1 Konzept der Handlungs- und Denkorientierung: handeln und denken

Grundlegender Gedanke der Handlungsorientierung ist die in Abschnitt 1.3.6 beschriebenen strukturelle Kopplung beider Systeme bzw. die Kopplung zwischen materieller und geistiger Konstruktion. Der Begriff der Handlungsorientierung ist etwas unglücklich gewählt. Es scheint auf den ersten Blick als ob sich die Theorie an der Praxis orientiert. Beide Systeme, das haptisch-praktische-materielle und das geistig-denkende-ideelle werden jedoch als gleichwertig angesehen.

Der Begriff „Handlungsorientierung“ zeigt im wörtlichen Sinne einen „Handlungsbedarf“ an. Als Wegweiser verstanden zeigt der Begriff auf das, was wünschenswert ist. Anders formuliert: Läge die Betonung der aktuell unterrichtliche Welt auf der Handlung, so würde vermutlich von einer *Denkorientierung* gesprochen werden, weil dann ein „*Denkbedarf*“ bestehen würde.

Handeln und Denken sind gleichwertig und operieren in unterschiedlichen, jedoch gekoppelten Systemen: Der Umgang mit dem Material irritiert das Denken, das Denken irritiert den Umgang mit dem Material.

Die Handlung wird also nicht in irgendeiner Weise als Zusatz im Sinne einer willkommenen Option gesehen, sondern ist gleichwertiger und wesentlicher Bestandteil des Lernens. Ohne die Handlung gibt es keine strukturelle Kopplung der Systeme! Die

Idee, dass durch das Weglassen der Handlung bzw. des konkreten Bauens, Zeit „gespart“ werden würde, orientiert sich an einer maschinellen Vorstellung von Bildung. In der hier dargestellten systemischen Betrachtung kristallisiert sich durch die Handlung gleichsam das Denken – und umgekehrt. Anders formuliert: Das materielle Konstruieren ist kein Umweg, sondern Gegenstand des Lernprozesses. Das gilt natürlich nur, wenn die Gegenstände der Handlung und des Denkens strukturell koppeln. D. h. das Handeln und Denken denselben Fokus haben.[33]

7.3.2.2 Stoffliche Inhalte

Das Konzept „Bruchrechnen als Abenteuer“ beinhaltet Lernumgebungen zur Umsetzung aller unterrichtlichen Themen der Bruchrechnung mittels Ketten und Zahnräder. Neue enaktive Möglichkeiten mit dem Material Fischertechnik sind:

- Bruch und Bruchzahl
- Äquivalenzklasse
- Kürzen und Erweitern
- Division rationaler Zahlen
- Unterscheidung Vorzeichen- und Operatorminus
- Grenzwerte, Division durch Null
- Unterscheidung von irrationalen und rationalen Zahlen
- Potenzen und Wurzeln
- Erweiterung zu exponentiellen Wachstum
- Aufbau von (multiplikativen) Gleichungen
- Haptischer Beweis der Multiplikationsregel
- Vergleichen von Brüchen
- Addition von Brüchen
- Übergang zu linearen Funktionen

7.3.2.3 Anordnung des Stoffes durch das Material

Die Anordnung des Stoffes in *mathe live* ist klassisch: Zuerst kommt die Addition, dann die Multiplikation. Innerhalb des Kapitels wird das Modell (Operatorkonzept, Flächenvorstellung) gewechselt und mittels dem Rechteckschema die Multiplikation von Brüchen eingeführt (Ernst Klett Verlag 2018).

Eine solche Anordnung des Stoffes passt nicht zur Handlungsorientierung. Wer Zahnrädern und Ketten nicht nur als Bild im Buch sondern real in der Hand hat, der baut multiplikativ! Das liegt daran, dass sowohl der Bruch als auch das Zahnrad multiplikative Konzepte sind.

[33] Es mag sein, dass Handlung und Bewegung ohne Fokus auf das Denken sich gewinnbringend äußern, etwa das Erlernen von Vokabeln im Gehen, aber das ist nicht gemeint.

Es liegt somit in der Natur der Sache bzw. des Zahnrades, mit der Multiplikation zu beginnen. Das hat einen tieferen Grund, der im folgenden Absatz verdeutlicht wird.

7.4 Isomorphismus zwischen der multiplikativen Gruppe der positiven Brüche ($\mathbb{Q}_+, \cdot$) und der multiplikativen Gruppe der Übersetzungen.

Zwischen Ketten und Zahnräder und der multiplikativen Gruppe der *Brüche* kann eine Art Isomorphismus angegeben werden. Der Isomorphismus entspricht der strukturellen Kopplung zwischen geistiger und handelnder Tätigkeit im Unterricht.

symbolisch	Modelldarstellung (enaktiv)	Bemerkung
Menge	Die Menge aller Übersetzungen, offensichtlich ist die Menge nicht leer.	Unter einer Übersetzung wird ein einfaches Getriebe mit nur einer Kette verstanden.
Verknüpfung	Hintereinanderschaltung zweier Getriebe (mittels einer gemeinsamen Achse)	Ein Getriebe steht für einen Term. Im einfachsten Fall besteht ein Getriebe aus zwei Zahnrädern und einer Kette.
Neutralelement	Übersetzung mit zwei identischen Zahnrädern	
Inverses	Reihenfolge der Übersetzung wird vertauscht	
Abgeschlossenheit	Die Hintereinanderschaltung zweier Übersetzung ergibt wieder eine Übersetzung	Das bedeutet, dass sich jedes noch so komplexe Getriebe in seiner Wirkung als einfache Übersetzung darstellen lässt. Das ist eine unmittelbare Folge der Multiplikationsregel.
abelsch	Zwei Übersetzungen lassen sich vertauschen.	

Die Einschränkung „eine Art Isomorphismus" bezieht sich auf technische Probleme bei der Umsetzbarkeit. So gibt es kein Zahnrad mit einem Zahn. (Tatsächlich könnte man technisch an dieser Stelle eine Schnecke verwenden, aber das würde leider nur die Übersetzung in eine Richtung zulassen: Die Schnecke kann die Bewegung auf das Zahnrad übertragen, die Gegenrichtung ist technisch nicht möglich.)
Ein Isomorphismus zwischen Übersetzungen und *Bruchzahlen* ist technisch prinzipiell möglich, zumindest solange die Beträge der Übersetzungen bzw. der Bruchzahlen nicht zu groß werden. Eine Übersetzung von einer Milliarde zu realisieren ist technisch schlichtweg nicht möglich (die Umkehrung von einem Milliardstel hingegen schon).

7.4.1 Die multiplikative Gruppe der Übersetzungen

Betrachten wir die Gruppe der Übersetzungen:

- Es gibt ein Neutralelement, die „1“, also eine Übersetzung, die nichts verändert. Diese Übersetzung kann konkret angegeben werden und besteht aus zwei gleichen Zahnrädern.
- Die Verknüpfung wird durch die Hintereinanderausführung zweier Übersetzungen realisiert. Das durch die Verknüpfung entstandene Element lässt sich wieder als eine Übersetzung angeben. Das ist nicht ohne weiteres einzusehen. Die Gruppe ist bzgl. ihrer Multiplikation abgeschlossen.
- Zu jedem Element gibt es ein inverses Element. Dieses wird realisiert durch einen gespiegelten Aufbau.

Innerhalb eines Getriebes können, ohne die Gesamtübersetzung zu ändern, einige Zahnräder vertauscht werden, andere nicht. Hier zeigt sich eine Bedeutung des Isomorphismus. Wer mit der Multiplikation von Brüchen vertraut ist, kann unmittelbar angeben, welche Zahnrädchen sich untereinander vertauschen lassen. Hier lässt sich die Beziehung, die strukturelle Kopplung bzw. der Isomorphismus zwischen materieller Getriebewelt und ideeller „Brüchewelt“ wunderbar nutzen.
So wundert es nicht, dass die Multiplikation von Brüchen, Kürzen und Erweitern zu Zahnrädern und Ketten „passt“. Solange man sich in innerhalb der multiplikativen Gruppe bewegt, funktioniert die Modellierung bestens. Anders sieht es aus mit der additiven Gruppe: Die Menge aller Bruchzahlen bilden zusammen mit der Addition ebenfalls eine Gruppe. Dass die Summe zweier Getriebe wieder ein Getriebe darstellt, ist aus haptischer Sicht nicht trivial. Es wundert, dass eine Addition mit Übersetzungen (bzw. mit Brüchen) überhaupt möglich und noch dazu sogar mit der Multiplikation verträglich ist (vgl. den Abschnitt über Addition von Brüchen).

7.4.2 Weitere strukturelle Kopplungen zwischen Getrieben und Brüchen

Die Parallelität zwischen der Getriebewelt und den Brüchen geht weit über die multiplikative Gruppe hinaus. So lassen sich die einzelnen Zahnräder als positive Zahlen deuten. Ein Zahnrad mit 20 Zähnen stellt demnach die Zahl 20 dar. Negative Zahlen können durch einen Drehsinn realisiert werden. Das Vorgehen entspricht dem in „Mathematik als Abenteuer“ entwickeltem haptischen Rechnen mit negativen Zahlen. Zur Darstellung wurde eine Ortskodierung eingeführt: Negative Hölzchen zeigen mit dem Kopf nach unten (Kramer 2016a, S. 246).
Die Konstruktion der Brüche erfolgt analog mit Zahnrädern: Zwei Zahlen bzw. zwei Zahlen werden miteinander in Beziehung (durch eine Kette oder mittels direkter Verzahnung) gesetzt.
Am Beispiel der Division zeigt sich deutlich die Parallelität zwischen Handlung und formaler Rechnung: Weder mit Zahnrädern noch mit Zahlen kann man direkt dividieren. In beiden Fällen bedient man sich mit einem Trick: es wird mit dem Kehrbruch multipliziert.

Ebenfalls zeigt die Addition (vgl. Abschnitt 8.10.2) die Parallelität. Man kann Brüche nicht (direkt) addieren. Die Addition von Brüchen wird auf die Addition ganzer Zahlen zurückgeführt.

7.5 Fazit

Übersetzungen und deren Verknüpfungen können (weitgehend) als multiplikative Gruppe angesehen werden. Die Einschränkung ist „nur“ materiell und nicht prinzipiell: Es kann kein Zahnrad mit einem Zahn gebaut werden. Zwischen der Gruppe der Übersetzungen und der Gruppe der Übersetzungen existiert ein Isomorphismus, welcher als Grundlage der folgenden Modellierung dient. Daher lässt sich in der Welt der Übersetzungen alles haptisch veranschaulichen bzw. begreifen, was in der Welt der Brüche geschehen kann.

Da die Übersetzungen eine multiplikative Gruppe bilden, ist es „natürlich“ einen entsprechenden Lehrgang mit der Multiplikation zu beginnen. Es zeigt den Bruch in natürlicher Weise als multiplikatives Konzept. Das steht im Gegensatz zum aktuellen Zeitgeist, bei dem die Multiplikation nach der Addition eingeführt wird.

Der Isomorphismus erhält in der lernpsychologischen Welt eine hohe Bedeutung: Er ermöglicht geistiges und körperliches Lernen. Beides Systeme bzw. beide multiplikative Gruppen sind strukturell gekoppelt und irritieren sich gegenseitig.

Fazit: Mit dem Konzept „Bruchrechnen als Abenteuer“ kann Bruchrechnung veranschaulicht werden. Durch den „Isomorphismus“ ist sichergestellt, dass prinzipiell alle Aspekte der Bruchrechnung materiell modelliert werden können, was weitgehend im nächsten Kapitel ausgeführt wird.

Kapitel 8 Bruchrechnung als Abenteuer: Modellbildung mit Ketten und Zahnrädern

8.1 Übersicht und materielle Voraussetzung

8.1.1 Darstellung von Brüchen

Die Übersetzung eines Fahrrads lässt sich als Bruch interpretieren: Positioniert man die Übersetzung so, dass das „Kettenblatt“ mit der Kurbel oben und das „Ritzel“ unten ist, erkennt man unmittelbar den Zusammenhang zu einem Bruch. Um Kettenblatt und Ritzel miteinander „ins Verhältnis“ zu setzen, wird eine Kette verwendet.

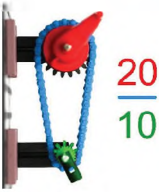


Abb. 115: Bruch und Übersetzung

Mit Übersetzungen, bestehend aus Ketten und Zahnrädern, werden ausschließlich Brüche modelliert (eine ganze Zahl kann nicht als Übersetzung dargestellt werden). Die Ratio (lat. „Rechnung“, „Berechnung“, „Erwägung“, „Vernunft“) steht in der Mathematik für den Quotient, also für das Verhältnis zweier Zahlen. Sprachlich wird man daran erinnert, dass das „rationale Denken“ ein verhältnismäßiges ist.
An einer Stelle wird über die Ratio hinausgegangen und Irr-rationale Verhältnisse dargestellt (vgl. Abschnitt 8.2). Um das Irrationale darzustellen, muss der Zahlenbereich bzw. das Material auf Walzen und Bänder erweitert werden.

8.1.2 Baukasten und materiell beschränkter Zahlenraum

8.1.2.1 Inhalte des Getriebebaukastensystems

Verwendung findet ein Baukasten, der aus den folgenden Teilen besteht. Zwei Schüler konstruieren jeweils mit dem auf der Abbildung gezeigten Material auf einer Bauplatte.

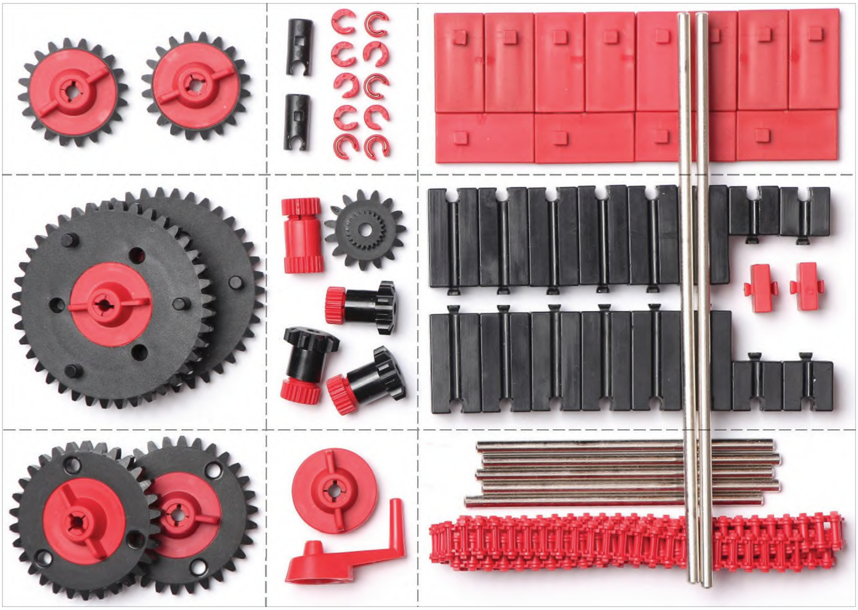


Abb. 116: Baukasteninhalt

8.1.2.2 Das Material im Kasten erzeugt keine multiplikative Gruppe

Die Menge aller Übersetzungen ist eine kommutative Gruppe (vgl. Abschnitt 7.4). Der Baukasten, mit dem die Schüler arbeiten, stellt eine endliche Teilmenge dar. Das beinhaltende Material bildet keine Gruppe, da die Abgeschlossenheit nicht gewährleistet ist. Das im Folgenden abgebildete Getriebe lässt sich weder aus einem Baukasten herstellen (dort sind nur zwei 40-Räder), noch gibt es eine einfache Übersetzung (bestehend aus zwei Zahnrädern und einer Kette).

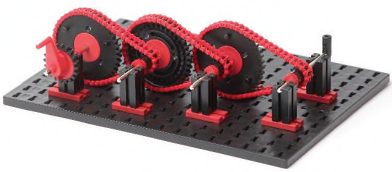
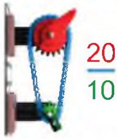
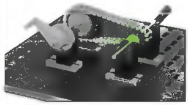


Abb. 117: Der Baukasten ist als Gruppe nicht abgeschlossen.

Für die Modellierung des Bruches $\frac{64}{1}$ müsste der Baukasten einen Zahnkranz mit 64 Zähnen und einen Zahnkranz mit einem einzigen Zahn besitzen. Anschaulich verlässt man den Zahlen- bzw. Baukastenraum.

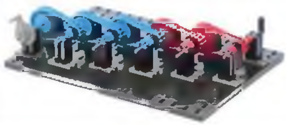
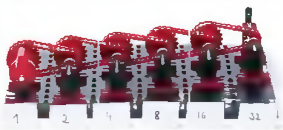
8.1.3 Konkrete Modellierung

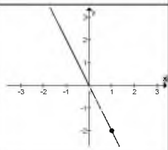
Eine Übersicht über das Zusammenspiel[34] von Theorie und Praxis zeigt folgende Tabelle.

symbolisch		**enaktiv**	
positiver Bruch	$\frac{20}{10}$	Übersetzung mit Kette	
negativer Bruch	$-\frac{20}{10}$	Übersetzung mit direkter Verzahnung	
Zähler	Bei einem Bruch die Zahl über dem Bruchstrich	Anzahl der Zähne am vorderen, mit der Kurbel angetriebenen Zahnrad	
Nenner	Zahl unter dem Bruchstrich	Anzahl der Zähne am hinteren, von der Kette angetriebenen Zahnrad	
Bruchzahl		Übersetzungsverhältnis	
Äquivalenzklasse	$\frac{40}{20}=\frac{30}{15}=\frac{20}{10}=\cdots$	alle Übersetzungen mit gleichem Übersetzungsverhältnis	
multiplikative Verknüpfung bzw. der Malpunkt	$\cdot$	Achse	
einfache Multiplikation	$\frac{30}{20}\cdot\frac{30}{40}$	Hintereinanderausführung von zwei Übersetzungen	

[34] Die Formulierung „Zusammen*spiel*" ist bewusst gewählt, da die dargestellte Didaktik auf einem spielerischen Lernverständnis basiert (vgl. Ende des Abschnitts 7.1.1).

Term/Produkt		Getriebe (Hintereinander-ausführung einer oder mehrerer Übersetzungen)	
Berechnung eines Terms		Anzahl der Winkerumdrehungen (Umdrehungen der hintersten Achse) bei einer vollständigen Kurbeldrehung an der vordersten Achse	
Gleichung bzw. Gleichheit zweier Terme	$\frac{20}{10} = \frac{10}{20} \cdot \frac{30}{10} \cdot \frac{40}{30}$	Zwei Getriebe, die mit derselben Achse starten, können auch die hinterste Achse gemeinsam benutzen.	
Kürzen und Erweitern	$\frac{20}{10} = \frac{30}{15} = \frac{40}{20}$	Verschiedene Übersetzungen ergeben dasselbe Übersetzungsverhältnis	
Kommutativität der Multiplikation		Die Reihenfolge der einzelnen Übersetzungen spielt für die Gesamtübersetzung keine Rolle.	
Minus mal Minus ergibt Plus	$\left(-\frac{20}{10}\right) \cdot \left(-\frac{40}{10}\right)$ $= 8$	Die Drehrichtung ändert sich zweimal.	
Kehrbruch	Zähler und Nenner werden vertauscht	Innerhalb einer Übersetzung werden die Zahnräder vertauscht.	
Division von Brüchen mittels Kehrbruch	Teilen durch Multiplikation mit dem Umkehrbruch.	Teilen erfolgt durch Anwendung der Umkehrübersetzung.	

Irrationale Zahlen		Aus Ketten und Zahnrädern werden Walzen und Bänder	
Brüche vergleichen		Mittels zwei Winker können Brüche nach ihrer Größe verglichen werden.	
Addieren von Brüchen	Bei gleichem Nenner (Hauptnenner) können die Zähler (als ganze Zahlen) addiert werden.	Der Hauptnenner ergibt sich als kleinste Anzahl an Kurbeldrehungen, bei der die Winker erneut senkrecht nach oben zeigen.	
Potenzrechnung, exponentielles Wachstum und Funktionen			
Potenzgesetze	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$		
Exponentielle Funktionen und Wachstum		Pro Achse halbiert sich die Anzahl der Umdrehungen	
Exponentieller Aufbau des Zahlensystems		Hintereinanderschaltung von Getrieben entspricht exponentiellem Wachstum	

neg. Exponent, die Null im Exponent	$2^{0} = 1$ $2^{-2} = \frac{1}{4}$	Im Aufbau stehen rechts positive Potenzen, links negative.	
Lineare Funktionen		Die Maschine „funktioniert“ nach dem Schaubild	
Umkehrfunktionen		Vertauschung von Kurbel und Winker bzw. die Reihenfolge des Aufbaus.	

8.1.3.1 Anatomie eines Bruch-Operators

Dem Operatorgedanken kommt eine besonders wichtige Rolle zu. Daher ist exemplarisch der Aufbau schrittweise gezeigt:

die ganze Zahl $30 \in \mathbb{Z}$	
die ganze Zahl $40 \in \mathbb{Z}$	
Die Beziehung beider Zahlen ermöglicht den Bruch. Mit dieser „Beziehung“ wird ein neuer Zahlenbereich ermöglicht. Anders formuliert: Der Quotientenkörper $\mathbb{Q}$ wird konstruiert.	
der Bruch $\frac{30}{40}$	

die multiplikative Verknüpfung bzw. der Malpunkt	
der Operator „$\cdot\,\frac{30}{40}$“	
der Operator „$\frac{30}{40}\,\cdot$“	

8.1.3.2 Die verschiedenen Zahlenbereiche und ihre Modellierung

Konstruktion von Brüchen – materielle Klarheit

In „Bruchrechnen als Abenteuer“ werden Brüche ausschließlich als Übersetzungen dargestellt. Eine ganze Zahl – ein einziges Zahnrad – lässt sich prinzipiell nicht als Übersetzung konstruieren.

Abb. 118: Bruchdarstellung

Zwar sind die ganzen Zahlen in die Bruchzahlen eingebettet, doch ist beispielsweise die ganze Zahl $2 \in \mathbb{Z}$ ein anderes Objekt als der in Abb. 118 dargestellte Bruch $\frac{20}{10} \in \mathbb{Q}$. Die Menge der Brüche entsteht ja erst durch Quotientenbildung[35] ganzer Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} | n \in \mathbb{Z}; m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$. Es können mit Zahnrädern – ebenso wie mit Papier und Bleistift – nur Brüche und keine Bruchzahlen dargestellt werden. Man muss sich stets für einen

[35] Der Quotientenkörper kann aus dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen der $Quot(\mathbb{Z}) = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ konstruiert werden.

Repräsentanten entscheiden, der eine ganze Äquivalenzklasse vertritt. Die folgenden verschiedenen Brüche beschreiben alle dieselbe Bruchzahl.

Abb. 119: Äquivalenzklasse

Auf materieller Ebene zeigt sich offensichtlich, dass der Bruch eine völlig andere Konstruktion ist als eine natürliche Zahl. Folgenden Konstrukte lassen sich schwerlich verwechseln.

Abb. 120: Der Bruch $30/40 \in \mathbb{Q}$ und die natürliche Zahl 30 $\in \mathbb{N}$

Konstruktion und Veranschaulichung unserer Zahlenbereiche

Die in der schulischen verwendeten Zahlen lassen sich konstruieren. Durch den Aufbau mit Zahnrädern erhält man gleichsam einen „haptischen Einblick“ in die Struktur der Zahlenbereiche. Diese werden im Folgenden Stück für Stück aufgebaut.

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$	
Als Beispiel sind die Zahlen 30 und 40 dargestellt. Mechanisch wird es schwierig, ein Zahnrad mit nur zwei oder keinem Zahn herzustellen.	

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

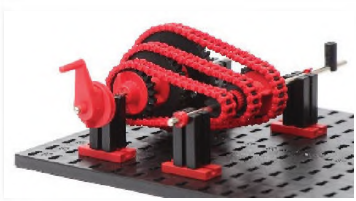
Um negative und positive Zahlen unterscheiden zu können, braucht es ein weiteres Merkmal. Versucht man, auf materiellem Wege diese neue Unterscheidung bzw. Struktur umzusetzen, etwa mit farbkodierten Rädern, wird das schwierig. Ähnlich wie bei der Null ist es nicht möglich, etwas negativ zu denken.
Um negative und positive Zahlen zu unterschieden, wird die Drehrichtung betrachtet. Man betrachtet demnach nicht mehr ein Zahnrad an sich, sondern ein Zahnrad mit Vorzeichen: Dreht es sich gegen den Uhrzeigersinn, wird eine positive Zahl dargestellt, im Uhrzeigersinn eine negative.
Das neue Objekt ist richtungsbehaftet. So zeigt das Bild rechts ohne die Pfeile keine ganzen Zahlen, sondern nur deren Betrag.

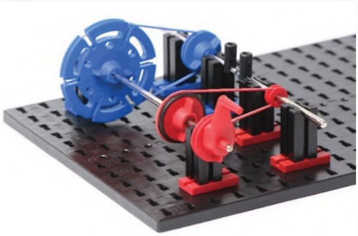
Die rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Mit der Konstruktion der Brüche bzw. des Quotientenkörpers $\mathbb{Q}$ werden Zahlen zueinander in Beziehung gesetzt. Hier gibt es zwei Möglichkeiten: Eine positive Beziehung wird mittels einer Kette erschaffen, eine negative über eine direkte Verzahnung. Mit dieser Konstruktion kommt also – ob man das will oder nicht – ein neues Vorzeichen mit auf die Welt, welches „nur" in der Beziehung steckt. Zusätzlich kann das folgende Objekt (wie bisher ein einzelnes Zahnrad) im oder gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden.

Im Beispiel werden die beiden Zahlen 3 und 4 zum Bruch $\frac{3}{4}$ in Beziehung gesetzt.

Durch die Konstruktion ergeben sich auf natürliche Weise unendliche viele Darstellungen (Brüche) für eine Bruchzahl. Ab jetzt wird mit Repräsentanten von Äquivalenzklassen gerechnet. Das Foto zeigt drei Elemente der Äquivalenzklasse „$\frac{1}{2}$". Kürzen und Erweitern ist eine unmittelbare Folge der Konstruktion des Quotientenkörpers.



Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$	
Eine wesentliche Eigenschaft der reellen Zahlen ist die Vollständigkeit. Mit Zahnrädern und Ketten lassen sich „irrationale Verhältnisse“ nicht mehr darstellen. Für „irrationale Verhältnisse“ wird das Zahnrad durch eine Walze bzw. einen Zylinder ersetzt, die Kette durch ein Band.	

Die Umgebung von Zahlen: Zahlenräume
Zahlen an sich ergeben wenig Sinn, viel bedeutsamer ist die Struktur, in der sie „leben“. Erst durch die Umgebung der Zahlen, die sogenannten Zahlen*räume,* erklärt sich der Umgang mit ihnen. Daher ist die obige Darstellung der Zahlen eine stark verkürzte bzw. naive, da sie deren Verknüpfung nicht beachtet, oder anders formuliert: Sie beachtet nicht den Raum, in dem die jeweilige Zahl existiert. Der Begriff Zahlen*system* deutet bereits auf die Beziehung der Zahlen untereinander hin (deren Verknüpfung bzw. deren Addition und Multiplikation). Die isolierte Betrachtung einer Zahl ergibt wenig Sinn.

8.1.3.3 Grenzfälle der Übersetzung: Die Null im Bruch

Es lassen sich drei Grenzfälle unterscheiden: (1) Die Null steht im Nenner, (2) die Null steht im Zähler und (3) die Null steht im Zähler und im Nenner.

(1) In der Praxis ergibt das natürlich keinen Sinn, dass das hintere Ritzel null Zähne besitzt (wie auch der Bruch $\frac{20}{0}$), ein solches Zahnrad lässt sich nicht bauen. Wird statt der Kette ein Band für die Übersetzung benutzt, lässt sich die Metallstange (die Achse) direkt antreiben.

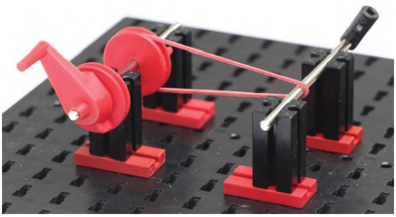


Abb. 121: Die Null im Bruch

Je dünner diese gewählt wird, desto schneller rotiert diese. Und im technisch nicht mehr zu realisierbaren Grenzfall einer unendlich dünnen Achse, würde die

Drehzahl gegen unendlich streben. Damit haben die Schüler eine Vorstellung davon was $\frac{20}{0}$ bzw. $\frac{2}{0}$ bedeutet.

(2) Je kleiner das vordere Kettenblatt, desto langsamer dreht sich die hintere Achse. Im Grenzfall würde diese sich gar nicht drehen. Es gilt $\frac{0}{10} = 0$.

(3) Um den „Bruch“ $\frac{0}{0}$ zu interpretieren, ist die Idee der Bruchzahl bzw. der Äquivalenzklasse hilfreich (vgl. Abschnitt 8.3.4).

8.2 Modellierung rationaler und irrationaler Verhältnisse

8.2.1.1 Haptische Deutung der Potenz a^n

Die Potenz a^n lässt sich folgendermaßen haptisch interpretieren: Die Basis *a* steht für die Übersetzung, die Hochzahl *n* steht für die Anzahl, wie oft die Übersetzung *a* hintereinander gebaut wird. Das Vorzeichen von *n* bestimmt, in welcher Richtung die Übersetzung eingebaut wird. So würde die Gleichung $2^{-3} \cdot 2^2 = 2^{-3+2}$ durch Umdrehen der blauen Übersetzungen dargestellt.

8.2.2 Rationale und irrationale Wurzeln

Als Beispiel soll die Quadratwurzel aus 9 gezogen werden ($\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$). Die Hochzahl steht für die Anzahl der hintereinandergeschalteten gleichen Übersetzungen. Nun lässt sich eine halbe Übersetzung nicht bauen, daher muss zuerst die „9“ mit zwei hintereinandergeschalteten gleichen Übersetzungen realisiert werden. Dann werden die Übersetzungen halbiert.

Weitere Beispiele: Im Fall $9^{-\frac{1}{2}}$ werden zusätzlich noch Kurbel und Winker vertauscht. Analog können höhere Wurzeln behandelt werden. So lässt sich die fünfte Wurzel $\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}}$ darstellen, indem man nur ein Fünftel des Getriebes mit der Gesamtübersetzung 32 verwendet:

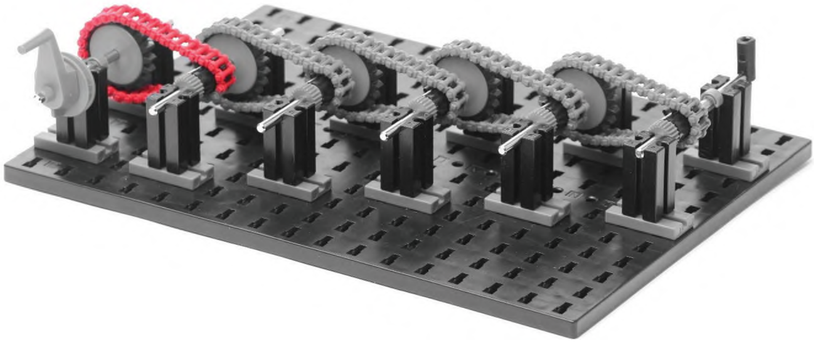


Abb. 122: Darstellung der fünften Wurzel aus 32

8.2.3 Irrationale Verhältnisse und der Zahlenkörper $\mathbb{R}$

Mit einem 3D-Drucker lässt sich prinzipiell jedes gewünschte Zahnrad ausdrucken und so scheint es auf den ersten Blick, als könne man jede beliebige Übersetzung bauen. Allerdings lässt sich nicht jede beliebige Zahl mit Zahnrädern realisieren.
So kann keine Übersetzung gebaut werden, die zweimal hintereinandergeschaltet eine Übersetzung 2 : 1 ergibt.
Als „Verhältnis" wäre hier $1{:}\sqrt{2}$ nötig. Um beliebige irrationale Zahlen darstellen zu können, muss die Kette zwischen den Rädern durch ein kontinuierliches Band ersetzt werden. Dieses macht die Sache „vollständig" in dem Sinne, dass keine Übersetzung fehlt. In der Tat handelt es sich um ein Modell für die reellen Zahlen. Die Übersetzungen mittels Zahnrädern liegen „dicht", sind aber nicht vollständig im mathematischen Sinne.

8.2.4 Einbettung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Offensichtlich lässt sich jeder Bruch statt mit Zahnrädern und Ketten auch mit Rädern und Bändern darstellen. Um einen positiven Bruch $\frac{a}{b}$ darzustellen, muss z. B. der Umfang des ersten Rades *a* betragen und der des zweiten *b.* Es kommt lediglich auf das Verhältnis der Umfänge an.
Auf diese Weise können rationale Zahlen in die reellen eingebettet werden. Dabei werden beide Verknüpfungen auf den größeren Zahlenraum übertragen bzw. erweitert. Es bleibt noch zu zeigen, dass mit Bändern und Rädern jede reelle Zahl realisiert werden kann. Hierzu wird für das hintere bzw. angetriebene Rädchen auf den Umfang „1" normiert. Für den Umfang des vorderen Rades, kann jede beliebige positive reelle Zahl gewählt werden.

8.2.5 $\mathbb{Q}$ ist Nullmenge in $\mathbb{R}$

Würden man statt mit einer Kette zwei Räder (ohne Zähne) mit einem nicht dehnbarem Band verknüpfen (vgl. Abb. 123), wäre die Wahrscheinlichkeit, dass die Winker nach irgendeiner ganzzahligen Kurbelzahl beide ebenfalls eine ganzzahlige Umdrehung hinter sich haben, exakt null.

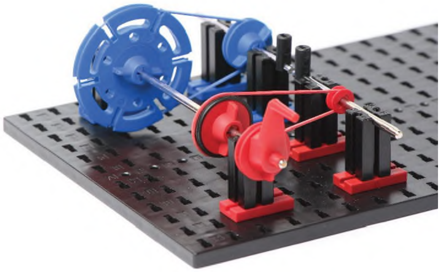


Abb. 123: Darstellung irrationaler Zahlen

Die Aussage ist gleichbedeutend damit, dass es bis auf abzählbar viele Ausnahmen keinen Hauptnenner zwischen zwei Irrationalen Zahlen gibt (vgl. Abschnitt 8.10: *Addition von Brüchen*).

8.2.6 Negative irrationale Zahlen

Irrationale negative Zahlen können ebenfalls mittels Rädern als Verhältnis dargestellt werden, die Umdrehung wird ähnlich wie bei negativen Brüchen direkt weitergegeben:

Abb. 124: Negative irrationale Zahlen

8.3 Modellierung von Bruchzahl, Äquivalenzklasse, des Kürzens und Erweitern

8.3.1 Bruchzahl und Äquivalenzklasse

Ein Bruch wird durch eine bestimmte Übersetzung dargestellt. In Abschnitt 8.1 von einem 20er-Rädchen auf ein 10er-Rädchen. Es gibt theoretisch unendlich viele Übersetzungen, die dasselbe *Übersetzungsverhältnis* ermöglichen. Die Bruchzahl steht demnach für ein bestimmtes Übersetzungsverhältnis, der konkrete Bruch für eine bestimmte Übersetzung.

Auf dem Foto hat der Schüler drei Repräsentanten der Äquivalenzklasse „$\frac{2}{1}$“ dargestellt $\frac{20}{10} = \frac{30}{15} = \frac{40}{20}$.

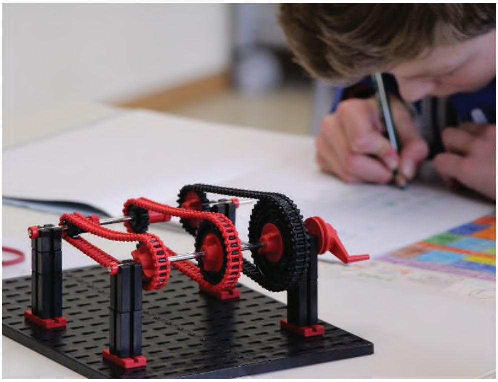


Abb. 125: Repräsentanten der Äquivalenzklasse

8.3.2 Exkurs: Abzählbarkeit

Der in Abschnitt 8.1.2 beschriebene Baukasten enthält jeweils zwei 10er-, 20er-, 30er-, 40er- Zahnräder und ein 15er-Zahnrad. Damit lassen sich genau 24 verschiedene Übersetzungen realisieren. Von diesen 24 beschreiben 13 unterschiedliche Übersetzungsverhältnisse.

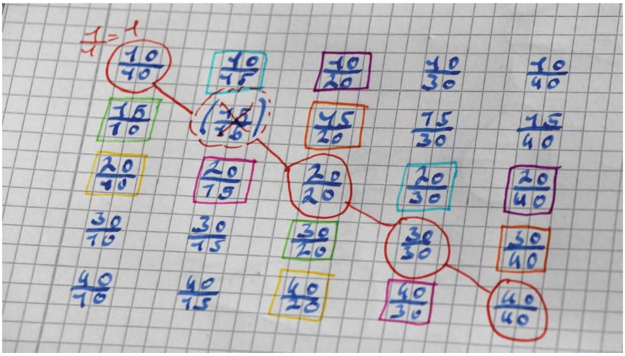
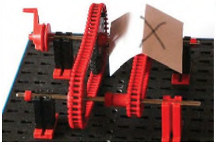
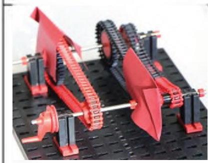


Abb. 126: Abzählbarkeit

Die Idee der Darstellung der 25 Brüche als 5 x 5 Matrix (Zähler werden nach unten größer, Nenner nach rechts) lässt sich auf die Menge der (positiven) Brüche übertragen und die Abzählbarkeit z. B. durch Cantors Diagonalenargument (z. B. Forster 1983, S. 52) gezeigt werden. Ein anschaulicher Weg sich diesem klassischen Problem zu nähern besteht in Hilberts Hotel, wo schließlich unendliche viele Busse (Busnummer = Nenner) mit jeweils unendlich vielen Plätzen (Platznummer = Zähler) noch ein Zimmer finden (vgl. Kramer 2016a).

8.3.3 Kürzen und Erweitern

Eine wichtige Anwendung der Äquivalenzklasse ist das Kürzen und Erweitern von Brüchen. Anschaulich darf sich das Übersetzungsverhältnis nicht von der speziellen Wahl der konkreten Übersetzung abhängen. Zwei Beispiele:

Aufgabe	Übersetzung und Lösung
 **Abb. 127: Kürzen und Erweitern**	$\frac{40}{20} = \frac{x}{15} = \frac{2}{1}$ $x = 30$ (Beispiel mit einer Variablen. Die Kurbel befindet sich im Bild an der oberen Achse.)
 **Abb. 128: Kürzen und Erweitern II**	$\frac{20}{\square} = \frac{\square}{30} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ (Beispiel mit Kästchen. Die Kurbel befindet sich im Bild an der unteren Achse.)

8.3.4 Interpretation von „$\frac{0}{0}$“, propädeutische Annäherung an die Differentialrechnung

Verkleinert man Zähler und Nenner um einen gemeinsamen Faktor (Kürzen), so ändert sich nichts am Verhältnis. Im Beispiel dreht sich der Winker genau zweimal.

Abb. 129: Festes Verhältnis

Sehr bald gerät man mit Zahnrädern an eine mechanische Grenze, zum Beispiel bei der Realisierung eines Zahnrades mit nur 2 Zähnen oder 0,5 Zähnen. Alternativ können statt Ketten wie weiter oben Bänder verwendet werden, statt Zahnräder nimmt man Zylinder bzw. Achsen mit einem bestimmten Durchmesser auf denen das Band läuft. Eine solche Achse kann einen Durchmesser von 2 cm oder 0,5 cm besitzen.

Somit ergibt eine Weiterführung der obigen Gleichheit Sinn:

$$2 = \frac{40}{20} = \frac{30}{15} = \frac{20}{10} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{0{,}2}{0{,}1} = \frac{0{,}0002}{0{,}0001} = \frac{0{,}0000002}{0{,}0000001} = \frac{0{,}0000000000002}{0{,}0000000000001} = \cdots$$

Offensichtlich bilden sowohl Zähler wie Nenner eine Nullfolge. Also müsste $\frac{0}{0}$ genau 2 ergeben.

Dieselbe Argumentation gilt entsprechend für $3 = \frac{30}{10} = \frac{3}{1} = \frac{0{,}0003}{0{,}0001} = \cdots$ oder für $1775228 = \frac{17752280}{1} = \frac{0{,}0001775228}{0{,}0001} = \frac{0{,}0000000000001775228}{0{,}0000000000001} = \cdots$.

Entsprechend kann $\frac{0}{0}$ jeden Wert annehmen.

Der Bezug zur Differentialrechnung liegt nahe. Eine konkrete Übersetzung kann als Steigungsdreieck betrachtet werden, im infinitesimalen Grenzfall existieren weder das Steigungsdreieck noch die Achsen eines Übersetzungsverhältnisses. Daher bezeichnet der Grenzwert $\frac{dy}{dx} := \frac{dy}{dx} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ auch keinen Bruch, auch wenn die symbolische Schreibweise an den Entstehungsprozess erinnert.

8.4 Modellierung der Multiplikation von Brüchen

8.4.1 Multiplizieren als Hintereinanderschaltung zweier Übersetzungen

Die Multiplikation zweier Brüche kann mittels Hintereinanderschaltung zweier Übersetzungen realisiert werden. Das Beispiel zeigt die Multiplikation von $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}$. Der vordere Bruch wirkt dabei als Operator (vgl. Abschnitt 8.1.3.1).

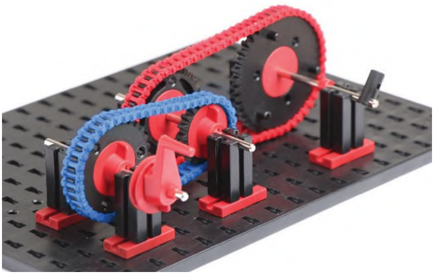


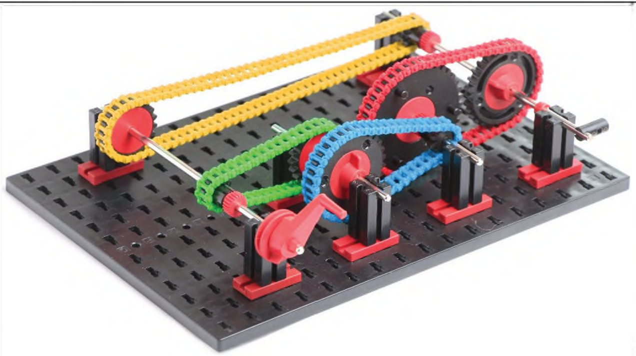
Abb. 130: Multiplikation

8.4.2 Haptisches Nachvollziehen der Rechenregel „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“

8.4.2.1 Aufbau von Gleichungen bzw. Doppelgetrieben (innerhalb der multiplikativen Gruppe)

Um die Gleichheit $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ auf haptischen Wege zeigen zu können, braucht es die Darstellung von Gleichungen.

Die Gleichheit zweier Terme (kurz Gleichung) entspricht im Modell die Gleichheit der Wirkung zweier Getriebe bzw. deren Gesamtübersetzung. Die Gleichheit zweier Terme lässt sich haptisch zeigen. Dies gelingt, indem zwei verschiedene Getriebe sowohl eine gemeinsame Kurbelachse als auch eine gemeinsame (die *gleiche*) Winkerachse benutzen und noch funktionsfähig sind. Bei unterschiedlichen Übersetzungen gäbe es mechanische „Reibereien“, je unterschiedlicher die Übersetzungen, desto mehr Reibung entsteht. Das folgende Beispiel zeigt bereits einen komplexen Aufbau.



$$\frac{20}{10} = \frac{10}{20} \cdot \frac{30}{10} \cdot \frac{40}{30}$$

bzw.

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{3}$$

Abb. 131: Modellierung einer Gleichung als Doppelgetriebe

Im Beispiel dreht sich die hintere Achse bei einer Kurbelumdrehung genau zwei Mal. Das Gleichheitszeichen ist mechanisch durch die Verwendung der gemeinsamen Achse erzwungen. Ein Gleichung kann somit als „Doppelgetriebe“ realisiert werden.

8.4.2.2 Aufbau der Gleichung $2:3 = \frac{2}{3}$, Teilen durch ganze Zahlen

Die Rechenoperation „2 geteilt durch 3“ kann nicht mit Zahnrädern direkt umgesetzt werden. Möchte man durch eine ganze Zahl (hier durch „3“) teilen, dann benötigt man die Umkehroperation zur Multiplikation. Das wird durch Umkehren des Getriebes erreicht. Aus „2 geteilt durch 3“ wird „2 mal ein Drittel“.

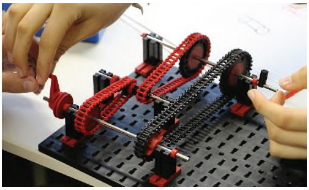
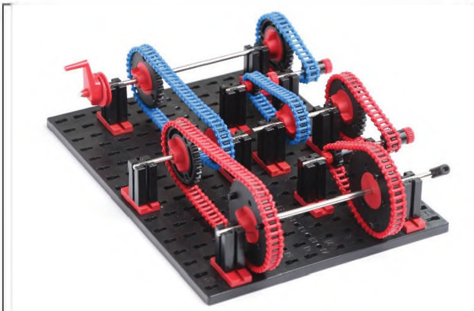


Abb. 132: Teilen durch ganze Zahlen

Man kann sich die Gleichheit der beiden Getriebe auch dadurch erklären, dass im roten Getriebe lediglich zwei identische Zahnräder eingebaut wurden. Die Übersetzung kann sich (durch den Einbau einer „1“) nicht verändern.

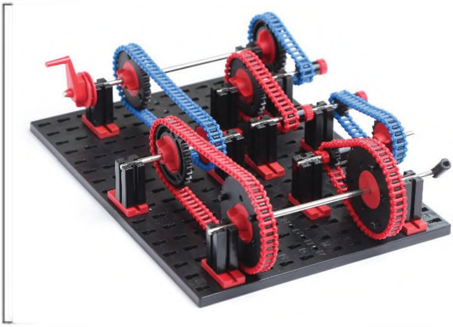
8.4.2.3 Zerlegung des Terms $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

Die Zerlegung erfolgt an einem konkreten Beispiel, das Vorgehen an sich ist allgemeingültig. Wie im letzten Abschnitt gezeigt werden nun beide Brüche entsprechend zerlegt.



$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4}$$

Anschließend werden die mittleren Übersetzungen im rechten Getriebe umgruppiert.



$$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

Die Umgruppierung ist möglich, da jede Übersetzung lediglich einen Bruch darstellt. Das allerdings die Gruppe der Übersetzungen kommutativ ist, ist für den Schüler keineswegs einleuchtend (vgl. Abschnitt „Kürzen von Getrieben“).
Jetzt können im linken Getriebe die ersten bzw. die hinteren beiden Übersetzungen getrennt in ihrer Wirkung untersucht werden.

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 3}{1}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}$$

Wie im letzten Abschnitt betrachtet man ein Getriebe, indem eine „1“ eingebaut wurde. Diese darf nach letztem Abschnitt entfernt werden, so dass

$$\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}$$

gilt. Da an keiner Stelle des Beweises die konkrete Größe der Zahnräder verwendet wurde, gilt die Rechenregel für Ketten und Zahnräder.

8.5 Exkurs I: Modellierung von Potenzen und exponentiellem Wachstum

Brüche lassen sich nicht nur multiplizieren, sondern auch potenzieren. Streng genommen gehört das Potenzieren nicht mehr zur Bruchrechnung, auch nicht das Stellenwertsystem. Da das Thema naheliegend ist, aber nicht zwingend zum Thema Brüche gehört, steht es hier als Exkurs. Es schlägt eine Brücke zu einem andern Randthema „irrationale Verhältnisse“ und Wurzelziehen.

8.5.1 Potenzieren

Eine Potenz a^n lässt sich folgendermaßen haptisch interpretieren: Die Basis *a* steht für die Übersetzung, die Hochzahl *n* steht für die Anzahl, wie oft die Übersetzung *a* hintereinander gebaut wird. Das Vorzeichen von *n* bestimmt, in welcher Richtung die Übersetzung eingebaut wird. Die Beispiele zeigen die Umsetzung von 2^5 und 4^3:

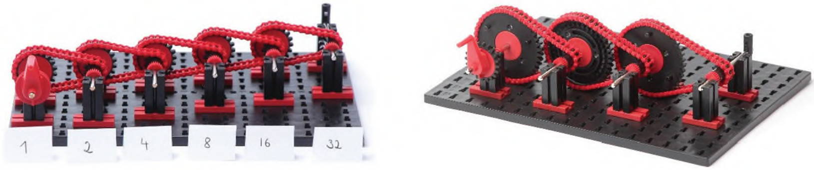


Abb. 133: Zwei Modellierungen von Potenzen

Mithilfe dieser Modelle können Zahlensysteme (hier das Zweier- und Vierersystem) veranschaulicht werden.

8.5.2 Veranschaulichung der nullten Potenz und negative Hochzahlen

Setzt man die Kurbel nicht an die erste „Stelle“, so lassen sich negative Hochzahlen modellieren. Dreht man an der Kurbel einmal, so dreht sich die Achse an der Stelle „3“ (dritte Achse von der Kurbelachse, nach rechts gezählt) entsprechend 2^3 mal.

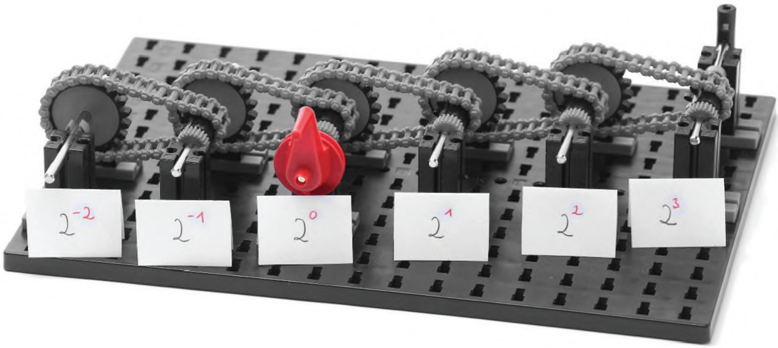


Abb. 134: Potenzen

Die Achse an der Stelle „0“ dreht sich offensichtlich einmal, das bedeutet in formaler Schreibweise $2^0 = 1$. Auch negative Hochzahlen erhalten im Exponat eine anschauliche Bedeutung. Die Achse an der Stelle „-1“ dreht sich nur ein halbes Mal, an der Stelle „-2“ ergibt sich lediglich eine Viertelumdrehung, in formaler Schreibweise: $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

Eine negative Hochzahl dreht somit die Übersetzung bzw. das Übersetzungsverhältnis um. „0“ bedeutet den Spezialfall, dass keine Übersetzung nötig ist und die Kurbel direkt gedreht werden kann.

8.5.3 Potenzgesetze

Auf ähnliche Weise lassen sich Potenzgesetze aufbauen. Das folgende Bild zeigt das Gesetz $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ am Beispiel $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}$.

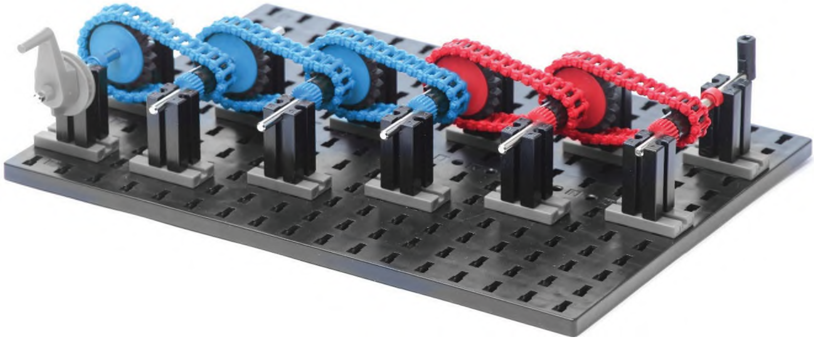


Abb. 135: Potenzgesetz

Analog lassen sich die Potenzgesetze $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ behandeln.

8.5.4 Exponentieller Zerfall, Grenzwerte

Im Folgenden werden die Umdrehungen der einzelnen Achsen betrachtet. Im Modell dargestellt ist die (diskrete) Funktion $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für ganzzahlige *n*. (In der Abbildung wurde für die Stellung der Kurbel *n* = 0 (vorderste Achse) gewählt. Man hätte auch eine weiter hinten liegende Achse wählen können, um auch negative Hochzahlen zu veranschaulichen.)

Abb. 136: Grenzwertprozess

Mit diesem Aufbau können zwei Grenzwertprozesse veranschaulicht werden: (1) Die (Partialsummen-)Folge $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots$ mit dem Grenzwert 1 und (2) ein unendliches Produkt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots$ mit dem Grenzwert 0 (die Rotationsgeschwindigkeit der einzelnen Rädchen geht gegen null).

8.6 Modellierung der Division von Brüchen

8.6.1 Division mittels inversem Element

Mit Ketten und Zahnräder lässt sich prinzipiell *keine* Division aufbauen. Stattdessen wird die Reihenfolge der hinteren Übersetzung umgekehrt.

Fast man die Menge der Übersetzungen als eine Gruppe auf, so entsteht das inverse Element durch Vertauschen der Reihenfolge der Zahnräder. Ist $g\epsilon G$ eine Übersetzung, so existiert demnach eine Übersetzung $\breve{g}\epsilon G$ mit $\breve{g}\cdot g = g\cdot\breve{g} = e$, wo e das Neutralelement ist. Hier ist nicht nur die Existenz des Inversen gegeben, sondern ebenfalls deren Konstruktion. Das Vertauschen der beiden Zahnräder entspricht unmittelbar dem Vertauschen von Zähler und Nenner (mit dem Kehrbruch multiplizieren). An diesem Beispiel sieht man sehr deutlich den Isomorphismus (strukturelle Kopplung) zwischen haptischer Modellierung und dem Rechnen mit Zahlen (vgl. Abschnitt 7.4).

8.6.1.1 Anwendung: Umkehrbruch

Allgemein kann der Umkehrbruch zu einem gegebenen Bruch gebildet werden. Ist ein Term oder in haptischer Entsprechung ein Getriebe gegeben, so findet man den Umkehrbruch durch vertauschen von Winker und Kurbel. Man „dreht“ den Bruch materiell um.

8.7 Modellierung negative Brüche, Rolle des Minus als Vorzeichen und Operator

Mit Hilfe der Richtungskodierung lassen sich negative Brüche (als Operatoren) darstellen bzw. lässt sich mit negativen Brüchen rechnen. In diesem Abschnitt findet eine neue Unterscheidung statt: Es gibt einen mathematisch positiven Drehsinn (gegen den Uhrzeigersinn) und einen negativen. Diese Unterscheidung ermöglicht die Unterscheidung zwischen Vorzeichen- und Operator-Minus.[36]

8.7.1 Darstellung negativer Brüchen

Der Bruch wird im Folgenden als Operator betrachtet. Während über eine Kette zwei Zahnräder im gleichsinnigen Drehsinn miteinander werden, ermöglicht eine direkte Verzahnung eine gegensinnige Drehrichtung der beteiligten Räder.

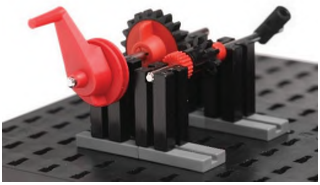


Abb. 137: Negativer Bruch

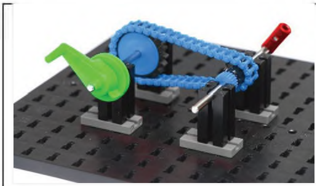
Bemerkung
Bisher wurde die Beziehung zwischen zwei Zahnrädern mittels einer Kette dargestellt. So konnte der Quotientenbildung eine materielle Entsprechung unterstellt werden. Jetzt findet eine weitere Abstraktion statt: Es geht nicht um die Kette, sondern um das Herstellen einer Beziehung zwischen den Rädern. Mit der direkten Verzahnung wird eine gegenläufige bzw. eine negative Beziehung dargestellt.

---

[36] Diese neue Unterscheidung ist in einem konstruktivistischen Lernverständnis interessant: Durch die Unterscheidung wird eine neue zusätzliche Struktur geschaffen. Bis zu diesem Zeitpunkt machte es keinen Unterschied, ob man an der Kurbel im oder gegen den Uhrzeigersinn gedreht hat. Das Modell ist komplexer geworden, aber kann auch mehr Dinge erklären, wie z. B. die Tatsache, dass Minus mal Minus Plus ergibt.
Wann dieses „Mehr“ an Wissen sinnvoll ist, muss der Leser für seine Klasse entscheiden. Auch ohne diese Unterscheidung lässt sich die Bruchrechnung behandeln. Manchmal ist weniger mehr.

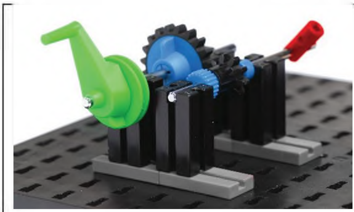
8.7.2 Unterscheidung: Vorzeichen bei Zahl und Operator

Wenn man dreimal in positiver Richtung an der abgebildeten Übersetzung (20:10) kurbelt, dreht sich die hintere Achse sechsmal im selben positiven Drehsinn.



$$(+3) \cdot \left(+\frac{2}{1}\right) = +6$$

Man könnte ebensogut in mathematisch negativer Richtung kurbeln, dann dreht auch die hintere Achse sechsmal in negativem Drehsinn: $(-3) \cdot \left(+\frac{2}{1}\right) = -6$.
Mittels einer direkten Verzahnung kann ein negativer Bruch (negatives Vorzeichen des Operators) dargestellt werden. Wenn man an der folgenden Übersetzung dreimal positiv kurbelt, dreht sich die hintere Achse sechsmal in negativer Richtung. Das Zahnrad, welches an der Kurbelachse befestigt ist, dreht sich positiv, das folgende negativ.



$$(+3) \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) = -6$$

Der Operator lautet „$\cdot \left(-\frac{20}{10}\right)$“ bzw. „$\cdot \left(-\frac{2}{1}\right)$“. Das Minus bedeutet, dass die Beziehung der beiden Zahnräder gegensinnig oder negativ ist. Eine Verbindung über eine Kette ermöglicht eine positive Beziehung zwischen den Rädern, lässt die Räder also gleichsinnig laufen.
Man kann auch mit dem obigen Aufbau zeigen, dass Minus mal Minus Plus ergibt, man braucht nur in die mathematisch negative Richtung (im Uhrzeigersinn) zu kurbeln:

$$(-3) \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) = +6$$

Aber das ist für die erste Begegnung mit „Minus mal Minus“ nicht so nett, da hier ein Vorzeichen einer Zahl (des Inputs) und das Vorzeichen eines Operators miteinander verknüpft werden. Und doch ist diese Darstellung sehr lehrreich, da ein Vorzeichen-Minus (einer Zahl) etwas komplett anderes als ein Minus in einem Operator darstellt.

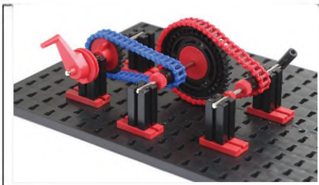
Dieses Anderssein unterscheidet sich deutlich in der Haptik: Kurbeln vs. Beziehung. Ganz anders als in der formalen Darstellung: „–“ vs. „–“.

8.7.3 Richtungskodierung, Rollenklarheit

Richtungskodierung ist abstrakt. Es geht nicht mehr allein um das Material an sich bzw. der Zahl, sondern um dessen Orientierung bzw. um die orientierte Zahl. Hier ist ein tieferes Verständnis nötig. Ein Beispiel zeigt die Schwierigkeit der Abstraktion: Ein Kindergartenkind versteht schnell, dass Autos gefährlich sind und dass an der Straße Lebensgefahr besteht. Viel schwieriger ist die Einsicht, dass die Gefahr richtungskodiert ist. So ist ein wegfahrendes Autos völlig ungefährlich bei einer Straßenüberquerung.
In einem historisch-genetischen Sinne ist es natürlich, zuerst nicht auf die Drehrichtung zu achten und diese erst später zu deuten. Die Unterscheidung der Art des Minus, also ob es als Operator wirkt oder als Vorzeichen, bedeutet eine noch höhere Vertrautheit. Im Unterricht sollte das Minus „in seiner Rolle“ bleiben, ansonsten kommt es unweigerlich zu Verständnisschwierigkeiten. In einem konstruktivistischen Sinne ist die „Rolle“ ein wesentlicher Teil der (Lern-)Umgebung (vgl. Zusammenhang von Äußerung und Rolle in Abschnitt 3.1). Somit wird im folgenden Abschnitt ausschließlich der Operator verwendet, um Rollenklarheit zu gewährleisten. Das Vorzeichen (Richtung der Kurbeldrehung) wird noch nicht thematisiert.

8.7.4 Minus mal Minus (Operator mal Operator)

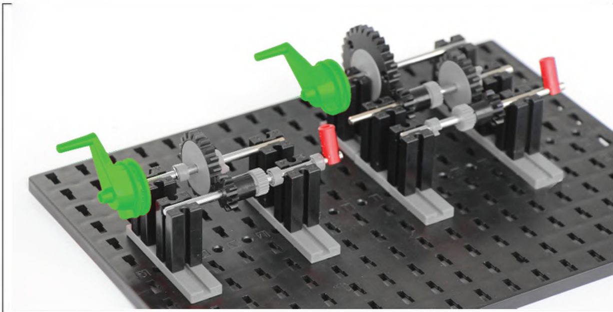
Das Minus mal Minus Plus ergibt, erweist sich in der Modellierung als einfache (!) Selbstverständlichkeit. Verknüpft man zwei gegensinnige Übersetzungen, bleibt der Drehsinn zwischen dem ersten und letzten Rädchen erhalten.
Diese haptische Klarheit ist alles andere als selbstverständlich: *„Ist es nicht symptomatisch, dass selbst ein Mathematikprofessor im Rahmen eines Vortrages auf die Frage eines Schülers, warum eigentlich „Minus mal Minus Plus ergibt“, keine knappe, verständliche und vor allem altersgerechte Antwort geben kann?“* (Neidhardt & Rauch 2014, S. 7).

	$\left(\frac{20}{10}\right) \cdot \left(\frac{40}{10}\right) = \mathbf{8}$

	$\left(-\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{10}}\right)\cdot\left(-\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{10}}\right)=\mathbf{8}$

8.7.5 Minus mal Minus: Minus im Operator und Vorzeichenminus im Vergleich

Ein Beispiel zeigt den direkten Vergleich der beiden verschiedenen Verknüpfungen: Der Operator sei „-2“, etwa durch eine Direktverzahnung eines Zwanzigerrades auf das eines Zehners:

	
Auf der linken Seite wird dreimal negativ an dem Operator $[-\mathbf{2}]$ gekurbelt. Die Ausgabe sind sechs Umdrehungen in positiver Richtung bzw. +6.	Auf der rechten Seiter wird einmal am Operator $[(-\mathbf{3})(-\mathbf{2})]$ bzw. $[+\mathbf{6}]$ in positiver Richtung gekurbelt. Die Ausgabe ist +6.
Formale Darstellung: $$(-3)[-\mathbf{2}]=+6$$	Formale Darstellung: $$(+1)[(-\mathbf{3})(-\mathbf{2})]=+6$$ bzw. $$(+1)[+\mathbf{6}]=+6$$

Die rechte Darstellung ist für den Lernenden einfacher zu verstehen, weil beide Vorzeichen dieselbe „Rolle“ einnehmen. Im konkreten Aufbau sind beide Minuszeichen ähnlich realisiert (vgl. hierzu auch das gestaltpsychologische Gesetz der Ähnlichkeit). Es wäre an dieser Stelle didaktisch ungeschickt ein Vorzeichen- mit einem Minus im Operator zu verknüpfen. Im Umgang mit Funktionen ergibt beides Sinn: Eine negative Eingabe (Vorzeichen) und eine negative Funktion (Operator).

8.7.6 Aufbau der Operatoren: $\frac{+2}{+1} = \frac{-2}{-1} = +\frac{2}{1}$ und $\frac{+2}{-1} = \frac{-2}{+1} = -\frac{2}{1}$

Man kann die einzelnen Räder betrachten, aus denen der Operator zusammengesetzt ist. Im Fall der Kette laufen entweder beide in positiver Richtung $\frac{+2}{+1}$ (gegen den Uhrzeigersinn) oder beide in negativer $\frac{-2}{-1}$, was wiederum eine gleichsinnige Beziehung ergibt. Die Beziehung beider Räder ist „positiv", der Operator ändert daher den Drehsinn nicht, für die Konstruktion ist es unwesentlich, welches Rädchen sich in welcher Richtung dreht, daher kann man auch nur die Wirkung des Operator $+\frac{2}{1}$ aufschreiben.[37]

Analog lassen sich negative Operatoren untersuchen: Aufgrund der direkten Verzahnung drehen sich beide Zahnräder gegensinnig. Im Fall $\frac{+2}{-1}$ drehen sich das Zähler-Rad in positiver Richtung und das nachfolgende Nenner-Rad in negativer. Ebenso versteht sich der Bruch $\frac{-2}{+1}$. Dreht sich das Zähler-Rad negativ, muss sich das (hintere) Nenner-Rad positiv drehen.

Ob das Minuszeichen unten oder oben im Bruch steht, spielt somit für das Getriebe keine Rolle. Entscheidend ist, dass sich beide Zahnräder in entgegengesetzter Richtung bewegen und somit der Operator $-\frac{2}{1}$ die Drehrichtung umkehrt.

8.8 Exkurs II: Modellierung linearer Funktionen

Jede Bruchzahl beschreibt eine (eindimensionale) lineare Abbildung. Der folgende Exkurs ist naheliegend, auch wenn er nicht direkt zur Bruchrechnung gehört. Es ist der zweite Exkurs der „naheliegend" ist. Damit wird gezeigt, dass das Material an sich (hier Ketten und Zahnräder) stets interdisziplinär sind. Die Themengebiete „Brüche", „Potenzrechnung", „Stellenwertsystem", „Funktionen" sind sozusagen über das Zahnrad miteinander vernetzt bzw. genauer besteht eine materielle Verwandtschaft (vgl. Abschnitt 5.3.1).

8.8.1 Modellierung linearer Funktionen als lineare Maschinen

Die Abbildung zeigt einen Vervierfacher bzw. die Modellierung der Funktion f(x) = 4x. Dreht man z. B. zweimal in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) an der Eingabe bzw. Kurbel ($x = +2$), so dreht sich die Ausgabe bzw. der Winker achtmal ($y = +8$) in derselben Richtung. Bei einer halben Kurbelumdrehung in negativer Richtung ($x = -\frac{1}{2}$), würde der Winker zweimal in negativer Richtung rotieren ($y = -2$).

[37] Achtung: Das letzte „+"-Zeichen ist ein neues. Es bezeichnet nicht mehr die Drehrichtung eines Rädchens sondern den Widersinn zweier Rädchen. Gleiches Symbol, andere Deutung.

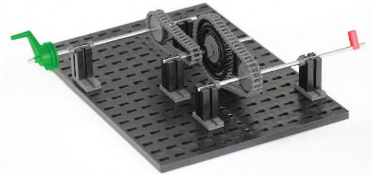


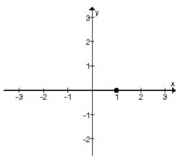
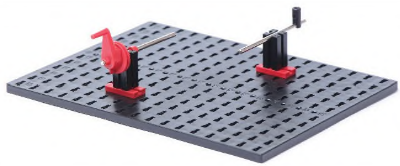
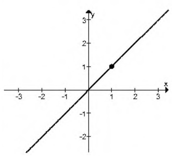
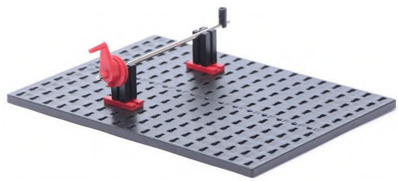
Abb. 138: Modell einer linearen Funktion

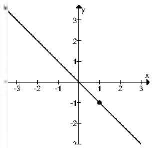
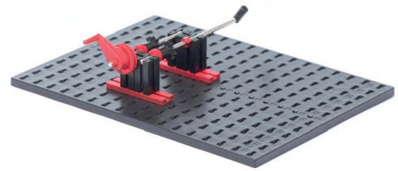
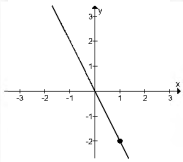
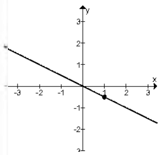
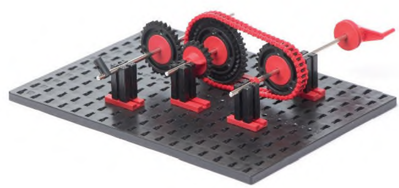
8.8.1.1 Bemerkung: Minus als Operator und Vorzeichenminus

Es wird zwischen dem Minus als Operator und einem Vorzeichenminus unterschieden. Die Drehrichtung an der Kurbel (bzw. am Winker) steht für das Vorzeichen. Um ein Operatorminus zu erzeugen, müssten zwei Zahnräder (innerhalb der Maschine) direkt (ohne Kette) verzahnt werden. Im Beispiel des Vervierfachers gibt es demnach kein negatives Vorzeichen („Gegensinnigkeit“) im Operator (vgl. Abschnitt über Vorzeichenminus und Operator in diesem Abschnitt oben).

8.8.2 Spezielle realisierbare Maschinen

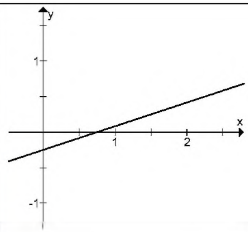
Alle Funktionen, die mit Zahnrädern und Ketten dargestellt werden können, sind (in ihrer Bauweise) linear. Die Anzahl der Kurbelumdrehungen entsprechen der Stelle auf der *x*-Achse (im mathematisch positiven Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn), die Anzahl der Winkerumläufe wird auf die *y*-Achse abgebildet. Der Punkt im Schaubild steht für die Situation nach einer Kurbelumdrehung.

Nullfunktion $f(x) = 0$		
Identität $f(x) = x$		

Invertierter (Vorzeichenwechsler) $f(x) = -x$		
Lineare Funktion $f(x) = mx$ Das Beispiel zeigt $f(x) = -\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}x = -\frac{2}{1}x$. Die Kurbel ist um $+\frac{1}{8}$ gedreht, entsprechend der Winker um $f(x) = -\frac{2}{1}\left(+\frac{1}{8}\right) = -\frac{2}{8}$.		
Umkehrfunktion $f(x) = \frac{1}{m}x = m^{-1}x$ (für m ungleich null). $f(x) = \frac{1}{-\frac{2}{1}}x = -\frac{1}{2}x$.		

8.8.3 Modellierung affin-lineare Funktionen

Auch affin-lineare Funktionen lassen sich enaktiv modellieren. Eine Verschiebung in y-Richtung bedeutet, dass der Winker in der Nullstellung (Kurbel oben, noch keine Drehung erfolgt) bereits einen positiven oder negativen „Vorsprung“ besitzt. Im Beispiel ist der Winker um ein negatives Viertel (im Uhrzeigersinn) verdreht.

		$f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$
Maschine	Schaubild	Zuordnungsvorschrift

Bei der Darstellung von größeren Winkelweiten entstehen dieselbe Probleme wie bei der Anzeige einer Uhr. Man kann an der Zeigerstellung ebenso wenig den Tag ablesen, wie an der Winkerstellung, wie viele ganze Umdrehungen er bereits hinter sich hat.

Auch das Verschieben in *x*-Richtung lässt sich verstehen. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)$ zeigt dasselbe Schaubild, offensichtlich handelt es sich um dieselbe Funktion bzw. dieselbe Maschine. Lediglich die Stellung hat sich verändert. Setzt man in die Zuordnungsvorschrift die aktuelle Kurbelstellung $(+\frac{3}{4})$ ein, ergibt sich die Winkerstellung Null.

Abb. 139: Bedeutung der Kurbelstellung

8.8.4 Modellierung der Steigung als Übersetzungsverhältnis

Wird mit einer Umdrehung pro Sekunde (= ein Hertz) gekurbelt, entspricht die Frequenz der Steigung im Schaubild. Das folgt unmittelbar aus dem Übersetzungsverhältnis.
Ebenso lässt sich eine Beziehung zwischen Übersetzung und Steigungsdreieck herstellen: Im Schaubild entspricht der *x*-Wert dem Nenner-Rad bzw. dessen Drehung, der *y*-Wert dem Zähler-Rad.

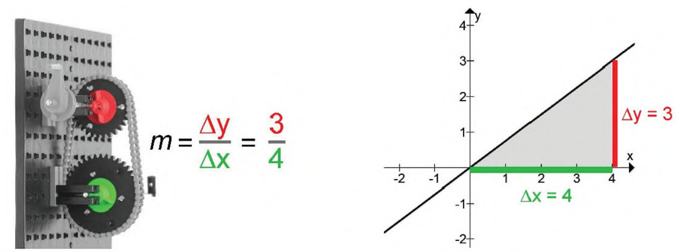


Abb. 140: Steigungsdreieck und Übersetzung

8.8.5 Modellierung von Funktion und Umkehrfunktionen

Zu einer Funktion kann eine weitere Funktion konstruiert werden, welche die Wirkung der ersten aufhebt. Als Beispiel dient der Vervierfacher, dessen Umkehrfunktion bestimmt wird.

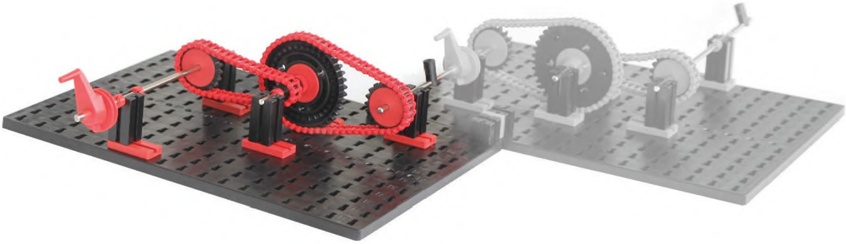
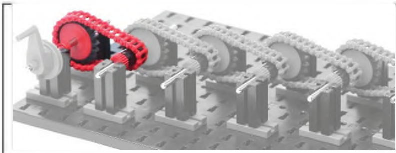
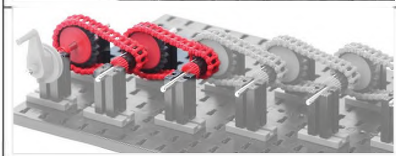


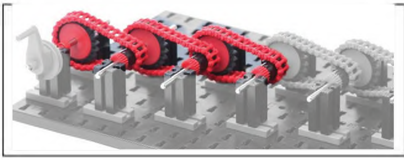
Abb. 141: Umkehrfunktion

Die graue Umkehrfunktion neutralisiert die Wirkung des Vervierfachers, so dass sich Kurbel und Winker sich identisch drehen.

8.8.6 Zusammenhang zwischen linearen und exponentiellen Funktionen

Zwischen linearen und exponentiellen Funktionen gibt es einen engen Zusammenhang. Exponentielles Wachstum beschreibt nichts anderes als die einfachste Art der Rückkopplung: Was als Funktionswert ausgegeben wird, wird erneut eingegeben.
Alle Maschinen, welche sich mit Ketten und Zahnräder umsetzen lassen, sind lineare bzw. proportionale Maschinen. Durch das Hintereinanderschalten wird keine exponentielle Funktion gebaut, nach wie vor ändert sich der Winker proportional mit der Kurbel. Exponentiell wächst die Übersetzung (der aktuell gebauten linearen Funktion). Man betrachtet eine exponentielle Maschinenentwicklung:

	$f(x) = 2^1$
	$f(x) = 2^2$



$f(x) = 2^3$

Abb. 142: Exponentielle Entwicklung

8.9 Brüche vergleichen, kleinstes gemeinsames Vielfaches im Modell

Brüche miteinander zu vergleichen kann als Hinführung zur Addition bzw. Subtraktion betrachtet werden. Statt Gleichheit werden Unterschiede untersucht. Noch werden die Unterschiede nicht gemessen, es handelt sich somit bei Größer- und Kleinerrelationen um eine qualitative Betrachtung. Geht man einen Schritt weiter und betrachtet den Unterschied quantitativ, betrachtet man Differenzen bzw. studiert die Subtraktion. Da letztere die Umkehrung zur Addition ist, wundert es auf den zweiten Blick nicht, dass dieses Unterkapitel eine mögliche Hinführung zur Addition von Brüchen darstellt.

8.9.1 Größer- und Kleinerrelation

In Abschnitt 8.3.1 wird die Äquivalenzklasse als gleiches Übersetzungsverhältnis gedeutet bzw. dargestellt. Es ist auch möglich, verschiedene Übersetzungen bzw. Brüche zu vergleichen. Als Beispiel werden die Brüche $\frac{2}{3}\ und\ \frac{3}{4}$ miteinander verglichen.

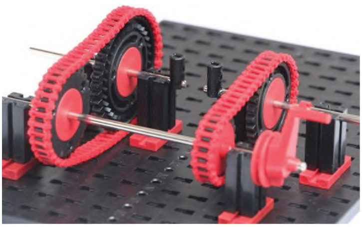


Abb. 143: Vergleichen von Brüchern

Die Kurbel dreht über eine gemeinsame Achse (im Bild die vordere) zwei Zahnräder gleichzeitig an. Nach einer Umdrehung stehen beide Winker unterschiedlich. Entsprechend des jeweiligen Bruches bzw. der jeweiligen Übersetzung (links $\frac{3}{4}$, rechts $\frac{2}{3}$).

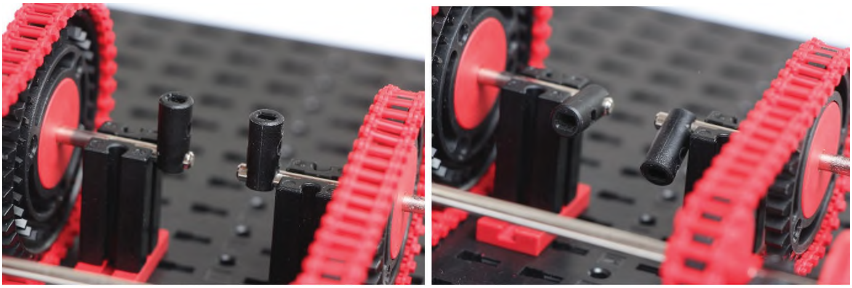


Abb. 144: Winkerstände nach keiner (links) und nach einer (rechts) Umdrehung

Der linke Bruch bzw. die höhere Übersetzung hat eine größere Achsenumdrehung. Das rechte Bild zeigt das Ergebnis nach einer Kurbelumdrehung. Der linke Winker hat sich entsprechend $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ weiter gedreht, als der rechte.

8.9.2 Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Nach einer Kurbelumdrehung sind (bei unterschiedlichen Bruchzahlen) beide Winker unterschiedlich ausgerichtet (siehe Abschnitt 8.9.1: Vergleichen von Brüchen). Das kleinste gemeinsame Vielfache entspricht der gemeinsamen Vielfachheit an Kurbelumdrehungen, bei der beide Winker wieder nach oben zeigen.
Im Beispiel in Abschnitt 8.9.1 stehen die Winker nach genau 12 Umdrehungen wieder an der Ausgangsstelle. Im folgenden Unterkapitel 8.10 wird die Idee des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (Hauptnenner) weiter zur Addition ausgebaut.
Ein weiteres Beispiel[38] zeigt die Ungleichung $\frac{4}{9} < \frac{3}{8}$ bzw. $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$. Entsprechend dem Hauptnenner zeigen nach 72 Kurbelumdrehungen beide Winker zum ersten Mal wieder nach oben.

[38] Hier wurde ein 30er Rad zusätzlich verwendet. Alternativ lässt sie die Ungleichung $\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$ mit dem Inhalt eines Kastens aufbauen.

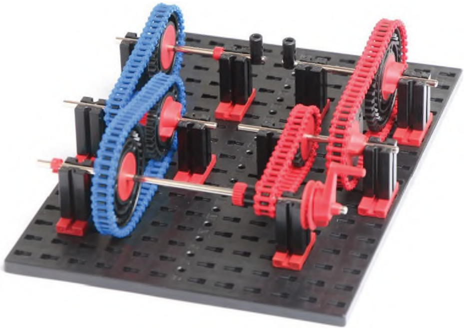


Abb. 145: Haptisch ermittelter kgV

8.10 Modellierung der Addition

Der Bruch ist ein multiplikatives Konzept. Ein Wunder, dass sich Brüche überhaupt addieren lassen und dazu auch noch eindeutig. Auch das Vorgehen ist komplexer als bei der Multiplikation: Zähler und Nenner können nicht (wie im analogen Fall der Multiplikation) einfach zusammengerechnet werden. Es wird erweitert bzw. aus einer Äquivalenzklasse der geeignete Repräsentant zur Addition gewählt. Und schließlich werden nur die Zähler addiert.

Ebenso „umständlich“ verhält es sich mit Ketten und Zahnrädern. Das ist eine direkte Folge des „Isomorphismus“ zwischen dem Material und der Zahlenwelt (vgl. Abschnitt 7.4): Übersetzungen sind wie Brüche ein multiplikatives Konzept und nicht in direkter Weise zur Addition bestimmt.

8.10.1 Addition ganzer Zahlen

Dreht man einmal an der Kurbel, so drehen sich entsprechend der Übersetzungen der linke Winker dreimal und der rechte zweimal. Beide Umläufe lassen sich zusammenzählen und ergeben 3 + 2 = 5.

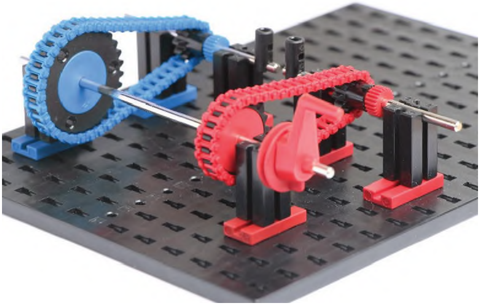


Abb. 146: Addition ganzer Zahlen

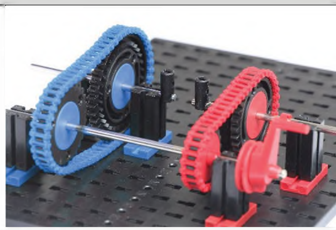
Auf diese Weise lassen sich im Prinzip alle Brüche zusammenzählen: Einmal an der Kurbel drehen und die Summe der Winkerumläufe bilden.

8.10.2 Addition von Brüchen

Im Beispiel von $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$ kommt keine ganze Zahl heraus. Jetzt müsste man Teile von Winkelabläufen addieren. Das ist nicht falsch, entspricht jedoch noch nicht einer gewünschten Addition von Brüchen. Der Trick ist folgender: In 8.10.1 konnte man Addieren, weil es sich jeweils um ganze Umläufe handelte. Also kurbeln wir im Fall von $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$ häufiger, genauer: so lange, bis beide Übersetzungen (zum ersten Mal) ganze Umläufe ergeben. Das Ergebnis wird dann um diesen Faktor zu hoch sein, also teilt man die Summe der Winkerumdrehungen durch die Anzahl der Kurbelumdrehungen.

8.10.2.1 Haptische Durchführung der Addition

Um die Addition haptisch durchzuführen, müssen wir den kgV nicht wissen. Das Verfahren ist hier beschrieben. Es gibt nur ganze Kurbelumdrehungen:

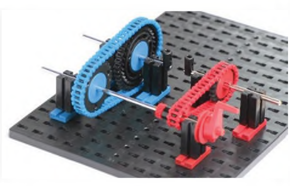
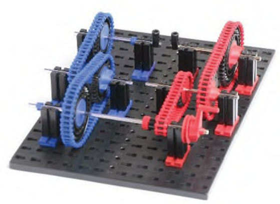
Allgemeines Verfahren	**Beispiel** $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$
Kurbel und beide Winker nach oben ausrichten.	
Es wird so oft gekurbelt, bis *beide* Winker wieder in Ausgangsstellung sind. Drei Dinge werden gezählt: - die Anzahl *n* der Kurbelumdrehungen	Es ergibt sich zum ersten Mal wieder dasselbe Bild wie oben, und zwar nach: - 12 Kurbelumdrehungen

- die Anzahl der Umdrehungen des linken Winkers und - die des rechten Winkers Am besten arbeitet man hier zu dritt.	- 9 Umdrehungen des linken Winkers - 8 Umdrehungen des rechten Winkers
Dann wird die Summe der beiden (ganzzahligen) Winkerumdrehungen gebildet.	$9 + 8$
Da *n*-mal an der Kurbel gedreht wurde, ist das Ergebnis *n*-mal zu hoch. Also muss noch durch *n* geteilt werden.	$\frac{9+8}{12}$

Damit ist die Addition von Brüchen auf die Addition ganzer Zahlen zurückgeführt. Das skizzierte Verfahren ist sogleich ein konstruktiver Beweis. Ohne den Aufbau zu kennen, könnte man so vorgehen:

Symbolisch		**Enaktiv**
$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$	Ermittlung des Hauptnenners. (Alternativ Produkt der Nenner bilden.)	Kurbelumdrehungen zählen, bis beide Winker oben stehen: $\mathbf{12}$ (Ergibt stets den Hauptnenner.)
$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)\cdot 12$ $=\frac{3}{4}\cdot 12+\frac{2}{3}\cdot 12$ $=9 \quad + \quad 8$	Multiplizieren mit dem Hauptnenner. (Alternativ mit dem Produkt von oben.) Dadurch wird das Ergebnis um diesen Faktor zu hoch.	Addition der beiden Winkerumdrehungen: $\mathbf{9}+\mathbf{8}$.
Anschließend wird durch den Hauptnenner (bzw. das Produkt der Nenner) wieder geteilt. Es ergibt sich im Beispiel $\frac{9+8}{12}$.		

8.10.2.2 Zwei weitere Beispiele

Allgemeines Verfahren	**Beispiel:** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$	**Beispiel:** $\frac{4}{9}+\frac{3}{8}$
Kurbel und beide Winker nach oben ausrichten.		

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Es wird so oft gekurbelt, bis beide Winker zum ersten Mal wieder in Ausgangsstellung sind. Drei Dinge werden gezählt:
- die Anzahl n der Kurbelumdrehungen
- die Anzahl der Umdrehungen des linken Winkers und
- die des rechten Winkers
Am besten arbeitet man hier zu dritt.</td>
<td colspan="2">Es ergibt sich jeweils dasselbe Bild wie oben, und zwar nach:</td>
</tr>
<tr>
<td>- 4 Kurbelumdrehungen
- 3 Umdrehungen des linken Winkers
- 2 Umdrehungen des rechten Winkers</td>
<td>- 72 Kurbelumdrehungen
- 32 Umdrehungen des linken Winkers
- 27 Umdrehungen des rechten Winkers</td>
</tr>
<tr>
<td>Dann wird die Summe der beiden (ganzzahligen) Winkerumdrehungen gebildet.</td>
<td>$3+2$</td>
<td>$32+27$</td>
</tr>
<tr>
<td>Da n-mal an der Kurbel gedreht wurde, ist das Ergebnis n-mal zu hoch. Also muss noch durch n geteilt werden.</td>
<td>$\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$</td>
<td>$\frac{32+27}{72}=\frac{59}{72}$</td>
</tr>
</table>

8.11 Fazit

Fazit: Mit Übersetzungen können alle Themen der Bruchrechnung visualisiert werden. Weiter führt das Material über die Bruchrechnung hinaus, was exemplarisch an den Exkursen „Exponentielles Wachstum“ und „Modellierung linearer Funktionen“ gezeigt wurde.

Kapitel 9 Umsetzung in Klasse 6

Eine Empfehlung für einen bestimmten Lehrgang anzugeben – ohne Lehrer und Schüler zu kennen – das wäre nicht im Sinne dieser Arbeit. Dann wäre der Unterricht keine eigenständige Konstruktion, sondern lediglich eine Kopie. Mit den Worten von Winter: *„Gern würde ich hervorheben, dass Mitglieder dieser oder jener möglichen Adressatengruppe (Lehrer, Didaktiker, Mathematiker, Studenten, ...) dies oder jenes lernen könnten, wenn sie dieses Buch durcharbeiten; aber das mag ich nur äußerst zögernd tun. Es würde womöglich der Hauptthese über das (Mathematik-)Lernen, die ich hier vertrete und unter immer neuen Aspekten besser zu verstehen trachte, widersprechen, wenn ich die Hoffnung hätte, durch Buchlektüre könne im Sinne einer belehrenden Veranstaltung Wissen vom Schreiber in den Leser transportiert werden.“* (Winter 2016, S. VII).

Das Material Ketten und Zahnräder legt nahe, mit der Multiplikation zu beginnen. Aber auch das ist „nur“ eine Konstruktion, wenn auch eine naheliegende. Eine Landschaft kann auf vielen Wegen und Reihenfolgen erkundet werden. Die gezeigten Modellierungen bilden gleichsam einen Wald an Möglichkeiten und die Wanderer (Lehrer und Schüler) werden ihren Weg gehen. Zu behaupten, dass es den „richtigen“ Weg, etwa im Sinne eines „Lernprogramms“, welches abgearbeitet werden sollte, erscheint vor dem konstruktivistischen Hintergrund seltsam.

Im Folgenden ist ein Weg aufgezeigt, den die Schüler mit mir gegangen sind. Da er mit Lern- und Spielfreude durchgeführt wurde, ist es *ein* aber nicht *der* mögliche Weg durch die Landschaft der Bruchrechnung. Natürlich habe ich die Hoffnung, dass sich Leser, die an einer konkreten Umsetzung interessiert sind, anregen lassen. Doch gilt der erste Blick immer auf das Zusammenspiel zwischen Mensch und Wissensgebiet. Es braucht die Stimmigkeit des „Dreiklangs“ Schüler-Lehrer-Wissensgebiet.

Exemplarisch werden zwei erlebte Lernumgebungen aufgezeigt. Von Bedeutung ist der konkrete Inhalt bzw. das Thema ebenso wie die jeweilige Rollenbelegung der Schüler. Weiter möchte ich die Wichtigkeit der bildlichen Darstellung hervorheben, da sich das Erleben ikonisch mitunter besser ausdrücken lässt, als durch Text. Den Bezug zur Konzeption habe ich mit Querverweisen in grün angefügt. Es sei bemerkt, dass die Auswahl der Lernumgebungen beliebig ist. Jede Lernumgebung aus „Mathematik als Abenteuer“ (Kramer 2016a, 2016b, 2017c) lässt sich auf die ersten sieben Kapitel abbilden. Bruchrechnen stellt jedoch (vgl. Malle 2004) ein gutes Beispiel dar.

9.1 Durchgeführter Lehrgang im Überblick

Die folgende Umsetzung zeigt einen Lehrgang über 12 Wochen, den ich im Frühling 2014 in der Französischen Schule in Tübingen durchgeführt habe. Die Reihenfolge war im Wesentlichen gleich, wahrscheinlich deswegen, weil die „spätere“ Klasse von der „früheren" gehört hatte. Das Thema „Lineare Funktionen" wurde nur in einer Klasse durchgeführt. Die Tabelle zeigt die Anordnung des Stoffes.

Thema	Kurze Beschreibung
Einführung des Modells	▪ Erste Begegnung mit einem Getriebe ▪ Schülerdiskussion und Analyse des Modells
Erste Schülerkonstruktionen	▪ Schüler bauen ein eigenes Modell auf.
Brüche am Fahrrad	▪ Vertiefung des Modelles bei der Untersuchung des eigenen Fahrrades
Erweitern und Kürzen	▪ Bruch und Bruchzahl ▪ Brüche nach der Größe vergleichen
Exponentielles Wachstum	▪ Potenzen ▪ Potenzgesetze ▪ Null im Exponent ▪ negative Hochzahlen
Division	▪ Teilen durch ganze Zahlen und Brüche
Multiplizieren von Brüchen	▪ Doppelgetriebe und Gleichungen ▪ Multiplikationsregel ▪ Primzahl(-räder)
Negative Brüche	▪ Minus mal Minus ▪ Bedeutung des Minuszeichen: Vorzeichen und Operatoren
Addition	▪ Erinnerung: Bruchzahlen der Größe nach vergleichen ▪ Addition von Brüchen
Lineare Funktionen	▪ Bau einer Multiplikationsmaschine ▪ Allgemeine lineare Funktionen ▪ Umkehrfunktionen ▪ Verkettung von Funktionen (lineare und exponentielle Funktionen)

9.2 Einführung des Modells – ein erstes Produkt

Für diese Lernumgebung wird nur ein einziger Fischertechnikkasten und kein Klassensatz benötigt. Die erste Begegnung ist grundlegend für die Entwicklung von Schülervorstellungen. In dieser wird der Zahlenraum der Brüche konstruiert (zentrale „Ballung" im Abschnitt 1.5.2.4).

Eingeführt wird in ein haptisches Modell für Brüche und deren Verknüpfung. Das in Abschnitt 9.2.1 vorgestellte Rätsel ist alles andere als einfach, auch wenn es auf den ersten Blick vielleicht so erscheint: Der Schüler muss in dieser Übung Zahnräder zueinander ins Verhältnis setzen (vgl. Rollen eines Bruches im Abschnitt 6.3.1) und die Hintereinanderausführung zweier Übersetzungen als Multiplikation deuten (vgl. Abschnitt 8.4.1)! Der Schüler begegnet hier nicht lediglich der Darstellung der Multiplikation $2 \cdot 4$ im Modell – er konstruiert auf haptischer Ebene das Rechnen mit Getrieben, was Bruchzahlen und deren multiplikative Verknüpfung in direkter Weise entspricht (vgl. zur strukturellen Kopplung die Abschnitte 7.4 und 4.1). Da es um (Übersetzungs-)Verhältnisse geht, schwingt hier bereits die unterschiedliche Darstellung gleicher Bruchzahlen mit ($\frac{20}{10} = \frac{30}{15} = \frac{40}{20}$) und damit das Kürzen und Erweitern von Brüchen (vgl. Abschnitt 0). Auch die Multiplikationsregel ist schon fast sichtbar (vgl. Abschnitt 8.4.2).

9.2.1 Erste Begegnung mit einem Getriebe

Der Lehrer zeigt das fertig aufgebaute Getriebe seinen Schülern (zu „Spielzeug im Unterricht" vgl. 5.2.1.1).

Abb. 147: Rätsel

Die Lehrerfrage lautete: *„Wie oft dreht sich das letzte Zahnrad (auf dem Foto das rechteste), wenn man die Kurbel links einmal dreht?"*
Dann drehte der Lehrer einmal an der Kurbel: Das hintere Zahnrad bzw. der aufgesteckte schwarze Winker auf der hinteren Achse rotierte zu schnell für das Auge. Daher sollten die Anzahl der Umdrehungen geschätzt werden. Wer sich festgelegt hat, verschränkte zum Zeichen die Arme (vgl. nonverbale Kommunikationssysteme in Abschnitt 4.2.1). Auf ein Signal des Lehrers wurde der eigene Schätzwert mit den Fingern schweigend angezeigt: Ein Finger stand für eine Umdrehung der hinteren Achse bzw. des Winkers. Der Lehrer forderte die Schüler auf, sich umzusehen, wer welchen Wert anzeigte. (vgl. „Information im System" in Abschnitt 4.1.2). Während der ganzen Übung wurde nicht gesprochen.
Mit dem Schätzen wird der Schüler „in die Pflicht" genommen. Er muss sich festlegen und eine Aussage tätigen, die auch von seinen Mitschülern wahrgenommen wird. Durch diese Intervention wird das Thema zu seiner eigenen Sache.

9.2.2 Material als Datengenerator

Die Schüler durften alle Daten über den Aufbau erfragen, die ihrer Meinung nach zur Berechnung der Umdrehungen erforderlich sind (vgl. „Datenerzeugung" in Abschnitt 5.3.1). Der Lehrer gab stets Auskunft, ohne diese zu bewerten. Die Frage nach der Länge der Metallachsen wurde ebenso ernsthaft beantwortet wie die Frage nach der Anzahl der Zähne der einzelnen Räder oder nach den Längen der Ketten.

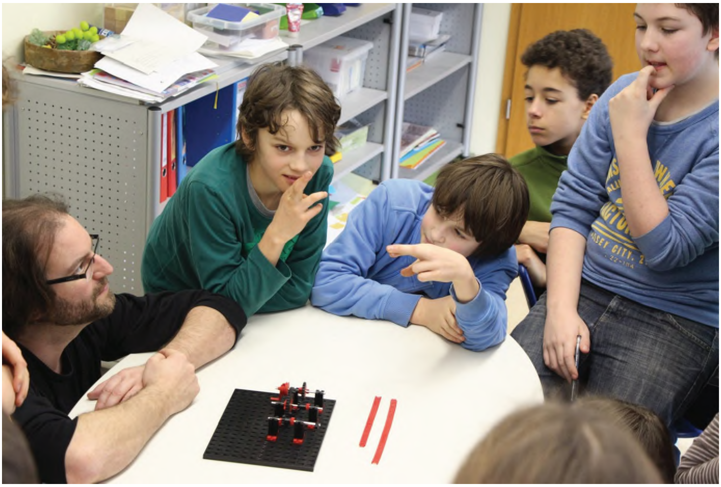


Abb. 148: Material als Datengenerator

Die folgende ortskodierte Schülerdiskussion ist in Abschnitt 4.3.1 („Aufstellungsarbeit") beschrieben.

Abb. 149: Ortskodierte Schülerdiskussion

9.2.3 Die Auflösung: das Getriebe als Modell für $2 \cdot 4$

Bevor die Lösung haptisch durch Ausprobieren gefunden wurde, sollte angezeigt werden, wie sicher der Einzelne ist. Wer zu 100 % sicher ist, zeigt das mit 10 Fingern an, wer nur 30-prozentige Sicherheit in der Diskussion erlangt hat, zeigt drei Finger. (vgl. Abschnitt 4.2.2).

Abb. 150: Nonverbale Kommunikation

9.3 Teamtraining: Exponentielles Wachstum

In der folgenden Übung wird ein anschauliches Modell für exponentielles Wachstum gegeben, ein Grenzwertprozess konkret erlebt (vgl. „Schülerexperimente“ in Abschnitt 3.3.2.3), der Bruch als Operator „die Hälfte von“ erfahren (vgl. „didaktische Rollenbelegung“ in Abschnitt 3.4.2). Die Übung kann an verschiedenen Stellen im Lehrgang und auch in höheren Klassen umgesetzt werden. Falls die Schüler noch nicht mit dem Bruch $\frac{1}{2}$ operiert haben, erleben sie hier zum ersten Mal, dass „mal nehmen“ kleiner machen kann. Am Unterrichtsversuch in der Französischen Schule diente sie zur Vertiefung der Multiplikation mit Zahnrädern und dem Aufbau von Getrieben.

9.3.1 Phase I: Der Schüler wird zum Operator „$\cdot\frac{1}{2}$“

In der Stunde zuvor wurden Dreiergruppen gebildet und Hausaufgaben verteilt: Ein Schüler brachte ein Küchenmesser mit, ein zweiter ein Schneidebrettchen und ein dritter ein Stück Obst, ein Stück Brot oder irgendetwas, was sich auf dem Brettchen zerlegen lässt (vgl. zur Bedeutung des „Mitbringens“ den Abschnitt 5.4.2.).

Der Lehrer schrieb „$\frac{1}{2}$“ an die Tafel, die Schüler halbieren daraufhin ihr mitgebrachtes Nahrungsmittel. Das „Halbe“ wurde zur Seite gelegt, es entspricht dem „$\frac{1}{2}$“ an der Tafel. Im nächsten Schritt nahmen die Schüler vom Rest wiederum die Hälfte. Der Schüler mit dem Messer wurde so zum Operator „Halbierer“, er nahm auch im Folgenden stets die Hälfte (vgl. zu „didaktischer Rollenbelegung Abschnitt 3.4.2.4). Das „Hälftenehmen“ wurde gleichzeitig an der Tafel notiert: „$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$“. Während die Schüler handelnd (= enaktiv) das Halbieren erfuhren, entstand auf der Tafel folgender formale (= symbolische) Anschrieb (vgl. „Verschränkung von körperlichem und geistigem Lernen“ in Abschnitt 5.1.2):

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{8}}\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{16}}\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{32}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}$$

Die Theorie an der Tafel, auf den Schülertischen die Praxis (vgl. zur „Gleichzeitigkeit“ 5.1.3.1). Dort entstand die haptische Interpretation. Die Schüler sollten selbstständig bis $\frac{1}{1024}$ oder noch weiter das Halbieren fortführen.

Abb. 151: Grenzwertprozesse

Bemerkung: Jede Schülergruppe zerschneidet etwas anderes. Damit hat sich das Halbe von den konkreten Dingen gelöst und ist zur abstrakten Zahl $\frac{1}{2}$ geworden. Wichtig aus didaktischer Sicht ist, dass über konkrete Beispiele das Allgemeine erfahren

wird (vgl. die Strukturbildung in Abschnitt 2.5.6.1 und „Verallgemeinerung mit Riemann-Thomann in 2.5.6.2).
Die Schüler entwickelten einen immensen Ehrgeiz und es wurden fast unsichtbare Teile noch geteilt. An dieser Stelle wurde vom Lehrer die Frage aufgeworfen, ob die Teilung prinzipiell immer weitergehen wird oder ob es irgendwann ein nicht teilbares Reststück gibt. So führte das Croissant bzw. die Karotte zur Atomtheorie (*á-tomos* = nicht teilbar) bzw. zum griechischen Philosophen Demokrit (vgl. „Fächerübergreifende Wirkung“ in Abschnitt 5.3.1).

9.3.2 Phase II: Aufgabenstellung

Was formal als Term an der Tafel stand, was sich, immer weiter zerlegt, auf den Schülertischen befand, sollte jetzt mit Fischertechnik nachgebaut werden. Ein Großprojekt, das kein Einzelner in der Klasse in einer Stunde hinbekommen würde. Jeder baut etwas (ein oder zwei Übersetzungen) und gleichzeitig entsteht eine neue Sinneseinheit, der Term $\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$, als etwas Gemeinsames.

9.3.2.1 Konkrete Aufgabenstellung

Auf einem oder mehreren Tischen sollte der Term $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ als Getriebe aufgebaut werden, wobei *n* für die Klassenstärke steht. Jeder baut also einen Faktor $\frac{1}{2}$ auf, gemeinsam entsteht so ein Modell für exponentiellen Zerfall.
Die Qualität dieser Übung liegt wesentlich darin begründet, dass beide Grundstrebungen des Menschen, das Streben nach Distanz (individuelles Arbeiten) und das Streben nach Nähe (gemeinsames Arbeiten), methodisch enthalten sind. (vgl. Abschnitt 2.5.4.2 „Nähe- und Distanzstreben im Unterricht). Außerdem sollten parallel zu den Achsen die entsprechenden zerlegten Lebensmittel aufgebaut werden, d.h., an der ersten Achse nach der Kurbel sollte ein halber Apfel liegen$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$, an der zweiten Achse ein viertel Apfel $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ usw. (vgl. Abschnitt 2.5.6.1).

Abb. 152: Strukturbildung durch mehrere Beispiele

Wer noch Fragen zur Aufgabenstellung hatte, konnte jetzt nachhaken. Um die Schüler etwas in die Pflicht zu nehmen, sollte jeder schätzen, wie lange die ganze Klasse für den Aufbau benötigt. Jeder durfte jedem helfen. Es ging darum, dass die *komplette* Konstruktion aufgebaut ist, und nicht darum, dass einzelne Zweiergruppen ihr Teilstück fertig haben. Erst dann ist die Aufgabe bewältigt und erst dann wird die Zeit genommen.

Die Schüler wurden aufgefordert, sich gegenseitig wahrzunehmen, um genauer schätzen zu können (vgl. „Information im System“ in Abschnitt 4.1.2): Wer ist wie dabei? Gibt es Leute, die sich zurücklehnen werden, wenn ihr Teilstück fertig ist? Wer ist aufmerksam? Wie bereit ist der Einzelne?

Es wurde nicht gesprochen: Wer für sich einen Schätzwert gefunden hat, verschränkt die Arme (vgl. Abschnitt 4.2.1). Sind alle bereit, wird mit den Fingern angezeigt: Je ein Finger steht für zwei Minuten. Glaubt man, dass es länger als zwanzig Minuten (10 Finger) dauert, werden symbolisch für 10 Finger die Arme gekreuzt und weitergezählt. Gekreuzte Arme und ein Finger stehen demnach für 22 Minuten. Auf ein Zeichen des Lehrers wird angezeigt.

Abb. 153: Nonverbale Kommunikation in der Gruppe

Wieder sollten sich die Schüler gegenseitig wahrnehmen. Natürlich gibt jeder mit seiner Schätzung etwas von sich preis (vgl. Selbstkundgabe in Abschnitt 4.1.2 und „Information im System“ in Abschnitt 2.5.1). Er macht eine Aussage über sich und wie er die Gruppe und die ganze Situation einschätzt. Dabei geht es nicht um Richtig oder Falsch, es geht darum, den Einzelnen im Team wahrzunehmen.

9.3.2.2 Pädagogische Bemerkung: Besser als man selbst

Die Schüler geben sich mit dem Schätzen selbst einen Wert vor. Hier waren es im Schnitt etwa 15 Minuten. Benennt der Lehrer den Durchschnittswert ist dieser im Raum und zeigt seine Wirkung: Man möchte schneller sein als die vorgegebene Zeit. Es geht nicht darum, andere zu übertreffen, es geht um das eigene Wachstum (der Gruppe), man möchte sich selbst übertreffen. Man möchte besser sein als man selbst.

Das Streben danach „besser als man selbst zu sein“ ist ein altgriechisches Ideal. Der Vergleich geht nicht nach außen sondern nach innen. Das System – ob das einzelne Bewusstseinssystem, der einzelne Körper (Individuum) oder die Gruppe – übertrifft nicht andere, sondern die eigene bisherige Errungenschaft (die Landkarte wird „passgenauer“, vgl. Abschnitt 1.5.2.3). Das ist aus pädagogischer Sicht sehr geschickt: Es wird ein Streben möglich, ohne dass der andere, das Gegenüber, unterdrückt wird.

9.3.2.3 Mögliche Hilfen

Eine Gruppe, die noch nie eine Gruppenaufgabe gestellt bekommen hat, ist zweifelsohne überfordert. Der Lehrer als Spielleiter (vgl. Abschnitt 2.5.3.2) entscheidet, wie viel Struktur die Klasse braucht, so dass die Aktion auf der einen Seite nicht in Frust und Chaos untergeht, auf der anderen Seite sollten Sie die Gruppe aber nicht des Abenteuers berauben und die Erfahrung ermöglichen, es als Klasse möglichst ganz ohne Hilfe geschafft zu haben. (vgl. „Wertequadrat“ in Abschnitt 2.5.2.2). Ein Spagat zwischen Struktur und Chaos (vgl. „Freiheit und Struktur“ in Abschnitt 2.5.2.4). Wenn die Lehrer zum ersten Mal eine solche Übung durchführt, dann wird er mehrere oder alle der folgenden Tipps geben. Mit jedem weiteren Großprojekt zieht sich der Lehrer ein bisschen weiter zurück und gibt der Klasse ein bisschen mehr an Verantwortung. Durch die Interventionen ändert sich der „Appellrahmen“ der Lernumgebung (vgl. „Nachrichtenquadrat in Abschnitt 2.5.2.1).

9.3.2.4 Mögliche Hilfen

Der Lehrer baut ein Teilstück auf. Wenn jede Gruppe dieses Muster exakt kopiert, braucht es „nur“ noch die Zusammensetzung.

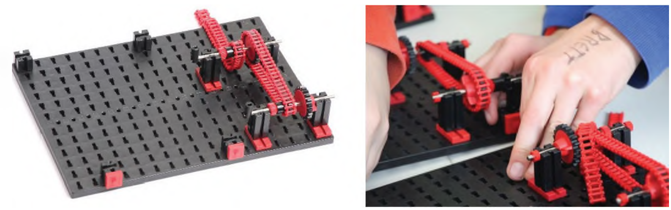


Abb. 154: Hilfe zur Schnittstellenproblematik

Alternativ kann nur das Foto gezeigt werden. Das haptische Modell wird demnach durch ein Bild ersetzt. Der Schüler sieht dann nur noch eine zweidimensionale Projektion, welche weniger Information besitzt. Häufigste Fehler:

(1) Die Schnittstellen zwischen den Arbeitsplatten sind nicht an den richtigen Stellen.

(2) Rechts-links-Vertauschung: Die Schüler bauen spiegelverkehrt. Die Folge: Es gibt neben den $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$-Termen fälschlicherweise auch $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}$-Terme. Auch dieser Fehler macht

sich meist erst im Zusammenbau bemerkbar (Schnittstellenproblematik).

Schüler erstellen das Muster

Eine Erweiterung für teamfähig geübte Klassen: Nicht der Lehrer, sondern die Klasse stellt ein Muster her. Damit wird der Klasse eine neue Rolle zugeschrieben (vgl. Abschnitt 3.4.1.3). Die Hilfestellung ist jetzt auf die *Idee* einer Vorlage reduziert. Die Klasse erhält zur Planungshilfe einen einzigen Kasten. Das ist ein typisches wirtschaftliches Vorgehen, vor allem, wenn das Material sehr teuer ist oder schwer zu beschaffen ist (vgl. Ressourcenknappheit in Abschnitt 5.4.2).

Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe wird wesentlich erhöht, wenn die Klasse keinen Kasten zur Verfügung hat und gezwungen ist, an der Tafel mittels Konstruktionsplänen abstrakter zu arbeiten. Durch die Wegnahme des Materials bzw. der Veranschaulichung wird die Übung sehr, sehr schwer (vgl. Abschnitt 5.4).

Um noch extremer zu werden: Die Planung kann zusätzlich an einem vom Bauplatz verschiedenen Ort stattfinden. Und nur um anzudeuten, dass die Übung (bzw. die notwendigen Kompetenzen) etwas mit der Welt außerhalb der Schule zu tun hat, um also noch realistischer zu werden: Zusätzlich kann auch noch personell zwischen Planung und Umsetzung getrennt werden, etwa, wenn die Klasse für die Parallelklasse plant (vgl. „Rollenklärung“ in Abschnitt 3.4.1.4). Das ist allein schon vom kommunikativen Aspekt eine riesige Herausforderung!

Es hilft beim Planen sehr, wenn die eigene Klasse zuvor diese Übung bereits real durchgeführt hat und so den Aufbau kennt. Die eigene Erfahrung hilft wesentlich bei der Planung: Je häufiger die Planungsgruppe das Material in den Händen gehalten hat, desto einfacher wird es.

Wesentlich schwerer (!) wird die Übung, wenn die Planungsgruppe die Übung nicht durchgeführt hat. Jetzt sind wir in der Realität, in der außerschulischen Welt angekommen, wo häufig nur Zeichnungen und Computersimulationen anstelle von echten Modellen oder dem realen Erlebnis zur Verfügung stehen. Durch das Spiel und die Rollenverteilung wird eine fächerübergreifende, sogar weltübergreifende Wirkung erzeugt (vgl. Abschnitt 1.6.4.3).

Ort des erstellten Musters

Notwendiges Material wie das Muster sollte für alle Gruppen zugänglich sein. Die Lernumgebung wird damit nicht durch das Material, sondern durch die Wahl der Orte verändert (vgl. Abschnitt 5.4.2 und 4.3). Ist das Vorlagenmuster nicht auffindbar, gibt es keinen unmittelbaren Zugang. Hier hilft die Regel: „Die Vorlage bleibt ortsfest und darf den Tisch nicht verlassen!“ Auf dem folgenden Foto steht das Modell auf einem gesonderten Tisch zentral im Klassenraum.

Abb. 155: Hilfe durch Struktur (Ortsvorgabe)

Rollenklärung

Wer leitet die Diskussion bzw. macht die Gesprächsleitung? (vgl. päd. Rollenbelegung in Abschnitt 3.4.1.2). Hier kann beispielsweise ein Redestab helfen (vgl. die Aufstellungsarbeit 4.3.1). Wer kümmert sich um die Schnittstellenproblematik? Wer hat ein Auge darauf, dass nicht irgendwo etwas Falsches gebaut wird? Wer baut was (Achsenbestückung, Kettenlänge, Pfeiler mit Schiebefüßchen)? Wer hat den Blick aufs Ganze und schaut danach, dass nicht ein paar Gruppen ganz zurückbleiben, während andere bereits fertig sind? Kurz: Wer beobachtet die Arbeitsabläufe?

9.3.3 Phase III: Das Experiment

Als die ganze Konstruktion fertig aufgebaut worden ist, wurde an der letzten Achse der Winker befestigt. Anschließend wurde gleichmäßig gekurbelt und beobachtet bis wohin lässt sich noch eine Bewegung feststellen lässt. Auf dem Foto versuchen die Schüler die gerade noch wahrnehmbare Bewegung zu erkennen. Ebenso wie die Bewegungen der Achsen werden Croissant, Apfel oder Karotte zu kaum wahrnehmbaren Pünktchen (vgl. die „Bühne“ in Abschnitt 3.3.2.3.). Die abstrakte Exponentialfunktion wird „sichtbar“ (vgl. Abschnitt 5.1).

Abb. 156: Wahrnehmung

9.3.3.1 Ergänzung: Reflexion des Teamgeistes, Prüfung der Arbeitsfähigkeit

Zwischen Konstruktionsphase und Experiment kann die Arbeitsfähigkeit der Gruppe überprüft werden. Ideal wäre es, wenn alle während der ganzen Konstruktionsphase etwas zu tun haben und schließlich alle gleichzeitig fertig sind. Hier wird die Klassengemeinschaft als Organisation begriffen, quasi als ein Organismus der sich an die Herausforderung anpasst bzw. „lernt“. Das Schaffen des Einzelnen ergibt ein (neues) Gemeinsames (vgl. Riemann-Thomann in Abschnitt 2.5.4).
Dieser Idealzustand wird selten zu 100 % erreicht. So können beispielsweise bei der abschließenden Verkettung nicht 60 Hände gleichzeitig zugreifen und mitarbeiten. Aber solche Momente, in denen aus Platzgründen nicht alle mitarbeiten können, sind selten. Häufig hingegen ist eine Gruppe mit „ihrem“ Teil fertig und beginnt zu warten – anstatt sich umzusehen, wo Hilfe benötigt werden könnte!
Um die Arbeitsfähigkeit zu prüfen, soll jeder einschätzen, wieviel Prozent der Zeit er gearbeitet hat. Mit den Fingern wird angezeigt: Jeder Finger zählt 10 %. Damit ist die Arbeitseinschätzung für jeden im Raum sichtbar. (vgl. Abschnitt 4.5 „Systemischer Blick auf nonverbale Kommunikationssysteme“; Abschnitt 4.2.4 „Zerstörung der Bühne“ und „Nonverbale Kommunikation“ in Abschnitt 4.2.2).

Im Anschluss wird überlegt, wie sich das Arbeitspotential der Gruppe besser ausschöpfen lassen könnte. An dieser Stelle helfen keine „allgemeinen Weisheiten“, sondern ganz konkrete Handlungsvorschläge. In welcher Situation hätte Person XY anders handeln können? Zu welchem Zeitpunkt wurde eine Entscheidung getroffen, die hinterher andere arbeitslos machte? Das Gehirn braucht konkrete Beispiele, keine allgemeinen Ratschläge (vgl. die Abschnitte über „Strukturbildung durch Beispiele“ in den Abschnitten 2.5.6.1 und 2.5.6.3).

9.3.3.2 Einfühlung in exponentielles Wachstum bzw. Zerfall

In der folgenden Mathestunde wurde eine ganze Stunde lang an der Kurbel gedreht. Die Schüler wechselten sich ab: Jeder dreht zwei Minuten. Nur der Winker an der hintersten Achse wurde vorher angebracht und auf „12 Uhr“ gestellt.
Nach einiger Zeit entstand die Vermutung, dass in absehbarer Zeit nichts bemerkbar sein wird. Das sehr schnelle Abfallen der Exponentialfunktion wurde hier erneut „sichtbar“ gemacht. Obwohl das Experiment selbst (Phase III) den Abfall veranschaulicht, ändert sich für die Schüler der Blick. Es entsteht durch die neue Sichtweise ein neues, fortführendes Beispiel für die Exponentialfunktion (vgl. Abschnitt 2.5.6.1).
Die Frage, wann sich das Kurbeldrehen bemerkbar machen würde, entstand von selbst, die dann gemeinsam präzisiert wurden:

(1) Um wieviel dreht sich das hinterste Zahnrad bei einer Kurbeldrehung?

(2) Wie oft müsste man kurbeln, bis das letzte Zahnrad eine Umdrehung macht?

Und ein Gefühl für die Größenordnung zu ermöglichen, fügte der Lehrer noch folgende Frage hinzu:

(3) Wie lange würde das bei je einer Kurbelumdrehung pro Sekunde dauern?“

In dieser Klasse (30 Schüler) ergab sich eine Zeit von 34,0 Jahren.

9.3.3.3 Zusatz zu Phase II: Ein Rätsel

Frage: Mit jeder Übersetzung wird es ein bisschen schwerer, an der Kurbel zu drehen. Es kommen ja immer weitere Zahnkränze hinzu, die ebenfalls mit angetrieben werden müssen. Angenommen, alle Zahnräder sind fest angeschraubt und die Übersetzungen sind bis ins Unendliche gebaut: Lässt sich die Kurbel dann noch drehen? Und wenn ja: Hätte ein Schüler aus der Klasse die Kraft dazu, die unendlich vielen Zahnräder zu bewegen? Das sind, wenn man eine typische Fächereinteilung zugrunde legt, physikalische Fragen (vgl. „fächerübergreifende Wirkung“ in Abschnitt 5.3.1).
Es wird nicht gesprochen. Wer für sich eine Antwort gefunden hat verschränk die Arme. Sind alle soweit wird Stellung bezogen: Wer glaubt, dass sich unendlich viele Räder bewegen lassen, geht nach links, wer das Gegenteil glaubt nach rechts. (vgl. Abschnitt 4.3.1).

Abb. 157: Unendlich viele Übersetzungen

Antwort: Ja, man benötigt nur die doppelte Kraft im Vergleich zum Kurbeln an einer einzigen Übersetzung! Eine mögliche Betrachtung ist in umgesetzter Energie zu denken: Um die Reibung der ersten Übersetzung zu überwinden, braucht es für eine Umdrehung eine gewisse Energie, sagen wir die Menge, die in dem danebenliegenden halben Apfel steckt. Die folgende Übersetzung dreht sich nur halb so weit und entsprechend braucht es nur die Hälfte der Energiemenge[39], also ein Viertel vom Apfel. So geht es weiter und weiter. Der ganze Apfel stellt den Grenzwert dar $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots=1$. Damit benötigt man genau das Doppelte an Energie bzw. an Kraft, um statt einer Übersetzung die gesamte unendliche Reihe anzukurbeln. Erst nach der theoretischen Betrachtung wird gekurbelt. Durch das Material/das Exponat erhält das Thema Grenzprozesse einen realen Bezug (vgl. den Abschnitt 1.6.4.5 „eine große schulische Gefahr“). Insgesamt wurden zwei Grenzwertprozesse veranschaulicht:

(1) die (Partialsummen-)Folge $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots$ mit dem Grenzwert 1

(2) ein unendliches Produkt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots$ mit dem Grenzwert 0 (die Rotationsgeschwindigkeit der einzelnen Rädchen geht gegen null).

[39] In erster Näherung ist die (Gleit-)Reibungskraft unabhängig von der Geschwindigkeit.

9.4 Fazit

Mit Übersetzungen lässt sich an die Lebenswelt der Schüler anknüpfen, was die Arbeit mit zwei Klassen an der Französischen Schule in Tübingen bestätigt. Die abstrakte Bruchrechnung konnte von den Schülern selbst modelliert und bedeutsam werden.
Jedoch ist der Einstieg komplex. Die Betrachtung der ersten Multiplikation stellt propädeutisch die Konstruktion der Brüche (Quotientenkörper) in den Raum. Der hier vorgestellte Einstieg geschieht am zentralsten Punkt der Bruchrechnung.

Kapitel 10 Kritische Reflexion und Ausblick

10.1 Erfahrungsbezogener Ansatz

Lässt sich eine indirekte Didaktik über Lernumgebungen in einem systemisch-konstruktivistischen Sinne realisieren? Die vorliegende Arbeit bejaht diese Frage im Kontext eines erfahrungsbezogenen Ansatzes, indem eine mögliche Umsetzung eines konsequent handlungs- und erlebnisorientierten Lernkonzeptes demonstriert wird. Die Herangehensweise ist einerseits eine Konsequenz systemischen und konstruktivistischen Denkens bzw. ist durch dieses angeregt worden, andererseits hat sich das Konzept induktiv in 15 Jahren handlungsorientiertes Arbeiten entwickelt, sei es mit Schul–klassen oder in Lehrerfortbildungen (etwa SINUS, SINUS-Transfer, DELTAplus, MNU, Kultusministerium Baden-Württemberg und Hessen). Das Konzept stellt demnach „nur" ein Konstrukt dar, welches auf einer erfahrungsbezogenen Entwicklung beruht, die durch eine system-konstruktivistische Sichtweise irritiert wurde. Das beinhaltet erstens, dass das Konzept lediglich *eine* Möglichkeit der Umsetzung ist, aber nicht *die* oder gar *die beste* Möglichkeit und zweitens, dass die Darstellung nicht objektiv sein kann.

Bewertungen können – aus systemischer Sicht – ausschließlich und prinzipiell nur von einem Beobachter kommen, z. B. durch die Schüler, durch praktizierende Lehrer, durch Ausbilder, durch Gutachter oder durch meine eigene Erfahrung. Wünschenswert ist eine empirische und evidenzbasierende Untersuchung, um subjektive Einflüsse zu minimieren, um Daten zu erhalten, inwieweit das Konzept vorteilhaft für Schüler und Lehrer sein könnte. Maria Montessori hat mit ihren Materialien eine hohe Nachhaltigkeit ihres Konzeptes erreicht. Ihr Material zeigt heute nach wie vor Wirkung im Unterricht. Ob beim Konzept „Bruchrechnen als Abenteuer" ebenfalls das Material an sich, also unabhängig vom unterrichtenden Lehrer, wirken kann, das ist zu hoffen. Hier könnte eine empirische Untersuchung mehr Klarheit schaffen. Die Erfahrungen dreier Kollegen in jeweils unterschiedlichen Klassen (vgl. Arbeitsblätter eines Lehrers auf einer Fortbildung zu „Bruchrechnen als Abenteuer" im Anhang 11.1 und meine eigenen in zwei Klassen, so wie Rückmeldungen von Lehrern (vgl. Anhang 11.2) geben einen Hinweis, dass tatsächlich durch das Material im Raum eine positive Veränderung in Bezug auf die Beziehung des einzelnen Schülers zur Mathematik, zur Nachhaltigkeit und zum Transfermögen gegeben ist. Aber das sind bisher nur Vermutungen.

10.2 Weiterführende Forschungsfragen

Auf die Realisierung von „Bruchrechnen als Abenteuer" kann aus verschiedenen Richtungen geblickt werden. Entsprechend ergeben sich unterschiedliche Forschungsfragen. Vier mögliche Hauptrichtungen werden im Folgenden skizziert.

10.2.1 Beziehung zwischen Mensch und Mathematik

Gefragt wird nicht nach dem Können und Wissen der Schüler nach dem Lehrgang, sondern es geht um die Frage, welche Bedeutung die Schüler der Mathematik zukommen lassen. Welche Beziehung hat der Schüler zur Mathematik aufgebaut? Welche Bedeutung kommt der Mathematik in seinem Leben zu? Wie ändert sich durch den Umgang mit Ketten und Zahnrädern die Sichtweise des Schülers auf Mathematik? Obwohl bei diesen Fragestellungen das Schülerwissen über Mathematik nicht im Fokus steht, bestimmen Beziehungsfragen zentral unser Denken und Handeln: *„In der faszinierenden Begegnung zwischen Mensch und Mathematik und in der umsichtigen Organisation dieser Begegnung liegt der eigentliche Ursprung für mathematikdidaktisches Denken und Handeln.“* (Wittmann 1992, S. 60).

10.2.2 Mathematik als Erlebnis

Eng mit der Beziehungsarbeit zwischen Mensch und Mathematik steht das Erlebnis von Unterricht. Aus dem unterrichtlichem Erlebnis kondensiert die Erfahrung, die ein Schüler mit der Mathematik gemacht hat. In diesem Zusammenhang ist die Frage nach der Nachhaltigkeit bedeutsam (vgl. Abschnitt 10.2.4): Wenn Schüler mit Mathematik ein Erlebnis verknüpfen, ist das Gelernte nachhaltig damit verknüpft. Aber was genau macht ein Erleben von Mathematik aus? Wann wird das Erlebnis vom Schüler positiv bewertet, wann negativ? Welchen Einfluss hat der Umgang mit dem Material auf das Erleben? Wie wichtig ist die freie Entscheidung des Baumeisters für ein Erlebnis? Wie wichtig ist die soziale Interaktion mit den „Mitspielern“ für das Erleben? Für die schulische Wirklichkeit wären praktische Ratschläge wünschenswert: Wie kann eine Lernumgebung vom Lehrer so gestaltet werden, dass möglichst viele Schüler diese als Erlebnis wahrnehmen? Und weiter: Welche Faktoren machen aus einem Erlebnis eine Erfahrung?

10.2.3 Transfervermögen

Das Wechselspiel zwischen Theorie und Praxis ist in dem Konzept zentral. Die Übertragung von theoretischen Inhalten auf pragmatische und umgekehrt bedeutet eine Vernetzung des Lernstoffes mit der realen Welt. Der Schüler arbeitet in dem skizzierten Lehrgang über mehrere Monate mit Ketten und Zahnrädern. Inwieweit kann er das Modell tatsächlich auf formale Aspekte übertragen? Hilft der längere Umgang mit einem konkreten Modell prinzipiell bei Modellierungsfragen? In welchem Sinne hilft es Schülern beim Modellieren von Themen außerhalb des Themas Bruchrechnen? Diese Fragen sind eng verknüpft mit Fragen die das Erlernen von Kompetenz betreffen.

10.2.4 Nachhaltigkeit der Fachlichkeit

In wie weit wirkt sich die Verschränkung von Fachlichkeit und Beziehungsaspekt (z. B. durch das Erleben) auf Nachhaltigkeit und strukturellem Verständnis aus? Konkret: Wie nachhaltig ist die Arbeit mit Ketten und Zahnrädern im Vergleich zu herkömmlichem Unterricht? Was können Schüler nach drei Jahren an mathematischen Inhalten anwenden und erläutern? Gibt es einen signifikanten Unterschied in der Vergessenskurve, wenn Schüler mit Spielfreude Bruchrechnen gelernt haben?

10.3 Empirischen Schwierigkeiten

10.3.1 Subjektive Didaktik

Die Didaktik ist mit ähnlichen Problemen wie die Ernährungslehre oder der Medizin konfrontiert. Es gibt keine Objektivität! Ob die Milch nun schlecht oder gut ist, ob Brot verträglich oder unverträglich ist, hängt nicht von der Milch und vom Brot alleine ab. Das Wesentliche der Didaktik und ihren Untersuchungen ist (aus konstruktivistischer Sicht) gerade das Zusammenspiel zwischen Mensch (genauer: dessen Bewusstseinssystem) und der Lernumgebung. Das macht Untersuchungen von Lern-Lehrsituationen prinzipiell schwierig. Die Didaktik hat immer nach Passgenauigkeit zu schauen. Während sich in der Mathematik Beweise angeben lassen und in der Physik Teilchen – losgelöst vom Menschen – detektiert werden können, kann die Didaktik (ähnlich wie die Biologie), die ja prinzipiell auf einer Wechselwirkung zwischen System (Bewusstseinssystem) und Umwelt (Lernumgebung) basiert (welche auch wieder aus belebten Systemen bestehen kann), Forschungsfragen nicht isoliert betrachten. In der Biologie hört eine Katze auf eine Katze zu sein, wenn man sie isoliert (vgl. Simon 2013a). Ebenso hört ein Schüler auf Schüler zu sein, wenn es keinen entsprechenden Kontext gibt (z. B. Unterricht).
Das zu untersuchende System (Bewusstseinssystem des Schülers) lässt sich nicht direkt untersuchen, es steht immer in Beziehung zu seiner Umwelt, die aus einer materiellen Umgebung und einer belebten Umgebung besteht. Das bedeutet, dass „Peter" bei demselben stofflichen Inhalt (z. B. Bruchrechnen), Mathematik in der Klasse XX an der Schule XY und bei dem Lehrer XZ anders aufnimmt, als in einer anderen Klasse an einer anderen Schule und bei einem anderen Lehrer.
An der „Systemgrenze" seines Bewusstseinssystems docken viele Systeme an: Die Lehrperson, die Mitschüler, die Eltern, … Zudem kommt die Schwierigkeit, dass alle Parameter (auch die verborgenen, die man nicht kennt) in Wechselwirkung treten.

10.3.2 Reduktionismus vs. Holismus

Mit der Erhebung von Daten werden stets eine bestimmte Blickrichtung und eine Rolle eingenommen. Meist ist es die fragende Blickrichtung, etwa durch Interviews oder durch Erhebungsbögen. Damit kommt in der Regel dem Schüler die Rolle des Antwortenden zu und man beleuchtet damit nur eine Seite. Die „fragende Wirklichkeit" des Schülers bleibt, wie im schulischen Kontext üblich, häufig ungefragt.

Die Stärke dieser Art von Forschung ist gleichzeitig auch deren Schwäche: Der Beobachter soll nicht Teil des Projektes selbst sein. Ansonsten gibt es eine Resonanzerscheinung, die das Ergebnis „manipuliert". Aber mit diesem Vorgehen sperrt sich die Wissenschaft in gewisser Weise selbst aus. *„Dieser – auch „Reduktionismus" genannte – Wissenschaftsansatz lieferte die Grundlage für den seit der Aufklärung unaufhaltbar scheinenden Siegeszug der westlichen Wissenschaften. Er war (und ist immer noch) in vielen Bereichen sehr erfolgreich. Aber er beruht auf Vorannahmen, die der Komplexität der Welt, vor allem lebender, psychischer und sozialer Systeme, nicht gerecht werden. Aus erkenntnistheoretischer Sicht ist der größte Vorzug des Reduktionismus aus sein größer Nachteil. (…) Das Problem der Selbstbezüglichkeit (…) taucht nicht auf."* (Simon 2013b, S. 11).

Die Gegenposition ist das Konzept des Holismus, der eine ganzheitliche Betrachtung fordert („Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile"). Illustriert wird die Grenze des Reduktionismus durch das bekannte Beispiel einer Zwiebel, deren Wesen sich schlecht erforschen lässt, indem man sie Häutchen für Häutchen untersucht und schließlich von dem Wesen der Zwiebel nichts mehr übrig ist.

10.3.2.1 Leitfadengestütztes Interview

In meinem ersten Versuch das Konzept „Bruchrechnen als Abenteuer" mithilfe eines leitfadengestützten Interviews zu untersuchen, habe ich versucht eine Brücke zwischen Reduktionismus und Holismus zu schlagen: Das System, über das geforscht wird (die Schüler,) sollte selbst an der Entwicklung der Fragen beteiligt werden. Eine Skizze des Vorgehens ist im Anhang (siehe Abschnitt 11.3) beschrieben. Damit wird zumindest zu einem Teil ein reduktionistischer Ansatz aufgegeben.

Obwohl ich bereits einiges an Arbeit und Zeit in die Fragenerstellung und die Interviews investiert hatte, brach ich die Methode ab, da diese Sichtweise, die das Erleben der Schüler untersuchte, nur bedingt meine Arbeit zur Konstruktion bzw. Realisierung eines ganzheitlichen Lehrgangs zur Bruchrechnung betrachtete.

10.3.3 Grenzen der empirischen Forschung

Empirie beruht auf Datenerstellung und deren Analyse. Das macht sie einerseits „objektiver", d. h. die Untersuchung hängt nicht vom Individuum ab, und erreicht damit eine hohe Aussagekraft. Auf der anderen Seite gibt es Begriffe, die sich empirisch nur sehr schwer fassen lassen. So scheint es schwer bis unmöglich „Aufrichtigkeit", „Beziehung", „Spielfreude" in Daten erfassen. Die Gefahr ist, dass das Wesentliche (!) (im

Sinne des Wesen des Menschen), auf der Strecke bleibt, – wenn man „nur“ Datensätze miteinander vergleicht. Das ist ein großer Vorwurf an die moderne Medizin: Datensätze ersetzen keine Patientenbeobachtung. *Die* richtige Behandlung gibt es nicht. Dasselbe gilt offensichtlich für Schüler. Den „durchschnittlichen Schüler“, der auf eine bestimmte Methode anspricht, gibt es ebenfalls nicht. Das Herausmitteln des Lehrers, die Unabhängigkeit der Wirksamkeit der Methode an sich, nimmt ein wesentliches Element. Allerdings, und das spricht sehr für empirische Untersuchungen, kann eine Didaktik nicht auf Glaubensätzen beruhen. Eine paradoxe Situation.

10.4 Zwei Vorschläge für empirische Untersuchungen

„Bruchrechnen als Abenteuer“ lässt verschiedene Wirkungen auf Schüler vermuten (vgl. Abschnitt 10.2). In diesem Abschnitt werden zwei Vorschläge (1) + (2) für mögliche empirische Untersuchungen gegeben.

(1) Die erste Idee ist, dass ein handlungsorientierter Zugang sich gerade in der Handlungsorientierung zeigt. „*Das Lernen ist in doppeltem Sinn handlungsorientiert, nämlich erstens auf seine spätere Anwendbarkeit – im Alltag und im Beruf – hin ausgelegt: Man weiß oder kennt eine Angelegenheit nicht nur, man kann in ihr handeln; das Lernen vollzieht sich zweitens zu einem großen Teil durch Handeln.*“ (Bildungsplan BW 2004).
Dieses Handeln im Unterricht soll in einer handlungserforderlichen Situation untersucht werden. Vorgeschlagen werden hierzu sog. *Adventure-Rooms* oder *Escape-Rooms*.

(2) Der zweite Vorschlag ist inspiriert durch ein Nachtreffen (Juni 2017) mit einer Klasse, die ich sechs Jahre zuvor für zwei Jahre in der 5. und 6. Klassenstufe unterrichtet hatte. Es war für mich erstaunlich, wie gut sich die Schüler an Einzelheiten aus dem Unterricht erinnern konnten und wie positiv sie davon erzählten. „*So eröffnet der Mathematikunterricht Chancen zur Entwicklung eines positiven Selbstkonzepts und einer verantwortlichen Selbstregulation. (…) Insbesondere können sie [die Schüler] sich im Mathematikunterricht in ihrem Handeln als selbstwirksam erleben.*“ (Bildungsplan BW 2016; Klammerbemerkung von mir)
Die Frage ist, ob sich diese positive Einstellung in einer Untersuchung nachweisen lässt. Die Vermutung ist, dass sich Entwicklungsprozesse in „Bruchrechnen als Abenteuer“ zwar langsam, aber dafür nachhaltig entwickeln. Der Schüler erlebt sich, so die These, im Unterricht als selbstwirksam, was eine positive Beziehung zur Mathematik begünstigt. Es geht darum, welche Beziehungsarbeit zwischen ihm und Mathematik geleistet wurde bzw. welchen Einfluss das

gemeinsame Spiel mit den Zahnrädern auf seine Haltung der Mathematik gegenüber hat. Diese Beziehung soll in einer Langzeitstudie über neun Jahre untersucht werden. Parallel dazu soll auf eine Korrelation zwischen Beziehungsaspekt und fachlicher Leistung hin untersucht werden. Die Vermutung ist, dass die positive Beziehung zur Mathematik fachliches Verständnis begünstigt. Die Fachlichkeit ist in diesem Sinne ein willkommenes Nebenprodukt.

10.4.1 Forschungsfragen

(1) Wirkt sich das haptische und spielerische Arbeiten auf die Beziehung zur Mathematik positiv aus? Korreliert eine positive Beziehung zur Mathematik mit fachlicher Leistung?
(2) Kommen Schüler nach einem kompetenzorientierten, handlungs- und erlebnisbasierten Lehrgang besser mit neuen Situation im Team zurecht?

10.4.2 Randomisierung, Kontrollgruppen

Es werden 2 mal x randomisierte sechste Klassen ausgewählt, d. h. Klassen, die in der fachlichen wie auch in der Kompetenzentwicklung vergleichbar sind. Anschließend werden per Zufallsprinzip x ausgewählt, die den fünfmonatigen Lehrgang „Bruchrechnung als Abenteuer" durchlaufen. Die x anderen Klassen dienen als Kontrollgruppen.

10.4.3 (1) Untersuchung der individuellen Beziehung zur Mathematik und deren Korrelation zur fachlichen Leistung

Im Vorfeld, noch vor Ablauf des zu untersuchenden Unterrichts, werden mit den erstellten Fragen Interviews mit den Schülern aus beiden Gruppen durchgeführt. Dabei soll ermittelt werden, wie sie ihre Beziehung aktuell zum Fach Mathematik sehen. Weiter soll (durch geeignete Tests) die fachliche Leistung der Schüler bestimmt werden.
Weitere Interviews und Test folgen in zunehmenden Zeitabständen: Direkt nach dem Lehrgang, zum „Zeitpunkt 0", werden erneut Interviews zu denselben Fragestellungen durchgeführt. Weiter werden entsprechende Tests zur Leistung durchgeführt. Weitere Datenerhebungen finden nach einem Jahr, nach zwei Jahren, nach vier Jahren und nach acht Jahren statt. Es geht also nicht um eine punktuelle Messung, sondern um die persönliche Entwicklung. Die Vermutung ist, dass sich mit einer positiven Einstellung zur Mathematik die fachliche Leistung erhöht. Im Vergleich mit der Kontrollgruppe zeigt sich die Wirkung des Lehrganges „Bruchrechnen als Abenteuer". Auch hier ist die Vermutung, dass sich durch Handlungs- und Erlebnisorientierung die Beziehung zur Mathematik nachweisbar positiv gestaltet.
Eine große Schwierigkeit bei diesem Untersuchungsdesign ist der Lehrer. Die Beziehung zur Mathematik geschieht fast immer mit durch den Lehrer. Allerdings soll der Einfluss des Lehrgangs und nicht den des Lehrers untersucht werden. Ein Ansatz

könnte darin bestehen, die Beziehung zum Lehrer mit in die Untersuchung hinzunehmen, also die Einstellung des Schülers zum Lehrer mit zu untersuchen.

10.4.4 (2) Untersuchung auf enaktiver Ebene per Adventure-Room

Die grundliegende Idee besteht darin, einen handlungsorientierten Zugang handlungsorientiert zu untersuchen.
Nach dem Lehrgang werden aus der „Abenteuergruppe“, welche mit Fischertechnik entsprechend des Lehrgangs teamorientiert gearbeitet hat, Vierergruppen gebildet. Alle vier Teilnehmer kommen jeweils aus verschieden Klassen und werden zudem zufällig ausgewählt, so dass anzunehmen ist, dass die vier zum ersten Mal zusammenarbeiten. Hier soll eine typische Gruppenzusammenstellung in der Berufs- und Arbeitswelt simuliert werden, wo man sich seine Kollegen ebenfalls nicht aussuchen kann. Analog werden Vierergruppen aus der Kontrollgruppe gebildet.
Aufgabe der Viererteams ist die Konfrontation mit den Problemstellungen eines Adventure-Rooms, wie er beispielsweise im Technorama in Winterthur ausgeführt ist. *„Mit den AdventureRooms führt das Technorama diesen Grundsatz [Verständnis erschliesst sich nur aus dem eigenen Handeln und Erleben] auf eine neue Ebene. Anstelle der Auseinandersetzung mit Naturphänomenen in Musse läuft in den AdventureRooms unerbittlich ein Countdown von sechzig Minuten ab. Auf sich allein gestellt, gilt es die Räume akribisch zu erkunden und durch Erforschen und Experimentieren die richtigen Codes zu finden, um im Spiel weiterzukommen.“* (Technorama 2018).
Die Gruppen können von einem separaten Raum aus videoüberwacht werden. Insbesondere können die Gespräche der Schüler und deren Verhalten aufgezeichnet werden.
Die Vermutung ist, dass die Schüler, die im Unterricht handlungs- und teamorientiert gearbeitet haben, mehr Räume in den 60 Minuten durchlaufen.

Kapitel 11 Anhänge

11.1 Erstellte Arbeitsblätter

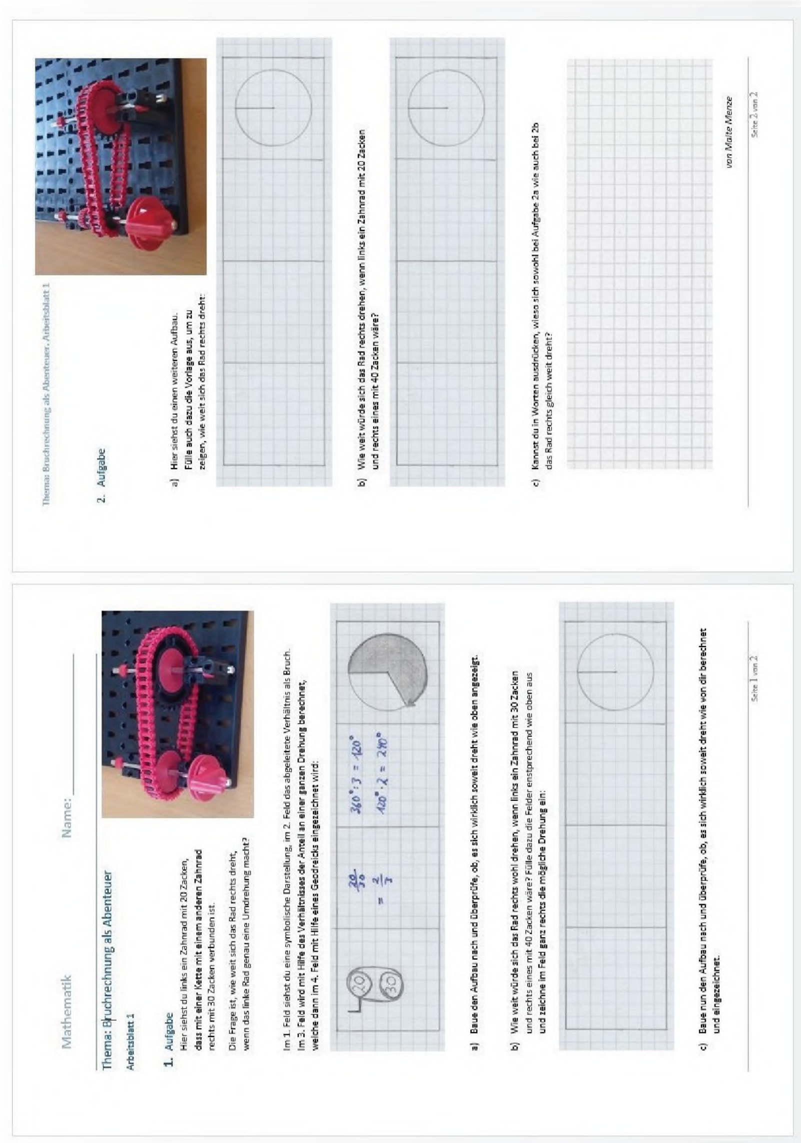
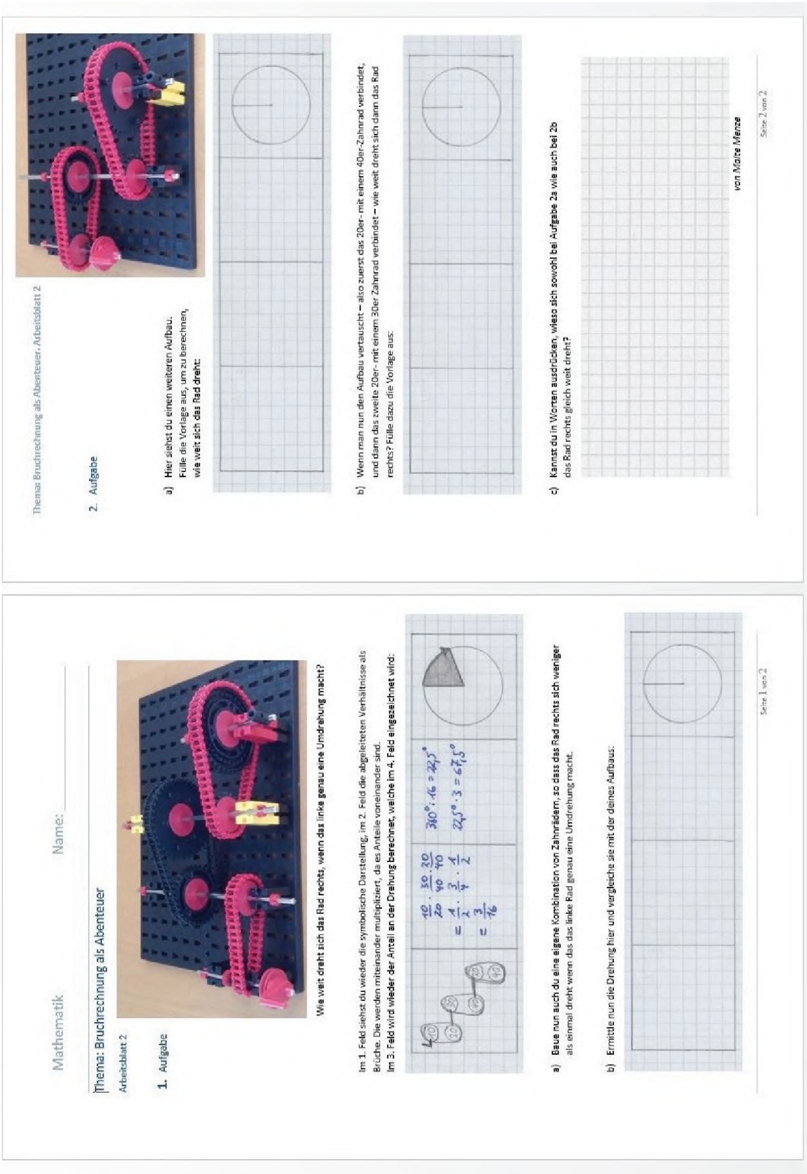


Abb. 158: Arbeitsblatt I



Mathematik Name: ______

Thema: Bruchrechnung als Abenteuer

Arbeitsblatt 2

1. Aufgabe

Wie weit dreht sich das Rad rechts, wenn das linke genau eine Umdrehung macht?

Im 1. Feld siehst du wieder die symbolische Darstellung, im 2. Feld die abgeleiteten Verhältnisse als Brüche. Die werden miteinander multipliziert, da es Anteile voneinander sind.
Im 3. Feld wird wieder der Anteil an der Drehung berechnet, welche im 4. Feld eingezeichnet wird:

$\frac{10}{20} \cdot \frac{30}{40} \cdot \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$

$360° : 16 = 22{,}5°$

$22{,}5° \cdot 3 = 67{,}5°$

a) Baue nun auch du eine eigene Kombination von Zahnrädern, so dass das Rad rechts sich weniger als einmal dreht wenn das linke Rad genau eine Umdrehung macht.

b) Ermittle nun die Drehung hier und vergleiche sie mit der deines Aufbaus:

Seite 1 von 2

Thema: Bruchrechnung als Abenteuer, Arbeitsblatt 2

2. Aufgabe

a) Hier siehst du einen weiteren Aufbau. Fülle die Vorlage aus, um zu berechnen, wie weit sich das Rad dreht:

b) Wenn man nun den Aufbau vertauscht – also zuerst das 20er- mit einem 40er-Zahnrad verbindet, und dann das zweite 20er- mit einem 30er Zahnrad verbindet – wie weit dreht sich dann das Rad rechts? Fülle dazu die Vorlage aus:

c) Kannst du in Worten ausdrücken, wieso sich sowohl bei Aufgabe 2a wie auch bei 2b das Rad rechts gleich weit dreht?

von Malte Menze

Seite 2 von 2

Abb. 159: Arbeitsblatt II

11.2 Exemplarische Rückmeldung

Rückmeldung einer ehemaligen Studentin, die die Handlungsorientierung in der Vorlesung erfahren hat und sich als Lehrerin (2017) geäußert hatte:

„Bei anderen Vorlesungen weiß ich zwar auch noch teilweise Inhalte, wenn sie mich interessiert haben, aber ich kann mich kein bisschen an den Tag erinnern, an dem ich sie gelernt habe, an den Dozenten, der sie ausgesprochen hat oder an die Tischnachbarn oder das Wetter – zumindest sehr, sehr selten. Insgesamt erinnere ich mich unter Anstrengung vielleicht an 10 Momente während der Vorlesungen und Seminare (deine Vorlesungen und Seminare ausgeschlossen). Die Inhalte deiner Vorlesung sind jedoch mit viel mehr Dingen verknüpft. Ich weiß zum Beispiel noch genau, wie mein „Foto" der Chaos-und-Symmetrie Übung aussah, wie die Tische und Stühle standen, wo ich saß, als wir das Pascalsche Dreieck mit Streichhölzern gelegt haben und auch, wo im Raum unser Spiel stand, das meine Farbgruppe erfunden hat. Es gibt ungelogen keine Aufzeichnungen deiner Vorlesungen, von denen ich kein Moment mehr im Kopf habe. Ich unterstelle der Schülerin, dass auch sie Momente abgespeichert hat und dass dies das einzig Präsente im Kopf war, während die Stunden des Dasitzens höchstens als Inhalt gespeichert wurden. Und bei den Momenten ist der Inhalt ja quasi gratis mit dabei – als zusätzliche nette Dreingabe."

Über ihren Unterricht schreibt sie:

„Ich habe die Schüler gebeten, doch mal ganz ehrlich zu sagen, was sie im Matheunterricht wichtig finden, wann sie gut lernen können und was wir Referendare doch unbedingt wissen müssen. Ich glaube, da fühlte sich die Klasse plötzlich besonders ernst genommen und sie haben ein tolles, konzentriertes und ernsthaftes Gespräch hinbekommen. Und dann meldet sich ein Mädchen und sagt: "Bei Ihrem Unterricht fanden wir gut, dass wir auch mal „andere Sachen" gemacht haben, zum Beispiel …" Und zählt ALLE handlungsorientierten Elemente auf, die ich eingebaut hatte – der Reihe nach. Das hat mich total beeindruckt. Sie hat wirklich alle (ich glaube fünf oder sechs) diese Elemente identifiziert und kein einziges vergessen und das, obwohl es mehrere Wochen zurücklag, dass ich in der Klasse unterrichtet hatte. Alle anderen Teile des Unterrichts (ich hatte dir ja schon geschrieben, dass ich in meine Unterrichtsplanung Freiheit, so zu unterrichten, wie ich es für richtig halte, und Anpassung an die Meinung der Mentoren und Ausbilder austarieren muss ...) hat sie überhaupt nicht erwähnt. Um es mit deinen Worten zu sagen: Alles andere hat nicht stattgefunden."

11.3 Konkreter Ansatz eines Leitfadengestützten Interviews

Im ersten Ansatz hatte wollte ich die in dieser Arbeit untersuchte handlungs- und erlebnisorientierte Bruchrechnung mit Hilfe eines leitfadengestützten Interviews untersuchen. Dabei sollten die Aussagen von Schülern, die den Lehrgang erlebt haben, mit denen einer Vergleichsgruppe betrachtet werden. Das leitfadengestützte Interview ist

ein halbstandardisiertes Interviewverfahren, das eingesetzt wird, um verschiedene Sichtweisen von Personen zu vergleichen (Hussy, Schreiber & Echterhoff S. 2013, S. 224). Es beinhaltet drei Schritte: Erstellung eines Leitfadens, Durchführung und die Analyse. Die ersten beiden Schritte wurden durchgeführt.
Die Schülerfragen wurden am 13. März 2014 an der Französischen Schule in Tübingen mit den Schülern der damaligen Klasse 6a entwickelt. Die Untersuchung zielte auf zwei Bereiche ab:

1. Was ist ein Erlebnismoment (in der jeweiligen Schülerwirklichkeit)?
2. Wie gelingt (mathematisches) Verständnis (am Beispiel *Multiplikation von Brüchen*)?

Das Design dieses Ansatzes wird in diesem Abschnitt skizziert.

11.3.1 Entwicklung der Fragen

In den Prozess der Fragenentwicklung wurden die Schüler mit einbezogen. Der Klasse wurde mitgeteilt, dass der erlebte Unterricht mit Hilfe eines Interviews auf Erlebnismomente und auf Lernverständnis untersucht werden sollte. Hierzu würden 10 Freiwillige benötigt. Von den 23 Kindern wollten 7 Jungs und 3 Mädchen ein Interview mitmachen. Die Fragen sollten einerseits nicht von mir als Versuchsleiter vorgegeben werden, andererseits die Freiwilligen nicht im Vorfeld der Untersuchung beeinflussen. Daher verließen diese den Raum.

11.3.1.1 Entwicklung der Interviewfragen

Den verbleibenden 13 Schülern wurde folgende Aufgabe gestellt: *„Stellt euch vor, ihr hättet eine Freundin oder einen Freund in einer anderen Schule und möchtet wissen, wie der Unterricht dort ist. Welche Fragen würdet ihr stellen, um herauszufinden, ob sich der Unterricht über das Multiplizieren von Brüchen dort lohnt."*
Es sollte in doppelter Hinsicht überlegt werden. Einerseits nach dem Erlebnis, (ähnlich, wie man nach einem Kinofilm oder einem Spiel fragt), andererseits nach dem (subjektiven) Lernerfolg.
Jeder der 13 Frageentwickler schrieb auf einem Blatt (unabhängig von den anderen) 5 Fragen dazu auf. Um die Kinder nicht unter Druck zu setzen, wurde hinzugefügt, dass es nichts macht, wenn jemand mehr oder weniger Fragen aufschreibt und dass man gar nicht versuchen solle, originell zu sein.
Nach Ablauf der fünf Minuten wurden die Fragen vorgelesen, die die Schüler für bedeutsam hielten. Die genaue Lehreranweisung war: *„Welche Frage sollte den Mitschülern und einer Vergleichsgruppe in einer anderen Schule gestellt werden? Was meint ihr, wäre eine gute Frage?"*
Hinterher wurde gefragt, wer dafür wäre, diese Frage zu stellen. Beispiel: Eine Schülerin las die Frage „Findest Du, dass man mit Fischertechnik besser rechnen kann?"

vor. Anschließend folgte die Frage: „Egal ob ihr eine ähnliche Frage aufgeschrieben habt oder nicht: Wer ist der Meinung, dass diese Frage für das Interview verwendet werden sollte? Bitte Handzeichen.“ Im Beispiel fanden 7 Schüler (einschließlich der Autorin der Frage) diese gut. Die Tabelle zeigt in der zeitlichen Abfolge die Wortmeldungen der Schüler:

Nr.	Vorschlag	Frage soll verwendet werden.
1	Findest Du, dass man mit Fischertechnik besser rechnen kann?	7
2	Wie fandest Du den Unterricht?	4
3	Was hast Du gelernt?	10
4	Was heißt Bruchrechnen mit Zahnräder für Dich?	9
5	Hat das Sinn gemacht, was in Bruchrechnen erklärt wurde?	10
6	Fühlt es sich besser an (macht es mehr Spaß) als normaler Unterricht?	5
7	Verstehst Du den Zusammenhang zwischen Zahnrädern und Bruchrechnen?	13
8	Wie hat Dir der Unterricht gefallen (Spaß gemacht)?	10
9	Wann und wie hast Du es [Bruchrechnen als Ganzes, Anmerkung von mir] verstanden?	5
10	An welcher Situation kannst Du gut arbeiten?	8
11	Hast Du jetzt eine bessere Vorstellung? Ob es Dich eher verwirrt hat oder ob man besser versteht?	12

Richtige Fragen zu stellen erfordert eine hohe Abstraktion und ist keine einfache Aufgabe. So fiel es den Schülern mitunter gar nicht auf, dass man die Vergleichsgruppe nicht nach „Bruchrechnen mit Zahnrädern“ fragen kann. So fragte beispielsweise eine Schülerin nach dem Transfer zwischen der materiellen Arbeit (Bau von Gleichungen mittels Fischertechnik) und dem formalen Verständnis: *„Verstehst Du den Zusammenhang zwischen Zahnrädern und Bruchrechnen?“*. Verständnisqualität lässt sich offensichtlich an Fragen aufzeigen. Ein übliches Interview ist anders gedacht: Der Interviewer stellt Fragen, das Gegenüber antwortet.

Die Fragen, die nicht unverändert auf die Vergleichsgruppe anwendbar sind, wurden in schwarz gelassen. Jene, die sich nicht konkret auf Fischertechnik beziehen, sind rot eingefärbt und prinzipiell für die Vergleichsgruppe möglich.
Hier die vollständige Fragenliste (manche wurden anders vorgelesen, als die Schüler sie notiert hatten):

- Wie muss für dich deine Umgebung für den konzentrierten Unterricht sein?
- Was stellst du dir unter Rechnen mit Zahnrädern vor?
- Findest du, du hast nun eine bessere Vorstellung vom Bruchrechnen mit dem Rechnen mit Zahnrädern als vorher?
- Wie gefällt dir das mit dem Fischertechnik?
- Findest du den ganz normalen Unterricht besser oder den?
- Hast du jetzt mehr gelernt oder vorher?
- Findest du, dass man mit Fischertechnik besser Bruchrechnen kann?
- Hat das Sinn gemacht für dich, was dir zum Bruchrechnen erklärt wurde?
- Denkst Du, dass man Bruchrechnen in der Zukunft noch mal brauchen wird?
- Hast es Spaß gemacht, die Zahnräder zu bauen?
- Findest Du den normalen Unterricht besser oder Fischertechnik?
- Findest Du das Dir der Unterricht was gebracht hat?
- Findest Du, es hat geholfen, dass wir mit Fischertechnik gearbeitet haben oder hast Du nicht mehr verstanden als im normalen Unterricht?
- Findest Du, Fischertechnik hat etwas mit Bruchrechnen zu tun, oder verstehst du den Zusammenhang nicht?
- Findest Du, dass man Bruchrechen im Leben brauchen kann?
- Wie hast Du den Unterricht empfunden?
- Was hast Du im Unterricht gelernt?
- Hat Dir der Unterricht Spaß gemacht?
- Was heißt Bruchrechnen mit Zahnrädern für Dich?
- In welcher Situation kannst du gut arbeiten?
- Hattest du eigentlich Bruchrechnen? Wenn Ja: Was hast du eigentlich dabei gelernt? Erzähl mal. Und wie hast du es gelernt? Und wie hat dir der Unterricht gefallen? Hast du das Gefühl, du hast etwas gelernt?
- Was hast Du gelernt?
- Wie hat es sich angefühlt so zu lernen? Fühlt es sich besser an als normaler Matheunterricht?

11.3.2 Design des Interviews: explizite und implizite Fragestellungen

Es wurden zwei Schülergruppen mit je zehn Kindern befragt. Die eine erlebte Bruchrechnen mit Fischertechnik in ca. 10 Treffen in der franz. Schule in Tübingen (s. Unterrichtsbeschreibung), die andere wurden von einer Lehrerin im Uhlandgymnasium unterrichtet. Beide Gruppen erhielten dieselben Fragen.
Die Fragen der Kinder aus der Fränzösischen Schule lassen sich nicht direkt auf beide Klassen anwenden. So fängt die Vergleichsgruppe aus dem Uhlandgymnasium in Tübingen wenig mit Fragen an:

- Was stellst du dir unter Rechnen mit Zahnrädern vor?
- Findest du, du hast nun eine bessere Vorstellung vom Bruchrechnen mit dem Rechnen mit Zahnrädern als vorher?
- Wie gefällt dir das mit dem Fischertechnik?
- Findest du den ganz normalen Unterricht besser oder den?

- Hast du jetzt mehr gelernt oder vorher?
- Findest du, dass man mit Fischertechnik besser Bruchrechnen kann?
- Hast es Spaß gemacht, die Zahnräder zu bauen?
- Findest Du den normalen Unterricht besser oder Fischertechnik?
- Findest Du, es hat geholfen, dass wir mit Fischertechnik gearbeitet haben oder hast Du nicht mehr verstanden als im normalen Unterricht?
- Findest Du, Fischertechnik hat etwas mit Bruchrechnen zu tun, oder verstehst du den Zusammenhang nicht?

Auch wenn diese Fragen sich nicht direkt übertragen lassen, so sind sie dennoch wesentlich in dem Sinne dieser Arbeit, weil *explizit* nach Erlebnismomenten und -räumen gefragt wird. Die Aufgabe besteht darin, den Fragen eine *implizite* Darstellung (welche nicht notwendigerweise das Material Fischertechnik benötigt) zu geben, ohne dass die Qualität der Fragestellung verloren geht.

11.3.2.1 Finale Fragen

Die finalen Fragen zielen einerseits auf Erkenntnis-, andererseits auf Erlebnismomente. Formal-inhaltliche Fragestellungen stehen auf der linken Seite, in der rechten erlebnis-inhaltliche.
Vier unterschiedliche Fragerichtungen sind entsprechend des Mindmaps farblich getrennt: Einleitende, zum Interview hinführende Fragen (blau), Verständnis und Erkenntnis (grün), Erlebnis (gelb), außerschulische Bedeutung (rot).

Erkenntnismomente bzw. - räume	**Erlebnismomente bzw. -räume**
Wie kann es sein, dass das Produkt zweier negativer Brüche etwas Positives ergibt? Ist das immer so?	Was ist für Dich „Mathematik“? Kannst Du ein konkretes Beispiel dafür geben?
[Nicht verwendet] Nenne mir bitte eine Zahl (1), vielleicht Deine Lieblingszahl, es kann aber jede andere sein. [Stellt die Beliebigkeit des Beispiels sicher. Der Schüler nennt beispielsweise „12“]. Was ergibt 12 geteilt durch Null?“ Ergibt diese Frage überhaupt Sinn? Alternativ: Was ergibt 50 geteilt durch 0?	Was wurde in Bruchrechnen alles gemacht? An was erinnerst Du Dich?
Wie würdest Du einem Klassenkameraden erklären warum einhalb dasselbe wie vier achtel sind bzw. warum darf man kürzen und erweitern? Wie würdest Du es einem Kind aus der Grundschule erklären?	Was war für Dich im Matheunterricht der stärkste Moment? Wenn Dir *der* stärkste Moment zu schwer fällt, dann erzähle mir von *einem* stärksten Moment. Es muss nicht unbedingt der stärkste sein.

((Nicht verwendet)) Wie teilt man durch Brüche, z. B. $\frac{1}{5}:\frac{1}{2}$? Hast Du eine Idee, warum man das so macht?	Ergibt Bruchrechnen außerhalb der Schule einen Sinn? Wenn ja, wo könnte das sein? [Bedeutsamkeit, örtlich gefragt]
Hattest Du ein- oder mehrere Male das Gefühl, dass es „Klick" gemacht hat? Und weißt Du noch wann und in welcher Situation?	Erinnerst Du Dich, ob Du außerhalb des Unterrichts mit jemand über Bruchrechnen gesprochen hast? Falls ja, kannst Du Dich an die Situation erinnern. [räumlich und zeitlich gefragt] (Ziel: Verlassen mathematische Inhalte die schulische Wirklichkeit bzw. Örtlichkeit? Gelangt Wissen aus dem Klassenraum hinaus in die Welt?)
	Kannst Du mir von einem Moment oder einer Situation erzählen, bei der Dir der Unterricht Spaß (2) gemacht hat?
	Hast Du Bruchrechnen anders erlebt, als ein anderes Thema (z. B. Flächenberechnung)? Falls ja, worin liegt für Dich der Unterschied?

Allgemeine Fragen, die sich auf konkrete Inhalte beziehen

Die Fragen sind einerseits allgemein gestellt, so dass jeder Schüler etwas dazu sagen könnte. Er hat die Freiheit auszuwählen, von was er erzählt. Andererseits sind die Fragen auch sehr konkret gestellt, um keine Vorlagen für allgemeine Schauplätze zu geben. Auch Entscheidungsfragen wurden vermieden, da der Informationsgehalt eines „ja" oder „nein" auf die Frage: Hat Dir der Unterricht Spaß gemacht, außer eine Binärentscheidung keine weitere Information enthält.

(1) Exakter wäre die Formulierung: „Eine von Null verschiedene Zahl", aber mit dem Hinweis auf die Null wird der Fokus unter Umständen auf negative Zahlen gelenkt. Nennt der Schüler die Null, dann würde ich um eine andere Zahl bitten.

(2) Bemerkung zum Begriff Spaß: Der treffende Begriff an dieser Stelle wäre „Freude", da nicht „Spaß" sondern „Freude" aus einem (tiefgehenden) Erlebnis entspringt. Man kann Kinder bespaßen aber nicht befreuden. Eine Bespaßung kommt von außen, Freude entsteht von innen heraus, etwa weil der Lernende um das Wissen gerungen hat, weil er einen persönlichen Wert der Sache beimisst.

Trotzdem habe ich den Begriff „Spaß“ nicht verändert, weil er von einem Schüler kam und in der Wirklichkeit einer 6. Klasse dieser Begriff vielleicht nicht treffender, aber dennoch stimmiger ist.

11.3.2.2 Reihenfolge der finalen Fragen

1	Wie würdest Du einem Außerirdischen erklären, was für Dich Mathematik ist? Kannst Du ein konkretes Beispiel dafür geben?
2	Was wurde in Bruchrechnen alles gemacht? An was erinnerst Du Dich?
3	Was war für Dich im Matheunterricht der stärkste Moment? Wenn Dir *der* stärkste Moment zu schwer fällt, dann erzähle mir von *einem* stärksten Moment. Es muss nicht unbedingt der stärkste sein.
4	Kannst Du mir von einem Moment oder einer Situation erzählen, bei der Dir der Unterricht Spaß (1) gemacht hat?
5	Hast Du Bruchrechnen anders erlebt, als ein anderes Thema (z. B. Flächenberechnung)? Falls ja, worin liegt für Dich der Unterschied?
6	Hattest Du ein- oder mehrere Male das Gefühl, dass es „Klick“ gemacht hat? Und weißt Du noch wann und in welcher Situation?
7	Wie kann es sein, dass das Produkt zweier negativer Brüche etwas Positives ergibt? Ist das immer so?
8	Wie würdest Du einem Klassenkameraden erklären warum einhalb dasselbe wie vier achtel sind bzw. warum darf man kürzen und erweitern? Wie würdest Du das einem Kind aus der Grundschule erklären?
9	Wo findet man Bruchrechnen außerhalb der Schule? [Bedeutsamkeit, örtlich gefragt]
10	Erinnerst Du Dich, ob Du außerhalb des Unterrichts mit jemand über Bruchrechnen gesprochen hast? Falls ja, kannst Du Dich an die Situation erinnern. [räumlich und zeitlich gefragt] (Ziel: Verlassen mathematische Inhalte die schulische Wirklichkeit bzw. Örtlichkeit? Gelangt Wissen aus dem Klassenraum hinaus in die Welt?)

Das Interview wurde in beiden Gruppen (Fischertechnikgruppe und Vergleichsgruppe) in mehreren Sitzungen durchgeführt und mit einem Mikrophon und einer Kamera (da die Schüler mitunter etwas zeichneten) aufgezeichnet. Sie wurden teilweise in der Arbeit von Inga Nolte an der Universität Kassel verwendet.

Dank und unterrichtliche Umsetzung

Im Herbst 2018 wird voraussichtlich das Buch „Bruchrechnen als Abenteuer“ erscheinen, welches ausführliche Beschreibungen zu allen relevanten Lernumgebungen enthält. Der in dieser Arbeit entworfene Fischertechnikkasten wird gleichzeitig realisiert. Buch und Material bilden ebenfalls ein System, Verlag und Materialhersteller können nicht einzeln gedacht werden.
Ob „Bruchrechnen als Abenteuer“ von den Lehrkräften angenommen wird, ist unklar. Ein Problem ist gestaltpsychologischer Natur: Der praktizierende Lehrer sieht eine Übersetzung und keine Brüche. Um die Bedeutung des Konzeptes zu verstehen, muss er sich in ein ungewohntes Modell hineindenken, genauso wie seine Schüler. Das bedeutet, dass er eine neue Landkarte entwerfen muss, was wiederum ein großes Problem für die Werbung darstellt.

Mein Dank gilt den Klassen in der Französischen Schule, die sich auf Ketten und Zahnräder eingelassen haben und meinen Studenten, die mich durch Spielfreude und kritische Fragen bereichert haben. Weiter möchte ich Gesine Jörg danken, die das Konzept im Unterricht ausprobiert hat und „Bruchrechnen als Abenteuer“ lektoriert. Ich hatte viele interessante und fruchtbare Diskussionen mit ihr. Marion Kessler hat das Konzept als Unterrichtsdokumentation in ihrem Vorbereitungsdienst verwirklicht, auch für diesen Mut bin ich sehr dankbar. Ebenfalls möchte ich der Unterstützung des Kultusministeriums BW danken, speziell Susanne Kugler, die das Projekt „Zahnräder in der Alltagswelt“ ermöglichten, eine zweimal dreitägige Ausbildung, die sowohl Kommunikationsmodelle und nonverbale Techniken enthielt, als auch die Getriebe-Mathematik.
Ebenfalls freut es mich sehr, dass das die Idee mit dem Fachbuchverlag Klett Kallmeyer Verlag und der Firma Fischertechnik das Licht der Welt erblickt. Hier danke ich Dr. Gabriele Holzmann und Laurenz Wohlfahrt. Weiter möchte ich Monika Hattenbach ganz herzlich für das Korrekturlesen danken.

Die vorliegende Arbeit ist eine Brücke zweier Welten. Es ist mir eine Freude, dass Rita Borromeo-Ferri und Olaf-Axel Burow sich auf diese außergewöhnliche, fächerübergreifende Arbeit eingelassen haben.

Das Denken in zwei „Landschaften“, in der Mathematik und in der Kommunikation, wäre ohne das Sein meiner Eltern nicht möglich. Mein Dank dafür, dass ich der geworden bin, der ich bin.

Last but not least möchte ich meinem Jungen danken. Ohne das Spiel mit ihm – von klein auf – hätte ich sehr wahrscheinlich das Material Fischertechnik nicht für didaktische Zwecke genutzt. Sei es in der Lehrerbildung oder in dieser Arbeit. Es ist mir eine Freude, dass ich ihm begegnen durfte als meinem Lehrer in Spielfreude und Ästhetik – welche die zentralen Säulen einer jeden Didaktik sind.

Abbildungsverzeichnis

(Sofern nicht anders angegeben sind alle Bilder von mir.)

Abb. 1: Descartes Bild vom Menschen (Bild aus Foerster 2015, S. 42) 11
Abb. 2: Abbildendes Lehr- und Lernverständnis 14
Abb. 3: Triviale und Nicht-triviale Maschine (nach Foerster 2015, S. 245 ff) 16
Abb. 4: Triviale vs. nichttriviale Maschine (nach Luhmann 1987, S. 193)................ 17
Abb. 5: Baukastensystem „Bruchrechnen als Abenteuer“ 20
Abb. 6: Subjektive Umwelt 22
Abb. 7: Zwei strukturell gekoppelte Systeme 26
Abb. 8: Lernen und Ästhetik 31
Abb. 9: Ästhetik und Inhalt 32
Abb. 10: Ästhetische Wirkung 32
Abb. 11: Einfluss der Umgebung 35
Abb. 12: Ästhetik vs. Zweckhaftigkeit 36
Abb. 13: Autonomer Datengenerator 41
Abb. 14: Rolle des Lehrers 42
Abb. 15: Pflanzenmodell 43
Abb. 16: Landschaftsmodell 45
Abb. 17: Um- und Irrwege im Landschaftsmodell 45
Abb. 18: Tiefe der Lernumgebung 48
Abb. 19: Unterschiedliche Konstruktionen eines Wissensgebietes 50
Abb. 20: Spielzeugroboter für Grund- und Mittelstufe 52
Abb. 21: Lehrgänge nach Wagenschein 53
Abb. 22: Landkarte zur Linearen Algebra 53
Abb. 23: Unterscheidung 55
Abb. 24: Anschlussfähigkeit 56
Abb. 25: Strukturbildung (1) 56
Abb. 26: Strukturbildung (2) 57
Abb. 27: Strukturbildung (3) 57
Abb. 28: Häufig begangene Wege 59
Abb. 29: Ausdifferenzierung. Von der „Pflanze" zum „Feldahorn" 60
Abb. 30: Unterschiedliche Ausdifferenzierung bei Diskussionspartnern 62
Abb. 31: Übertragung von Landkarten 63
Abb. 32: Ähnliche Landkarten 64
Abb. 33: Beginn der Forschung 69
Abb. 34: Zwei isolierte Wissensgebiete 70
Abb. 35: Vernetzung zweier Wissensgebiete 70
Abb. 36: Fächereinteilung als Konstruktion 71
Abb. 37: Verschiedene Sichtweisen 73
Abb. 38: Wahrscheinlichkeit von Geburtstagen 75

Abb. 39: Exponentielle Wahrnehmung ... 75
Abb. 40: Beugung am Spalt ... 76
Abb. 41: Virtuelle Lichtquelle ... 76
Abb. 42: Brechung ... 76
Abb. 43: Virtuelles Bild ... 76
Abb. 44: Interaktives Planetarium ... 77
Abb. 45: Wärmequellen ... 77
Abb. 46: Unterdruck ... 77
Abb. 47: Landkarte des Lehrers ... 79
Abb. 48: Sender- und empfängerorientiertes Lernverständnis ... 84
Abb. 49: Experiment zu subjektiver Wissenskonstruktion ... 88
Abb. 50: Unterschiedliche subjektive Wissenskonstruktion ... 89
Abb. 51: Wahrnehmung der Umgebung ... 90
Abb. 52: Nachrichtenquadrat ... 91
Abb. 53: Lernumgebung als Landschaft in Anlehnung an Schulz von Thun ... 92
Abb. 54: Wertequadrat zu Freiheit und Struktur ... 94
Abb. 55: Riemann-Thomann-Modell ... 96
Abb. 56: Diagnose nach Riemann-Thomann ... 99
Abb. 57: Keine Mustererkennung erkennbar ... 100
Abb. 58: Mustererkennung durch wenige Beispiele erkennbar ... 100
Abb. 59: Das Allgemeine im Konkretem ... 101
Abb. 60: Drittes binomische Gesetz ... 101
Abb. 61: Beispiel für nonverbales (materielles) Abfragen ... 109
Abb. 62: Vom Chaos zur Symmetrie ... 110
Abb. 63: Didaktische Reduktion I ... 111
Abb. 64: Didaktische Reduktion II ... 112
Abb. 65: Didaktische Reduktion III ... 112
Abb. 66: Ähnlichkeit ... 114
Abb. 67: Gesetz der Nähe ... 115
Abb. 68: Gesetz der Nähe im Unterricht ... 115
Abb. 69: „Paradoxon des Strukturierens“ ... 115
Abb. 70: Unterschiedliche Nähe ... 116
Abb. 71: Bezug von Bild und Schrift ... 116
Abb. 72: Nähe von Experimenten ... 117
Abb. 73: Nachbau ... 118
Abb. 74: Schüler als Operator ... 124
Abb. 75: Entscheidung ... 129
Abb. 76: Ja-Nein-Aussage ... 130
Abb. 77: Drehsinn anzeigen ... 130
Abb. 78: Zahlen anzeigen ... 131

Abb. 79: Negative Zahlenwerte ... 131
Abb. 80: Zahlen über 10 ... 131
Abb. 81: Daumenskala I ... 132
Abb. 82: Daumenskala II ... 132
Abb. 83: Schaubilder anzeigen ... 132
Abb. 84: Schaubild einer linearen Funktion ... 132
Abb. 85: Winkel anzeigen I ... 133
Abb. 86: Winkel anzeigen II ... 133
Abb. 87: Koordinatensystem I ... 133
Abb. 88: Koordinatensystem II ... 133
Abb. 89: Modell für Multiplikation ... 134
Abb. 90: Standpunkte körperlich und geistig einnehmen ... 135
Abb. 91: Strukturierte Schülerdiskussion ... 135
Abb. 92: Schüler als Punkte im Koordinatensystem ... 136
Abb. 93: Lineare Aufstellungsarbeit ... 136
Abb. 94: Exponentielle Skala ... 137
Abb. 95: Kalenderaufstellung ... 137
Abb. 96: Skalierung nach der Höhe ... 138
Abb. 97: Lehrgänge ... 138
Abb. 98: Abschreiten von Lösungen ... 139
Abb. 99: Abfrage über das Material ... 139
Abb. 100: Gegenseitige Wahrnehmung ... 140
Abb. 101: Wachstum von Kresse ... 141
Abb. 102: Verschränkung von Enaktivität und Abstraktion ... 142
Abb. 103: Fehlende Modellvorstellung ... 143
Abb. 104: Termdarstellung ... 144
Abb. 105: Winkelfunktionen ... 145
Abb. 106: Vorgeschichte und Konstruktion ... 146
Abb. 107: Assoziation ... 146
Abb. 108: Datenerzeugung mit dem Material ... 150
Abb. 109: Einfluss des Materials auf die Lernumgebung ... 151
Abb. 110: Darstellung des Verhältnis im Modell ... 157
Abb. 111: Zwei Modelle zur Multiplikation ... 163
Abb. 112: Ketten und Zahnräder im Schulbuch *mathe live* ... 169
Abb. 113: Multiplikationsregel im Schulbuch *mathe live* ... 170
Abb. 114: Multiplikation von Bruchzahlen nach Jannack ... 171
Abb. 115: Bruch und Übersetzung ... 177
Abb. 116: Baukasteninhalt ... 178
Abb. 117: Der Baukasten ist als Gruppe nicht abgeschlossen. ... 178
Abb. 118: Bruchdarstellung ... 183

Abb. 119: Äquivalenzklasse 184
Abb. 120: Der Bruch $30/40 \in \mathbb{Q}$ und die natürliche Zahl 30 $\in \mathbb{N}$ 184
Abb. 121: Die Null im Bruch 186
Abb. 122: Darstellung der fünften Wurzel aus 32 188
Abb. 123: Darstellung irrationaler Zahlen 189
Abb. 124: Negative irrationale Zahlen 189
Abb. 125: Repräsentanten der Äquivalenzklasse 190
Abb. 126: Abzählbarkeit 191
Abb. 127: Kürzen und Erweitern 192
Abb. 128: Kürzen und Erweitern II 192
Abb. 129: Festes Verhältnis 192
Abb. 130: Multiplikation 193
Abb. 131: Modellierung einer Gleichung als Doppelgetriebe 194
Abb. 132: Teilen durch ganze Zahlen 195
Abb. 133: Zwei Modellierungen von Potenzen 197
Abb. 134: Potenzen 197
Abb. 135: Potenzgesetz 198
Abb. 136: Grenzwertprozess 199
Abb. 137: Negativer Bruch 200
Abb. 138: Modell einer linearen Funktion 205
Abb. 139: Bedeutung der Kurbelstellung 207
Abb. 140: Steigungsdreieck und Übersetzung 207
Abb. 141: Umkehrfunktion 208
Abb. 142: Exponentielle Entwicklung 209
Abb. 143: Vergleichen von Brüchern 209
Abb. 144: Winkerstände nach keiner (links) und nach einer (rechts) Umdrehung .. 210
Abb. 145: Haptisch ermittelter kgV 211
Abb. 146: Addition ganzer Zahlen 212
Abb. 147: Rätsel 217
Abb. 148: Material als Datengenerator 218
Abb. 149: Ortskodierte Schülerdiskussion 218
Abb. 150: Nonverbale Kommunikation 219
Abb. 151: Grenzwertprozesse 220
Abb. 152: Strukturbildung durch mehrere Beispiele 222
Abb. 153: Nonverbale Kommunikation in der Gruppe 223
Abb. 154: Hilfe zur Schnittstellenproblematik 224
Abb. 155: Hilfe durch Struktur (Ortsvorgabe) 226
Abb. 156: Wahrnehmung 227
Abb. 157: Unendlich viele Übersetzungen 229
Abb. 158: Arbeitsblatt I 239

Abb. 159: Arbeitsblatt II 240

Literatur

Bateson, G. (1967). *Kybernetische Erklärung. In: Ökologie des Geistes.* Frankfurt: Suhrkamp.

Bateson, G. (2002). *Geist und Natur. Eine notwendige Einheit.* Frankfurt: Surkamp.

Bauer, J. (2006). *Warum ich fühle, was du fühlst: Intuitive Kommunikation und das Geheimnis der Spiegelneurone.* München: Heyne Verlag.

Bauer, J. (2013). *Das Gedächtnis des Körpers (19. Aufl.).* München Zürich: Piper.

Berghaus, M. (2011). *Luhmann leicht gemacht. Eine Einführung in die Systemtheorie (3. Aufl.).* Köln Weimar Wien: Böhlau Verlag.

Berufsorientierung, Kooperative. (2015). Von Ministerium für Kultus Jugend und Sport: http://www.km-bw.de/,Lde/Startseite/Themen/koobo am 23. 7. 2015 abgerufen

Beutelspacher, A. (2015). *Wie man in eine Seifenblase schlüpft. Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten.* München: Beck Verlag.

Bierhoff, H.-W. (2009). *Psychologie prosozialen Verhaltens. Warum wir anderen helfen. (2 Aufl.).* Stuttgart: Kohlhammer.

Bildungsplan. (2004). *Allgemein bildendes Gymnasium.* Baden-Württemberg: Kultusministerium BW.

Bildungsplan. (2016). *Bildungspläne Baden-Württemberg.* Von http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/SEK1/M/LG am 3. Nov. 2017 abgerufen

Boal, A. (1989). *Theater der Unterdrückten. Übungen und Spiele für Schauspieler und Nicht-Schauspieler (13. Aufl.).* Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Borbely, A. (1984). *Das Geheimnis des Schlafs. Neue Wege und Erkenntnisse der Forschung.* Stuttgart: Deutsche Verlagsanstalt.

Bruner, J. S., & Oliver, R. S. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung.* Stuttgart: Kohlhammer.

Bühler, K. (1999). *Sprachtheorie: Die Darstellungsfunktion der Sprache. 3. Aufl.* Stuttgart: Lucius und Lucius.

Csikszentmihalyi:, M. (2010). *Flow – der Weg zum Glück. Der Entdecker des Flow-Prinzips erklärt seine Lebensphilosophie, Band 6067, Ingeborg Szöllösi (Hrsg.).* Herder Spektrum.

Descartes, R. (1964). *L'homme, in (Œuvres de Descartes, Bd. XI, Paris 1957, deutsch: Über den Menschen).* Heidelberg: Lambert/Schneider.

Diekelmann, S., & Born, J. (2010). The memory function of sleep. *Nat. Rev. Neurosci*, S. 11, 114–126.

Diesterweg, F. A. (1970). *Didaktische Regeln und Gesetze.* Heidelberg: Quelle & Meyer.

Drießen, M. (2010). *Ruhr-Universität Bochum*. Von http://www.aktuell.ruhr-uni-bochum.de/pm2010/pm00416.html, am 3. 12. 2016 abgerufen

Duff, A. (5. Juni 2018). Begreifen um zu begreifen – Lernen im Science Center. *Vortrag*. Didaktisches Seminar der Mathematik, Universität Freiburg.

Ehret, C. (Oktober 2010). Die Aufgabenwerkstatt – Gegenseitig Aufgaben stellen, gemeinsam lernen. *In: Praxis der Mathematik 35*.

Ernst Klett Verlag. (11. März 2018). Von https://asset.klett.de/assets/bae0bdd6/W%2520700193_SVP7.327036.pdf abgerufen

Foerster, H. v. (2015). *Wissen und Gewissen (9. Aufl.).* Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Foerster, H. v. (2016). *Wahrheit ist die Erfindung eines Lügners.* Heidelberg: Carl-Auer.

Forster, O. (1983). *Analysis 1 (4. Aufl.).* Braunschweig: Vieweg.

Gallin, P. (2018). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Bd.1 (6. Aufl.).* Seelze: Klett Kallmeyer.

Glasersfeld, E. (2009). *Konstruktion der Wirklichkeit und des Begriffs der Objektivität. In: Foerster, Heinz von & Glasersfeld, Ernst von (Hg.): Einführung in den Konstruktivismus, (11. Aufl.).* München: Piper.

Gray, P. (2015). *Befreit lernen. Wie Lernen in Freiheit spielend gelingt.* Klein Jasedow: Drachenverlag.

Gribbin, J. (1996). *Auf der Suche nach Schrödingers Katze (3. Aufl.).* München: Piper.

Hacker, W. (1994). *Arbeitsanalyse zur prospektiven Gestaltung der Gruppenarbeit. In: Antoni, C. H. (Hrsg.) Gruppenarbeit in Unternehmen.* Weinheim: Psychologie Verlag Union, Beltz .

Harsdörffer, G. P. (1647). *Poetischer Trichter. Die Teutsche Dicht- und Reimkunst / ohne Behuf der lateinischen Sprache / in VI Stunden einzugießen.* Nürnberg: Wolfgang Endter.

Hattie, J. (2009). *Lernen sichtbar machen.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Herrmann, U. (2009). *Neurodidaktik (2. Aufl.).* Weinheim und Basel: Beltz.

Hilscher, H. (1996). *Kernphysik.* Brauschweig Wiesbaden: Vieweg.

Huizinga, J. (2015). *Homo Ludens. Vom Ursprung der Kultur im Spiel. (24. Aufl.).* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Hussy, W., Schreier, M., & Echterhoff, G. (2013). *Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften für Bachelor. (2. Aufl.).* Heidelberg: Springer.

Jannack, W. (1995). Wie viele Gänge hat ein Mountain-Bike? *In: Mathematik Lehren Heft 69*, S. 50–51.

Jaspers, K. (1966). *Descartes und die Philosophie (4. Aufl.).* Berlin: De Gruyter.

Johnstone, K. (1993). *Improvistation und Theater.* Berlin: Alexander Verlag.
Johnstone, K. (2004). *Theaterspiele; Spontaneität, Improvisation und die Kunst des Geschichtenerzählens (5. Aufl.).* Berlin: Alexander Verlag.
Kahl, R. (Januar 2000). Klonen der Köpfe. *In: Erziehung und Wissenschaft*.
Kessler, M. (2016). *Eine handlungsorientierte Einführung in das Bruchrechnen in Klasse 6.* Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung Freiburg: Dokumentation im 18-monatigen Vorbereitungsdienst.
Kirsch, A. (1975). *Gehört die Multiplikation vor die Addition? In: Der Mathematikunterricht 21/1*.
Kneer, G., & Nassehi, A. (2000). *Niklas Luhmanns Theorie sozialer Systeme (4. Aufl.).* Wien Köln Weimar Paderborn: Böhlau UTB Verlag.
Korzybski, A. (1933). *Science and Sanity.* New York: Institute of General Semantics.
Kösel, E. (2007). *Die Modellierung von Lernwelten. Band II: Die Konstruktion von Wissen.* Bahlingen a. K.: SD Verlag für Subjektive Didaktik.
Kramer (Hrsg.), M. (2016). *Mathematik Universität Freiburg.* Von Ausarbeitungen der Lernumgebungen "Jenseits des Klassenzimmers": http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/download/Jenseits_2016.pdf am 2. 6. 2014 abgerufen
Kramer (Hrsg.), M. (2016). *Mathematik Universität Freiburg, Didaktik*. Von http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/download/Jenseits_2016.pdf am 2. 5. 2015 abgerufen
Kramer, M. (2005). *Schüler motivieren und (re)aktivieren.* Lichtenau: AOL.
Kramer, M. (2011). *Mit Erbsen und Zahnstochern zur Mathematik.* Weinheim: Beltz.
Kramer, M. (2013). *Geometrie und Stochastik als Abenteuer (Vorlesungsskript).* Von Didaktik der Mathematik, Mathematisches Institut Universität Freiburg: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/downloads.html am 4. 6. 2015 abgerufen
Kramer, M. (2015). *Physik als Abenteuer. Bd. I: Didaktik, Akustik, Optik, E-Lehre und Kernphysik (2. Aufl.).* Halberg Moos: Aulis/Klett Kallmeyer.
Kramer, M. (2016a). *Mathematik als Abenteuer. Bd II: Algebra und Vektorrechnung (4. Aufl.).* Seelze: Klett Kallmeyer.
Kramer, M. (2016b). *Mathematik als Abenteuer. Bd. III: Funktionen und Wahrscheinlichkeit (4. Aufl.).* Seelze: Klett Kallmeyer.
Kramer, M. (2016c). *Physik als Abenteuer. Bd. II: Wärme und Mechanik (3. Aufl.).* Seelze: Klett Kallmeyer.
Kramer, M. (2016d). *Schule ist Theater, Theatrale Methoden als Grundlage des Unterrichtens (3. Aufl.).* Hohengehren: Schneider Verlag Hohnengehren.
Kramer, M. (2017a). *Frederiks mathematische Abenteuer: Das Geheimnis der Analysis (2. Aufl.).* Seelze: Klett Kallmeyer.

Kramer, M. (2017b). *Mathematatik als Abenteuer. Bd. I: Geometrie und Rechnen mit Größen (4. Aufl.).* Seelze: Klett Kallmeyer.
Kramer, M. (2017b). *Unterricht ist Kommunikation. Der Schüler entscheidet, was gelehrt wurde.* Schneider Verlag Hohengehren.
Kramer, M., & Schmidt-Halewicz, S. (2010). *Geht der Winter im Sommer an den Nordpol?* Weinheim Basel: Beltz.
Largo, R. H., & Beglinger, M. (2009). *Schülerjahre - wie Kinder besser lernen (4. Aufl.).* München: Piper.
Lehner, M. (2012). *Didaktische Reduktion.* Bern, Stuttgart, Wien: UTB.
Lehner, M. (2012). *Didaktische Reduktion.* Bern Stuttgart Wien: UTB Verlag.
Leuders, T. (2011). *Qualität im Mathematikunterricht der Sektundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen.
Luhmann, N. (1987). *Soziologische Aufklärung 4. Beiträge zur funktionalen Differenzierung der Gesellschaft.* Oplanden: Westdeutscher Verlag.
Luhmann, N. (1990). *Sozialogische Aufklärung 5, Konstruktivistische Perspektiven.* Westdeutscher Verlag Opladen.
Luhmann, N. (1993). *Die Form der Schrift. In: Gumbrecht, Hans Ulrich/ Pfeiffer, K. Ludwig (Hg.).* München.
Luhmann, N. (1994). *Der "Radikale Konstruktivismus" als Theorie der Massenmedien? Bemerkungen zu einer irreführenden Debatte.* In: Communicatio Socialis 27, Nr. 1: 7–12.
Luhmann, N. (1995). *Sozialogische Aufklärung 6. Die Soziologie und der Mensch.* Opladen: Westdeutscher Verlag.
Luhmann, N. (1997). *Die Gesellschaft der Gesellschaft.* Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
Luhmann, N. (2002). *Einführung in die Systemtheorie. Hrsg. Dirk Baecker.* Heidelberg: Carl Auer Verlag.
Luhmann, N. (2011). *Einführung in die Systemtheorie, 6. Aufl, Hrsg. Dirk Baecker.* Heidelberg: Carl Auer.
Luhmann, N. (2012). *Soziale Systeme. Grundriß einer allgemeinen Theorie (15. Aufl.).* Frankfurt a. M.: Surkamp.
Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren, Heft 123.*
mathe live. (2000). Stuttgart: Schulbuch, Klasse 7, Ernst Klett.
Maturana, H. (1982). *Erkennen: Die Organisation und Verkörperung von Wirklichkeit.* Braunschweig: Vieweg.
Mayer, C., & Busch, D. (2012). *Mediation erforschen, Fragen-Forschungsmethoden-Ziele.* Wiesbaden: Springer Verlag für Sozialwissenschaften.
Meyer, H. (2014). *Was ist guter Unterricht? (10. Aufl.).* Berlin: Cornelsen Scriptor.
Montessori, M. (1989). *Die Macht der Schwachen.* Freiburg: Herder.
Montessori, M. (1990). *Ausgewählte Texte (Hrsg. Meiser, C.).* München: Goldmann.

Montessori, M. (2007). *Erziehung zum Menschen, Montessori-Pädagogik heute.* Frankfurt a. M.: Fischer.

Mosebach, M. (1./2.. Juli 2006). Zum Tode von Robert Gernhardt. *Süddeutsche Zeitung*.

Neidhardt, W., & Rauch, U. (2014). *Warum ist Minus mal Minus Plus? Wieso Schüler immer die gleichen Fehler machen – und wie man sie vermeiden kann.* Freiburger Verlag.

O'Connor, J. S. (2015). *Neurolinguistisches Programmieren: Gelungene Kommunikation und persönliche Entfaltung (Aufl. 22).* Kirchzarten: VAK.

Padberg, F. (1989). *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche (3. Aufl.).* Mannheim Wien Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Padberg, F. (2015). *Didaktik der Bruchrechnung (4. Aufl.).* Heidelberg: Springer Verlag.

Piaget, J. (1976). *Die Äquilibraton der kognitiven Strukturen.* Stuttgart: Klett.

Piaget, J. (2016). *Meine Theorie der geistigen Entwicklung.* Weinheim Basel: Beltz.

Plath, M. (2010). *"Spielend" unterrichten und Kommunikation gestalten.* Weinheim Basel: Beltz.

Plath, M. (2010). *Spielend unterrichten und Kommunikation gestalten. Warum jeder Lehrer ein Schauspieler ist.* Weinheim Basel: Beltz.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *In: Mathematik lehren: Heft 123*, 10–13.

Prediger, S. (2007). *Konzeptwechsel in der Bruchrechnung – Analyse individueller Denkweisen aus konstruktivistischer Sicht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker, 203-206.

Prigogine, I. (1980). *Dialog mit der Natur.* München: Piper.

Reich, K. (2002). *Konstruktivistische Didaktik.* Neuwied, Kriftel: Luchterhand.

Riemann, F. (2017). *Grundformen der Angst und die Antinomien des Lebens. (42 Aufl.).* Basel München: Reinhardt.

Rittelmeyer, C. (2016). *Bildende Wirkungen ästhetischer Erfahrungen.* Weinheim Basel: Beltz Juventa.

Rosa, R., & Endres, W. (2016). *Resonanzpädagogik.* Weinheim Basel: Beltz.

Rousseau, J. (2014). *Emil oder über die Erziehung.* (C. Ritzi, Hrsg.) Paderborn: Julius Klinkhardt.

Rowling, J. (1998). *Harry Potter und der Stein der Weisen.* Hamburg: Carlsen Verlag.

Scarr, S. (1992). Developmental Theories for the 1990s: Development and Individual Differences, Heft 63. *Child Development*.

Scheller, I. (2007). *Szenisches Spiel, Handbuch für die pädagogische Praxis (5. Aufl.).* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Schlieszeit, J. (2001). *Mit Whiteboards unterrichten.* Weinheim Basel: Beltz.

Schulz v. Thun, F. (1981). *Miteinander Reden, Bd. 1.* Hamburg: Reinbek.

Schulz von Thun, F. (2014). *Miteinander Reden, Bd. 3 (26 Aufl.).* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Schulz von Thun, F. (8. März 2018). *Schulz von Thun Institut für Kommunikation.* Von https://www.schulz-von-thun.de/die-modelle/das-werte-und-entwicklungsquadrat abgerufen

Simon, F. B. (2013a). *Einführung in Systemtheorie und Konstruktivismus (6. Auflage).* Heidelberg: Carl Auer.

Simon, F. B. (2013b). *Einführung in die systemische Organisationstheorie (4. Auflage).* Heidelberg: Carl Auer.

Skinner, B. F. (1971). *Beyond Freedom and Dignety, deutsch: Jenseits von Freiheit und Würde (1973).* New York Reinbek: Rowohlt.

Spencer-Brown, G. (1969). *Laws of Form. [dt. Gesetze der Form].* London Lübeck: Allen and Unwin/Bohmeier.

Spiegel, H., & Selter, C. (2011). *Kinder & Mathematik (7. Aufl.).* Seelze-Velber: Klett Kallmeyer.

Spitzer, M. (2009). *Lernen.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Spitzer, M. (2010). *Medizin für die Bildung. Ein Weg aus der Krise.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Stierlin, H. (1994). *Ich und die anderen. Psychotherapie in einer sich wandelnden Gesellschaft.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Technorama. (26. Mai 2018). Von http://www.technorama.ch/ausstellung/adventurerooms/ abgerufen

Utech, C. (23. Feb. 2018). *Lehrerfortbildung BW.* Von https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/mathematik/gym/bp2004/fb1/modul8/ abgerufen

Wagenschein, M. (1959). *Zum Begriff des exemplarischen Lehrens [W 128].* Weinheim Basel: Beltz.

Wagenschein, M. (1971). *Die pädagogische Dimension der Physik (3. Aufl.).* Braunschweig: Westermann Verlag.

Watzlawick, P., Beavin, J., & Jackson, D. (2011). *Menschliche Kommunikation. Formen Störungen Paradoxien. (12. Aufl.).* Bern: Huber.

Wellhöfer, P. (2001). *Gruppendynamik und soziales Lernen (4. Aufl.).* Stuttgart: Lucius & Lucius.

Whitehead, A. N. (1923). *The Aims of Education and Other Essays.* New York: The Free Press.

Whorf, B. L. (2008). *Sprache, Denken, Wirklichkeit. Beiträge zur Metalinguistik und Sprachphilosophie. (25. Aufl.).* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Winter, H. (2004). Ganze und zugleich gebrochene Zahlen. *In: Mathematik Lehren, Heft 123*, S. 14 – 18.

Winter, H. (2009). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung.* Von

Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen: http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf am 4. 12. 2017 abgerufen
Winter, H. W. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht.* Wiesbaden: Springer Spektrum.
Winter, K. (2000). *Neutrino physics.* Cambridge University Press.
Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als „design science“. *Journal für Mathematik-Didaktik 13*, 55–70.
Zirfas, J., & Klepacki, L. (2013). *Theatrale Didaktik.* Weinheim: Beltz Juventa.
Zweig, S. (1974). *Schachnovelle.* Frankfurt a. M.: Fischer.

Der radikale Konstruktivismus und die Systemtheorie zeigen den Menschen als „nicht-triviale Maschine“ und das menschliche Bewusstseinssystem als autopoietisches, operativ abgeschlossenes System. Eine direkte Übertragung von Information zwischen Bewusstseinssystemen ist nicht möglich.

Um dieser systemisch-konstruktivistischen Herausforderung gerecht zu werden, braucht es didaktische Modelle und konkrete Handlungsstrategien für den Unterricht. Am Beispiel der Bruchrechnung wird ein Unterricht realisiert, der auf einer systemisch-konstruktivistischen Sichtweise basiert. Die Welt der Brüche ist Gegenstand geistiger Vorstellungen und findet innerhalb des Bewusstseins des Lernenden statt. Die materielle Welt der Übersetzungen operiert auf haptischer Ebene. Die geistige als auch die materielle Konstruktion entwickeln sich gemeinsam in einer Koevolution. Entfernt man aus dieser z. B. den materiellen Anteil, so wird der Lernvorgang empfindlich gestört.

ISBN 978-3-7376-0638-7

9 783737 606387 >