Brieger, Julchen

Philosophische Gespräche über Unendlichkeit im Mathematikunterricht

Münster ; New York : Waxmann 2024, 280 S. - (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik; 47) - (Dissertation, Technische Universität Chemnitz, 2024)

47

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

Julchen Brieger

Philosophische Gespräche über Unendlichkeit im Mathematikunterricht

WAXMANN

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

herausgegeben von

Aiso Heinze und
Marcus Schütte

Band 47

Editorial

Der Mathematikunterricht steht vor großen Herausforderungen: Neuere empirische Untersuchungen legen (erneut) Defizite und Unzulänglichkeiten offen, deren Analyse und Behebung einer umfassenden empirischen Erforschung bedürfen. Der Erfolg derartiger Bemühungen hängt in umfassender Weise davon ab, inwieweit hierbei auch mathematikdidaktische Theoriebildung stattfindet. In der Reihe „Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik" werden dazu empirische Forschungsarbeiten veröffentlicht, die sich durch hohe Standards und internationale Anschlussfähigkeit auszeichnen. Das Spektrum umfasst sowohl grundlagentheoretische Arbeiten, in denen empirisch begründete, theoretische Ansätze zum besseren Verstehen mathematischer Unterrichtsprozesse vorgestellt werden, als auch eher implementative Studien, in denen innovative Ideen zur Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse erforscht und deren theoretische Grundlagen dargelegt werden. Alle Manuskripte müssen vor Aufnahme in die Reihe ein Begutachtungsverfahren positiv durchlaufen. Diese konsequente Begutachtung sichert den hohen Qualitätsstandard der Reihe.

Julchen Brieger

Philosophische Gespräche über Unendlichkeit im Mathematikunterricht

Waxmann 2024
Münster • New York

Die Open-Access-Publikation wurde unterstützt durch das Sächsische Staatsministerium für Wissenschaft, Kultur und Tourismus.

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 47

ISSN 1868-1441
Print-ISBN 978-3-8309-4948-0
E-Book-ISBN 978-3-8309-9948-5
https://doi.org/10.31244/9783830999485

Waxmann Verlag
Steinfurter Straße 555, 48159 Münster
www.waxmann.com
info@waxmann.com

Umschlaggestaltung: Christian Averbeck, Münster
Titelbild: ⌡ Julchen Brieger

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig.
Hilbert (1926, S. 163, Herv. i. O.)

Für meinen Papa (†2020). Vielleicht sehen wir uns ja in der Unendlichkeit wieder. Knuddel, dein Juliki/Schnupu

Geleitwort

> „Ich hab eben das Gefühl die Geschichte wurde dafür geschrieben dass man die Kinder durcheinander bringt und zu überlegen was ist richtig!“
>
> Rosa, 3. Klasse

Dieses Zitat der Schülerin Rosa[1] gibt aus der Perspektive der Lernenden einen ersten Einblick in die explorative empirische Unterrichtsstudie von Julchen Brieger: Die Schülerinnen und Schüler sollen sich intensiv mit der Gültigkeit von Aussagen beschäftigen und das auf der Grundlage einer „Geschichte“, die zu diesem Zwecke „geschrieben“ wurde. Die angesprochene Geschichte hat Julchen Brieger in Anlehnung an den Zahlenteufel (Enzensberger & Berner, 2011) für ihre Studie geschrieben: In einem fiktiven Streitgespräch zwischen Gottfried Wilhelm Leibniz und Georg Cantor werden die Ideen der potentiellen und aktualen Unendlichkeit dargelegt und die Kinder sind aufgefordert, sich in einem meta-mathematisch-philosophischen Gespräch dazu zu positionieren. Rosa hat die didaktische Idee der Unterrichtsstunde durchschaut und – wie man in der vorliegenden Arbeit nachlesen kann – sich mit ihrer Gruppe auch darauf eingelassen.

Die Lernenden können so Mathematik als eine dynamische Wissenschaft kennen lernen, in der es zum Streit kommen kann und konkrete Personen mit der Entstehung und Entwicklung scheinbar unwiderruflicher Wahrheiten verknüpft sind. Dieses dynamische Bild von Mathematik steht im Gegensatz zu der gängigen Sicht auf Mathematik, die geprägt ist durch Eindeutigkeit und Kalkülhaftigkeit und somit der Vorstellung einer fertigen, statischen Mathematik entspricht. Der Begriff des Unendlichen ist dabei ein markantes Beispiel dafür, dass sich über Jahrhunderte immer wieder lebhafte Diskussionen in der Mathematik bzw. der Philosophie entfachen – und kann auch als Beispiel für die (historische) Nähe der Mathematik und Philosophie gesehen werden. Curricular ist das Thema Unendlichkeit jedoch nicht explizit verankert und die mathematikdidaktische Forschung in Deutschland – aber auch international – kann insbesondere für die in der Studie fokussierte Altersgruppe als rudimentär bezeichnet werden. Mit der Unendlichkeit im Mathematikunterricht der Grundschule bzw. zu Beginn der Gesamtschule greift Julchen Brieger nicht nur ein Thema auf, das aufgrund der impliziten Durchdringung der Schulmathematik curricular bedeutsam erscheint, sondern darüber hinaus auch geeignet scheint, Interesse und Motivation an der Mathematik – als Schulfach und als Wissenschaft – zu fördern.

---

1 Rosa hat als Schülerin (3./4. Jg) an der in dieser Schrift vorgestellten explorativen Studie teilgenommen. Der Name entspricht der von Julchen Brieger gewählten Anonymisierung.

Auch wenn philosophische Gespräche seit vielen Jahrzehnten in der mathematikdidaktischen Diskussion durchaus für den Mathematikunterricht eingefordert werden und auch einige Studien zur Umsetzung vorliegen, finden meta-mathematische bzw. philosophische Gespräche im Unterrichtsalltag kaum statt noch in der mathematikdidaktischen Diskussion eine nennenswerte Berücksichtigung. Somit widmet sich Julchen Brieger mit ihrer explorativ ausgerichteten Arbeit einem innovativen Gebiet und trägt einerseits mit dem von ihr entwickelten, kreativen Unterrichtsmaterial für die Unterrichtspraxis bei. Zugleich eröffnet die Arbeit andererseits insbesondere durch die sehr gründliche Analyse der empirischen Daten neue Einsichten in die Ermöglichung und auch die „Erschwerung" intensiver und sinnstiftender Interaktionen.

Konkret liefert ihre Arbeit zunächst eine sehr fundierte Auseinandersetzung mit dem Begriff des Unendlichen und eine gründliche Literaturrecherche über die Unendlichkeit im Mathematikunterricht sowie das Philosophieren (als Methode) im Mathematikunterricht. Über die Analyse der empirischen Daten gewährt Julchen Brieger neue Einblicke in die Möglichkeiten zur Emergenz interaktionaler Verdichtungen (Krummheuer & Brandt, 2001) und den Möglichkeitsraum von Argumentationsprozessen in der Primarstufe bzw. zu Beginn der Sekundarstufe I: Die von ihr rekonstruierten Argumentationsprozesse sowohl in den Peer-Gesprächen als auch in den Pro-Contra-Debatten im Klassenplenum mit Lehrperson zeigen sehr komplexe Strukturen auf, wie wohl von den meisten (Lehr-)Personen für diese Altersstufe nicht erwartet werden. So kann die Arbeit zum Nachdenken anregen, diesen Möglichkeitsraum komplexer Argumentationen lernförderlich auch in der Primarstufe zu nutzen und den Schrecken vor zu schweren, komplexen Themen nehmen. Julchen Brieger zeigt mit ihrer Arbeit eindrucksvoll auf, dass es gelingen kann, komplexe Themen auch für diese Altersstufe aufzubrechen und zugänglich zu machen und kann so hoffentlich zu weiteren Forschungsaktivitäten in diesem Bereich motivieren.

Berlin, im August 2024 — Birgit Brandt

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich von Herzen bei meiner Erstbetreuerin, Prof. Dr. Birgit Brandt, bedanken. Es gibt nicht viele Menschen, die sich in meinem Leben so für meine Karriere engagiert und eingesetzt haben wie sie. Zunächst wurde mir im Jahr 2020 eine zweite Chance und Anstellung durch Birgit ermöglicht, ein Jahr, in dem ich mein Dissertationsvorhaben schon fast aufgegeben hatte. Dennoch wurde ich in Chemnitz mit einem angefangenen, sehr unstrukturierten Projekt übernommen und trotz einiger Schwierigkeiten bei meiner Einstellung hat meine Betreuerin, auch in ihrer Rolle als Chefin, „wie eine Löwin“ für mich gekämpft. Durch diese Unterstützung habe ich nicht nur fast drei Jahre zusätzliche Promotionszeit, sondern auch sehr viel neuen Mut für meine Wissenschaftskarriere gewonnen. Auch die im Anschluss an die Anstellung fortwährende intensive Betreuung meiner Studie und deren Auswertung weiß ich sehr zu schätzen. Liebe Birgit, ich danke dir von Herzen für diese tolle zweite Chance, das nette Arbeitsumfeld, die außerordentliche Betreuung und dein Engagement!

Weiterhin möchte ich mich auch bei meiner Zweitbetreuerin, Prof. Dr. Katja Lengnink, ebenso herzlich bedanken. Auch aus den Begegnungen mit Katja habe ich sehr viel Motivation und Mut schöpfen können, mein Vorhaben in meinem Stil und mit der von mir antizpierten Methodik vorantreiben zu können. Besonders in der Endphase der Dissertation waren die konstruktiven Hinweise zur Fertigstellung extrem hilfreich. Liebe Katja, ich bedanke mich *unendlich* für die hilfreichen Ratschläge, den unfassbar herzlichen Umgang und deine Offenheit meinem Thema gegenüber!

Neben meinen zwei Betreuerinnen gibt es natürlich noch andere Personen aus meinem Arbeitsumfeld, deren kritisch-konstruktiven Hinweise, Interpretationsansätze meines Datenmaterials und Einschätzungen meines Forschungsvorhabens meine Dissertation bereichert haben. Dazu gehören meine (ehemaligen und derzeitigen) Kolleg*innen aus dem Chemnitzer Team der GSD Mathematik: Ronny Sitter, Dr. Ergi Acar-Bayraktar, Dr. Andreas Kirsche, Dr. Teresa Beck und Christoph Schäfer. Unserer SHK Luise Pigger danke ich für die wundervollen Transkriptionsarbeiten.

Mit Blick auf mein Anstellungsverhältnis vor der TU Chemnitz möchte ich mich bei drei Freundinnen und ehemaligen Kolleginnen bedanken, die auch nach meinem Ausscheiden an der Universität Leipzig den Kontakt mit mir aufrecht erhielten und mir sowohl bei mentalen als auch bei inhaltlichen Schwierigkeiten des Dissertationsprozesses geholfen haben. Liebe (Dr.) Susanne Wöller, liebe (Dr.) Nina Bohlmann und liebe Anna Hummel: Ich danke euch insgesamt für eine unfassbar schöne Schreibwoche im Sommer 2023, für tolle Interpretationssitzungen und eure unglaublich wertschätzenden Worte mir und meinem Projekt gegenüber. Und auch vielen Dank an die kleine Zaubermaus Marlena, die die Reise noch so viel schöner gemacht hat.

Ein weiterer Blick zurück in die Zeit an der Universität Leipzig lässt mich auch einen herzlichen Dank an Prof. Dr. Simone Reinhold, die mir eine Perspektive für mich und meine Themen in der Mathematikdidaktik aufgezeigt hat, und einen ebenso herzlichen Dank an Herrn Prof. Dr. Thomas Bedürftig, der meine Begeisterung für das Thema *Unendlichkeit* entfacht hat, aussprechen.

Neben beruflich assoziierten Kolleg*innen und Freund*innen gibt es auch Familienmitglieder, die ich an dieser Stelle nicht unerwähnt lassen möchte. Meine wunderbare Schwiegermutter Dorit (Temmel) und meinen Schwiegervater Frank (Temmel) zum Beispiel, bei denen ich in stressigen Dissertationszeiten mein Kind stets gut aufgehoben wusste. Es ist keine Selbstverständlichkeit, dass mir so viel zeitliche, aber auch finanzielle und mentale Hilfe von euch entgegengebracht wurde, auch wenn ihr diese Hilfe stets wie selbstverständlich anbietet. Liebe Dorit, lieber Frank, ich danke euch von Herzen!

Weiterhin möchte ich mich auch bei meinen Eltern Ute Paulmann-Boll und Walter Boll bedanken, die mich in meiner Wissenschaftskarriere unterstützen und schon früh in meinen Interessen gefördert haben. Mein Papa kann die Abgabe meiner Dissertation und auch den Dissertationsprozess leider seit Ende 2020 nicht mehr mitverfolgen. Ich hätte mir sehr gewünscht, ihn bei der Verteidigung begrüßen zu dürfen und ihm die Arbeit vorab zum Gegenlesen reichen zu können. Meine Mama vertritt Papa als „wissenschaftliche Beraterin“ seit 2021 allerdings sehr intensiv – viele Gespräche zum Aufbau meiner Arbeit oder zur mentalen Belastung beim Promovieren begleiten mich seit Papas Tod. Liebe Mama, vielen Dank, dass du an mich glaubst!

Last but definitely not least – meine Kernfamilie: meine Tochter Charlotte und mein Mann Martin. Charlotte musste, insbesondere in der Schreibphase kurz vor der Abgabe, extrem geduldig mit ihrer Mama sein und hat durch ihr Lachen, ihre kleine innere Sonne und ihre unglaublich tolle Persönlichkeit trotz (relativ) wenig gemeinsam verbrachter Zeit meinen Alltag stets immens verschönert. Mein Mann Martin hat viel von der wenigen Mama-Zeit abgefangen und sich intensiv mit unserem Kind beschäftigt - da ist mir das Konzentrieren nicht mehr schwer gefallen. Auch in wissenschaftlichen Belangen konnte ich stets auf die Hilfe, Ratschläge und Übersetzungsfähigkeiten meines Mannes vertrauen. Wir sind ein großartiges Team – lieber Martin, im August 2024 sind wir zehn Jahre verheiratet. Ich danke dir für deine Unterstützung in diesen zehn Jahren, insbesondere natürlich für deine Unterstützung beim Schreiben meiner Dissertation.

Ganz zum Schluss möchte ich mich, insbesondere in Hinblick darauf, dass diese letzten Zeilen nun über ein halbes Jahr NACH der Abgabe der Dissertation erfolgen, noch ganz herzlich bei mir selbst bedanken. Danke, liebes Vergangenheits-Julchen, dass du durchgehalten hast. Ich habe dich sehr lieb.

Außerdem ...

Zwar hier anonym, aber am Ende dennoch sehr nennenswert sind die Proband*innen meiner Studie. Frau Fichtel, Frau Ellestar und Herr Bämpfer sowie die Kinder in den Klassen der Grund- und Gesamtschule verdienen einen ebenso herzlichen Dank für die Bereitschaft zur Teilnahme am Projekt.

Inhalt

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abkürzungen

Anm.	Anmerkung
BMI	Basic Metaphor of Infinity
bspw.	beispielsweise
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
DBR	Design-Based-Research
d.h.	das heißt
Ebd.	Ebenda
et al.	et alii (und andere)
evtl.	eventuell
f.	die folgende Seite
ff.	die folgenden Seiten
ggf.	gegebenenfalls
Herv. i. O.	Hervorhebung im Original
HOT	Higher-Order-Thinking
JB	Julchen Brieger
L	Lehrerin oder Lehrer
LOT	Lower-Order-Thinking
LP	Lehrplan
m.E.	meines Erachtens
NBG	von Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre
P4C	Philosophy for Children
P4CM	Philosophy for Children adapted to Mathematics
PA	Peano-Axiome
PmKJ	Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen
S.	Seite
SuS	Schülerinnen und Schüler
u.a.	unter anderem
usw.	und so weiter
u.v.m.	und viele mehr
ZF	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre
ZFC	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom
ZR	Zahlenraum
z. T.	zum Teil

1. Einleitung

311	Nadja	└Diese Welt┘ (spinnt) mit mir.
312	Kilian	«Nadja adressierend> Trotzdem passt das dann nicht, └(weil es sind) unendlich. ┘>
313	Berat	└Ich versteh überhaupt gar nichts.┘
314	Nadja	«Kilian adressierend> Kilian du denkst zu sehr an die Realität. Denk mal an die un- @Unrealität@.
315	Berat	Zukunft.
316	Nadja	(.) J:a └an die Zukunft.┘

Die obigen Auszüge stammen aus einer Gruppenarbeit der Kinder Nadja, Berat, Nadine und Kilian, welche im Rahmen der in dieser Dissertation vorgestellten explorativen Erhebung aufgezeichnet wurde.[2] Die Kinder tauschen ihre Positionen, ob es einen Beutel geben kann, der *alle* Zahlen beinhaltet, untereinander aus. In diesem recht amüsanten Ausschnitt zeigen sich viele Themen, die bei den Kindern bei einer Beschäftigung mit Unendlichkeit auftreten.

Denk mal an die Unrealität: Zum einen muss für eine Beschäftigung mit Unendlichkeit ein Anspruch an die Mathematik, die Realität vollständig modellieren zu können, aufgegeben werden.

Trotzdem passt das dann nicht, weil es sind unendlich: Weiterhin ist eine Vorstellung der so genannten aktualen Unendlichkeit für die Kinder schwer in ihre naiven Vorstellungen des Konzepts Unendlichkeit einzubringen.

Diese Welt spinnt mit mir: Viele Themen rund um Unendlichkeit brechen, wenn das Thema explizit adressiert wird, solche naiven Vorstellungen auf.

Ja, an die Zukunft: Unendlichkeit im kosmologischen Kontext ist eine Möglichkeit für die Kinder, die Modellierung der Realität und ihre Vorstellungen von Unendlichkeit zu vereinen. Dabei spielen die Unendlichkeit von Zeit und Raum eine besondere Rolle.

Nach diesem kurzen Einblick in das Datenmaterial der Arbeit soll im Folgenden die Motivation zur Beschäftigung mit dem Thema entfaltet werden. Unendlichkeit wird bislang nicht explizit im deutschen Mathematikunterricht behandelt (Schimmöller, 2011), aber oft implizit in den curricular vorgeschriebenen Inhalten aufgegriffen (Dötschel, 2011). Beispielsweise begegnen Kinder in der Grundschule bereits in der ersten Klasse mit der Einführung der natürlichen Zahlen dem Prinzip, dass die Menge der natürlichen Zahlen unendlich groß ist (Hefendehl-Hebeker,

2 In Kapitel 6.1 kann die Rekonstruktion dieser Gruppenarbeit nachvollzogen werden. Die Namen der Kinder (sowie später auch der Lehrpersonen) sind Pseudonyme.

2019). Circa 80% der Grundschüler*innen kennen den Begriff Unendlichkeit bereits und circa 60% von ihnen verbinden ihn auch mit einem mathematischen Kontext (Wörner, 2013). Weiterhin kommen die Kinder auch nach der Grundschule über Themen wie unendliche Dezimalzahlen (periodisch und nichtperiodisch), Geraden in der Geometrie, Monotonieverhalten sowie Definitionsbereich von Funktionen und natürlich der Analysis in der Sekundarstufe II (Grenzwerte, Differentialquotient) in Kontakt mit implizit enthaltener Unendlichkeit. An den weiterführenden Schulen und auch in der universitären Lehre treten dann, insbesondere in Hinblick auf die Analysis der Sekundarstufe II, gewisse Verständnisprobleme bei den Schüler*innen auf. So werden zum Beispiel Limes und Schranken verwechselt (Davis & Vinner, 1986; Tall & Vinner, 1981), Inkommensurabilität wird nicht adäquat verstanden (Bauer et al., 2005), der Grenzwertbegriff bleibt eher informell (Williams, 1991) und die Vorstellung von aktualer Unendlichkeit wird nicht akzeptiert (Mamolo & Zazkis, 2008). Diese Probleme greift Dötschel (2011) auf und passt das Stufenmodell des Begriffsverständnisses nach Vollrath (1984) auf den Begriff der Unendlichkeit an, um eine „Grundlage für eine nachhaltige Vermittlung des Begriffs in der Schule“(Dötschel, 2011, S. 4) schaffen zu können. Ihre Arbeiten werden nicht weiter fortgeführt. Somit ist der Forschungsstand zu einer expliziten Adressierung von Unendlichkeit im Mathematikunterricht im deutschsprachigen Raum weiterhin auf wenige Artikel (Dötschel, 2011; Schimmöller, 2011; Wörner, 2013) einzuschränken. Im internationalen Raum scheint das Thema zwar in Hinblick auf Grenzwertprozesse und Vorstellungen von Schüler*innen diesbezüglich (bspw. bei Fischbein, 2001; Juter, 2006; Marx, 2013; Przenioslo, 2006; Tall & Vinner, 1981) oder bezüglich ihrer Vorstellungen von Unendlichkeit (bspw. bei Chu et al., 2020; Date-Huxtable et al., 2018; Ely, 2010; Fischbein et al., 1979; Hannula et al., 2006; Jirotková & Littler, 2004; Monaghan, 2001; Tirosh & Tsamir, 1996) wesentlich großflächiger untersucht worden zu sein, aber auch hier gibt es wenig Studien, die eine explizite Adressierung im Unterricht untersuchen (bspw. Kahn et al., 2011; Kidron & Tall, 2014; Liu & Niess, 2006; Pehkonen et al., 2006; Singer & Voica, 2008; Tsamir & Tirosh, 1999).

Einige dieser Untersuchungen führten bereits Wörner (2013, S. 1) zu der Hypothese, dass sich der Mathematikunterricht nicht wesentlich auf eine Ausbildung des Unendlichkeitsbegriffs auswirkt. Sie fordert weiter, dass eine Thematisierung des mathematisch zentralen Unendlichkeitsbegriffs von Georg Cantor im Unterricht notwendig sei, um eine solche Ausbildung anzuregen (Wörner, 2013, S. 4). Laut Kondratieva (2017, S. 75) kann eine philosophisch-theoretische Rahmung zu einem besseren Verständnis formal-mathematischer Methoden und somit auch zu einem besseren Verständnis von Unendlichkeit führen. Diese Meinung wird auch innerhalb der vorliegenden Dissertation vertreten. Ich begründe die Notwendigkeit einer philosophischen Beschäftigung mit Unendlichkeit zum einen mit allgemeinen Vorteilen des Philosophierens mit Kindern, nämlich dass naive Vorstellungen durch philosophische Methoden „aufgebrochen“ werden können (Lafortune et al., 2003), dass sich der Klassenraum durch die Gespräche zu einem Raum der Erforschung, der Exploration und des Hinterfragens entwickelt (Mcguinness, 2005), dass das logisch-kritische Denken gefördert wird (Barrow, 2010) und signifikante Verbesserung beim Problemlösen und logischen Denken erzielt werden können (Topping & Trickey, 2007). Außerdem werden durch das Philosophieren Reflexions- und Gesprächskompetenzen gefördert (Michalik & Schreier, 2006).

Besonders hervorzuheben sind die Förderung logisch-kritischen Denkens sowie das Aufbrechen naiver Vorstellungen (das Erzeugen kognitiver Dissonanzen). Beide Phänomene können m.E. bei der Beschäftigung mit Unendlichkeit förderlich sein, denn wie am Anfang der Einleitung erwähnt und durch Studien wie von Wörner (2013), Hannula et al. (2006) oder Fischbein et al. (1979) belegt, werden solche naiven Vorstellungen zum Konzept Unendlichkeit durch den gegenwärtigen Mathematikunterricht weder aufgebrochen noch weiterentwickelt. Es bedarf also eines neuen Ansatzes, um sich dem Thema explizit im Unterricht zu widmen.

Dieser neue Ansatz kann m.E. in philosophischen Gesprächen über Unendlichkeit im Mathematikunterricht realisiert werden. Durch die explizite Adressierung des Themas und philosophische Gespräche zu ausgewählten Fragen der Unendlichkeit könnten intensivere Auseinandersetzungen der Kinder mit eigenen und fremden Konzepten angeregt werden. Somit wäre die didaktisch logische Schlussfolgerung, eine currciulare Verankerung des Philosophierens im Mathematikunterrichts und des Themas Unendlichkeit auf einer theoretischen Basis zu entwickeln. Für eine solche Entwicklung kann allerdings nicht auf den Hypothesen qualitativer Studien oder den Ergebnissen quantitativer Studien aufgebaut werden, da wie vorab beschrieben der Forschungsstand zur Unendlichkeit (und übrigens auch zum Philosophieren im Mathematikunterricht)[3] kein ausreichendes Fundament dafür bietet. Somit soll in dieser Arbeit zunächst im explorativen Setting geklärt werden, ob man mit einer solchen curricularen Einbindung bereits in der Grundschule oder frühen weiterführenden Schule beginnen könnte. Daraus leitet sich die folgende, übergeordnete Forschungsfrage ab:

Ist es möglich, sinnstiftende Interaktionen zum Thema Unendlichkeit mit Hilfe philosophischer Gespräche in der Grund- und frühen Gesamtschule anzuregen?

Die Gesamtschule steht damit exemplarisch-repräsentativ für weiterführende Schulen. Zur Beantwortung dieser Forschungsfrage wurden vier Unterrichtsdesigns konzipiert, welche verschiedene Fragen zur Unendlichkeit mit Hilfe von Impulsen für philosophische Gespräche an die Kinder stellen. Diese Unterrichtsdesigns wurden in einer dritten/vierten Klasse einer Grundschule sowie einer fünften Klasse einer Gesamtschule erprobt.

Die entstandenen Gespräche werden aufgrund ihrer Inhalte als meta-mathematisch-philosophische Gespräche gelabelt, wobei auch die Attribute philosophisch-mathematisch oder meta-mathematisch sowie grundsätzlich philosophisch auf sie zutreffen. Aufgrund von Beobachtungen bei der Durchführung der Unterrichtsdesigns ergaben sich nach- bzw. untergeordnet weitere Forschungsfragen zur Rolle der Lehrkraft während der Führung der Gespräche, zu den Argumentationsprozessen der Kinder sowie deren Nennung von inhaltlichen Aspekten des Themas Unendlichkeit.

3 Vgl. Kapitel 3.2.1.

Daher wurden die untergeordneten Forschungsfragen folgendermaßen ausformuliert:

1. Welche Argumentationsprozesse können in meta-mathematisch-philosophischen Gesprächen rekonstruiert werden?

2. Welche Interaktionsmuster bilden sich zwischen den Lehrkräften und Schüler*innen im meta-mathematisch-philosophischen Gespräch?

3. Welche inhaltlichen Aspekte des Konzepts *Unendlichkeit* können aus den Rekonstruktionen herausgearbeitet werden?

Zur Beantwortung dieser Fragen werden zunächst ausgewählte Szenen mit der Interaktionsanalyse (Krummheuer & Brandt, 2001) rekonstruiert und anschließend entweder, mit Blick auf die Argumentationsprozesse, noch mit der Argumentationsanalyse (Knipping & Reid, 2019) oder, mit Blick auf inhaltliche Aspekte, mit der qualitativen Inhaltsanalyse (Kuckartz, 2018) ausgewertet. Die durch Interaktions- und Argumentationsanalyse gewonnenen Rekonstruktionen werden mit Hilfe komparativer Vergleiche nach musterhaften Turnabfolgen sowie Phänomenen und Charakteristika der Argumentationen untersucht. Zur Beantwortung der übergeordneten Forschungsfrage sollen die Rekonstruktionen der ausgewählten Szenen beitragen.

Für die abschließende Darstellung der Forschungsergebnisse hinsichtlich der Forschungsfragen ist auch eine zielführende Strukturierung der Arbeit notwendig, die im Folgenden entfaltet werden soll.

In Kapitel 2 werden zunächst aus einer philosophisch-mathematischen Perspektive heraus theoretische Betrachtungen zur Unendlichkeit geschildert und anschließend der mathematikdidaktische Forschungsstand zum Thema skizziert. In Kapitel 2.1 werden zunächst ausgewählte Positionierungen und Begriffsnutzungen zur Unendlichkeit dargestellt, woraufhin abschließend im Unterkapitel 2.1.5 eine eigene Begriffsbestimmung präsentiert wird. Daran anschließend wird in Kapitel 2.2 die Unendlichkeit der natürlichen sowie in Kapitel 2.3 die der reellen Zahlen kurz aus mathematischer Perspektive erläutert. Nachfolgend werden in den Kapiteln 2.4.1 (schulformübergreifend), 2.4.2 (weiterführende Schulen; Kontinuum und Grenzwerte) und 2.4.3 (Grundschule) mathematikdidaktische Überlegungen und aktuelle Forschungsstände präsentiert.

In Kapitel 3 werden zunächst die allgemeinen Vorteile des Einbindens philosophischer Inhalte und Methoden dargelegt. Dabei wird das von Lipman (2003) entwickelte Programm *Philosophy for Children* in einem einzelnen Unterkapitel (Kap. 3.1.1) gesondert erläutert. Anschließend werden in Kapitel 3.2 die Vorteile des Philosophierens im Mathematikunterricht herausgestellt, wobei auch hier dem Programm *Philosophy for Children adapted to Mathematics* ein eigenes Unterkapitel (Kap. 3.2.1) gewidmet wird.

Anschließend an diese theoretische Rahmung werden die vier Unterrichtsdesigns vorgestellt (Kap. 4.3, Kap. 4.4, Kap. 4.5 und Kap. 4.6). Dem vorangehend wird allerdings in den didaktisch-methodischen Vorüberlegungen (Kap. 4.1) zunächst geklärt, ab wann eigentlich sinnstiftende Interaktionen als solche bezeichnet werden können und ab wann *philosophische* Gespräche eigentlich dieses Attribut erfüllen. Auch geht eine kurze Übersicht der Stunden sowie eine Beschreibung des Samplings (Kap. 4.2) der Vorstellung der Unterrichtsdesigns voraus. Diese Vorstellung orientiert sich am Dreischritt *Vorstellung fachlicher Hintergründe – Didaktischer Kommentar und Reflexion – Kurzvorstellung interessanter Dokumente*, wobei für die U4 (Kap. 4.6) die Kurzvorstellung in den didaktischen Kommentar eingebunden wurde.

In Kapitel 5 wird zunächst die Rolle der Unterrichtsdesigns für die vorliegende Studie in Abgrenzung zur Design-Based-Research-Forschung ausgeschärft (Kap. 5.1). Darauf folgend werden die Interaktionsanalyse in ihren Grundzügen erläutert (Kap. 5.2), die Dimensionen für interaktionale Verdichtungen sowie interaktionalen Gleichfluss angegeben (Kap. 5.2.1), anschließend die wichtigsten Elemente der Argumentations- (Kap. 5.3) und qualitativen Inhaltsanalyse (Kap. 5.4) beschrieben und letztlich das Zusammenspiel der Methoden erläutert (Kap. 5.5).

Kapitel 6 beinhaltet die Rekonstruktion von fünf ausgewählten Szenen. Die im Rahmen des Unterrichtsdesigns für die Stunde U2 stattgefundenen Pro-Contra-Debatten werden auch mit der Argumentationsanalyse rekonstruiert, sodass sich in den Kapiteln 6.2 und 6.3 auch die Toulmin-Schemata zu ausgewählten Argumentationen wiederfinden. Bei den Rekonstruktionen in den Kapiteln 6.1, 6.4.1 und 6.4.2 wurde dieser Schritt nicht vollzogen.

Anschließend an die Rekonstruktionen werden in Kap. 7 die Ergebnisse der komparativen Analysen dargelegt. Zunächst wird ein im Datenmaterial emergierendes Interaktionsmuster vorgestellt und anhand von Beispielszenen erläutert (Kap. 7.1). Hierauf folgend werden Erschwerungs- und Ermöglichungsgrundlagen für interaktionale Verdichtungen bei Lehrkraft-Schüler*innen-Interaktionen in den Blick genommen (Kap. 7.2). Nachfolgend werden in Kapitel 7.3 einige Phänomene in den Argumentationen der Kinder an Beispielen ausgeführt und die Charakteristika der in den philosophisch-mathematischen Gesprächen über Unendlichkeit auftretenden Argumentationen expliziert (Kap. 7.3.5). In Kapitel 7.4 werden dann inhaltliche Aspekte des Konzepts Unendlichkeit im Argumentationsprozess zum einen nach den Oberkategorien Nomen-Adjektiv-Adverb (Wortarten, Kap. 7.4.1) und Objekt-Prozess (Kap. 7.4.2) strukturiert und die Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse interpretiert (Kap. 7.4.3).

Bei der Zusammenfassung der Ergebnisse in Kapitel 8 wird zunächst die übergeordnete Frage nach der Möglichkeit sinnstiftender Interaktionen sowie die untergeordneten Forschungsfragen beantwortet.

In Kapitel 9 werden mögliche Einschränkungen der Arbeit und die verdichteten Ergebnisse diskutiert.

In einem Ausblick (Kap. 10) wird zum einen der Beitrag der Arbeit zur Mathematikdidaktik, zum anderen aber auch unterrichtspraktische Schlussfolgerungen und anknüpfende Forschungsdesiderata beschrieben.

2. Theoretische Betrachtungen zur Unendlichkeit

Was erwartet Sie in diesem Kapitel?

Im folgenden Kapitel wird zunächst auf Basis einer mathematisch-philosophischen historischen Betrachtung ein Versuch unternommen, das Verständnis der Autorin zum Unendlichkeitsbegriff darzulegen. Es wird deutlich, dass sich die Autorin für ihre Begriffsbestimmung vor allem der Cantor'schen und Hegel'schen Theorien bedient. Im Anschluss an die Begriffsbestimmung sollen kurz die Unendlichkeit der natürlichen sowie reellen Zahlen aus ausgewählten mathematischen Perspektiven heraus dargelegt werden. Daraufhin folgen mathematikdidaktische Betrachtungen zur Unendlichkeit, wobei zunächst schulformübergreifend eine Synopse des aktuellen Forschungsstandes dargelegt und anschließend die Notwendigkeit des Themas anhand der Probleme bezüglich Kontinuum und Grenzwerten an den weiterführenden Schulen begründet wird. Abschließend für dieses Kapitel folgt eine kurze Beschreibung der (mathematik-)didaktischen Möglichkeiten zur Implementierung von Unendlichkeit in der Grundschule.

Und warum ist das wichtig für die Arbeit?

Die Arbeitsdefinition zur Unendlichkeit schafft eine theoretische Basis für interpretative Analysen und Rekonstruktionen. Eine Reflexion des eigenen theoretischen Vorwissens ist m.E. für qualitative Forschung unabdingbar. Weiterhin ist zur Generierung plausibler Deutungsalternativen die Basis „fachdidaktischer Wissensbestände“ (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 90) nötig, weshalb auch eine mathematikdidaktische Betrachtung des Themas Unendlichkeit in der theoretischen Rahmung zum Lerngegenstand nicht fehlen darf.

2.1 Versuch einer Begriffsbestimmung

> Beim Unendlichkeitsbegriff – so scheint es – treffen sich philosophisches Denken und mathematisches Handwerk.
>
> Nickel (2008, S. 199)

In den Unterkapiteln des hier beginnenden Kapitels soll im Folgenden ein Überblick über ausgewählte Unendlichkeitsauffassungen verschiedener Autoren[4] aus der Philosophie bzw. Philosophie und Mathematik (ganz im Sinne des oben präsentierten Epigraphen) präsentiert werden. Es sollen philosophische und mathematische Meilensteine in der Geschichte der Beschäftigung mit Unendlichkeit erläutert werden, deren Auswahl entweder in der Relevanz für folgende Konzeptionen oder für die eigene Begriffsbestimmung am Ende des Kapitels begründet liegt. Zunächst möchte ich aber eine kurze Übersicht, die mir die künstliche Intelligenz ChatGPT am 09.05.2023 präsentiert hat, der Leserin nicht vorenthalten:

> Unendlichkeit bezieht sich auf die Eigenschaft, dass etwas endlos oder grenzenlos ist, ohne ein Ende oder eine Grenze zu haben. In der Mathematik bezieht sich Unendlichkeit auf die Idee von unendlich großen Zahlen oder Mengen, die größer sind als jede endliche Zahl oder Menge.
>
> In der Philosophie und der Religion wird Unendlichkeit oft mit dem Konzept des Absoluten oder Göttlichen in Verbindung gebracht. Es kann auch auf die unendliche Zeit und den unendlichen Raum hinweisen. (OpenAI, 2023)

Im Folgenden wird ersichtlich, dass diese kurze Übersicht relativ eingeschränkt ist. Die angesprochene Grenzenlosigkeit ist in der Antike (Unterkap. 2.1.1) stark vertreten, während die Bezugnahme auf Gott vor allem in der lateinischen Patristik geschieht (Unterkap. 2.1.3). Auch bezieht sich Unendlichkeit in der Mathematik nicht lediglich auf die Idee großer Zahlen oder Mengen, wie das Beispiel von Gottfried Wilhelm Leibniz' Infinitesemalien eindrücklich aufzeigt (Unterkap. 2.1.3). Im selben Unterkapitel werden unendliche Zeit und Raum im Kontext von Immanuel Kants erster Antinomie der reinen Vernunft kurz erläutert. Es folgt eine etwas längere Betrachtung von Georg Cantors *Transfinitum* (von ChatGPT nicht angesprochen) und abschließend der eigene Versuch einer Begriffsauseinandersetzung.

2.1.1 Unendlichkeit in der Antike: *Apeiron*

In der Antike beschäftigte das Unendliche viele Philosoph*innen, besonders bei der Suche nach dem Ursprung/Wesen der Welt. Während im griechischen das Wort *peras* für eine Grenze oder Schranke steht, so bedeutet *to apeiron* bzw. *Apeiron* etwas wie ‚grenzenlos', ‚ohne Schranken/Grenzen' – die Negation des *peras*. Eine der ersten signifikanten Überlegungen zu *to apeiron* kommt von **Anaximander von Milet**. (Moore, 2019, S. 15)

4 Hier wurde absichtlich keine gendersensible Schreibweise benutzt.

Für Anaximander war das Unendliche (bzw. Grenzen- oder Schrankenlose) der Ursprung und das Grundprinzip der Welt (Trzęsicki, 2015, S. 181), genauer der „Urstoff[...] oder [die] Elemente, auf denen alles Sein beruht"(Klaus & Buhr, 1971b, S.874) – griechisch: *Arche*. Wie genau das Unendliche alles Sein fundiert, wird von ihm nicht weiter ausgeführt, was durch Theophrastus kritisiert wird:

> Theophrastus' statement concerning the *Apeiron* has come down to us in the following three versions:
> Simpl. *Phys.* 24, 13 (DK 12 A 9): Anaximander ... said that the *arche* and the element of existing things was the *Apeiron*... and he says that it is neither water nor any other of the so-called elements, but some other infinite nature... [...]
> Aët. 1 3, 3 (DK 12 A 14): Anaximander... said that the *arche* of existing things is the *Apeiron*... but he errs in that he does not say what the *Apeiron* is, whether it is air, or water, or earth, or some other body. (Finkelberg, 1993, S. 229)

Auch wenn er keine konkrete Entität in Bezug auf *Apeiron* nennen kann, so gibt es doch Interpretationen dessen, was er als Urstoff gemeint haben könnte. Beispielsweise hat seine Notation von *Apeiron* etwas Göttliches, als ewig unverändertes Substrat, welches allem zugrunde liegt (Moore, 2019, S. 15). Weitere Interpretationen schlagen vor, dass *Apeiron* im Anaximander'schen Sinn auch räumlich-zeitliche Unendlichkeit darstellen könnte:

> [...] Anaximander meant „that which is without internal boundaries or distinctions" [...] Anaximander may have meant to specify it as spatially infinite (or more plausibly historically - indefinitely large) or temporally infinite, viz. eternal, or, what is most probable, both [...] (Finkelberg, 1993, S. 230)

Dieser Urstoff hatte für Anaximander sowohl eine ontologische (oben erläutert) als auch eine ethische Komponente – in der Unendlichkeit mussten alle auf der Welt gegeneinander strebenden Kräfte (wie bspw. hell – dunkel, Tag und Nacht, ...) zur Buße einkehren (Easwaran et al., 2021; Moore, 2019). Im Gegensatz zu Anaximander, für welchen *Apeiron* durchaus positiv konnotiert war (als Urstoff), war bei den **Pythagoreern** all das, was *Peras*, also eine Grenze oder Schranke besaß, etwas intuitiv einleuchtendes und Gutes. Sie ordneten die Unendlichkeit dem Raum zu (Easwaran et al., 2021), was durch **Archytas von Tarentum**, einen ihrer Vertreter, folgendermaßen vertreten wurde:

> If the cosmos is bounded, then one could extend one's hand or a stick beyond its boundary to find either empty space or matter. And this would be part of the world, which thus cannot be bounded on pain of contradiction. So the world is unbounded. (Easwaran et al., 2021)

Für ihren Leitspruch *Alles ist Zahl*, der eng mit dem Verständnis der materiallen Welt qua Erforschung der Zahlenwelt zusammenhing, verfassten sie die „wohl erste wirkliche Theorie: die Zahlentheorie" (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 31). Ihre Vorstellung vom Ursprung der Welt war das *Peras*, das Begrenzte welches in die

Leere des *Apeiron* 'als Samen gepflanzt' wurde (Moore, 2019, S. 17). Das *Apeiron* umgibt dann als sich unendlich ausdehnender Raum die eigentliche materielle Welt, die durch Grenzen und Schranken übersichtlich und für den Verstand greifbar ist (*Peras*). Zahlen und ihre Verhältnisse waren die „Grundlage [...] der *Metaphysik* der Pythagoreer "(Bedürftig & Murawski, 2015, S. 11) – es sei anzumerken, dass es sich dabei um natürliche Zahlen handelte (Moore, 2019, S. 17, die Verhältnisse waren dann selbstverständlich rationale Zahlen). Den natürlichen Zahlen wurden auch mystische Bedeutungen zugewiesen, so waren bspw. die geraden Zahlen 'weiblich', die ungeraden Zahlen 'männlich' und die Zahl Fünf als Summe der ersten geraden und ungeraden Zahlen stand für die Ehe (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 31). Diese Mystifizierung kommt dem nahe, was in der heutigen Mathematikdidaktik als narrativer Zahlaspekt (Benz et al., 2014, S. 121) benannt wird. Eben wegen dieser Mystifizierung war die Entdeckung der Inkommensurabilität (auch in Kap. 2.3 auf S. 43) eine „lebensbedrohliche Krise“ (Heuser, 2008, S. 111) für die Bewegung der Pythagoreer: *Apeiron* fand sich in den Maßen der Diagonale des Einheitsquadrates (Kantenlänge = 1) wieder:

> For the Pythagoreans this was nothing short of catastrophic. The diagonal of a square is incommensurable with each side, showing, apparently, that not everything is to be understood in terms of natural numbers, as they had believed. $\sqrt{2}$ is not a 'rational' number. [...] Whether or not the Pythagoreans regarded *to apeiron* itself as mathematically infinite is not clear, for it is not clear to what extent they had consciously assimilated the mathematically infinite. But here it was, effectively showing up in their very midst. (Moore, 2019, S. 20)

Die von **Aristoteles** (siehe Kap. 2.1.2) formulierte *aktuale Unendlichkeit* wird mitunter auch als *horror infiniti* bezeichnet (Di Sia, 2019, S. 21f.), ein Begriff, den man auch gut auf den Schrecken der Pythagoreer zur Inkommensurabilität anwenden könnte. Auf weitere Erläuterungen zu konkreten Positionierungen von Philosoph*innen und Mathematiker*innen sei an dieser Stelle verzichtet, zu nennen wäre noch **Epikur**, für welchen ich auf Kap. 14 in Drozdek (2008) verweisen möchte (Unendlichkeit im Bezug zum unveränderlichen, ewigen Universum). Luis et al. (1991) geben mit Blick auf die Begriffsentwicklungen zu Unendlichkeit in der Antike eine geeignete Zusammenfassung und Klassifizierung an (S. 212):

- **Unendlichkeit als Nomen**: dem Reich der Götter vorbehalten, meist in mythologischem/theologischem/metaphysischem Kontext genutzt

- **Unendlich als Adjektiv**: beschreibt ein bestimmtes Nomen; meist in Verbindung mit dem Universum/Raum/Zeit; beschreibt etwas Absolutes; steht in Bezug zur aktualen Unendlichkeit

- **Unendlich als Adverb**: um gewisse Handlungen wie *weitermachen, ausdehnen, unterteilen, hinzufügen* u.v.m. zu beschreiben; steht in Bezug zur potentiellen Unendlichkeit

Die hier schon angesprochene Unterscheidung zwischen potentieller (bei den Adverbien) und aktualer (bei den Adjektiven) Unendlichkeit soll im Folgenden näher beschrieben werden.

2.1.2 Aristoteles und andere: potentielle und aktuale Unendlichkeit

Die Unterscheidung von Unendlichkeit in potentielle und aktuale Unendlichkeit wurde maßgeblich durch **Aristoteles** geprägt: „It would be hard to exaggerate the role played by Aristotle in the history of infinity. He articulated some essential conceptual distinctions that were to influence all subsequent discussions“ (Easwaran et al., 2021). Die sehr einflussreiche Unterscheidung wurde bei Aristoteles durch *apeiron dunamei* (potentielle Unendlichkeit) und *apeiron hos aphorismenon* (aktuale Unendlichkeit) benannt (Pantsar, 2015, S. 2490). Obwohl er bei grundlegenden metaphysischen Überlegungen eher endliche Überlegungen bevorzugt, so hebt er doch die Bedeutung iterativer Prozesse und deren Unendlichkeit hervor. Auch ontologisch können für ihn Mengen nach der Möglichkeit her unbegrenzt (*a-peiron*) sein, was durch iteratives Hinzufügen von Objekten realisiert ist, bzw. auch in der unendlich iterativ fortgeführten Teilung von Mengen: „[...] es erhellt, daß auf gewisse Weise ein Unbegrenztes ist, auf gewisse Weise aber nicht. Es heißt nämlich Sein, theils der Möglichkeit, theils der Wirklichkeit nach. Und das Unbegrenzte hat sein Sein in der Zusetzung, hat es aber auch in der Wegnahme“ (Aristoteles, 1829, *Phys.* 3.6, S. 67). Unendlichkeit bzgl. der Möglichkeit des Hinzufügens oder Wegnehmens/ Teilens ist dann *potentielle* Unendlichkeit, eine Unendlichkeit im *Werden*, nicht etwas, das eine Grenze überschreitet (z.B. die des Endlichen), sondern etwas ohne Grenze, somit negativ bestimmt:

> It is a process going forward as long as we wish, without ever completing; in this sense, it is an essentially negative concept, is what is not finite. According to this meaning, this infinity *has not the nothing beyond*, but *it has beyond always something.* [...] With potential infinity for growth we tend towards infinitely big, and with that by division we tend towards the infinitely small. (Di Sia, 2019, S. 20)

Ein Beispiel hierfür wäre die Zahlenfolge 1, 2, 3 ..., die durch Addition der Eins im iterativen Prozess *potentiell* unendlich ist, da man immer die *Möglichkeit* hat, noch eine Eins zu addieren (Nachfolger einer natürlichen Zahl, → S. 40). Der *aktual* unendliche Gegenpart zu dieser Zahlenfolge wäre die Menge der natürlichen Zahlen – das aktual Unendliche hält aber erst mit Georg Cantors naiver Mengenlehre Einzug in die Mathematik[5] („Cantors Paradies“ → S. 35). Aktuale Unendlichkeit, also die Manifestation des potentiell Unendlichen im Sein und nicht im Werden, lehnt Aristoteles in der Wirklichkeit ab:

> Das Unendliche dagegen ist nicht in dem Sinne ein Potentielles, als könnte es jemals in Wirklichkeit ein für sich Bestehendes werden; das wird es nur im Denken. Denn daraus, daß die Teilbarkeit nie zu Ende kommt, ergibt sich, daß wohl diese Aktualität ein potentielles Sein hat, aber nicht auch das Gelangen zum Fürsichsein. Aristoteles (1907, *Met.* V. I., S. 149)

---

5 Die Setzung der natürlichen Zahlen als abgeschlossene Menge kann über das Unendlichkeitsaxiom postuliert werden. Bedürftig (2018, S. 136) schreibt dazu: „$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, ...\}$ ist eine Menge. Wir glauben es täglich. Dabei ist es ein Paradoxon, das **Paradoxon** der Mengenlehre: a) «...»bedeutet «zähle weiter – ohne Ende». b) «} »bedeutet «Ende ». Kurz: ....}.“

Dieses *Fürsichsein* kann man heutzutage auch als Realisation eines Prozesses im mathematischen Objekt ansehen: „However, the transition from potential to actual infinity includes a transition from (an irreversible) process to a mathematical object“ (Hannula et al., 2006, S. 318). Für Aristoteles ist diese Transition nicht denkbar, für ihn ist aktuale Unendlichkeit das unmögliche Resultat eines potentiell unendlichen Prozesses:

> Es *gibt* also, so Aristoteles, ein Unendliches, nämlich in einem offenen Prozess des Hinzufügens so, wie den Stationen im Wettlauf [von Achilles und der Schildkröte, Anm. JB] immer eine weitere folgt – ohne Ende. »Potentiell« sagt man zu diesem Unendlichen. Und es gibt das Unendliche *nicht*, nämlich als Ganzes »für sich existierend« oder »der Verwirklichung nach«. »Aktual« sagt man heute. Gäbe es das Unendliche »der Verwirklichung nach«, müsste man das Ende der endlos vielen Stationen denken. Undenkbar. (Bedürftig, 2018, S. 131)

Diese Ablehnung der aktualen Unendlichkeit teilt Aristoteles mit vielen Philosoph*innen und Mathematiker*innen. Selbst nach der Postulierung der naiven Mengenlehre durch **Georg Cantor** war das Konzept der aktualen Unendlichkeit umstritten:

> Actual infinity, a central concept in philosophy and mathematics, has profoundly contributed to the foundation of mathematics and to the theoretical basis of various systems. It has long and persistently been rejected by mathematicians and philosophers alike, and was highly controversial even in the last century in spite of the comprehensive framework provided for it by Cantorian set theory. (Tsamir & Dreyfus, 2002, S. 2)

Die Distinktion zwischen potentieller und aktualer Unendlichkeit kann weiterhin auch am Beispiel der ganzen Zahlen verbildlicht werden. Kondratieva (2017, S. 77) unterscheidet zwischen der Menge („collection“) der ganzen Zahlen, die aktuale Unendlichkeit repräsentiert, und der Gegebenheit, dass für jede endliche Menge von ganzen Zahlen immer eine größere endliche Menge ganzer Zahlen gefunden werden kann: potentielle Unendlichkeit, also eine Unendlichkeit im *Werden*.

Die Unendlichkeit im Werden manifestiert sich auch bei unendlichen Folgen und Reihen, bzw. bei Grenzwertprozessen in der Mathematik. Die Gleichsetzung einer Folge mit ihrem Grenzwert wäre also eine Gleichsetzung von etwas, das sich im *Werden* befindet mit etwas, dass bereits im *Sein* ist (man denke nur einmal an die Gleichsetzung der Folge $0.\overline{9}$ und 1). Diese Position wird nicht nur innerhalb dieser Arbeit vertreten:

> Und so wie bei den Grenzprozessen der Infinitesemalrechnung das Unendliche im Sinne des Unendlichkleinen und des Unendlichgroßen sich als eine bloße Redensart erweisen ließ, so müssen wir auch das Unendliche im Sinne der unendlichen Gesamtheit, wo wir es jetzt noch in den Schlußweisen vorfinden, als etwas bloß Scheinbares erkennen. [...] Will man in Kürze die neue Auffassung des Unendlichen, der Cantor Eingang verschafft hat, charakterisieren, so könnte man wohl sagen: in

> der Analysis haben wir es nur mit dem Unendlichkleinen und dem Unendlichgroßen als Limesbegriff, als etwas Werdendem, Entstehendem, Erzeugtem, d.h. wie man sagt, mit dem *potentiellen Unendlichen* zu tun. Aber das eigentlich Unendliche selbst ist dies nicht. Dieses haben wir z.B., wenn wir die Gesamtheit der Zahlen 1,2,3,4,... selbst als eine fertige Einheit betrachten oder die Punkte einer Strecke als eine Gesamtheit von Dingen ansehen, die fertig vorliegt. Diese Art des Unendlichen wird als *aktual unendlich* bezeichnet. (Hilbert, 1926, S. 162, 167)

Die Unterscheidung bzgl. potentieller und aktualer Unendlichkeit bei Grenzwertprozessen ist an dieser Stelle allerdings klar von der Unterscheidung von *concept image* und *concept definition* (Tall & Vinner, 1981) abzugrenzen, auf welche an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll.

Lakoff & Núñez (2000) stellen, basierend auf ihren Forschungen als Kognitionswissenschaftler, eine Möglichkeit vor, den potentiellen Prozess zu einem aktual Seienden zu konzeptualisieren, ihre *Basic Metaphor of Infinity* (auch in Kap. 2.2, S. 42):

> „We hypothesize that all cases of actual infinity [...] are special cases of a single general conceptual metaphor in which processes that go on indefinitely are conceptualized as having an ultimate result. We call this the *Basic Metaphor of Infinity*, or the BMI for short. The target domain of the BMI is the domain of processes without end – that is, what linguists call imperfective processes. The effect of the BMI is to add a metaphorical completion to the ongoing process so that it is seen as having a result – an infinite *thing*."(Lakoff & Núñez, 2000, S. 158)

Ohne die Möglichkeit, aktuale Unendlichkeit in die moderne Mathematik zu integrieren, wäre diese eventuell seit Cantor, spätestens aber seit Hilbert nicht auf dem relativ festen Fundament, auf welchem sie sich im 20. Jahrhundert entwickelt hat. Dennoch gibt es auch zu Hilberts Programmatik Gegenstimmen, die ihre Kritik auf einer Ablehnung des aktual Unendlichen aufbauen. Beispielsweise verzichtet die Bewegung der **Intuitionist*innen** (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Hermann Weyl) komplett auf aktuale Unendlichkeit, da sie weder unmittelbar erfassbar noch konstruierbar ist (Wolf, 1994, S. 237). Die potentielle Unendlichkeit wird, insbesondere in Hinblick auf die natürlichen Zahlen und das *Zählen*, allerdings als eine „durch die Intuition garantierte Operation" (Wolf, 1994, S. 238) als gültig befunden.

2.1.3 Unendlichkeit nach der Antike

An dieser Stelle wird innerhalb der historischen Begriffsherleitung ein großer Sprung gemacht und die Zeit der lateinischen Patristik sowie das Mittelalter bewusst ausgelassen. Erwähnenswert aus diesen Epochen ist, dass Unendlichkeit erstmals im theologischen Kontext erwähnt wird: „Erst in der lateinischen Patristik begegnet <infinitus> [...] unter Prädikaten negativer Theologie" (Pannenberg, 2001, S. 140). Das Göttliche als Sinnbild aktualer Unendlichkeit findet sich so auch bei Augustinus und Thomas von Aquin im Mittelalter wieder (Ebd., S.141). Exemplarisch für diesen theologischen Kontext kann auch als erster Befürworter der aktualen Unendlichkeit als Sinnbild von Göttlichkeit **Gregor von Nyssa** genannt werden:

> Vielmehr werden „aktuale" und „potentielle" Unendlichkeit nun dergestalt auf verschiedene epistemische und ontologische Ebenen verteilt, dass die „potentielle Unendlichkeit" auf die Seite des beschränkten menschlichen Verstandes fällt, als diejenige unzureichende Form der Erfassung des Unendlichen, die dem Menschen alleine zugänglich ist, während die „aktuale Unendlichkeit" Gott oder dem Absoluten vorbehalten bleibt. (Rothhaar, 2018, S. 154)

Der restliche Teil dieses Kapitels wird folgendermaßen aufgeteilt: Zunächst sollen die Autoren René Descartes und Benedictus de Spinoza, die bis zum Zeitpunkt der Einführung des Leibniz'schen Unendlichkeitsbegriffs aus meiner Sicht erwähnenswert sind, kurz in ihren Auffassungen beschrieben werden. Anschließend werden die Konzepte von Leibniz und Kant vorgestellt, woraufhin noch eine kurze Beschreibung des Hegel'schen Unendlichkeitsbegriffs folgt. Insgesamt sollen diese Erläuterungen nicht den Anspruch einer historischen Auseinandersetzung erfüllen, sondern einen Überblick über das zur Begriffsbestimmung herangezogene theoretische Fundament geben.

Nach **René Descartes** sind Grenzen von sich ausdehnenden Prozessen für den menschlichen Geist nicht zugänglich, sondern diese Erkenntnis bleibt nur Gott zugänglich, dessen Konzeption auch von Descartes als einzige Manifestation des aktual Unendlichen angesehen wird. Es ist für Menschen also epistemologisch nicht möglich, die Welt als unendlich oder nicht-unendlich zu kennzeichnen. Das potentiell Unendliche lässt Descartes in seinen Betrachtungen aus. (Wolf, 1994, S. 204ff.) Ein Unendlichkeit beinhaltendes Konzept kann für ihn nur von einem unendlichen Wesen kausal angestoßen worden sein (Hatfield, 2023). Außerdem stammt für Descartes die Idee des Unendlichen, die wir Menschen intuitiv in uns tragen, von Gott. In Abgrenzung zu unserer eigenen Endlichkeit könnten wir nämlich das Unendliche anderweitig nicht begreifen. Somit steht das (von Gott gegebene) Konzept der Unendlichkeit sowohl logisch als auch epistemologisch über dem der Endlichkeit. (Moore, 2019, S. 74) Für unsere Erkenntnis ist deshalb laut Descartes die „Intuition des Unendlichen als Bedingung der Möglichkeit aller Erfassung endlicher Dinge" (Pannenberg, 2001, S. 141) anzusehen. Weiterhin ist zu erwähnen, dass Materie für Descartes unendlich oft teilbar ist, es für ihn also unendlich kleine Dinge gibt (Look, 2020).

Auch **Benedictus de Spinoza** schreibt Gott das Attribut der Unendlichkeit zu. Für ihn sind Gott und Natur eine Einheit, dabei dehnt sich Gott ins Unendliche aus. Gott allein repräsentiert für Spinoza die absolute Unendlichkeit und umspannt durch seinen Umfang die gesamte Realität. Selbst die Unendlichkeit von Raum und Zeit erreicht diejenige von Gott in ihrem Ausmaß nicht. (Moore, 2019, S. 75f.) Interessant an dieser Stelle ist auch, dass er Gott *aufgrund* seiner Unendlichkeit auch das Attribut *unteilbar* zuweist (Nadler, 2023).

Gottfried Wilhelm Leibniz schreibt dem Kontinuum, der bei ihm wichtigsten Form der Unendlichkeit, keine Referenz in der Realität zu, sondern lediglich in der Manifestation im Verstand (Evers, 2008, S. 250). Dabei unterscheidet er klar zwischen Idee (Unendlichkeit möglich) und Vorstellung (Unendlichkeit nicht möglich) im Verstand (Moore, 2019, S. 76). Die Idee des Unendlichen ist dem

Menschen immanent und kann im Mathematischen über Addition und/oder Division hergeleitet werden (Moore, 2019, S. 76). Dabei meint Unendlichkeit für ihn etwas größeres, als etwas in irgendeiner Quantität je Dagewesenes, da man immer etwas noch größeres zu einer gegebenen Größe finden kann (Knobloch, 2012, S. 19). Aktuale Unendlichkeit lehnt Leibniz aber in der Mathematik ab und schreibt sie allein dem Dasein Gottes zu (vgl. auch Kap. 4.4.1 auf S. 81). Leibniz gilt als Begründer der Infinitesemalrechnung. Infinitesemalien sind für ihn Bestandteile des Kontinuums:

> Für Leibnizens spätere mathematische Entwicklungen nicht folgenlos war das dabei entwickelte Verständnis des Kontinuums als aus infinitesimalen Elementen aufgebaut. Dem korrespondierte bei Bewegungen eine immanente „Tendenz“ (*conatus*) zur Aufrechterhaltung ihres Bewegungszustandes. Das Konzept des *conatus* hatte Leibniz von T. Hobbes übernommen, der es wiederum unter kritischem Anschluss an B. Cavalieris *Indivisible* gebildet hatte. Letztere spielen in der Mathematik des 17. Jahrhunderts eine wichtige Rolle während der frühen Phase einer noch unformalisierten (Infinitesimal-) Analysis. (Scholz, n. d., S. 6, Herv.i.O.).

Infinitesemalien sind dabei geometrisch unendlich kleine Strecken, in ihrer arithmetischen Umsetzung infinitesemale Größen und weiterhin teilbar, also nicht *Indivisiblien* (Bedürftig & Kuhlemann, 2020, S. 3). Eine Möglichkeit, die Leibniz’schen Theorien in die heutige moderne Mathematik zu übertragen, wird in Kuhlemann (2023, S. 19) im Rahmen der Nonstandard-Analysis erläutert.

Wie auch Aristoteles und andere sieht **Immanuel Kant** von einer ontologischen Referenz der aktualen Unendlichkeit ab. Im Gegensatz zu Aristoteles lehnt er aktuale Unendlichkeit aber nicht vollends ab, sondern sieht sie als durch die Vernunft erfassbares Konzept an. Bei Kant wird dafür allerdings die Bezeichnung *wirkliches, vollendetes und ganzes Unendliches* verwendet. (Wolf, 1994, S. 159) Das Abstreiten eines ontologischen Status der aktualen Unendlichkeit begründet Kant in der nicht möglichen Vollendung infiniter Prozesse:

> Ebendiese Annahme, dass es widersprüchlich sei, dass etwas tatsächlich *als Unendliches* existiert, beruht aber ihrerseits wieder auf einer bestimmten, seit Aristoteles oft vertretenen Prämisse: auf der Prämisse nämlich, dass es ein „aktual Unendliches“ im Gegensatz zum „potentiell Unendlichen“ nicht geben kann. Ohne dass Kant diese Begrifflichkeiten selbst benutzen würde, scheint er genau diese Annahme zu teilen, wenn er behauptet, dass „die Unendlichkeit einer Reihe [...] durch sukzessive Synthesis niemals vollendet sein kann“. (Rothhaar, 2018, S. 160, Kant *KrV* im Original nicht zitiert)[6]

Selbst die Wahrnehmung von aktualer Unendlichkeit durch die Sinne wird von ihm abgelehnt: „Kant [...] as well appeals to the fact that perception of actual infinity by humans is problematic [...]“(Kondratieva, 2017, S. 77). Somit ist aktuale Unendlichkeit für ihn einzig und allein der Vernunft vorbehalten, wobei diese auch

6 Für das Zitat von Immanuel Kant siehe Kant (1977, S. 412).

zu der Erkenntnis fähig ist, dass der Raum aktual unendlich ist (Chiba, 2018, S. 1463).

In der *Kritik der reinen Vernunft* (Kant, 1977) führt Kant Beweise für sowohl Thesen als auch Gegenthesen für seine bekannten Antinomien der reinen Vernunft an, von denen die erste sich explizit mit Unendlichkeit (der Welt in Zeit und Raum) beschäftigt. Da in der Antinomie Thesis und Antithesis gleichermaßen bewiesen werden, stehen sich die Endlichkeit und die Un-Endlichkeit der Welt in Zeit und Raum diametral gegenüber: „Obgleich beide Behauptungen einander widersprechen, können sie nach KANT gleichermaßen (gut) bewiesen werden, womit das soweit geschilderte Kriterium einer Antinomie (vom zweiten Typus) bereits erfüllt wäre“ (Benthaus, 2018, S. 144). Die Thesis, die Welt sei im Raum begrenzt und habe einen Anfang in der Zeit (Kant, 1977, S. 412), begründet er in der Ablehnung aktualer Unendlichkeit (Moore, 2019, S. 88). Außerdem führt er an, dass die Bestimmung einer Gegenwart bei einer Vorstellung eines zeitlichen Kontinuums unmöglich sei (Kant, 1977, S. 416). Die Antithesis, die Welt sei im Raum unbegrenzt und habe keinen Anfang in der Zeit (Kant, 1977, S. 413) begründet er darin, dass Zeit und Raum unendlich sind und die Bestimmung, was nach einer durch Endlichkeit gesetzten Grenze kommt, unmöglich ist (Moore, 2019, S. 88). Seine Diskussion von Thesis und Antithesis wird durch die von ihm angestrebte Verschmelzung des Unendlichkeitsbegriffs seiner Zeit mit der aristotelischen Ablehnung von aktualer Unendlichkeit unterlaufen (Easwaran et al., 2021). Kants Lösung der Antinomien, der Transzendentale Idealismus, unterscheidet zwischen verschiedenen Welten und löst auch die zweite Antinomie mit der Frage nach unendlich vielen Kausalketten für Ereignisse (Wolf, 1994, S. 162). Die Unendlichkeit von Zeit und Raum wird bei Kant auch als mathematische Unendlichkeit bezeichnet (*infinitum mathematicum*), wohingegen die wirkliche Unendlichkeit (*infinitum reale*) als Konzept von der Vernunft ohne Beschränkungen gedacht wird (De Bianchi, 2015, S. 2401). An anderer Stelle wird zwischen metaphysischer und mathematischer Unendlichkeit getrennt, wobei Menschen als (metaphysisch) endliche Entitäten für Kant in einer metaphysisch unendlichen Welt leben (Moore, 2019, S. 84). Weiterhin wird anhand der Leitlinie der ersten und zweiten Antinomie der reinen Vernunft die Unterscheidung zwischen quantitativer (1. Antinomie) und qualitativer (2. Antinomie) kosmologischer Idee eingebracht. Bei der quantitativen kosmologischen Idee wird eine absolute Totalität bezüglich Zeit und Raum (Unbegrenztheit vs. Anfang in Zeit und Raum), bei der qualitativen kosmologischen Idee die absolute Totalität bezüglich Teilung und Zusammensetzung der Welt diskutiert. (Kreis, 2015, S. 227)

Georg Friedrich Wilhelm Hegel reflektiert Unendlichkeit im Kontext der Endlichkeit und stellt die Frage in den Raum, wie man das Unendliche, „ohne den endlichen Ausgangspunkt zu verleugnen, von dem aus es gedacht wird“ (Waldenfels, 2008, S. 3) überhaupt denken kann. Auch er greift die Teilung in *qualitativ* und *quantitativ* in Anlehnung an Kant auf,[7] bezieht sie allerdings auf Unendlichkeit

7 „Unter der ‚quantitativen Unendlichkeit‘ ist hierbei dasjenige zu verstehen, was in der Mathematik üblicherweise unter ‚Unendlichkeit‘ verstanden und mit einer liegenden Acht symbolisiert wird: die unendlich große Anzahl oder Ausdehnung von etwas. Neben diesem Verständnis von Unendlichkeit, das sicherlich auch dem Alltagsverständnis am ehesten entspricht, steht die in der Literatur häufig sogenannte ‚qualitative Unendlichkeit‘: Unendlichkeit im Sinn von Unbegrenztheit und Allumfassendheit. Das ‚Unendliche‘ in diesem qualitativen Sinn wäre demnach dadurch gekennzeichnet, dass es keine Begrenzung oder Beschränkung durch etwas Anderes erfährt. Auf-im Allgemeinen (nicht nur auf kosmologische Ideen) und teilt die qualitative Unendlichkeit nochmals in diskrete und kontinuierliche qualitative Unendlichkeit auf (Kreis, 2015, S. 228). Kants erste Antinomie wird durch ihn in mehreren Schritten auf folgende Aussagen verdichtet: (1) Quantität hat eine Grenze (2) Quantität hat keine Grenze (Kreis, 2015, S. 289). Zur Auflösung der Antinomie zieht Hegel die oben angesprochene begriffliche Auseinandersetzung mit Unendlichkeit heran, in welcher er die Abhängigkeit der Unendlichkeit von der Endlichkeit und umgekehrt verdeutlicht:

> Das Unendliche ist auf diese Weise mit dem Gegensatze gegen das Endliche behaftet, welches, als Anderes, das bestimmte, reale Dasein zugleich bleibt, obschon es in seinem Ansichsein, dem Unendlichen, zugleich als aufgehoben gesetzt ist; dieses ist das Nicht-Endliche, – ein Sein in der Bestimmtheit der Negation. Gegen das Endliche, den Kreis der seienden Bestimmtheiten, der Realitäten, ist das Unendliche das unbestimmte Leere, das Jenseits des Endlichen, welches sein Ansichsein nicht an seinem Dasein, das ein bestimmtes ist, hat. (Hegel, 1979, S. 151)

Somit ist für ihn auch das Denken einer potentiellen Unendlichkeit unabwendbar mit dem Denken einer aktualen Unendlichkeit verbunden (Kreis, 2015, S. 299). Die Welt als endlich zu begreifen mündet für Hegel in einem unendlichen Regress des endlichen Denkens, welcher als Regress wieder als unendliche Ganzheit gedacht werden muss (Davis, 2012, S. 178). Der unendliche Regress der Endlichkeit kann als potentielle, das Verstehen des Regresses als Ganzheit als aktuale Unendlichkeit gedeutet werden. Mit dieser Distinktion muss man also für Hegel stets das Endliche im Kontext des Unendlichen und das Unendliche als Werdung des Endlichen verstehen:

> Das wahre „Absolute“ kann daher nur eine in sich differenzierte Einheit von Identität und Nicht-Identität, von Endlichkeit und Unendlichkeit sein, bei der das Absolute das Nicht-Absolute, das Unendliche das Endliche als Moment seiner selbst begreift. [...] Das Unendliche, das im Gegensatz zum Endlichen gedacht wird, erweist sich als Gegenteil seiner selbst, als Endliches. Damit hebt es sich in einer reflexiven Werdung gegen sich selbst auf und wird zu einem Endlichen. Das Endliche wiederum, das in einem Gegensatz zum Unendlichen verstanden wird, hebt sich auf, da es als isoliert-Endliches in sich selbst negativ ist. (Rothhaar, 2018, S. 167)

Zur Vereinigung dieser dialektischen Begriffsauseinandersetzung sieht er, ganz in kantischer Tradition, die Vernunft als Lösung an: „Der Widerspruch [...] [ist] das Erheben der Vernunft über die Beschränkungen des Verstandes“(Hegel, 1979, Bd. 5, S. 38). Einige Teile von Hegels Betrachtung können in Ansätzen in Georg Cantors Verständnis von Unendlichkeit gedeutet werden, so benutzt bspw. Cantor nicht

grund dieser Relationslosigkeit nach außen ist das qualitativ Unendliche im Wortsinn ‚Absolutes‘, d.h. es steht nicht in Relationen und Beziehungen zu etwas von ihm Unterschiedenen“ (Rothhaar, 2018, S. 153).

den Begriff *Un*-Endlichkeit, sondern *Trans*finitum, in welchem das Endliche nicht negiert, sondern überschritten wird (vgl. auch das nächste Kapitel, 2.1.4 Cantors Paradies).

Ein erster Versuch, *Mengen* mit Unendlichkeit zu verbinden, fand im theologischen Kontext durch **Bernard Bolzano** statt. Für Bolzano ist nämlich die Menge aller Wahrheiten, die Gott weiß, unendlich groß bzw. beinhaltet sie unendlich viele dieser Wahrheiten. Dies begründet er, ganz im Hegel'schen Sinn, mit einem infinite Regress potentieller Unendlichkeit. Weiß man nämlich, dass eine Proposition p_1 wahr ist, so weiß man auch, dass die Proposition p_2, die aussagt, dass p_1 wahr ist, wahr ist (und so weiter, und so fort bis ins Unendliche). Dieser infinite Regress mündet in einer Menge, die unendlich viele p_n beinhaltet und aktuale Unendlichkeit repräsentiert. Bolzanos Arbeiten waren grundlegend für die von Georg Cantor entwickelte *naive, transfinite Mengenlehre* (siehe Kap. 2.1.4 im Folgenden). (Moore, 2019, S. 111)

Weiterhin ist es m.E. relevant, an dieser Stelle kurz auf die Rolle der mathematischen Unendlichkeit einzugehen, die im Rahmen der formal-symbolischen Sprache der Mathematik andere Definitionsmöglichkeiten erfährt als eine Unendlichkeit in der Alltagssprache:

> Den idealisierten Verfahren der modernen, mathematisch verfaßten Wissenschaften entspricht eine *künstliche Idealsprache*, die sich der Mittel der Quantifizierung bedient und eine Exaktheit anstrebt, die den natürlichen Sprachen abgeht. Solche Kunstsprachen überschreiten die Grenzen natürlicher Sprachen, indem sie die Mittel der Formalisierung, der Schematisierung und der Operationalisierung einsetzen. (Waldenfels, 2008, S. 16)

Mit Blick auf die Proband*innen dieser Studie (Kinder), denen eine Kunstsprache wie die der Mathematik noch nicht vollständig zugängig gemacht wurde, sollte eine Betrachtung von **Ludwig Wittgensteins** Aussage „*[d]ie Grenzen meiner Sprache* sind die Grenzen meiner Welt“ (Wittgenstein, 1953, *Tract.* 5.6, S. 89, Herv. i. O.) nicht außer Acht gelassen werden. Besonders die Unendlichkeit betreffend ist die natürliche Sprache nicht vorteilhaft (Waldenfels, 2008, S. 16), hier kann eine mathematische Beschäftigung, insbesondere mit den Mitteln der mathematischen Kunstsprache insofern hilfreich sein, dass mehr Aspekte der Unendlichkeit tiefergehend begriffen werden können. Durch eine Erweiterung der sprachlichen Mittel können so also auch die Grenzen der Welt ein wenig erweitert und mehr Erkenntnisräume eröffnet werden.

2.1.4 Cantors Paradies

Mit *Cantors Paradies* ist, benannt nach einem bekannten Zitat David Hilberts, der Einzug der aktualen Unendlichkeit in die Grundlagen der Mathematik, nämlich die von **Georg Cantor** entwickelte *transfinite Mengentheorie* gemeint. Dies war aus zweierlei Hinsicht zu Cantors Zeit revolutionär: Zum einen hat er durch die Begründung der transfiniten Mengentheorie „die moderne Mathematik auf eine völlig neue Grundlage gestellt“ (Kreis, 2015, S. 361) und zum anderen hat er durch sein *Diagonalargument* eine Möglichkeit gegeben, die Kardinalitäten unendlich großer Mengen miteinander zu vergleichen.

1895 wird zum ersten Mal die kleinste transfinite Kardinalzahl, nämlich $\aleph_0$, vorgestellt:

> Die Mengen mit endlicher Cardinalzahl heissen ‚*endliche Mengen*', alle anderen wollen wir ‚*transfinite Mengen*' und die ihnen zukommenden Cardinalzahlen ‚*transfinite Cardinalzahlen*' nennen. Die Gesammtheit *aller endlichen Cardinalzahlen* ν bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Cardinalzahl (§1) ‚*Alef-null*', in Zeichen $\aleph_0$, definiren also
>
> $$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}. \tag{2.1}$$
>
> Dass $\aleph_0$ eine *transfinite* Zahl, d.h. *keiner endlichen* Zahl μ *gleich* ist, folgt aus der einfachen Thatsache, dass, wenn zu der Menge $\{\nu\}$ ein neues Element e_0 hinzugefügt wird, die Vereinigungsmenge $(\{\nu\}, e_0)$ der ursprünglichen $\{\nu\}$ äquivalent ist. Denn es lässt sich zwischen beiden die gegenseitig eindeutige Beziehung denken, wonach dem Elemente e_0 der ersten das Element 1 der zweiten, dem Element ν der ersten das Element $\nu + 1$ der andern entspricht. Nach §3 haben wir daher:
>
> $$\aleph_0 + 1 = \aleph_0. \tag{2.2}$$
>
> In §5 wurde aber gezeigt, dass $\mu + 1$ stets von μ verschieden ist, daher ist $\aleph_0$ keiner endlichen Zahl μ gleich. (Cantor, 1895, S. 492)

Somit postuliert Cantor mit seiner revolutionären Arbeit die Existenz einer unendlich großen Zahl (bzw. mehrerer unendlich großer Zahlen mit Hilfe des *Diagonalarguments*). Der potentiell unendliche Zählprozess manifestiert sich durch die Benennung der Kardinalität der natürlichen Zahlen zu einer aktual unendlichen Größe, sogar einer Zahl. Die aktuale Unendlichkeit erhält erstmals Einzug in die Grundlagen der Mathematik, die Kardinalitäten unendlich großer Mengen werden vergleichbar:

> Cantor [...] gestaltete den Begriff des aktual Unendlichen systematisch aus. Fassen wir die beiden genannten Beispiele für Unendlich ins Auge
>
> 1. 1, 2, 3, 4, ... ;
> 2. Punkte der Strecke 0 bis 1 oder, was dasselbe ist, die Gesamtheit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1,
>
> so liegt es am nächsten, sie vom reinen Vielheitsstandpunkt aus zu betrachten, und dabei nehmen wir überraschende Tatsachen wahr, die heute jedem Mathematiker geläufig sind. Betrachten wir nämlich die Menge aller rationalen Zahlen [...], so zeigt sich, daß - vom reinen Vielheitsstandpunkt aus - diese Menge nicht größer als die Menge der ganzen Zahlen ist: wir sagen, daß die rationalen Zahlen auf gewöhnliche Weise abgezählt werden können oder sie sind abzählbar. (Hilbert, 1926, S. 168)

So begeistert, wie sich David Hilberts oben angeführtes Zitat interpretieren lässt, so heftig waren z.T. auch die Gegenstimmen zur Vergleichbarkeit verschiedener

Unendlichkeiten. Beispielsweise wird **Henri Poincaré** nachgesagt, Cantors Entdeckung der transfiniten Zahlen mit einer perversen pathologischen Krankheit verglichen zu haben (Moore, 2019, S. 120). Auch **Leopold Kronecker**, Verfechter des sogenannten Finitismus, lehnte Cantors und alle in der durch Cantors Mengenlehre begründeten Theorien ab, da er die Mathematik auf dem fundamentalen (und endlichen) Begriff der Zahl, also auf endlichen arithmetischen Eigenschaften, begründen wollte (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 106). **Hermann Weyl**, ein bekannter Intuitionist, lehnt die Manifestation von aktualer Unendlichkeit in Mengen ab und ist der Meinung, dass man bspw. keine Totalität aller natürlichen Zahlen bestimmen kann, da diese unendlich große Menge sich durch eine sukzessive Ergänzung ihrer Elemente in ein unbestimmbares, potentielles Unendliches entwickelt (Wolf, 1994, S. 241). Insgesamt richten sich die meisten kritischen Stimmen gegen einen Einzug des aktual Unendlichen in die Mathematik, auch aufgrund der mengentheoretischen Paradoxien, die in der naiven Mengenlehre auftreten (vgl. bspw. Russell'sche Antinomie, Kap. 4.6.1.3 auf S. 98). Aber nicht lediglich die entstehenden Paradoxien und/oder Antinomien sind Gründe für Kritik:

> Die Kritik richtet sich zunächst gegen einige „Ungereimtheiten“ in der gegenwärtigen Interpretation [des Begriffs aktual unendlich, Anm. JB]. [...] daß die Kritik auch aus einem anderen Grunde gerechtfertigt ist, weil nämlich wegen der Endlichkeit aller Existenz eine aktuale Unendlichkeit per se unmöglich und jede unbeschränkte Größe nur im potentiellen Sinne infinit ist. Diesem Schluß unterliegt auch die Mathematik, die nur scheinbar unabhängig von physikalischen Sachzwängen existiert. (Mückenheim, 2006, S. 111)

Die Losgelöstheit von Referenzen ist allerdings eine Kritik, die m.E. den Kern von Cantors Theorien verfehlt, denn die transfiniten Zahlen (wie $\aleph_0, \aleph_1$, ...) sind für Cantor nicht lediglich hypothetisch im Rahmen seiner Mengenlehre zur formalen Konsistenz erdacht, „his transfinite numbers were 'forms or modifications of the actual infinite'“ (Pantsar, 2015, S. 2490). Außerdem hat er sich nicht lediglich im Rahmen formal-konstistenter Systeme mit dem Begriff der Unendlichkeit befasst, sondern arbeitet auch begriffsanalytisch am Konzept:

> Im Gegensatz zu dem „Potential-Unendlichen“ ist das „Aktual-Unendliche“ einer weiteren Einteilung zugänglich. So unterscheidet Cantor an ihm drei Arten:
>
> 1. Gott als Absolutum
> 2. Aktual-Unendliches in der von Gott geschaffenen Welt, welches er auch Aktual-Unendliches in concreto nennt, und
> 3. Aktual-Unendliches, welches in der Mathematik erfaßt und von ihm als Aktual-Unendliches in abstracto bezeichnet wird
>
> [...] Diese drei Fälle sind ferner dahingehend klassifizierbar, ob das in ihnen angegebene Unendliche einer weiteren Vermehrung fähig ist oder nicht. So steht (1.) Gott als ein Absolutum oder vermehrbares Aktual-Unendliches (2.) dem vermehrbaren Aktual-Unendlichen oder Transfinitum gegenüber, wozu sowohl das Aktual-Unendliche in concreto als auch in abstracto gehört. (Wolf, 1994, S. 217)

Für ihn geht das aktual unendliche Konzept dem potentiell unendlichen voraus (Kondratieva, 2017, S. 78). Dies spricht, wie schon in Kap. 2.1.3 erwähnt, für Hegels Einfluss auf Cantor. Beispielsweise würde bei Cantor zunächst die Menge der natürlichen Zahlen bestehen, während die Folge der natürlichen Zahlen nur existieren kann, weil die Menge der natürlichen Zahlen ihr logisch vorangeht. In einer Fußnote beschreibt er 1887, mit kritischem Blick auf die Idee des aktual Unendlichen als *wandelnde Grenze* (Johann Friedrich Herbart), dass die Grenze nicht wandelnd sein darf, sondern durch das *Transfinitum* fest vorgegeben wird (Deiser, 2010, S. 25). Durch die Unterscheidung von *abzählbar* und *überabzählbar* Unendlichem bleibt Cantor mit seinem Verständnis von Unendlichkeit, abgesehen von der Sichtweise Gottes als Absolutum, „philosophisch-metaphysisch gesehen [...] innerhalb der Kategorie der Quantität“ (Tapp, 2008, S. 246). Ferner ist er für alle mathematischen Begriffe davon überzeugt, dass sie „nicht nur subjektive, immanent reale Elemente der Kognition sind, sondern auch transsubjektive Realität besitzen“ (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 71). In dieser Ansicht ist wiederum Platons Einfluss auf Cantor erkennbar (Ebd.).

2.1.5 Fazit: Apeiron, Unendlichkeit, Transfinitum

> Der Begriff ‚unendlich‘ bezeichnet eine Eigenschaft, die so lange rein formal bleibt, als nicht gesagt wird, *was* ohne Ende sein soll.
>
> (Esterbauer, 2008, S. 142, Herv. i.O.)

Letztlich ist nun, nach diesem kurzen Überblick, zu klären, wie die Autorin dieser Arbeit Unendlichkeit versteht – ganz im Sinne des oben aufgeführten Epigraphen. Dazu möchte ich kurz festhalten:

- In der Antike wurde das **Apeiron** im Kontext der Natur/ eines Urstoffes verstanden und somit eher kosmologisch aufgefasst. Es wird als Negation einer Grenze gesetzt.
- Aristoteles (und andere) teilt Unendlichkeit in etwas *Werdendes* und etwas *Seiendes* auf und lehnt die Manifestation der Unendlichkeit im Werden, also die Unendlichkeit im Sein, in der Wirklichkeit ab
- In der lateinischen Patristik und Scholastik wurde Unendlichkeit vor allem in Bezug auf Gott diskutiert
- Aktuale Unendlichkeit kann für Immanuel Kant nur durch die Vernunft erfasst werden, für Gottfried Wilhelm Leibniz ist ihre einzige Manifestation in Gott zu finden
- Georg Friedrich Wilhelm Hegel stellt dialektisch zur Frage, wie Unendlichkeit ohne Endlichkeit gedacht werden kann und vice versa
- Das *Transfinitum* ist für Georg Cantor eine Überwindung des Endlichen, die in der Mathematik stattfinden kann

Wenn in dieser Arbeit von Unendlichkeit gesprochen wird, dann nicht im eigentlichen Sinn des Begriffes. Hegels Auffassung, Un-Endlichkeit negiere die Endlichkeit, wird hier begriffsanalytisch geteilt. Auch ich denke, dass die Endlichkeit immanent in der Unendlichkeit enthalten ist und eine Unendlichkeit nicht ohne Endlichkeit zu denken ist. Besonders in der Mathematik gibt es keine losgelösten „Unendlichkeiten", sondern es enthält ein jedes Unendliche auch wiederum das Endliche oder (wie im Intervall $[0, 1]$) das Unendliche wird durch das Endliche umspannt. Eine Trennung zwischen mathematischer und philosophischer Unendlichkeit scheint, besonders mit Blick auf die obige Aufzählung, besonders relevant. M.E. ist eine kosmologische Unendlichkeit, wie sie in der Antike oder auch von Immanuel Kant diskutiert wird, für den menschlichen Geist nicht mit einer Referenzentität zu fassen. Die Vorstellung kosmologischer Unendlichkeit muss sich daher zwingend auf die der Endlichkeit und die von Prozessen berufen. Dies steht m.E. im Kontrast zur mathematischen Unendlichkeit, die, je nachdem, wie man Mathematik versteht, von vornherein als *theoretisches* Konstrukt aufgefasst werden muss. Die Position, Mathematik müsse sich auf Intuitionen berufen können, teile ich nicht. Tatsächlich wäre ich eher eine Verfechterin des Hilbert'schen Formalismus, der sich auf die Konsistenz und Beweisbarkeit mathematischer Aussagen beruft (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 118ff.). Unter dieser Vorannahme zur Mathematik ist Unendlichkeit zwar trotzdem kein *a priori* zugängiger Begriff und es können weiterhin Paradoxien/ Antinomien auftreten, die mit ihr zusammenhängen. Dennoch scheint mir diese grundlegende Auffassung zur Mathematik am besten geeignet, um im formal-theoretischen System der Mathematik konstruktiv mit aktualer Unendlichkeit operieren zu können. Diese aktuale Unendlichkeit, so hat es die Geschichte der Mathematik eindrucksvoll aufgezeigt, ist aus der modernen Mathematik auch nicht mehr wegzudenken. Dennoch appelliere ich aus stoffdidaktischer Sicht für ein Umdenken bezüglich ihrer Relevanz im Mathematikunterricht, da hier ohne eine Einführung der formal-konsistenten Mathematik in ihrer ganzheitlichen Komplexität besonders bei implizit in mathematischen Inhalten enthaltener Unendlichkeit auf *Intuitionen* gesetzt wird, die aber dem Konzept der aktualen Unendlichkeit im Kontrast gegenüberstehen. Dies erklärt eventuell die in Kap. 2.4.2 erläuterten Schwierigkeiten mit Grenzwertprozessen.

Zusammenfassend kann ich dem Begriff *Transfinitum*, wie er von Georg Cantor geprägt wurde, am ehesten beipflichten. Das Transfinitum negiert das Endliche nicht, sondern inkludiert es im Begriff. Es wird nicht das Endliche abgelehnt, sondern *über das Endliche hinaus* gedacht, und zwar im klar umrahmten mathematischen Kontext. Des Weiteren beinhaltet dieser Begriff auch das aktual Unendliche, welches für die Mengentheorie und moderne Mathematik unverzichtbar geworden ist. Wenn also im Folgenden von *Unendlichkeit* geschrieben wird, meine ich damit:

> Eine **Überwindung der Endlichkeit**, welche vom mathematischen Kontext ausgehend auch Konzepte der Wirklichkeit widerspiegeln kann und sowohl potentielle (als Prozess des Endlichen) als auch aktuale Unendlichkeit bezeichnen kann.

2.2 Unendlichkeit der Natürlichen Zahlen

> Was sind die natürlichen Zahlen? Diese Frage ist sehr leicht gestellt; ihre Beantwortung dagegen ist schwer und gehört mehr in den Bereich der Philosophie als in den der Mathematik.
>
> Mangoldt & Knopp (1966, S.102)

Die seit Georg Cantor als solche bezeichnete *Menge* der natürlichen Zahlen ist maßgeblich für den Arithmetikunterricht der Grundschule und dennoch schwer als Begriff zu fassen (siehe Epigraph). Marginal werden im Rahmen von Lernumgebungen oder der Beschäftigung mit Größen auch positive rationale Zahlen behandelt (vgl. hierzu Sächsisches Staatsministerium für Kultus und Sport (2009)). *Was* eine natürliche Zahl im Kern wirklich *ist*, ist wie im Epigraph oben ausgedrückt, eine sehr weitreichende Frage und soll an dieser Stelle auch nicht beantwortet werden. Ohne eine explizite Definition anzugeben, werden natürliche Zahlen über ihre Eigenschaften bestimmt. Diese wurden nach ihrem Urheber Guiseppe Peano benannt und beinhalten fünf Grundeigenschaften (bzw. Axiome)[8] (Mangoldt & Knopp, 1966, S.102):

1. 1 ist eine natürliche Zahl
2. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau einen Nachfolger, der wieder eine natürliche Zahl ist.
3. Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 1 ist.
4. Die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden.
5. *Vollständige Induktion:* Enthält eine Menge natürlicher Zahlen die Zahl 1 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so enthält sie alle natürlichen Zahlen.

Diese Axiome werden verkürzt Peano-Axiome (PA) genannt und bieten eine Möglichkeit, natürliche Zahlen transfinit (also als Fortsetzung finiter Postulate) und arithmetisch zu beschreiben. Eine zweite Möglichkeit wäre, dass eine Mengenlehre wie etwa ZF bzw. ZFC (Zermelo-Fraenkel bzw. Zermelo-Fraenkel-Choice, mit Auswahlaxiom) oder NBG (von Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre) die Grundlage zur Beschreibung der natürlichen Zahlen liefert. Dann „[postuliert] das

8 Die Autoren Mangoldt & Knopp (1966) bestimmen die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Zahl 0 – meines Erachtens ist dies eine *Entscheidung* und keine mathematische Wahrheit. Man kann die präsentierten Peano-Axiome also auch mit 0 statt 1 als kleinster natürlicher Zahl bestimmen. Ob es aber überhaupt so etwas wie mathematische Wahrheiten gibt oder ob alles Entscheidungen sind, ist wiederum eine Positionierung meinerseits, die in dieser klitzekleinen Fußnote nicht weiter begründet werden soll.

Axiom der Unendlichkeit [...]: Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge“ (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 168). Das Unendlichkeitsaxiom in ZF[9] kann man formal folgendermaßen ausdrücken (Ebd.):

$$\exists x[\emptyset \in x \wedge \forall u(u \in x \rightarrow u \cup \{u\} \in x)]$$

Mit Hilfe des Unendlichkeitsaxioms kann man also die natürlichen Zahlen folgendermaßen definieren (Neumann, 1925):

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{\emptyset\} \\
2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}
\end{aligned}$$

Sowohl die mengentheoretische (ZF/ZFC über Unendlichkeitsaxiom) als auch die arithmetische (Peano-Axiome) Konstruktion der natürlichen Zahlen haben ein grundlegendes Problem - die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen. Das Unendlichkeitsaxiom postuliert zwar die Existenz der unendlichen Menge, aber um aus der prozesshaften Konstruktion der natürlichen Zahlen die Existenz einer unendlichen Menge kognitiv nachvollziehen zu können, bietet es keine Unterstützung. Dieses Problem haben Lakoff & Núñez (2000) mit Hilfe der Basic Metaphor of Infinity versucht zu lösen (genauere tabellarische Aufführung in Tabelle 2.1 auf S. 42):

> Here is the problem characterizing the set of natural numbers. The set must be infinite since it contains *all* of the infinitely many numbers, but it cannot contain ∞ as a number.
> To get the *set* of natural numbers, you have to collect up each number as it is formed. The set keeps growing without end. To get the *entire* set of natural numbers - all of them, even though the set never stops growing - you need something more. In axiomatic set theory, you add an axiom that simply stipulates that the set exists. From a cognitive perspective, that set can be constructed conceptually via a version of the Basic Metaphor of Infinity. The BMI imposes a metaphorical completion to the unending process of natural-number collection. (Lakoff & Núñez, 2000, S.173 f.)

9 Problematisch an dieser Stelle ist, dass sowohl ZF als auch ZFC Antinomien über Axiome versuchen zu vermeiden (für genauere Abgrenzung des Begriffes Antinomie von dem der Paradoxie siehe Brieger (2018) oder Kap. 4.6.1 auf S. 92 dieser Arbeit). Moore (2019) fasst das Grundproblem der gravierendsten Antinomien der **naiven Mengenlehre**, nämlich der Russell'schen und der Burali-Forti-Antinomie treffend zusammen: „The paradox of the Set of all Sets: We both do, and do not, want to admit the existence of a Set of all Sets“ (Moore, 2019, S. 150). Würden wir die Existenz einer Menge aller Mengen anerkennen, so müsste diese sich selbst enthalten. Sie müsste aber auch alle Mengen enthalten, die sich nicht selbst enthalten. Daher dürfte sie sich nicht selbst enthalten – gelöst wird das in ZF, indem die Existenz einer Menge, die alle Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten, von vornherein ausgeschlossen wird. (Fundierungsaxiom) Ob das reine Ausschließen einer theoretisch denkbaren Menge aus der Mengenlehre eine konstruktive Umgehensweise mit dieser Antinomie darstellt, bleibt zu diskutieren.

Die arithmetische Konstruktion beinhaltet ein ähnliches Problem: Eine natürliche Zahl an sich ist etwas Endliches, aber die Menge der natürlichen Zahlen ist abzählbar unendlich. Daher muss man, um sich im Endlichen mit den natürlichen Zahlen zu beschäftigen, eine unendliche Umgebung akzeptieren:

> Arithmetic [...] presupposes the existence of infinitely many natural numbers, since each natural number is taken to have an immediate successor (a natural number that is one greater than it). But no natural number is *itself* infinite: the objects of arithmetical study are all finite. The point is, study of what is itself finite is sometimes possible only in an infinite framework. (Moore, 2019, S. 27)

Target Domain ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON		*Special Case* THE SET OF NATURAL NUMBERS
The beginning state (0)	$\Rightarrow$	The natural number frame, with a set of existing numbers and a successor operation that adds 1 to the last number and forms a new set
State (1) resulting from the initial stage of the process	$\Rightarrow$	The empty set, the set of natural numbers smaller than 1.
The process: From a prior intermediate state $(n-1)$, produce the next step (n)	$\Rightarrow$	Given S_{n-1}, the set of natural numbers smaller than $n-1$, form $S_{n-1} \cup \{n-1\} = S_n$.
The intermediate result after that iteration of the process (the relation between n and $n-1$)	$\Rightarrow$	At state n, we have S_n, the set of natural numbers smaller than n.
„The final resultant state“ (actual infinity „∞“)	$\Rightarrow$	**S_∞, the set of *all* natural numbers smaller than ∞ – that is, the set of *all* natural numbers (which does not include ∞ as a number).**
Entailment *E*: The final resultant state („∞“) is unique and follows every nonfinal state	$\Rightarrow$	**Entailment *E*: The set of all natural numbers is unique and includes every natural number (no more, no less).**

Tabelle 2.1: Konzeptuelle Konstruktion der Menge der natürlichen Zahlen mit Hilfe der BMI Lakoff & Núñez (2000, S.174)

2.3 Das Kontinuum der reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen schließt die Menge der natürlichen Zahlen mit ein, ist aber im Gegensatz zu ihnen überabzählbar unendlich (→ S.35). Da die natürlichen Zahlen abzählbar endlich sind, kann es keine Bijektion zwischen ihnen und der Menge der reellen Zahlen geben. Die in der Schule gelehrte Mathematik beschäftigt sich nicht mit Zahlbereichen über den der rellen Zahlen[10] hinaus (Sächsisches Staatsministerium für Kultus und Sport, 2019), sodass sie sozusagen den Höhepunkt aller im Rahmen der Schulmathematik gelehrten Zahlbereiche bilden. Sie umfassen neben den natürlichen Zahlen auch die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Neben den rationalen Zahlen sind auch die algebraischen sowie die transzendenten Zahlen Teil der reellen Zahlen – diese fügen sich aber nicht in obiges Schema ein, sondern können als reelle Zahlen, die Nullstellen eines Polynoms sind (algebraische Zahlen $\mathbb{A}$ ohne komplexe Zahlen, die Nullstellen von Polynomen sind) bzw. als alle reellen Zahlen, die nicht Nullstelle eines Polynoms sind (Transzendente Zahlen $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$) beschrieben werden. Ein prominentes Beispiel für eine algebraische reelle Zahl wäre $\sqrt{2}$, für transzendente Zahlen sind π und e die bekanntesten Vertreter.

Überabzählbarkeit bedeutet, dass reelle Zahlen nicht zählbar sind. Somit ist die Menge der reellen Zahlen größer als die der natürlichen Zahlen - selbst die Menge aller reeller Zahlen im Intervall $[0, 1]$ ist größer bzw. *mächtiger* als $\mathbb{N}$: „Die Unendlichkeit von $\mathbb{R}+$ ist in präzisierbarem Sinn viel größer als die von $\mathbb{N}$“ (Heuser, 2008, S.215). Eine Möglichkeit, dies zu beweisen, stellt Georg Cantors zweites Diagonalargument[11] dar, das besagt, dass es keine bijektive Abbildung zwischen den reellen und den natürlichen Zahlen geben kann. Hier kommt neben der Unterscheidung von Unendlichkeit in *potentielle* und *aktuale* Unendlichkeit (siehe Kap. 2.1.2 auf S. 28) eine neue Differenzierung zum Tragen, nämlich die zwischen *abzählbarer* und *überabzählbarer* Unendlichkeit. Den natürlichen Zahlen (abzählbar unendlich) wird die Mächtigkeit $\aleph_0$ zugewiesen, wohingegen die reellen Zahlen eine Mächtigkeit von $\aleph_1$ (überabzählbar unendlich) haben.[12] Die *Kontinuumshypothese*, wie der Name es schon vermuten lässt nur eine *nicht beweisbare* sowie *nicht widerlegbare* Hypothese, besagt dann, dass es keine Menge gibt, deren Kardinalität bzw. Mächtigkeit zwischen den Kardinalitäten von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ liegt (Courant & Robbins, 2000, S.65). Diese Hypothese wird in der Literatur vereinzelt auch als *Kontinuumsproblem*[13] beschrieben (Klaus & Buhr, 1971b, S. 598).

10 Bis auf einige Exkurse, wie bspw. in Sachsen Wahlbereich 1 der 10. Klasse: Komplexe Zahlen

11 Für eine ausführliche Beschreibung ist die Lektüre von Courant & Robbins (2000, S. 62ff.) zu empfehlen.

12 für genauere Erläuterungen siehe Jech (2007, S. 35).

13 „Das bisher nicht gelöste *Kontinuumsproblem* besteht in der Frage, ob es zwischen der Klasse der abzählbaren Mengen und der von der Mächtigkeit des Kontinuums noch weitere Klassen von Mengen gibt, oder ob jede Menge, die von höherer Mächtigkeit als die Menge der natürlichen Zahlen ist, dem Kontinuum oder einer Menge noch höherer Mächtigkeit äquivalent ist.“ (Klaus & Buhr, 1971b, S. 598).

Der Weg von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen, genauer den irrationalen Zahlen ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) kann historisch als „eine der überraschendsten Entdeckungen der frühen griechischen Mathematiker (der pythagoreischen Schule)“ (Courant & Robbins, 2000, S. 47) beschrieben werden. Die Pythagoreer (vgl. auch Kap. 2.1.1 auf S. 25), deren Leitspruch *Alles ist Zahl* ihr mathematisches Wirken maßgeblich bestimmte, bestimmten Verhältnisse von Strecken mit Hilfe der Wechselwegnahme und konstatierten, dass die Welt aus solchen Verhältnissen bestehe (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 9ff.). Die Entdeckung inkommensurabler Strecken, die sich nicht *messen* lassen wie bspw. die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1, setzte den ersten Schritt zum Erschließen der irrationalen Zahlen. Bedürftig & Murawski (2015, S.12) nennen den Schritt von den rationalen zu den reellen Zahlen über die Inkommensurabilität, besonders im pädagogischen Kontext, einen „arithmetische[n] Offenbarungseid“ (Ebd.) – einen Schritt hin zu einer theoretischen Mathematik, die nicht postuliert, dass von Anfang an alles messbar sei, sondern den Lernenden offenbart, dass die reellen Zahlen ein Konstrukt sind, um das Problem der Messbarkeit zu lösen: ein *theoretisches* Konstrukt.

Irrationale Zahlen kann man auch als Menge aller nichtperiodischen, unendlichen Dezimalbrüche formulieren (vgl. Courant & Robbins, 2000, S. 55). Durch diese Definition wird schon implizit klar: Eine genaue Angabe der Irrationalzahl als Dezimalbrüche wird aufgrund ihrer Eigenschaften nicht möglich sein, man kann sich ihnen stets nur auf endliche Nachkommastellen hin *annähern*. Dies kann, besonders unter dem Gesichtspunkt, dass aktuale Unendlichkeit ein für den menschlichen Geist schwer zu fassendes Konzept ist, für das Verständnis reeller Zahlen problematisch werden:

> The name of a real number as an infinite sequence of digits cannot be embraced by a human mind. Some real numbers can be described finitely by means of an algorithm, but there are such numbers for which it cannot be done (Chaitin 1966, Chaitin 1987, Chaitin 1997, Chaitin 2004, Trzęsicki 2006). If real numbers which are not finitely described exist, then real numbers are not a human mind-dependent entity. Thus the human mental experience could not be the source of acquiring the actual infinity (of real numbers). (Trzęsicki, 2015, S. 203)

2.4 Mathematikdidaktische Überlegungen zur Unendlichkeit

2.4.1 Unendlichkeit im Mathematikunterricht (schulformübergreifend)

> Obwohl der Unendlichkeit in der Mathematik eine besondere Rolle zukommt, muss aber dennoch festgestellt werden, dass sie im Unterrichtsgeschehen selten bzw. gar nicht auftaucht [...]
>
> Schimmöller (2011, S. 180)

Wie oben bereits von Schimmöller (2011) für die gesamte BRD erwähnt, lassen sich auch in den sächsischen Rahmenlehrplänen für das Fach Mathematik (Sächsisches Staatsministerium für Kultus und Sport, 2009, 2019) keine expliziten Hinweise darauf finden, dass Unendlichkeit als konkreter Unterrichtsinhalt eingebunden werden soll. Obwohl die Unendlichkeit für die *Wissenschaft* Mathematik so sehr bedeutsam ist, wird sie selten bis gar nicht im Mathematikunterricht behandelt. Auch im angelsächsischen Raum wird Unendlichkeit in Schulen selten explizit bzw. tiefgründig mit Mitteln der Philosophie behandelt: „even though students become familiar with examples referring to infinity as early as in grade school, the concept of infinity rarely gets any philosophical treatment" (Kondratieva, 2017, S. 75). Die Behandlung von Unendlichkeit im *Unterrichtsfach* Mathematik scheint marginal, es werden lediglich Inhalte behandelt, bei denen Unendlichkeit eine fachliche Rolle spielt (bspw. Grenzwerte, die Zahl Pi, das unendliche Weiterzählen der natürlichen Zahlen, periodische Dezimalbrüche, reelle Zahlen uvm.). Dies führt in späteren Schuljahren mitunter zu Problemen mit den Unendlichkeit beinhaltenden Unterrichtsgegenständen (siehe Kap. 2.4.2 auf S. 49).

Natürlich ist es nicht von der Hand zu weisen, „dass der Unendlichkeitsbegriff durch seine Vielschichtigkeit ein sehr schwer zu fassender Ausdruck ist und die Vorstellungen der Probanden [mehrerer Studien, z.B. Fischbein et al. (1979), Marx (2013)] über die Unendlichkeit auffallend defizitär sind" (Schimmöller, 2011). Eine Möglichkeit, dies zu kompensieren, wäre eine Einbettung des Unendlichkeitsbegriffs in curriculare Vorgaben (Dötschel, 2011, S. 209). Vorschläge dazu werden als Anwendung des von ihr bereits abgewandelten Stufenmodells von Vollrath (1984) auf Unendlichkeit (Schema in Abb. 2.1 auf S. 46 abgewandelt und selbst erstellt)[14] unterbreitet.

Die für diese Arbeit exemplarisch zur Untersuchung herangezogenen Lehrpläne der Länder Brandenburg (Ministerium für Bildung, Jugend und Sport Land Brandenburg, 2017) und Sachsen-Anhalt (Ministerium für Bildung Sachsen-Anhalt, 2017, 2019) bieten, wie auch der sächsische Lehrplan, Potential für ähnliche Anknüpfungspunkte wie in Abb. 2.1 bereits in der Primarstufe, aber auch darüber hinaus. Im Anhang kann in Tabelle 11.11 (S. 280) eingesehen werden, inwiefern

14 An der Stelle „Universität" können auch gesonderte Lehrgänge o.Ä. aufgeführt werden.

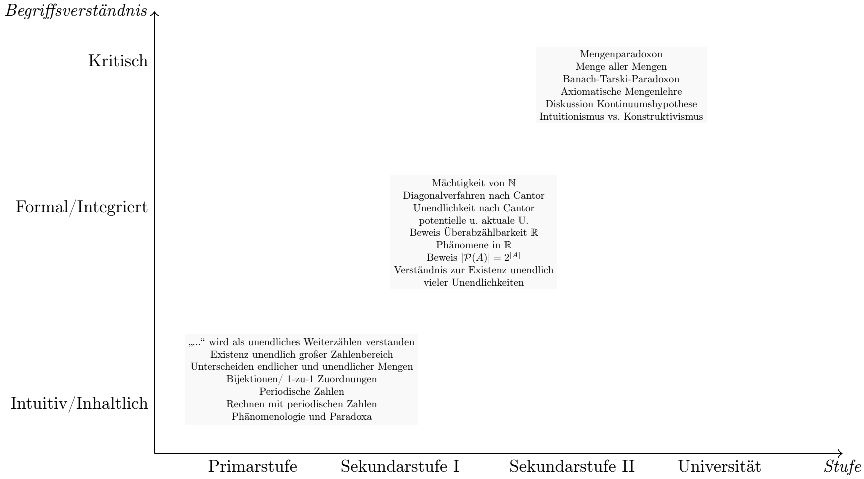


Abbildung 2.1: Stufenmodell beim langfristigen Lernen von Begriffen zum Begriff der Unendlichkeit in Anlehnung an Dötschel (2011)

das Curriculum um die von D. Dötschel vorgschlagenen Inhalte zum Unendlichkeitsbegriff ergänzt werden könnte.[15] In keinem der untersuchten Lehrpläne ließ sich bis Klasse 10 ein Hinweis auf eine konkrete Bearbeitung des Unendlichkeitsbegriffes finden. Die in Kapitel 2.4.2 erläuterten Schwierigkeiten mit unendlichen Prozessen an den weiterführenden Schulen lassen aber eigentlich, wie von Weigand (2016) vorgeschlagen, nur den Schluss einer Notwendigkeit eines Propädeutikums bereits in Primar- und Sekundarstufe I zu. Besonders hervorzuheben ist hier die Vorgänger-Nachfolger-Relation als Anknüpfungspunkt in der Primarstufe, da man mit wenig einfachen Änderungen in Kl. 4 bspw. den Begriff der Unendlichkeit über die Nachfolgerfunktion implementieren könnte (es böte sich auch eine damit einhergehende Betrachtung der Zahlen*geraden* an, die weder links noch rechts begrenzt wird).

Im angelsächsischen Raum gibt es einige Untersuchungen, in welchen konkrete Gespräche zur Unendlichkeit (meist mit Erwachsenen Proband*innen) geführt und ausgewertet wurden. So befanden beispielsweise Movshovitz-Hadar & Hadass (1990) die Arbeit mit Paradoxien als einen Anstoß für kognitive Konflikte, welche auch zu einer Art epistemischer Neugier führen können (S. 266). Aufgegriffen und auf Unendlichkeit übertragen wurde dieser Ansatz von Mamolo & Zazkis (2008).

Insgesamt ist die Forschung zur Unendlichkeit in der Mathematikdidaktik stark auf weiterführende Schulen und Universitäten beschränkt. Hierbei spielen vor allem Grenzwerte, aber auch geometrische und mengentheoretische Fragen eine Rolle. In

15 Inhalte, zu denen keine Entsprechung in einem der Lehrpläne gefunden wurde, wurden ausgelassen. Die Tabelle beschränkt sich auf die Schulbildung bis Klasse 10 - der horizontale Doppelstrich trennt Intuitiv-Inhaltlich verständliche Begriffe von denen, die Formal-Integriert verstanden werden können

Tabelle 2.2 kann der aktuelle Forschungsstand zum Thema, angelehnt an die von Krátká et al. (2021, S. 2) gelieferte Übersicht, nachvollzogen[16] werden.

Schlagwort	Quelle	Kurzbeschreibung der Inhalte
Struktur von Zahlenbereichen	Bauer (2011)	Die Mehrheit (70 Prozent) der Schüler*innen bevorzugt $0,\overline{9} < 1$ gegenüber $0,\overline{9} = 1$
	Ely (2010)	Vorstellungen der Schüler*innen von der (reellen) Zahlengeraden beinhalten sowohl Infinitesemalien als auch unendlich große Größen und können als Konzepte der Nonstandard-Analysis gelesen werden
	Katz & Katz (2010)	Betrachtungen auf theoretischer Ebene der Nonstandard-Analysis zum Thema $0,\overline{9} < 1$ mit Hilfe von Infinitesemalien
	Singer & Voica (2008)	Quasilängsschnittstudie (Kl. 1-5); Vorstellung der Kinder ändert sich von Kl. 1 zu Kl. 5; Unterscheidung zwischen primärer und sekundärer Vorstellung von Unendlichkeit; Unterscheidung zwischen prozessualer, topologischer und spiritueller Vorstellung von Unendlichkeit
Funktionen und Grenzwertprozesse	Juter (2006)	Vergleich historischer Vorstellungen des Grenzwerts mit dem von Studienanfänger*innen; besonders bezogen auf das Erreichen eines Grenzwertes gibt es dieselben kritischen Bereiche sowohl bei den Student*innen als auch im Verlauf der Geschichte des Grenzwertes
	Liu & Niess (2006)	Pre-Posttest-Design; Intervention mit historischer Aufklärung zu mathematikhistorischen Problemfeldern; Proband*innen der Versuchsgruppe konnten ihren Fokus von Mathematik als Objekt hin zum Prozess verschieben, dachten kreativer, vorstellungsreicher und logischer über Mathematik nach
	Monaghan (2001)	Statische und dynamische Kontexte zur Unendlichkeit, Unendlichkeit als Prozess vs. Unendlichkeit als Objekt
Geometrischer Kontext	Fischbein (2001)	Zenons Pfeil-Paradoxie, Ableitungsbegriff als Ergebnis einer unendlichen Annäherung, Geraden als Punkt - oder Streckenmenge, *tacit models* der Unendlichkeit

16 Schlagworte und Literaturangaben wurden angelehnt an Krátká et al. (2021) übernommen, Kurzbeschreibungen der Inhalte wurden selbstverständlich nach Sichtung der Literatur selbst erstellt.

Schlagwort	**Quelle**	**Kurzbeschreibung der Inhalte**
	Jirotková & Littler (2004)	Untersuchung, welche Vorstellungen Studierende des (Grundschul-)Lehramts zu unendlichen Geraden haben; oftmals wurde nicht explizit über Unendlichkeit gesprochen
ausgewählte eigene Ergänzungen, geordnet nach Jahr	Fischbein et al. (1979)	Unterscheidung zwischen praktischen Prozessen und theoretischer Unendlichkeit, die Intuition von Unendlichkeit ist eher eine der potentiellen Unendlichkeit, weil aktuale Unendlichkeit für den menschlichen Geist eher widersprüchlich ist; Intuition der Unendlichkeit tritt ab 12-13 Jahren auf und es findet kein Entwicklungsprozess statt, auch vermehrter Mathematikunterricht (ohne Bezug zu Unendlichkeit) ist z.T. sogar eher nachteilig
	Tirosh & Tsamir (1996)	Ausführen zweier Repräsentationsebenen des Umgangs mit der Gleichmächtigkeit zweier Mengen: *numerical-horizontal* und *numerical-vertical*. Bei 10.- bis 12.-Klässlern wurden vor allem numerisch explizite oder geometrische Begründungen zur 1-zu-1-Zuordnung der Elemente der gleichmächtigen Mengen gefunden
	Tsamir & Tirosh (1999)	Reflexionen über die Kardinalitäten zweier unendlich großer Mengen, Auseinandersetzen mit der eigenen widersprüchlichen Position zum Thema durch Schüler*innen weiterführender Schulen; Rolle der Bijektion bei gleich mächtigen unendlichen Mengen
	Hannula et al. (2006)	Quantitative (Quasi)-Längsschnittstudie über 2 Jahre; Qualitativer Querschnitt; beides zu Vorstellungen von Unendlichkeit von Schüler*innen Kl. 5–8; meist Vorstellungen von potentieller Unendlichkeit, in 5. und 7. Klasse noch kaum Konzepte von Unendlichkeit vorhanden
	Pehkonen et al. (2006)	Unendlichkeit der natürlichen Zahlen sowie potentielle Unendlichkeit können wesentlich früher von Schüler*innen verstanden werden als die Dichtheit der rationalen Zahlen und aktuale Unendlichkeit

Schlagwort	Quelle	Kurzbeschreibung der Inhalte
	Przenioslo (2006)	Schwierigkeiten beim Umgang mit dem Grenzwert von Jugendlichen und Studierenden, analysiert nach *concept image* und *concept definition* (Tall & Vinner, 1981) sowie *types of intellect* (Jung, 2016)
	Kahn et al. (2011)	Nutzung von Computersimulationen und Programmierübungen zur Erkundung der Kardinalitäten unendlich großer Mengen
	Marx (2013)	Kognitionspsychologische Betrachtung des Umgangs von Schüler*innen mit unendlichen Prozessen; dynamische Prägung des *concept image*; Betrachtung des Grenzwertes im Kontext von Folgen, um die *personal concept definition* zu einer *formal concept definition* zu überführen
	Kidron & Tall (2014)	Potentielle Unendlichkeit als Prozess und aktuale Unendlichkeit als Grenzwert; Schüler*innen der 11. Klasse (high school) beschäftigen sich mit dem Objektstatus des Grenzwertes, etwa die Hälfte lehnt diesen ab und sieht den Grenzwert im Werden, nicht im Sein.
	Date-Huxtable et al. (2018)	Untersuchung von 22 Referendar*innen, die Unendlichkeit sowohl als *real concept* als auch als *abstract concept* formulierten; was ihnen laut den Autor*innen potentiell helfen könnte, endliche und unendliche Modelle der Welt besser unterscheiden zu können
	Chu et al. (2020)	Untersuchung mit Kindergartenkindern zum unendlichen Weiterzählen und zur Nachfolgerfunktion. Kinder mit einer klaren Zahlbildungsregel erkennen eher, dass es kein Ende der Zahlen gibt als jene ohne klare Strategie beim Zählen

Tabelle 2.2: Kurzübersicht zum aktuellen, schulformübergreifenden Forschungsstand bzgl. Unendlichkeit

2.4.2 Kontinuum und Grenzwerte: Unendlichkeit an den weiterführenden Schulen

In der Sekundarstufe II tritt die implizite Behandlung von Unendlichkeit im schulischen Kontext besonders in Erscheinung. Differenzierbarkeit wird über die Existenz eines Differentialquotienten, also eines Grenzwertes, definiert. Mangoldt & Knopp (1966) erläutern den Grenzwert folgendermaßen:

> *Wenn eine Zahlenfolge (x_n) zu einer bestimmten Zahl ξ in der Beziehung steht, daß die Folge*
> $$(x_n - \xi)$$
> *eine Nullfolge ist, so sagt man die Folge (x_n)* ***konvergiere*** *oder sie sei* ***konvergent;*** *die Zahl ξ nennt man den* ***Grenzwert*** *oder den* ***Limes*** *dieser Folge und sagt auch, die Folge* ***strebe gegen*** *ξ oder ihre Glieder* ***näherten sich dem Wert*** *ξ* (S. 459)

An dieser Stelle wird der Grenzwert nicht zwingend qua Unendlichkeit definiert, denn es gibt sowohl endliche als auch unendliche Folgen. Beim Differentialquotienten (in der üblichen Form) ist allerdings eine Annäherung zum unendlich Kleinen unabwendbar, da die Abstände zwischen den Sekanten sich so weit unendlich verkleinern, bis die Tangente an der Stelle x_0 erreicht wird:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x)$$

Über den oben gezeigten Differentialquotienten wird in Deutschland normalerweise in Klasse 11 als eine Variante der Einführung der Ableitung genutzt (Greefrath et al., 2016, S. 156). In der oben angebrachten Definition nach Mangoldt & Knopp (1966) wie auch im konventionellen Verständnis wird deutlich, dass „der Grenzwert [...] in der Regel kein Bestandteil der Folge [ist], er ist vielmehr die ideale Ergänzung (deren Existenz durch die Vollständigkeit der reellen Zahlen gesichert ist)“(vom Hofe, 1998, S.269). Dies stelle für die Lernenden oftmals eine „gedankliche Herausforderung“ dar, auch da der Grenzwert oftmals andere mathematische Eigenschaften als die Folgenglieder haben kann - eine Folge rationaler Zahlen kann beispielsweise eine irrationale Zahl zum Grenzwert haben (vom Hofe, 1998, S.269). Ein weiteres Beispiel für einen Grenzwert, der andere Eigenschaften als seine Folgenglieder hat, wäre die Folge $\frac{1}{n}$ mit dem Grenzwert 0:

> Imagining or perceiving the limit is difficult because the limiting object may not possess all properties of each individual term of the infinite sequence. For example, $\frac{1}{n}$ is positive for all $n > 0$ but the limit as n goes to infinity is zero; so it does not have this property of the indidual terms. (Kondratieva, 2017, S. 79)

Oder, wie in einem prominenten Beispiel aus der Sekundarstufe I, kann eine natürliche Zahl ein Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen sein (die Folge $\frac{9}{10^n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ konvergiert gegen die natürliche Zahl 1). Ein Beweis der Gleichheit der Summe aller Folgenglieder und des Grenzwertes (also $0\overline{9} = 1$) kann im Rahmen der *Standard-Analysis* über die Konvergenzregeln geometrischer Reihen geführt werden oder auch über einen Widerspruchsbeweis. Viele Schüler*innen haben mit der Vorstellung, $0,\overline{9}$ sei so groß wie 1, starke Probleme. Bauer (2011) stellte Schüler*innen die Frage, ob $0,\overline{9} = 1$ oder $0,\overline{9} < 1$. Die Mehrheit (70%) sprach sich für die letzte Variante aus. Eine Wiederaufnahme dieser Befragung durch Bedürftig (2013) im Querschnitt Lehramsstudierender ergab sogar knapp über 90% für dieselbe Antwort (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 389). Beides zeigt auf, dass die in der Schule unterrichtete Gleichheit beider Terme „die Mehrzahl der Schüler nicht lernt oder lernen will, was sie lernen soll“ (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 389).

Auch in Polen gab es eine ähnliche Studie, bei welcher sich ebenfalls der Großteil der Proband*innen gegen eine Gleichheit der beiden Zahlen aussprach – selbst nach ausführlicher Erläuterung geometrischer Reihen, derer Grenzwerte und des Grenzwertes der Reihe $0.\overline{9}$ bzw. $0.9 + 0.09 + 0.009 + ...$ (Przenioslo, 2006). Trotz der Schulung bezüglich des Grenzwertes befanden viele Befragte, dass die Zahlen nicht gleichzusetzen seien:

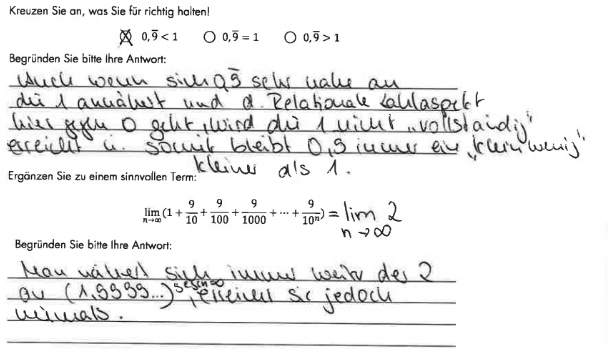
> The majority of examinees (especially practicians and intuitionists) revealed the conviction that the numbers 0.999... and 1 differ from each other. They upheld it although they knew the algorithms of converting infinite decimal and periodical fraction into common fraction.[...] They believed, however, that ‚in fact these numbers are not equal but it is impossible to determine the difference‘. They thought that ‚only in mathematics it is assumed that the numbers are equal‘. (Przenioslo, 2006, S. 134)

Auch wenn es sich an dieser Stelle für manche Mathematiker*innen um eine reine Spitzfindigkeit handeln dürfte, so möchte ich doch anmerken, dass der Autor oben genannter Studie auch nicht zwischen der Gleichheit von Zahlen ('numbers') und der Gleichheit einer Reihe mit ihrem Grenzwert ('limit') oder der *Existenz* eines Grenzwertes zu einer Reihe unterscheidet. Die geometrische Reihe $0.9 + 0.09 + 0.009 + ...$ hat den Grenzwert 1, die Gleichheit der Reihe mit ihrem Grenzwert ist dadurch aber nicht unmittelbar gegeben und vielleicht auch der Ursprung des Verständnisproblemes der Proband*innen.

In Anlehnung an Tall & Vinner (1981) wurde auch im Rahmen dieser Dissertation 2019 eine explorative Erhebung mit 72 Studierenden (Lehramt Grundschule *ohne* studiertes Fach Mathematik) der Universität Leipzig durchgeführt. Da diese Erhebung nicht den Kern der empirischen Untersuchungen dieser Dissertation ausmacht, werden im Folgenden kurz quantitative Ergebnisse und qualitative Auffälligkeiten erwähnt, aber nicht tiefgreifend ausgeführt.

Erhoben wurde mit Hilfe eines Fragebogens im Rahmen der Lehrveranstaltungen der Grundschuldidaktik Mathematik. Es nahmen insgesamt 72 Studierende teil, davon waren 63 weiblich, 6 männlich und eine Person divers. Bei zwei Personen fehlte die Angabe zum Geschlecht. Die Befragten waren zwischen 19 und 36 Jahren alt, wobei die Mehrzahl (48 Personen) zwischen 20 und 22 Jahren alt war.

Die ersten beiden Fragen des Fragebogens (bis auf die soziografischen Daten, die vorab abgefragt wurden) können in Abb. 2.2 eingesehen werden.



Kreuzen Sie an, was Sie für richtig halten!

☒ $0,\overline{9} < 1$ ○ $0,\overline{9} = 1$ ○ $0,\overline{9} > 1$

Begründen Sie bitte Ihre Antwort:

Auch wenn sich $0,\overline{9}$ sehr nahe an die 1 annähert und d. Relationale Zahlaspekt hier gegen 0 geht, wird die 1 nicht „vollständig" erreicht u. somit bleibt 0,9 immer ein „kleinwenig" kleiner als 1.

Ergänzen Sie zu einem sinnvollen Term:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2$$

Begründen Sie bitte Ihre Antwort:

Man nähert sich immer weiter der 2 an (1,9999...), erreicht sie jedoch niemals.

Abbildung 2.2: Ergebnisse der ersten zwei Fragen des Fragebogens der Studentin SAE08

Bei der ersten Frage wurden drei Antwortoptionen gegeben ($0,\overline{9} < 1$, $0,\overline{9} = 1$ und $0,\overline{9} > 1$). Die dritte Option wurde mit ausgewählt (obwohl fachlich nicht naheliegend), um alle Arten der Beziehungen zwischen $0,\overline{9}$ und 1 auszudrücken. 68 von 72 Befragten wählten die erste Option, also $0,\overline{9} < 1$. Dies bestätigt bereits erhobene Daten aus anderen Erhebungen (Bauer, 2011; Bedürftig & Murawski, 2015; Tall & Vinner, 1981). Vier Personen wählten die Option $0,\overline{9} = 1$. Anschließend an die Auswahl der drei Optionen wurden die Befragten um eine Begründung ihrer Antwort gebeten. Die Begründungen weisen entweder einen recht statischen und auf ein Verständnis von *aktualer* Unendlichkeit hinweisenden Eindruck auf (bspw. schreibt die Studentin ASA02: „0,99999.. wird immer kleiner bleiben als 1, weil ein Mü zur 1 fehlt [...]")oder einen dynamischen, der als Begründung im Kontext *potentieller* Unendlichkeit gesehen werden kann (bspw. schreibt die Studentin ELL06SE: „$0,\overline{9}$ nähert sich der 1, erreicht diese aber nicht"). Eine vollständige Liste dieser Begründungen mit ihren Codierungen kann im Anhang auf S. 258 eingesehen werden.

Die Schwierigkeiten, die bei der Gleichsetzung einer Folge und ihres Grenzwertes für das intuitive Verständnis von Mathematik entstehen, kann man im Fall von $0,\overline{9}$ im Bereich der *Non-Standard-Analysis* vermeiden. Das, was im klassischen Widerspruchsbeweis für die Gleichheit sprechen soll (Belegung eines kleinen Epsilons, welches zwischen der Folge und ihrem Grenzwert liegen soll und dann Termumformungen), führt bei den Non-Standard-Mathematiker*innen eher zu einem besseren intuitiven Verständnis: Hier wird aber der unendlich kleine Wert auch nicht mit einer rationalen Zahl belegt, was m.E. auch ein Fehler im Widerspruchsbeweis ist.

Die Autoren Baumann & Kirski (2017) sprachen sich 2017 für eine Analysis mit hyperrellen Zahlen aus – „viele Schülerinnen und Schüler [haben] das Wesen des Grenzwertes nicht verstanden [...]" (Baumann & Kirski, 2017, S. 15). Konzeptionelle Vorarbeiten zur Analysis mit hyperrellen Zahlen an Schulen leisteten sie und andere bereits in den 1990er Jahren (Baumann et al., 1995; Steinig et al., 1995a, 1995b, 1995c). Auch im angelsächsischen Raum gab es ähnliche Bemühungen (vgl. bspw. Harnik (1986)).

Weigand (2016) macht einen Vorschlag zur Lösung dieses Problems (Anreicherung des Konzeptes des propädeutischen Grenzwerts) und bestätigt ebenso die Notwendigkeit einer tieferen Beleuchtung von Unendlichkeit (und Grenzwerten) im Mathematikunterricht:

> Sowohl die Entwicklung des Grenzwertbegriffs in der Mathematik als auch stoffdidaktische Analysen zu den grundlegenden fachlichen Ideen im Zusammenhang mit Grenzwertbegriff und schließlich didaktische Analysen zum Unterrichten dieses Begriffs an Universitäten und Schulen im letzten Jahrhundert zeigen, dass für den Aufbau von Vorstellungen über das Unendliche im Sinne von nachvollziehbaren mentalen Handlungen diskrete Überlegungen und Denkweisen unerlässlich sind. [...] In einem verständnisorientierten Unterricht sollte und muss für eine derartig vertiefte Begriffsentwicklung genügend Zeit vorhanden sein. (Weigand, 2016, S. 152f.)

Kondratieva (2017, S. 79) schlägt zudem für ein tieferes und besseres Verständnis des Grenzwertes eine *philosophische* Beschäftigung mit der Unterscheidung in potentielle und aktuale Unendlichkeit vor: „However, such formal definitions and methods would have more meaning for students if they were supported and justified by prior philosophical considerations [...]. In particular it would be beneficial to our students to understand the distinction between potential and actual infinities [...]“ (Kondratieva, 2017, S. 79). Eine solche Unterscheidung müsste im Rahmen eines etablierten Philosophierens im Mathematikunterricht eingebracht werden, in welchem die Schüler*innen bereits mit der Beschäftigung mit historischen und philosophischen Aspekten der Mathematik vertraut sind (Ebd.).

2.4.3 Unendlichkeit in der Grundschule

> *Der Umgang mit dem Unendlichen:* Dieser beginnt bereits in der Grundschule mit der Feststellung, dass die Reihe der natürlichen Zahlen nicht abbricht.
>
> Hefendehl-Hebeker (2019, S. 41, Herv. i. O.)

In der Grundschule begegnen die Schüler*innen bereits sehr oft implizit dem Begriff der Unendlichkeit (siehe auch im Epigraph oben). Schon in der ersten Klasse, nämlich bei der Einführung der natürlichen Zahlen (siehe auch Kapt. 2.2 auf S. 40), bringt der Akt des Weiterzählens ohne mögliches Ende die erste Vorstellung von der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen mit sich (vgl. auch Singer & Voica, 2008, S. 189). Dies muss sich natürlich nicht auf die Grundschule beschränken, auch bereits vor der ersten Klasse kommen Kinder im Sinne des Zählens schon implizit in Kontakt mit Unendlichkeit (Lappan & Wheeler, 1987). Explizit gibt es kaum curriculare Vorgaben und insbesondere wenig Forschung zum Unendlichkeitsbegriff in der früheren mathematischen Bildung: „Finally, it seems that very little research has been done in schools on this topic [...]. This is something that urgently needs to be done“ (Holton & Symons, 2021, S.437). Da sich im Bereich *Unendlichkeit in der Grundschule* eine große Forschungslücke auftut, kann in diesem Kapitel wenig auf bestehende Literatur zurückgegriffen werden. Mit der Beschreibung von Gedankengängen und Analysen wird versucht, dies zu kompensieren.

Das Weiterzählen, also der erste implizite Kontakt mit der Unendlichkeit, kann zum Aspekt der *potentiellen* Unendlichkeit geordnet werden; die Vorstellung einer unendlich großen Zahlenmenge zur *aktualen* Unendlichkeit. *Das Unendliche* im eigentlichen Sinne, also als Produkt und nicht als Prozess kann nur verstanden werden, wenn auch die Unterscheidung zwischen potentieller und aktualer Unendlichkeit zum Tragen kommt – denn aktuale Unendlichkeit „is infinity conceptualized as a realized ‘thing‘“ (Lakoff & Núñez, 2000, S. 158). Es mag auf der Hand liegen, hierfür auch die BMI von Lakoff & Núñez (2000, vgl. auch S. 42 dieser Arbeit) didaktisch aufzuarbeiten und so ein Propädeutikum in der Grundschule zu etablieren. Dies ist aufgrund der Komplexität des Vorgehens und auch der untersuchten Inhalte und Beispiele (bis auf die natürlichen Zahlen) allerdings eine enorme Herausforderung. Eine solche didaktische Reduktion kann m.E. nur bedingt gelingen.

Holton & Symons (2021) geben einige konkrete Beispiele an, bei welchen Stellen bereits in der Grundschule implizit Unendlichkeit enthalten ist und explizit mit aufgegriffen werden könnte. Für die Geometrie führen sie beispielsweise Fraktale und projektive Geometrie als Beispiel an (S. 438f). Weiterhin beschäftigen sie sich mit unendlichen Dezimalzahlen (periodisch und nicht-periodisch, S. 441f.) sowie mit Unendlichkeit in der Algebra und Stochastik. Wie auch in dieser Arbeit für manche Bundesländer Anknüpfungspunkte zur Unendlichkeit erarbeitet wurden (vgl. Tabelle 11.11 im Anhang auf S. 280), so erstellen auch Holton & Symons (2021) eine tabellarische Übersicht zu den Anknüpfungspunkten bzw. implizit enthaltener Unendlichkeit im australischen Curriculum („links to the infinite“, S. 441f.). Außerdem stellen sie fest, dass Schüler*innen oft die Inhalte, in denen Unendlichkeit implizit enthalten ist, mit ihrer Intuition des Unendlichen verknüpfen. Eine explizite Betrachtung der implizit enthaltenen Unendlichkeit ist an solchen Stellen vorteilhaft. Der daraus resultierende Denkprozess wird von Holton & Symons (2021) als *infinity-based-thinking* bezeichnet:

> This is the thinking that occurs in any mathematical content area where an individual’s understanding of the mathematical concept will be deepened through linking to, and synthesising their understanding of, the infinite. (Holton & Symons, 2021, S.436f.)

Die angeführten Beispiele sind im deutschen Curriculum allerdings größenteils nicht für die Grundschule geeignet, hier wäre exemplarisch das unendliche Weiterzählen zu nennen.

Des Weiteren bekräftigen sie die Rolle der Lehrkräfte und vor allem deren Vorbildung beim Unterrichten von Unendlichkeit. Insbesondere bei der in der Grundschule vorrangig mitgedachten und implizit enthalten potentiellen Unendlichkeit muss die Lehrkraft über die Besonderheit dieser Unendlichkeit im *Werden* unterrichtet sein und die Abgrenzung zur aktualen Unendlichkeit verstanden haben:

> Consequently at least a knowledge of the universality of potential infinity in the mathematical curriculum is of value in supporting students' learning. Hence, we would advocate that teachers learn what potential infinity is and how it may be applied. We suggest that the examples of this paper provide a basis for their knowledge and that includes a feeling of the infinite or actual infinity. (Holton & Symons, 2021, S. 448)

Mit Blick auf die in Kap. 2.4.1 präsentierten Inhalte auf der intuitiv-inhaltlichen Stufe (vgl. Abb. 2.1) eignet sich, wie auch oben beschrieben, das unendliche Weiterzählen in der Grundschule m.E. als beste Basis für eine explizite Beschäftigung mit Unendlichkeit. Dafür müssen die Lehrkräfte aber auf der formal/integrierten sowie kritischen Stufe des Begriffsverständnisses insofern geschult sein, dass sie über die axiomatische Mengenlehre, die Unterscheidung zwischen potentieller und aktualer Unendlichkeit sowie die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ in didaktisch reduzierter Form diskutieren und Gedankengänge der Kinder dementsprechend weiterentwickeln und aufgreifen können. Während die Kinder noch nicht über die sprachlichen Mittel für eine formal-theoretisch-mathematische Diskussion oder Auseinandersetzung verfügen, können die Lehrkräfte *aufgrund* ihres Hintergrundwissens bestimmte Bedeutungsfragmente aus den intuitiven Auseinandersetzungen der Kinder auf der intuitiv/inhaltlichen Ebene aufgreifen und somit eine vertiefte Auseinandersetzung mit Unendlichkeit anregen. Meinem Kenntnisstand zufolge wird ein solch theoretisches Fundament in den Curricula der Universitäten für die Ausbildung von Grundschullehrer*innen nicht vorgeschrieben, aber mancherorts umgesetzt.

Vereinzelt gibt es Veröffentlichungen von unterrichtspraktisch forschenden Wissenschaftler*innen, die aber z.T. auch von fünften Klassen (in Berlin/Brandenburg noch Grundschule) und nicht in der Spanne von Klasse 1-4 berichten. Entgegen der Aussage von Hannula et al. (2006), dass Schüler*innen der fünften Klasse ‚keine Ahnung' von Unendlichkeit haben („In the fifth grade most students have no clue of infinity, and the situation is not much better in the seventh grade" (Hannula et al., 2006, S. 333)), berichten Dominguez et al. (2023) begeistert von einem Versuch, über die Unendlichkeit des Raumes im Mathematikunterricht mit Kindern zu philosophieren. Tall (2001) berichtet von seinen sehr tiefgründigen Gesprächen mit seinem siebenjährigen Sohn Nic, der glaubt, eine Zahl erfunden zu haben, die größer als die Unendlichkeit ist.

Reinhold & Poltersdorf (2015) erläutern im deutschsprachigen Raum eine unterrichtspraktische Erkundung in einer vierten Klasse zur Frage, wie viele Sandkörner den Strand vor den Toren vor Syrakus bilden und regen darüber hinaus auch zum Nachdenken über Unendlichkeit an (S. 49).

3. Philosophieren im Mathematikunterricht

Was erwartet Sie in diesem Kapitel?

Zunächst sollen allgemeine Vorteile des Einbindens philosophischer Inhalte und Methoden erläutert werden. Dabei werden zunächst Kerngedanken des Programms *Philosophy for Children* und dessen Effekte anhand ausgewählter Studien vorgestellt. Anschließend wird dialogisches Lernen sowie Philosophieren als Unterrichtsprinzip ausgeführt. Weiterhin folgt ein Kapitel zu den Vorteilen des Einbindens philosophischer Inhalte in den *Mathematikunterricht*. Im selben Kapitel wird auch das Programm *Philosophy for Children adapted to Mathematics* erläutert. Daraufhin folgen mit dem 5-Finger-Modell, dem Bonbon-Modell und den neo-sokratischen Gesprächen ausgewählte Methoden und Prinzipien des Philosophie- und Ethikunterrichts.

Und warum ist das wichtig für die Arbeit?

Das Philosophieren mit Kindern (P4C, PmKJ, P4CM) und dessen grundlegende Forderungen wurden zur Erstellung der Unterrichtsdesigns als grundlegend erachtet. Da auch in der vorliegenden Studie im Mathematikunterricht philosophiert wird, sollte der diesbezügliche Forschungsstand umrahmt werden. Die ausgewählten Methoden und Prinzipien kamen z.T. in den Unterrichtsdesigns, z.T. aber auch beim Rekonstruieren der Interaktionen zum Einsatz.

3.1 Vorteile des Einbindens philosophischer Inhalte und Methoden (allgemein)

3.1.1 P4C – Philosophy for Children

Die von Piaget im Rahmen seiner Theorie der kognitiven Entwicklung von Kindern konstatierte These (konkrete Denkoperationen sind erst in der Phase der konkreten Operationen möglich) lässt darauf schließen, dass Kinder bis zu einem Alter von 7–11 Jahren nicht in der Lage sind, philosophische Gedankengänge zu entwickeln (Pritchard, 2017). Der Philosoph Gareth Matthews kritisierte dies scharf: im Gegenteil, Piaget verfehle eben jene Gedankengänge und deren Manifestierung bei den Kindern zu erkennen (Pritchard, 2017). So fand er bereits bei Kindern im Kindergartenalter tiefgreifende Überlegungen:

> TIM (about six years), while busily engaged in licking a pot, asked, 'Papa, how can we be sure that everything is not a dream?' (Matthews, 1980, S. 1)

Das von Lipman (2010) in Replik auf die von ihm als mangelhaft wahrgenommenen Argumentationsfähigkeiten seiner Mitmenschen entwickelte Programm P4C (kurz für Philosophy for Children, mittlerweile steht das C auch für Communities und Colleges) greift solche Gedankengänge auf. Mit Hilfe speziell geschulter Lehrkräfte und Schulungsinstitutionen sollen philosophische Gespräche auch an Grund- und weiterführenden Schulen Bestandteil des Unterrichtes oder komplementär zum Curriculum als zusätzliche Stunden eingeführt werden. Dabei sind seit der Entstehung des Programmes vor über 35 Jahren viele positive Nebeneffekte des Philosophierens mit Kindern nachgewiesen worden: es ist Paradebeispiel für authentische Partizipation der Kinder (Todd, 2007), Veränderung des Klassenraums hin zu einem Raum der Erforschung, der Exploration und des Hinterfragens (Mcguinness, 2005), Aufbrechen von ideologischem Gedankengut (Vansieleghem, 2005) und Förderung logisch-kritischen Denkens (Barrow, 2010). Die Rolle des*der Lehrer*in als Autorität rückt in den Hintergrund, im fördernd-sokratischen Gespräch (siehe auch Kap. 3.3.3 auf S. 65) fungiert er*sie lediglich moderierend. Nach Hörburger (2023) können philosophische Gespräche außerdem das Potenzial haben, die Empathiefähigkeit der Teilnehmer*innen zu fördern.

Heute steht P4C für eine vielfältige Anzahl an Programmen, die es sich jeweils zum Ziel gesetzt haben, Kindern nicht lediglich philosophische Begriffe bzw. Theorien nahezubringen, sondern sie vor allem zum Philosophieren zu animieren (Schaffalitzky de Muckadell, 2013, S. 176). Im deutschen Sprachraum wird dafür oft die Abkürzung PmKJ (Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen) herangezogen (so bspw. bei Nevers, 2005).

Exemplarisch sei an dieser Stelle auf die Ergebnisse von Daniel (2008) hingewiesen, welche in einem Mixed-Methods-Design mit Hilfe einer Pre-Posttestung eine Steigerung der „argumentative[n] Kompetenz und [der] diskursive[n] Partizipation von Grundschulkindern" (Tiedemann, 2011, S.161) herausarbeiten konnte. Für diese Arbeit besonders relevant ist der Punkt der argumentativen Kompetenz, die Daniel (2008) in drei Kategorien einteilt: Simple Answers, Lower-Order-Thinking (LOT) und Higher-Order-Thinking (HOT) (Daniel, 2008, S. 38). Im Pretest konnte nach der Analyse der Transkripte lediglich ein Anteil von 9% HOT herausgearbeitet werden, während im Posttest nach dem wöchentlichen Unterricht im Philosophieren über ein Jahr hinweg ein Anteil von 35% HOT ausgemacht wurde (Daniel, 2008, S. 39). Wie Tiedemann (2011, S.164) anmerkt, fehlen der Studie allerdings Vergleichsgruppen, „um zu belegen, dass eine vergleichbare Lernprogression in anderen Gruppen ohne Intervention nicht stattgefunden hat".

3.1.2 Dialoge im Unterricht, dialogisches Lernen

Relevant ist auch die Rolle des Dialogs im Unterricht, welche ca. seit den 1960er Jahren (damals in Großbritannien) Bestandteil erziehungswissenschaftlicher Forschung ist (Topping & Trickey, 2014). Explorative Gespräche[17] bzw. Dialoge ermöglichen oftmals die Genese kreativer Ansätze für das Lösen von Problemen (Wegerif, 2007). Durch Fokussierung der intellektuellen Entwicklungen der Kinder sowie Begründungen durch soziokulturelle Theorien kann Raum für Reflexionen geschaffen werden (Wegerif, 2007). Um den Dialog dafür zu instrumentalisieren, die Kinder auf ihre zukünftige Partizipation in der Gesellschaft vorzubereiten, wird oftmals Habermas' Diskursethik als Anlass für einen teilnahmeunterstützenden, transformativen pädagogischen Ansatz gesehen (Deakin Crick & Joldersma, 2007). Habermas selbst stützt sich bei der Entwicklung dieser zum einen auf Kohlbergs Theorie der Moralentwicklung und zum anderen auf psychoanalytische Ansichten zum „Ich/ Selbst/ Ego" (Barrow, 2010, S.63). Das Formen zukünftiger mündiger Bürger*innen und deren Sozialisation soll beim dialogischen Lernen im Vordergrund stehen. Dabei kann nach Wegerif (2007) der entstehende dialogische Raum folgendermaßen definiert werden:

> a space in which different perspectives are held in tension in a way which does not lead to resolution but produces sparks of insight, learning and creativity. (Wegerif, 2007, S.118)

Dialogisches Lernen, gerade beim Philosophieren mit Kindern, hat viele positive Effekte. Zum Beispiel können Schülerinnen und Schüler einer Lehrkraft, die vorrangig offene Fragen höherer Ordnung im Klassenraum einbringt, bessere Leistungen vorweisen als solche, deren Lehrkraft keine Fragen höherer Ordnung stellt (Redfield & Rousseau, 1981; Samson et al., 2015). Des Weiteren erlauben offene Fragen tiefere Diskussionen, durch sie können Missverständnisse im Unterricht besser aufgedeckt werden und die Grenzen des Wissens der Diskutierenden ausgetestet werden. Sie ermöglichen das Aufstellen neuer Hypothesen durch die Schülerinnen und Schüler, die durch unerwartete Antworten im Dialog zu Tage treten (Cohen & Manion, 1980). Ruf & Gallin (2014, S.11) sowie Ruf et al. (2014) fordern, mit Blick auf die Mathematikdidaktik, eine kontinuierliche Einbindung der Lernenden als Dialogpartner*innen und Subjekte in einer stetigen Wechselwirkung mit der ebenso als Subjekt wahrgenommenen und als solches behandelten Lehrperson. Auch Höck (2015) betont die Relevanz von Interaktionen bei kollektiven Problemlöseprozessen:

17 z.B. auch nach Winter (2016)

> Hierbei kann zum einen für das einzelne Individuum etwas Neues entstehen, indem im Austausch mit dem Interaktionspartner ein zuvor nicht realisierter Aspekt ‚bewusst' wird, der von anderen Beteiligten bereits erschlossen wurde. Zum anderen kann die gemeinsame Hervorbringung einer Problemlösung auch für das Kollektiv etwas Neues konstruieren [...] (Höck, 2015, S. 77)

Nach Duncker (2023, S. 22) entsteht durch philosophische Dialogsituationen ein gemeinsamer Austausch, welcher es Kindern und Jugendlichen durch die offene Atmosphäre des Dialogs auf flachen Hierarchien ermöglicht, auch ihre eigenen Fragen hervorzubringen. Somit kann ein dialogisches Lernen zum Austausch auf Augenhöhe und Wissenszuwachs ohne Bewertungssituationen führen. In Abgrenzung an tradierte Unterrichtspraxis stellt Duncker (2023, S. 32) weiterhin fest, dass das dialogische und diskursive Prinzip insbesondere beim Philosophieren mit Kindern/ Jugendlichen dafür sorgen kann, dass „Kinder und Jugendliche nicht als Objekte der Belehrung, sondern als Subjekte und Mitgestalter aktiver Weltaneignung und kritisch-konstruktiver Verständigung“ verstanden werden können. Raupach-Strey (1998) betont ebenfalls die Bedeutung dialogischen Arbeitens beim Philosophieren mit Kindern:

> Damit hat sich ein weiterer Vorzug der dialogisch-diskursiven Auseinandersetzung mit Sinn- und Wertfragen gezeigt: Die Einsichten, die in einem Prozeß gemeinsamer Anstrengung gefunden und persönlich angeeignet wurden, versprechen am ehesten, tragfähig zu sein für die Zukunft: Sie tragen zur Persönlichkeitsstabilisierung ebenso bei wie zur Widerstandsfähigkeit gegen ideologische oder weltanschauliche Verführungen. (Raupach-Strey, 1998, S. 666f)

3.1.3 Philosophieren als Unterrichtsprinzip

Das Paradigma, dass das Philosophieren auch als ein allgemeindidaktisches Unterrichtsprinzip angesehen werden kann, haben vor allem die Autorinnen Kerstin Michalik und Barbara Brüning geprägt. Beide Autorinnen beziehen sich hierfür auf das P4C-Programm (Lipman, 2003, 2010; Matthews, 1980). Für erstere bedeutet Philosophieren nicht lediglich, sich im historisch-kanonisierten Kontext mit den Aussagen berühmter Philosoph*innen zu beschäftigen, sondern darüber hinaus auch in anderen Fächern durch die Wissenschaft nicht klärbare bzw. noch nicht aufgeklärte Fragen gemeinsam mit Kindern zu erörtern:

> Philosophieren ist nach diesem Ansatz etwas anderes als das Nachvollziehen der Gedanken großer Philosophen und Philosophinnen, etwas anderes als die Beschäftigung oder Auseinandersetzung mit Problemen, Fragen und Antwortversuchen aus der Geschichte der Philosophie, wie es im Philosophieunterricht weiterführender Schulen der Fall ist. Es handelt sich um das gemeinsame Nachdenken über offene Fragen und ungelöste Probleme, die mit den uns verfügbaren Instrumenten der Wissenschaft nicht abschließend zu klären sind. (Michalik, 2005, S. 15)

Weiterhin ist das Philosophieren bzw. die Philosophie und ihre Methoden nicht nur im didaktischen Rahmen, sondern auch im wissenschaftlichen Kontext ein methodisches Fundament (insbesondere Begriffsanalysen, Argumentationen und Gedankenexperimente). Daher kann die Philosophie als „curriculare Grundlagendisziplin angesehen [werden] und deshalb [ein] fächerübergreifendes Unterrichtsprinzip“ (Brüning, 2005, S. 60) darstellen. Philosophieren als Unterrichtsprinzip gewährt den Schülerinnen und Schülern neue Zugänge zu den Unterrichtsgegenständen und trägt zur Enttrivialisierung des Unterrichts bei (Michalik & Schreier, 2006, S. 62, 69). Für Michalik (2023, S. 48) leistet das Philosophieren mit Kindern außerdem einen wichtigen Beitrag zum inklusiven Lernen, da durch den offenen Umgang mit anderen Perspektiven (Denkweisen, Vorstellungen) sowie die Förderung des sozialen Miteinanders auch offenere Formen des Lehrens und Lernens entstehen können. Dies steht im Kontrast zum fachlichen Lernen, denn die philosophischen Gespräche folgen „einer anderen Logik als der des auf die Vermittlung von Wissen und Kompetenzen ausgerichteten Fachunterricht[s]“ (Ebd.). Durch diese andere Logik kann durch angeleitete Nachdenk-Gespräche bzw. das Philosophieren als Unterrichtsprinzip das fachliche Lernen bereichert und vertieft werden:

> Philosophische Gespräche, die sich auf Inhalte des Unterrichts beziehen, stehen nicht im Gegensatz zum Wissen vermittelnden Unterricht, sondern sie stellen auf verschiedenen Ebenen eine Ergänzung und Bereicherung dar. Nachdenkliche Gespräche über Fragen, auf die es keine eindeutigen Antworten gibt, durchbrechen die glatte Oberfläche einer Welt ohne offene Fragen, die der Unterricht in weiten Teilen vermittelt. (Michalik & Schreier, 2006, S.69)

Im Rahmen von Nachdenk-Gesprächen können die Kinder außerdem in ihrem Reflexionsvermögen und in ihren Gesprächskompetenzen gefördert werden (Michalik & Schreier, 2006, S.75). Beides sind auch in den Bildungsstandards (Kultusministerkonferenz, 2004) erwähnte Desiderate an die Schüler*innen.

3.2 Vorteile des Einbindens philosophischer Inhalte im Mathematikunterricht

> Nevertheless, having a philosophical-theoretical framework is often critical for students to be able to understand the idea of formal mathematical methods and to interpret results.
>
> Kondratieva (2017, S. 75)

Nach Prediger (2007, S. 43) gab es bereits in den 1970er Jahren Stimmen zur didaktischen Implementierung des Philosophierens in den Mathematikunterricht. Wie Kondratieva (2017) im oberen Epigraph betonen auch Reinhold & Poltersdorf (2015) betonen die Relevanz des Philosophierens und nennen zusätzlich folgende Vorteile: Förderung prozessbezogener Kompetenzen, Erleben der Mathematik als Geisteswissenschaft, die pluralistische Meinungen zulässt, Ergebnisoffenheit (Reinhold & Poltersdorf, 2015, S. 43f.). Trotz genannter Vorschläge und einer mittlerweile fast 60-jährigen Tradition der immer wieder auftauchenden Forderung nach philosophischen Inhalten bzw. Methoden im Mathematikunterricht gibt es in diesem Feld auch heute noch kaum systematische Arbeiten. Prediger (2007, S. 45) nennt dafür folgende Gründe: Philosophische Reflexionen werden oft als zu schwer eingeschätzt, sie werden als Ergänzung und nicht als Teil der Mathematik angesehen und widerstreben der landläufigen Meinung, Mathematikunterricht sollte sich nur mit innermathematischen Konzepten, Theoremen und Problemlöseprozessen auseinandersetzen. Viele dieser Begründungen lassen sich durch ein etabliertes Philosophieren als Unterrichtsprinzip etwas entkräften. Vor allem sollte in der Lehrer*innenbildung mit folgenden Prämissen angesetzt werden: Philosophische Reflexionen sind nicht notwendigerweise schwierig anzuregen, ein pluralistischeres Bild der Mathematik mit ihren Facetten sollte schon in der Lehrer*innenausbildung propagiert werden und die Ziele des Mathematikunterrichts sollten in Hinblick auf *mathematical literacy* weiter bearbeitet werden (Prediger, 2007, S. 56).

3.2.1 P4CM

Die Kerngedanken des P4C-Programmes wurden von kanadischen Forschern im Rahmen eines P4CM-Programmes (Philosophy for Children in Mathematics) aufgegriffen (Daniel et al., 1999). Als Anlass wurden Bedenken zum mathematischen Curriculum genommen, denn dieses sei nicht sinnstiftend für Kinder (Baruk, 1995), lasse keinen Platz für philosophische Diskussionen (Smith, 1995) und fördere kein kritisches Denken (Lipman, 2003). Durch die Implementierung von Sachaufgaben und der Konzentration auf problemlöseorientierten Mathematikunterricht wurde zunächst versucht, Bedenken erster Art auszuräumen, wobei dies nicht vollständig ausreichend ist:

> Although this type [problemlöseorientierter Mathematikunterricht, Anm. JB] improves pupils' mathematical performance [...], we judge that the emphasis placed on solving problems risks becoming too utilitarian and, for this reason, insufficiently stimulating of reflection and ideas among the pupils [...] schools should give as much importance to ideas and concepts as to procedures for solving problems. That is, we suggest that regular mathematics teaching in primary school be complemented [...] by reflection and dialogue among pupils on philosophico-mathematical concepts that interest them and metamathematical ideas that concern them. (Daniel et al., 1999, S.427)

Im Rahmen des P4CM-Programmes werden zweierlei Arten von Fragen unterschieden: *Philosophico-mathematical* und *meta-mathematical*. Das Forscher*innenkollektiv rund um Marie-France Daniel und Luise Lafortune entwickelte in den 1990er Jahren Kursmaterial für die Implementierung von *philosophico-mathematical* Fragen in den Mathematikunterricht, ergänzend zum bestehenden Curriculum (Daniel et al., 1999, S. 429). Dieses Material besteht aus einer Anleitung für die Lehrkräfte sowie zwei philosophischen Büchern für die Kinder (Ebd.). Dies führte zu einer kognitiven und kommunikativen Entwicklung der Kinder, die am Ende des P4CM-beinhaltenden Schuljahres wesentlich mehr dialogisch arbeiteten und in ihren Antworten mehr Spuren von HOT (Higher-Order-Thinking) aufwiesen (Daniel et al., 1999, S. 438).

Versuche, Philosophie in Mathematikstunden einzubinden, wurden selbstverständlich auch in deutschen Schulen unternommen und es wurde auch dazu publiziert (Meerwaldt, 2011; Prediger, 2007; Reinhold & Poltersdorf, 2015). Auch im angelsächsischen Raum gab es weitere unterrichtspraktische Versuche (bspw. English, 1992; Lafortune et al., 2003).

Im Folgenden sollen exemplarisch die Ergebnisse einiger Studien aus dem internationalen Raum zusammengefasst werden, die sich mit dem Philosophieren im Mathematikunterricht beschäftigt haben. Nicht alle diese Studien sind dem P4CM-Programm zuzuordnen, beispielsweise stammt die folgende Studie von Jankvist & Iversen (2014) aus einer dänischen Tradition des Philosophierens im Mathematikunterricht.

Jankvist & Iversen (2014) unterscheiden zwischen den *whys* und *hows* des Philosophierens im Mathematikunterricht. Für die *whys* differenzieren sie weiter zwischen dem Philosophieren als Werkzeug und dem Philosophieren als Ziel im Mathematikunterricht aus. Als Beispiel für das Philosophieren als Werkzeug führen sie die Arbeiten von Iversen (2006) an, in welchen das Beweisen durch Analyse von Argumenten nach Toulmin (2003) für Schüler*innen weiterführender Schulen zugängiger werden sollte. Weiterhin wurde sich begriffsanalytisch mit dem Konzept des Beweises beschäftigt (vgl. Jankvist & Iversen, 2014, S. 3f.). Zum Philosophieren als Ziel werden Unterrichtsdesigns von Jankvist (2014) angeführt, in welchen über inner- und außermathematische Rollen der Mathematik und ihr Wesen als reine oder angewandte Wissenschaft philosophiert werden sollte. Die *hows* werden in drei Unterkategorien aufgeteilt: illumination approaches, modules approaches und philosophy-based approaches (Jankvist & Iversen, 2014, S. 1). Illumination approaches sollen mathematische Konzepte über philosophische Informationen ergänzen (Ebd., S.6). Als Beispiel wird die Frage *Was sind Zahlen* und die didaktische Umsetzung von Nielsen (2010) angegeben (Jankvist & Iversen, 2014, S. 8). Modules approaches sind unterrichtspraktisch entwickelte Interventionen, die gezielt Inhalte aus dem Bereich der Philosophie der Mathematik aufgreifen. Hierfür werden Thomsen et al. (2010) und der von ihnen konzipierte Unterrichtsgang zur Unendlichkeit beispielhaft aufgeführt, in welchem von Aristoteles über Leibniz und viele andere eine philosophisch-historische Erkundung der Unendlichkeit erfolgt (Jankvist & Iversen, 2014, S. 11). Bei philosophy-based approaches wird sich explizit mit einer gewissen philosophischen Denkschule und deren Einfluss auf (gewisse) Mathematik(en) beschäftigt (Jankvist & Iversen, 2014, S. 7).

Daniel et al. (1994, S. 34) halten nach ersten Versuchen der Implementation von P4CM fest, dass im philosophisch-mathematischen Curriculum die Kompetenzen der Schüler*innen zum Begründen, zur Begriffsbildung, zum Modellieren und zum Erforschen trainiert werden können. Des Weiteren werden durch das Philosophieren im Mathematikunterricht affektive und soziale Fähigkeiten gefördert (Ebd.).

Lafortune et al. (2003) untersuchen den Einfluss regelmäßigen Philosophierens im Mathematikunterricht (im Rahmen des P4CM-Programms) auf die Mathematik-Angst und das Selbstkonzept der Kinder. Über 22 Wochen hinweg wurde eine Versuchsgruppe im Programm als *community of inquiry* (Lipman, 2003) im Mathematikunterricht verstanden und wöchentlich eine Stunde zum Philosophieren über Mathematik aufgebracht. Im Gegensatz zur Kontrollgruppe zeigten die untersuchten Mädchen eine signifikant höhere Mathematik-Angst, während diese bei den Jungen keine signifikanten Unterschiede aufwies (Lafortune et al., 2003, S. 15f.). Die Autor*innen der Studie erklären dies mit der destabilisierenden Rolle des Philosophierens und entwickelten Unsicherheiten aufgrund dessen, dass es beim Philosophieren keine definitiv richtige oder generell kollektiv akzeptierte Antwort gibt (Ebd., S.16). Sie stellen abschließend die Hypothese auf, dass das Philosophieren im Mathematikunterricht die realistische Einschätzung der eigenen Kompetenzen und ein positives Selbstkonzept fördern könnte (Ebd., S. 19).

3.3 Ausgewählte Methoden und Prinzipien des Philosophie- und Ethikunterrichts

Im Folgenden werden exemplarisch drei Modelle bzw. Methoden des Philosophie- und Ethikunterrichts vorgestellt. Da sich die empirische Unterrichtsforschung in der Fachdidaktik Ethik/ Philosophie im deutschsprachigen Raum im Entwicklungsprozess befindet und noch keine Basis an empirischen Arbeiten vorliegt (Applis, 2017; Tiedemann, 2011)[18] können keine empirisch fundierten Aussagen zur Wirksamkeit bzw. zu Prozessen bei der Anwendung dieser Methoden getroffen werden.

Exemplarisch herausgegriffen wurden die Methoden, die im Rahmen der entwickelten Unterrichtsdesigns explizit oder implizit Anwendung fanden. So wurde sich bei der Erstellung der Struktur der Designs am *Bonbon-Modell* orientiert, die von Martens (2003) beschriebenen Methoden (5 Finger) lassen sich in ihrer Anwendung rekonstruierend aus dem Datenmaterial herausarbeiten (vgl. Kap. 6) und (neo-)sokratische Gespräche wurden über die Gesprächsimpulse beim Vorlesen der Geschichten von Robert und dem Zahlenteufel realisiert.

3.3.1 5-Finger-Modell

Die als 5-Finger-Modell (bspw. in Brüning (2017) als solches bezeichnet) bekannte Ableitung von fünf Kernkompetenzen bzw. Methoden des Philosophierens geht auf Ekkehard Martens (Martens, 2003) zurück. Er führt sein *integratives Methodenparadigma* auf die Werke von Aristoteles und Sokrates zurück und formuliert folgende „sokratisch-aristotelischen Methoden des Philosophierens“ (Martens, 2003, S. 54ff. sowie Brüning, 2017, S. 134f.):

- **phänomenologische Methode**: Wahrnehmungen/Beobachtungen differenziert und umfassend beschreiben; Wahrnehmung in verschiedenen Sinnzusammenhängen und unter Einbezug innerlicher, gesellschaftlicher und kultureller Phänomene beschreiben können
- **hermeneutische Methode**: Bewusstmachen des eigenen Vorverständnisses, Lesen und (!) Verstehen (nicht nur) philosophischer Texte; Interpreta-

18 Vereinzelt beginnt die empirische Wende allerdings auch in der Philosophiedidaktik, beispielsweise mit Werken wie von Benthaus (2018), Dötsch (2023), Hörburger (2023), des Weiteren kann das *joint meaning making* (De Boer, 2018) als Forschungsinteresse für die Philosophiedidaktik, angelehnt an die mathematische Forschung nach Krummheuer & Brandt (2001) sowie Brandt (2004), hervorgehoben werden.

tionen von Werten, Normen, Verhaltensweisen, Weltanschauungen ... und Erklärungen für die sie tragenden Elemente geben

- **analytische Methode**: zentrale Begriffe und Argumente hervorheben und prüfen; Klärung zentraler philosophischer Begriffe
- **dialektische Methode**: Dialogangebote annehmen, auf Alternativen/ Dilemmata zuspitzen und abwägen; Auseinandersetzen mit eigenen und fremden Positionierungen
- **spekulative Methode**: Zulassen von Einfällen und Phantasie; Entwicklung von Ideen und Denkalternativen, die es in Wirklichkeit noch nicht gibt

Diese Methoden sind allerdings nicht als scharf voneinander abgetrennt zu betrachten. Vielmehr ist es so, dass sie ineinander greifen müssen, um richtig angewendet zu werden:

> Jede einzelne Methode enthält jeweils die anderen als Teilmomente mit [...]. So ist die Phänomenwahrnehmung immer schon durch bestimmte Deutungsmuster vorgeprägt; das hermeneutische Verstehen ferner muss in seinen Kernbegriffen und Argumentationen analytisch geprüft werden; die Prüfung vollzieht sich außerdem dialektisch, im gemeinsamen Hin-und-Her der Argumente; schließlich lassen sich wenigstens vorläufige Antworten geben, die auch auf Spekulation oder Intuition beruhen. (Martens, 2003, S. 55)

Auch ist die zuvor angegebene Reihenfolge nicht obligatorisch, sondern ähnlich wie beim Spiralprinzip (Bruner, 1973) wird der philosophische Denkprozess vor allem durch ein wiederholtes und aufeinander aufbauendes Anwenden der Methoden komplettiert. Dies zeigt sich auch in der von Martens oft verwendeten Illustration der „Methodenschlange der Erkenntnis“ (Martens, 2003, S. 57), in welcher eine Schlange spiralförmig aus einem aus den verschiedenen Methoden gebildeten Kreisring hervorkommt.

3.3.2 Bonbon-Modell

Da die Struktur der erstellten Unterrichtsstunden U1–U4 sich lose am Bonbonmodell orientiert (in den Stundenverlaufsplänen kursiv markiert, → S. 262ff.), soll es an dieser Stelle kurz erläutert werden. Sistermann (2016, S. 104) unterscheidet sechs Lernphasen, die zum Teil von der Lehrperson eng angeleitet werden müssen, so dass der Ablauf der Phasen in einer graphischen Rekonstruktion durch die Verengung aussieht wie ein Bonbon (vgl. die gelungene Abbildung in Sistermann (2017, S. 273)). Im Fokus steht dabei eine *problemorientierte Unterrichtsplanung*, wobei eine Problemlösung in Anlehnung an Popper (1996) als Problemlöseversuch aufgegriffen wird, welcher falsifiziert oder überholt werden kann (Sistermann, 2016, S. 103).

Im Gegensatz zu Martens (5-Finger-Modell, → S. 63) besteht Sistermann (2017, S. 273f.) auf einem klaren Ablauf der einzelnen Phasen des Lernprozesses (Sistermann, 2016, S. 103f.):

1. **Hinführung**: von den Interessen der Schüler*innen ausgehend

2. **Problemstellung**: von der Lehrperson so eindeutig und nachvollziehbar gestaltet, dass selbstständiges Arbeiten in nächster Phase ermöglicht wird

3. **Selbstgesteuert intuitive Problemlösung**: Schüler*innen arbeiten einzeln, paarweise oder in Gruppen ohne Anleitung der Lehrkraft am Problem

4. **Angeleitet kontrollierte Problemlösung**: Konfrontation der Kinder mit bspw. anspruchsvolleren philosophischen Texten/ anderen Medien zu demselben Problem

5. **Festigung**: Ergebnisse der vorherigen Phase werden festgehalten und in Vergleich zur selbstgesteuert intuitiven Phase gesetzt

6. **Transfer**: vorher geschärfte Begriffe an Beispielen anwenden; kritische Stellungnahme sowie offene Fragen

Die Abfolge wurde „an der Beschreibung des pragmatischen Denkprozesses durch John Dewey (1910, 56) ausgerichtet, die schon [...] die Psychologen Werner Cornell und Heinrich Roth in die fünf bzw. sechs Lernphasen ihrer Lernpsychologie übernommen haben“ (Sistermann, 2017, S. 274).

Da dieser strenge Ablauf nicht immer als gewinnbringend für die konzipierten Unterrichtsstunden eingeschätzt werden konnte, wurde sich für die Erstellung der Verlaufspläne lediglich daran orientiert. Die Relevanz des Bonbon-Modells für die Ethik- bzw. Philosophiedidaktik sei an dieser Stelle aber trotz dessen betont: Es ist das „gängigste und [...] gebräuchlichste Modell“ (Pörschke, 2017, S. 110), vielfach überarbeitet sowie in „verschiedensten Kontexten großflächig angewendet“ (Ebd.).

3.3.3 (Neo-)Sokratische Gespräche

Im Ethikunterricht lassen sich neben den (Neo-)Sokratischen Gesprächen nach Pfeifer (2003, S. 101f.) noch andere Gesprächsformen festhalten, die selbstverständlich auch im Mathematikunterricht ausgemacht werden können:

- **Gelenktes Unterrichtsgespräch:** Enge, kleinschrittige Frageimpulse mit wenig Raum für kritische Eigenleistungen

- **Fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch:** Sicht- und Fragehaltung der Schüler*innen wird von Lehrperson als Grundlage zur Entwicklung eines Sach- oder Problemzusammenhanges benutzt

- **Themenzentriertes Unterrichtsgespräch:** Erfahrungen der Schüler*innen und deren Reflexion werden problemorientiert analysiert und mit weiteren Materialien vertieft (unbedingte Zurückhaltung der Lehrperson erforderlich)

Die in dieser Arbeit in die Texte implementierten Gesprächsimpulse sollen allerdings die Grundlage für neo-sokratische Gespräche schaffen und nicht etwa in einem gelenkten Unterrichtsgespräch münden. Dies ist mitunter aber stark von der gesprächsleitenden Lehrkraft abhängig. Neo-sokratische Gespräche gehen im Kern auf Leonard Nelson und Gustav Heckmann zurück (Pfeifer, 2003, S. 106). Im deutschsprachigen Raum wurde der Begriff maßgeblich durch die Arbeiten von Gisela Raupach-Strey (2002) geprägt. Im Gegensatz zu den sokratischen Gesprächen ihres Namensgebers Sokrates tritt die gesprächsleitende Person in neo-sokratischen Gesprächen nicht dominant auf und versucht auch nicht als eine Art „Hebamme“, gewisse Erkenntnisse bei den am Gespräch partizipierenden Personen zu erzeugen (Sinhart-Pallin & Ralla, 2015, S.57ff.). In neo-sokratischen Gesprächen, welche in der P4C- bzw. PmKJ-Tradition geführt werden, rückt die Hebammenkunst in den Hintergrund und auch die Rolle der Lehrkraft wird anders verstanden. Als Gesprächsleitung hat die Lehrkraft eine fast vollkommen administrative Funktion und beteiligt sich inhaltlich so wenig wie möglich, da sie von den Kindern nicht als fachlich-inhaltliche Autorität verstanden werden soll. Eher sollen die Kinder durch die Gesprächsleitung zum Austausch untereinander animiert werden und die Gesprächsleitung als moderierend und am gemeinsamen (Lehrkraft eingeschlossen) Erkenntnisprozess interessierte Person verstehen. (Nevers, 2005, S. 32f.) Nach einer Mixed-Methods-Studie von Kümin et al. (2023, S. 173) ist das philosophische Gespräch, worunter auch die neo-sokratischen Gespräche gezählt werden können, die von Lehrkräften am häufigsten eingesetzte Methode im Ethikunterricht der Schweiz. Ähnliche Ergebnisse für Deutschland liegen bislang nicht vor.

4. Unterrichtsdesigns

Was erwartet Sie in diesem Kapitel?

Im folgenden Kapitel werden zunächst im Rahmen der didaktisch-methodischen Vorüberlegungen die Frage nach der Sinnstiftung in den Unterrichtsdesigns und die des philosophischen Gehalts aufgeworfen sowie Kriterien zur Erfüllung aufgestellt. Es folgt eine kurze Übersicht des Ablaufs der Erhebungen sowie des Samplings. Anschließend werden alle vier Unterrichtsdesigns nach dem Dreischritt Fachliche Hintergründe - didaktischer Kommentar - Vorstellung entstandener Dokumente erläutert. Im Kapitel zur Stunde U4 sind die Dokumente direkt in den didaktischen Kommentar eingearbeitet worden.

Und warum ist das wichtig für die Arbeit?

Eine längere Erläuterung, warum eine so dezidierte Vorstellung der Unterrichtsdesigns im Rahmen der Arbeit für notwendig erachtet wird, kann in Kapitel 5.1 nachvollzogen werden. Insgesamt sind die Designs so explorativ, dass eine tiefgründige Erläuterung zum Nachvollziehen der Rekonstruktionen und der beschriebenen Analyseergebnisse notwendig ist.

4.1 Didaktisch-methodische Vorüberlegungen

Zentral bei den didaktisch-methodischen Vorüberlegungen waren zwei Fragen, die es vorab zu klären gab:

1. Wie können sinnstiftende Interaktionen zum Thema Unendlichkeit angeregt werden?
2. Wie können philosophische Gespräche in die Unterrichtsdesigns integriert werden?

Zum ersten Punkt ist zunächst zu klären, was denn Sinnstiftung überhaupt bedeutet. Lengnink (2019) greift für eben jene Bestimmung auf eine Unterscheidung Schaefflers zum *Sinn* zurück:

> Schaeffler unterscheidet dabei zwei grundlegend unterschiedliche Intentionen, die Sinnfrage als Prüfung einer Funktionstüchtigkeit, wobei er Zweckdienlichkeit und Bedeutung unterscheidet und die Sinnfrage als Sinnforderung, wie sie sich z. B. in der Frage nach dem Sinn des Lebens zeigt. Beide Intentionen können für den Mathematikunterricht relevant sein, die Zweckdienlichkeit als Begründung warum es sich lohnt, etwas zu lernen und die Sinnforderung, die ein Sinnerleben im Unterricht als Qualität des Unterrichts einfordert. (Lengnink, 2019, S. 92)

Somit ist als Voraussetzung für die zu konzipierenden Unterrichtsdesigns ein gewisser *Sinn* in den Aufgaben und Gesprächen anzusehen. Die Zweckdienlichkeit wird hier für die Kinder nur marginal ersichtlich, denn eine Beschäftigung mit Unendlichkeit hat m.E. ihren (innermathematischen) Zweck vorrangig in der Analysis der Sekundarstufe II. Dennoch ist mit der Einführung der natürlichen Zahlen bereits ab Klasse 1 ein nicht direkt einleuchtender, aber dennoch innermathematischer *Sinn* der Unendlichkeit immanent gegeben. Das Sinnerleben im Unterricht soll über die fiktiven Geschichten von Robert und dem Zahlenteufel erzeugt werden, die den Kindern zum einen eine Ablösung von der Realität und zum anderen einen Perspektivwechsel auf mathematische Sachverhalte ermöglichen. Da Sinn subjektiv und intersubjektiv konstituierbar ist (Lengnink, 2019, S. 92), soll ein größtmöglicher Raum für Interaktionen mit Hilfe der Gesprächsimpulse und Gruppenarbeiten geschaffen werden.

Nach Leuders et al. (2011, S. 4) gibt es bestimmte Ansprüche für sinnstiftenden Mathematikunterricht: Lebensweltbezug, Kontextauthentizität und Reichhaltigkeit. Zum Thema Unendlichkeit ist es vorausschauend vermutlich schwer, einen Lebensweltbezug herzustellen, da in der Lebenswelt der Kinder keine aus dem Alltag greifbaren Erfahrungen mit Unendlichkeit zu fassen sind. Daher sollte die Befassung mit dem Thema innermathematisch motiviert sein:

> Es entwickelte sich eine zunehmende Sensibilität gegenüber unglaubwürdigen Einkleidungen, die die lebensweltlichen Kontexte nicht ernst nehmen und Fragen stellen, die in diesen Kontexten niemand stellen würde (Jahnke 2005, Leuders/Leiß 2006). Wenn zu einem bestimmten Thema solche Kontexte in der realen Welt nicht zu finden sind, dann ist es authentischer, geeignete innermathematische Kontexte heranzuziehen. (Leuders et al., 2011, S. 4)

Beim Thema Unendlichkeit ist es genau dann möglich, mit Hilfe von authentischen Fragen den Kontext zu erschließen, solange sich diese Fragen eben innermathematisch begründen lassen. Aus diesem Grund wurden innermathematische Spannungsfelder wie transfinite Zahlen, Hilberts Hotel und auch Paradoxien und Antinomien sowie das Induktionsprinzip didaktisch reduziert und in Unterrichtsdesigns eingearbeitet. Zu Erkundungen regen die offenen Aufgabenstellungen sowie das mathematisch-philosophische Setting an (Reichhaltigkeit). Die aus dem Verlauf der Geschichte der Mathematik motivierten Stunden U2 und U3 tragen dem genetischen Prinzip insofern Rechnung, dass sie es den Kindern ermöglichen, mathematikhistorische Problemfelder eigenständig überdenken und erschließen zu können. Somit ist in den Stunden die Grundlage für sinnstiftende, authentische und schüler*innenorientierte Auseinandersetzungen geplant worden. Nach Jaschke (2017) sind auch die Planungsschritte der Lehrkräfte bezüglich der Sinnstiftung relevant:

> Sinnstiftung im Mathematikunterricht zu realisieren erfordert also von Lehrkräften eine Analyse relevanter Lernphasen und Lernschritte im Zusammenhang mit dem zu unterrichtenden mathematischen Inhalt sowie die Erforschung sinnvoller horizontaler wie vertikaler Mathematisierungen zur Initiierung des Lernens. Bei horizontalen Mathematisierungen ist es zudem wichtig, sinnstiftende und möglichst authentische inner- oder außermathematische Kontexte zu eruieren, die eine schülerorientierte Auseinandersetzung ermöglichen. (Jaschke, 2017, S. 63)

Diese Planungsschritte haben in den Designs der Unterrichtsstunden nicht die Lehrkräfte, sondern ich als Forschende unternommen. Da das Thema Unendlichkeit bislang wenig mathematikdidaktisch erschlossen ist (vgl. Kap. 2.4.3 und 2.4.1), war die Planung einzelner Lernschritte und Lernphasen im Zusammenhang mit Unendlichkeit eher explorativ angesiedelt als auf bekannten didaktischen Modellen beruhend.

Zusammenfassend ableitend lässt sich festhalten, dass sich sinnstiftende Interaktionen im Datenmaterial erkennen lassen, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:

- Die Schüler*innen tauschen sich über intersubjektive Sichtweisen zum *Sinn* des Unterrichtsinhalts bzw. der Aufgabe aus
- Die Schüler*innen nehmen die Geschichte von Robert und dem Zahlenteufel in ihre Betrachtungen mit auf (*Sinnerleben*)
- Die Schüler*innen nehmen unterschiedliche Perspektiven zur Unendlichkeit ein (intra- oder intersubjektiv)

Zum zweiten Punkt ist anzumerken, dass die Definition, ab wann ein Gespräch *philosophisch* ist, sehr variieren kann. Für diese Arbeit werden zum philosophischen Gespräch Teile der Arbeitsdefinition von Petersen (2019) herangezogen:

> Ein philosophisches Gespräch ist ein Dialog mit Gesprächsleitung (Form) zu einer philosophischen Frage (Inhalt) unter Einsatz von Argumentationsformen (Methode) und auf der Basis bestimmter Annah-

> men: Vertrauen in die Vernunft, Wahrheit als regulative Idee und Offenheit als Prinzip. (Petersen, 2019, S. 51f.)

Die Gesprächsimpulse während der Geschichten finden mit einer Gesprächsleitung durch die Lehrkraft statt. Dies ist nicht unbedingt eine neue Idee: Schreier (1993) konzipiert Geschichten als Gesprächsvorlagen für philosophische Dialoge mit Kindern. In Abgrenzung zu den in dieser Arbeit eingesetzten Geschichten sind diejenigen von Schreier (1993) allerdings nicht mit Zwischenimpulsen unterbrochen, sondern als Ganzheit zu verstehen, auf welcher aufbauend dann längere Gespräche entwickelt werden können.

An dieser Stelle sollte aber allerdings die Relevanz der Gruppenarbeiten, welche ohne Gesprächsleitung stattfinden, nicht unterschätzt werden - auch hier können m.E. philosophische Gespräche emergieren. Zentral ist allerdings der Punkt der philosophischen Frage bzw. des philosophischen Inhalts, der in den entworfenen Unterrichtsdesigns durch Unendlichkeit als Schnittstelle zwischen Philosophie und Mathematik unmittelbar gegeben ist. Die Annahmen wurden bei den Gesprächsimpulsen durch die Lehrkräfte implizit umgesetzt, für die Pro-Contra-Debatten wurden sie in die Regeln implementiert.

Neben der Arbeitsdefinition zum philosophischen Gespräch wird sich an der Idee von Lipman (2003) orientiert, den Klassenraum und die Schüler*innen als *Community of Inquiry* aufzufassen: „A conversation is an exchange: of feelings, of thoughts, of information, of understandings. A dialogue is a mutual exploration, an investigation, an inquiry“ (Lipman, 2003, S. 87f.). Daher sollen so viel Unterrichtsphasen wie möglich auf Peer-Ebene abgehalten werden, die Beteiligung der Lehrkraft sollte inhaltlich minimal sein damit die Kinder sich philosophierend und ko-konstruktiv untereinander mit dem Thema Unendlichkeit beschäftigen können.

Weiterhin wurden Methoden aus dem Philosophie- bzw. Ethikunterricht in die Stunden eingebunden. So orientiert sich der Aufbau der Stunden beispielsweise lose am Bonbon-Modell (vgl. Kap. 3.3.2 auf S. 64 und die kursiv gesetzten Verweise in den Verlaufsplänen der Stunden im Anhang, S. 262ff). Weiterhin wurde darauf geachtet, dass die Kinder genug Raum bekommen, alle Methoden des Philosophierens (vgl. Kap. 3.3.1 auf S. 63) anwenden zu können, wenn auch die spekulative, die analytische und die dialektische Methode mehr fokussiert werden sollen. Des Weiteren findet in der Stunde U2 eine Pro-Contra-Debatte statt, eine Methode aus dem Ethik- und Philosophieunterricht, deren Ergebnisse auch den Kern des Datenkorpus dieser Dissertation darstellen.

4.2 Übersicht der Stunden und Sampling

Für die Untersuchung wurden vier Unterrichtsdesigns konzipiert, welche explorativ eine Beschäftigung mit Unendlichkeit anregen sollen. Eine Übersicht kann in Abb. 4.1 eingesehen werden. Erhoben wurde an einer Grund- und einer Gesamtschule in Sachsen-Anhalt. Die Covid-19-Pandemie und die damit einhergehenden Restriktionen sorgten für einige Besonderheiten im Erhebungsverlauf. Zum einen wurde die Unterrichtsstunde U2 an der Grundschule im Teilungsunterricht durchgeführt, sodass es zwei Termine zur Durchführung dieser Stunde an der Grundschule gab. Zum anderen war durch viel Ausfall und Lockdowns eine Erhebung der U4 direkt nach der U3 an der Grundschule nicht ohne Weiteres möglich, sodass dieser Termin

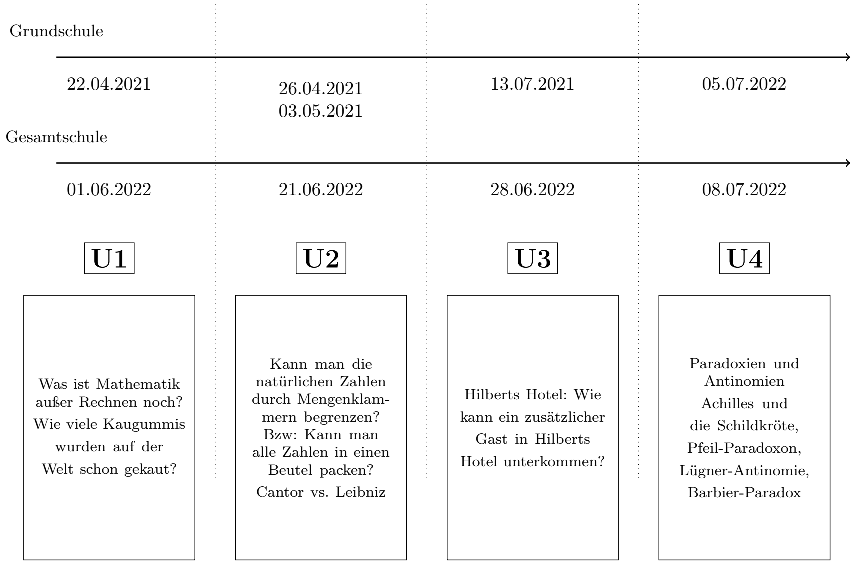


Abbildung 4.1: Übersicht über durchgeführte Unterrichtsversuche mit Kurzbeschreibung der Inhalte

auf den Sommer 2022 (fast ein Jahr später) fiel. An der Gesamtschule konnten alle vier Stunden relativ dicht aufeinanderfolgend abgehalten werden.

Die Grundschule liegt in einem sozioökonomisch eher schwachen Viertel einer größeren Kleinstadt in Sachsen-Anhalt. Das Klientel ist gemischt. In den meisten Fällen bekommen zwei oder weniger Kinder nach Abschluss der vierten Klasse eine Empfehlung für den Besuch des Gymnasiums. Die Klassen werden je nach Leistungsstand bereits in Klasse 1 aufgeteilt (meist zweizügig), eine der ersten Klassen wird dann drei Jahre Schuleingangsphase erleben (normal sind zwei Jahre; nach dem ersten halben Jahr an der Grundschule werden die Kinder nochmals evauliert und ggf. einer anderen ersten Klasse zugewiesen). Die untersuchte Klasse (2021 3. Klasse, 2022 4. Klasse) hatte zwei Jahre Schuleingangsphase und wird von den Lehrkräften als leistungsstärkere Klasse beschrieben. Die Klasse besteht aus 22 Schüler*innen, von denen dreizehn Jungen und neun Mädchen sind.

Die Gesamtschule liegt als einzige weiterführende Schule in einer kleinen Kleinstadt in Sachsen-Anhalt und ist zwar staatlich anerkannt, aber in privater Führung. Es gibt zwei Klassen pro Jahrgang, die jeweils maximal 22 Schüler*innen umfassen dürfen. Es wird ein Schulgeld erhoben, welches aber bei besonderen Umständen der Eltern auch ermäßigt werden kann. Die in der Gesamtschule unterrichteten Kinder kommen vorrangig aus sozial stärkeren Milieus. Die untersuchte Klasse (5) besteht aus 21 Schüler*innen, von denen dreizehn Jungen und acht Mädchen sind. Einer der Jungen (in dieser Arbeit Roman genannt) hat einen Inklusionsstatus sowie eine in der Klasse anwesende Inklusionshelferin.

Alle Durchführungen der Unterrichtsdesigns wurden mit drei Kameras videographiert. Die Videos wurden verdichtet (siehe Transkriptionsbuch) und relevante Passagen identifiziert. Anschließend wurden ausgewählte Szenen anhand der TiQ-Transkriptionsregeln (vgl. Transkriptionsbuch) transkribiert.

4.3 U1: Robert und der Zahlenteufel in der Welt der Mathematik

4.3.1 Fachliche Hintergründe: Was ist Mathematik?

Was ist Mathematik? Diese Frage beschäftigt vor allem Wissenschaftstheoretiker*innen, aber in Summe auch Forscher*innen verschiedenster Disziplinen. Das *Wesen* der Mathematik und das Finden einer eigenen innerhalb der mannigfaltigen historischen Positionierungen könnte durchaus eine ganz eigene Dissertation ausfüllen. An dieser Stelle wird sich daher auf einen kurzen Überblick zu verschiedenen, ausgewählten Positionen beschränkt.

Was ist Mathematik für eine Wissenschaft? Es gibt Stimmen, die für eine Einordnung von *Mathematik als Naturwissenschaft* sprechen (Goodman, 1990), für diese sind „Gegenstände der Mathematik [...] einfache mathematische Formen der physischen Erscheinungen" (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 156). Andere wiederum sehen die Anwendbarkeit der Mathematik in der Realität nicht durch diese konstituiert, auch kann die Mathematik für sie die Realität niemals vollständig abbilden (Johnson, 2019; Paul, 2020; Wigner, 1960). Weitere Forscher*innen sehen Mathematik als Geisteswissenschaft an, ein von Menschen geschaffenes Konstrukt, dass sich ebenso kulturell im Laufe der Menschheitsgeschichte konstituierte wie bspw. Literatur- oder Politikwissenschaften (Ernest, 1992; Peck, 2018) und somit auch von kulturellen Einflüssen abhängig (Spengler, 1922). Vertreter*innen des Platonismus (für einen Überblick siehe Ahbel-Rappe (2009)) würden argumentieren, dass Mathematik komplett von Menschen und jeglicher Erkenntnis unabhängig sei und dass den Gegenständen der Mathematik eine eigenständige Existenz zugesprochen werden kann, mit der sie sich auf die Dinge der Realität auswirken (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 33f.). Diese Einstellung, bei ihnen *Romance of Mathematics* genannt, teilen auch Lakoff & Núñez:

> What human beings believe about mathematics [...] has no effect on what mathematics really is. Mathematics would be the same even if there were no human beings, or beings of any sort. Though mathematics is abstract and disembodied, it is real. (Lakoff & Núñez, 2000, S. 339)

Bei *Intuistionist*innen* (Brouwer, Heyting, Troelstra) wird Mathematik als Funktion des menschlichen Intellekts verstanden, ist also eine freie Aktivität des Verstandes (abhängig vom Subjekt, also des/der Mathematiker*in). Dabei sind die Sätze der Mathematik dem menschlichen Verstand unmittelbar gegeben, dennoch ist die Mathematik eine Wissenschaft mit realem Inhalt (nicht rein formal). (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 105 ff.)

Dies führt zur kantisch anmutenden Position, die Sätze der Mathematik seien *synthetische Sätze a priori.* Anhänger*innen des Intuitionismus verstehen Intuition aber nicht umgangssprachlich, sondern eher wie im Folgenden von Descartes dargelegt:

> Unter Intuition verstehe ich nicht das schwankende Zeugnis der sinnlichen Wahrnehmung oder das trügerische Urteil der verkehrt verbinden-

> den Einbildungskraft, sondern ein so müheloses und deutlich bestimmtes Begreifen des reinen und aufmerksamen Geistes, daß über das, was wir erkennen, gar kein Zweifel zurückbleibt, oder, was dasselbe ist: eines reinen und aufmerksamen Geistes unzweifelbares Begreifen, welches allein dem Lichte der Vernunft entspringt und das, weil einfacher, deshalb zuverlässiger ist als selbst die Deduktion, die doch auch, wie oben angemerkt, von Menschen nicht verkehrt gemacht werden kann. So kann jeder intuitiv mit dem Verstande sehen, daß er existiert, daß er denkt, daß ein Dreieck von nur drei Linien, daß die Kugel von einer einzigen Oberfläche begrenzt ist und Ähnliches, weit mehr als die meisten gewahr werden, weil sie es verschmähen, ihr Denken so leichten Sachen zuzuwenden. (Descartes, 1979, Regel 3, S. 10)

Eine weitere Frage aus dem Bereich der Philosophie der Mathematik ist, welchen ontologischen Status man mathematischen Entitäten zusprechen kann. Diese Frage korrespondiert direkt mit der nach dem Wesen der Mathematik, da sich das Wesen der Mathematik auch über die von ihr behandelten Gegenstände konstituiert. Was sind nun also Zahlen, Funktionen, Punkte, Geraden, Mengen et cetera?

Solche Fragen und insbesondere die Antworten darauf richten sich nach der jeweiligen metaphysischen Position, die eine Philosophin oder Mathematikerin einnimmt. Je nachdem, welche Position vertreten wird, gibt es darauf folgende Problemfelder, denen sich die Vertreter*innen stellen müssen. *Prima facie* klingt das kontraintuitiv: spricht man beispielsweise in der Ethik über Abtreibung, so kann die eingenommene Position (z.B. eine sehr konservative) zu Dissensen innerhalb des Diskurses führen. Im Bereich der Mathematik ist dies landläufig nicht bekannt, eher gelten mathematische Aussagen als unhinterfragbar, weil bewiesen: „Ein Gebiet, auf dem es Gewißheit gibt, Genauigkeit und Verstehen [...] und mehr als das: ein Gebiet, in dem es möglich ist, alle Merkwürdigkeiten auf wenige evidente Grundwahrheiten zurückzuführen“ (Wagenschein, 2010, S. 148). Dennoch, beispielsweise der Dissens zwischen Empiristen und Rationalisten bestimmt Grundfragen wie *Was ist eine mathematische Definition* nachhaltig.

Empiristen gehen davon aus, dass die Welt über Sinneswahrnehmungen/ Erfahrungen/ Sinnesdaten erschließbar ist (z. B. Quine, Fraassen, Sober, Locke, Berkeley, Mill und Vertreter des Wiener Kreises wie Schlick, Carnap und Ayer). Die Mathematik als Wissenschaft wird in dieser Hinsicht von den Empiristen meist als problematisch aufgefasst. (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 248ff.)

Rationalisten (z. B. Platon, Descartes, Spinoza und Leibniz) meinen im Gegensatz dazu (vorsichtig formuliert), dass Erkenntnisse über die Welt teils auch über die Vernunft erschließbar sind. Hier fungiert die Mathematik als Paradebeispiel: revolutionär waren die Ansichten Immanuel Kants, der beispielsweise den Satz zur Innenwinkelsumme beim Dreieck als *synthetisches Urteil a priori* par excellence konstatiert. Die Entdeckung nicht-euklidischer Geometrien (beispielsweise sphärische Geometrie, projektive Geometrie) löste dieses Beispiel ab. *Synthetische Urteile a priori* wie auch Metaphysik, Kausalbeziehungen, Notwendigkeit (außerhalb von Sprache) und anderes werden konträr von den Empiristen abgelehnt. Eine wichtige Frage, bei der die Gegensätzlichkeit zweier weiterer Positionen zum Tragen kommt, ist die der *impredicative definitions.*[19] Solche Definitionen sind nach Meinung der Antirealisten (mathematische Entitäten existieren nicht) zirkulär und haben keinen Aussage- bzw. definitorischen Gehalt. (Shapiro, 2000, S. 9ff.) Als prominentes Beispiel kann man hier die Definition des Supremums aus der Analysis anführen:[20]

Definition 1. *Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $M_0 \in \mathbb{R}$ heißt* ***Supremum von A****, falls sie die kleinste obere Schranke von A ist, d.h.*

a) $a \leq M_0 \ \forall a \in A$ *(M_0 obere Schranke)*

b) für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $a \in A$, sodass $M_0 - \varepsilon < a$ (es existiert keine kleinere obere Schranke).

Ausgehend von der Position, dass mathematische Entitäten nicht unabhängig von der Mathematikerin existieren (Poincaré, Goldfarb, Chihara (Shapiro, 2000, S. 10)) ist eingehende Kritik angebracht (Shapiro, 2000, S. 10): „One cannot construct an object by using a collection that already contains it“. Definitionen wie die des Supremums sind also „viciously circular“, da hier für die Konstruktion der *kleinsten* oberen Schranke die Menge aller oberen Schranken, die bereits die kleinste obere Schranke beinhaltet, verwendet wird. Stellt man sich auf die Seite der Realisten (mathematische Entitäten existieren), so könnte man wie Gödel, vorausgesetzt, man benutzt wie er den Begriff Wahrheit im Sinne der Korrespondenztheorie (und nicht im Sinne der Kohärenztheorie[21] oder des Pragmatismus[22]), diese Definitionen als Kennzeichnungen von bereits Existierendem ansehen. Die Definition korrespondiert mit der unabhängig von der Mathematikerin existierenden mathematischen Entität (hier: dem Supremum) und stellt daher kein „Rezept“ zum Konstruieren des Supremums dar, sondern charakterisiert nur etwas sowieso schon Dagewesenes. *Impredicative definitions* sind für Realisten somit nicht zirkulär: „The least upper bound' is no more problematic than other 'impredicative' definitions, such as the use of 'the village idiot' to refer to the stupidest person in the village, or 'the town drunk' to refer to the worst alcohol abuser in town“ (Shapiro, 2000, S. 10).

Auch bei der Bearbeitung der Frage, was denn Zahlen seien, herrscht Uneinigkeit zwischen Vertreter*innen beider Positionen. Empiristen sehen Zahlen als „Resultat sukzessiv wiederkehrender *Eindrücke*“ (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 162) (Mill, Hume), als „mit den gezählten Dingen verbunden“ (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 162) (Nikolaus von Kues, wobei seine Position auch idealistische und rationalistische Gedanken beinhaltet) oder als „*Formkräfte in den Dingen*, die der Mensch in einer Art Abstraktion erkennt“ (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 161) (Aristoteles). Rationalisten, zu denen ich auch Logizisten (da nach Horsten (2016) Logik von ontologischen Fragestellungen unabhängig sein sollte) und Intuitionisten zähle, gründen den Zahlbegriff nicht in der Anschauung, sondern im menschlichen Verstand (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 162).

Da die Auffassungen zum Zahlbegriff so vielfältig sind, soll an dieser Stelle eine ausführliche Erläuterung und Ausarbeitung nicht stattfinden. Stattdessen soll ein

19 Eine Definition, die im Definiens eine Menge enthält, in welcher das Definiendum bereits enthalten ist, vgl. Shapiro, 2000, S. 9.

20 Nachzulesen in jedem Standardwerk der Analysis

21 Wie z.B. Rescher, Hegel.

22 Wie z.B. Peirce, Dewey.

kurzer, tabellarischer Überblick (alphabetisch sortiert) gegeben werden. Die Recherche zu diesem Überblick stützt sich auf die Ausarbeitungen in (Bedürftig & Murawski, 2015).

Name	**zugeordnete Strömung/ Grundposition**	**Zahlbegriff**
Aristoteles	Empirist	Zahlen sind Formkräfte in den Dingen. Sie werden im Denken in einer Art Abstraktion erkannt.
Luitzen Egbertus Jan **Brouwer**	Intuitionist, Konzeptualist	Natürliche Zahlen als inhaltslose Abstraktion des Zeitempfindens (Urintuition der apriorischen Zeit).
Georg **Cantor**	Platonist	Zahlen sind endliche Kardinalzahlen. Sie sind sowohl ideelle Realitäten als auch durch Abstraktion gewonnene, im Denken existente Projektionen von Mengen.
Gottlob **Frege**	Logizist, Antiempirist, Antikantianer, Antiformalist	Zahlen sind Anzahlen (Klassen gleichmächtiger Mengen). Zahlen sind Elemente der Logik (Zahlen als Begriffe, Begriffe als Elemente des reinen Denkens: unabhängig von Raum, Zeit, Menschen).
Richard **Dedekind**		Zahlen sind Abstraktionen von Stellen in unendlichen Zählreihen.
René **Descartes**	Rationalist	Zahlen und Längen sind Koordinaten in einem Koordinatensystem.
Euklid	beeinflusst durch Platon und Aristoteles	Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Vielfalt (Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird).
Carl Friedrich **Gauß**		Zahlen sind Abstraktionen von Verhältnissen von Größen.
David **Hilbert**	Formalist, Begründer des Formalismus (Hilbert'sches Programm)	Zahlen sind als Zeichen konkret und unmittelbar gegeben, Zahlen sind bedutungslose Zeichen
Edmund **Husserl**	Phänomenologe, M. als eidetische Wissenschaft	Zahlen sind Anzahlen. Anzahlen sind unterschiedliche Vielheiten abstrakter Einheiten.
Immanuel **Kant**	Idealist, Rationalist, erster Kantianer	Zahl ist das „reine Schema“ des Verstandesbegriffs der Quantität, Vorstellung der Zahl als Ergebnis sukzessiver Addition gleichartiger Dinge
Nikolaus **von Kues**	im Dreieck zwischen Idealismus, Rationalismus und Empirismus	Zahlen sind für den Menschen rationale Konstruktionen göttlich-geistiger Zahlen. In realen Dingen sind göttliche Zahlen verwirklicht, aus denen sie dann gewonnen werden.
Gottfried Wilhelm **Leibniz**	Rationalist, Leibniz'scher Rationalist	ähnlich wie bei N. von Kues: Zahlen als Göttliches: Während Gott rechnet und Gedanken ausführt, entsteht die Welt.
Paul **Lorenzen**	Konstruktivist, (Intuitionist), Gründer der Erlanger Schule (methodischer Konstruktivismus)	Zahlen sind fiktive Gegenstände, die durch Abstraktion von den Zählzeichen in unterschiedlichen Zählzeichensystemen entstehen.

Name	zugeordnete Strömung/ Grundposition	Zahlbegriff
John Stuart **Mill**	Empirist, Positivist	Zahlen haben ihren Ursprung in der Realität. Zahlen sind das Resultat einer Abstraktion von sukzessiv wiederkehrenden Empfindungen.
Platon	Platonist, Rationalist	Zahlen sind immaterielle Vermittler zwischen den Ideen und der materiellen Wirklichkeit. Zahlen bilden das Tor zur Welt der Ideen.

Tabelle 4.1: Einige Zahlbegriffsauffassungen berühmter Philosophen und Mathematiker

Zusammenfassend ist natürlich weder die Frage nach dem Wesen der Mathematik noch nach dem ontologischen Status mathematischer Entitäten in den untersuchten Schulklassen gestellt worden. Die theoretischen Vorbetrachtungen zur ersten Stunde erfolgten allerdings mit Blick darauf, dass bei der Frage, was denn Mathematik außerhalb des Rechnens noch sei, durchaus Antworten auf einer philosophischen Metaebene hätten angestoßen werden können. Daher erfolgte im Voraus die intensive theoretische Betrachtung zu den vorgestellten Fragen aus dem Bereich *Philosophie der Mathematik*.

4.3.2 Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung

Zum Beginn der ersten Stunde wird von der Lehrkraft zunächst im Sinne einer transparenten Unterrichtsführung den Kindern der Einsatz der Kameras deutlich gemacht. Es folgt die in Phase U1.A (Stundenverlaufsplanung auf S. 262 einsehbar) vorgelesene Geschichte (→ S. 266). Der Sitzkreis am Boden dient in der Grundschule vor allem der Gleichberechtigung der Kinder, zudem können sich alle Sprecher*innen beim Beantworten der Impulse gegenseitig ansehen. In der Gesamtschule wird auf Anraten der Lehrkraft auf den Sitzkreis verzichtet, da die Kinder zu alt seien. Die Geschichte soll zunächst die in den folgenden Unterrichtsstunden relevanten Protagonisten Robert und den Zahlenteufel etablieren. Auf Impulse wird in Phase U1.A allerdings verzichtet, um einen niedrigschwelligen Einstieg in die Traumwelt Roberts zu ermöglichen. In Phase U1.D werden diese eingebracht.

Anschließend an die erste Sammlung von Gedankengängen werden in Gruppen Bilder zur Frage erstellt, was denn Mathematik außer Rechnen sei (Phase U1. B). Auch hier sollen philosophische Denkprozesse angeregt werden:

> Vor allem ist bildliches Denken *als kreativer Prozess oder Heuristik philosophischer Ideen* zu praktizieren, und dies entweder (a) als ein Denken in sprachlichen Bildern bzw. als Deuten und Erfinden von Metaphern oder Gleichnissen oder (b) als ein Denken in visuellen Bildern bzw. als ein Deuten und Erfinden (Herstellen) von Kunstwerken oder Zeichnungen: [...] Ferner kann das bildliche Denken nicht nur Auftakt und Begleitimpuls, sondern auch Abschluss eines philosophischen Denkprozesses sein. (Martens, 2003, S. 137f.)

Auf Phase U1.C wurde in der Grundschule verzichtet, bzw. sollte diese in der Stunde U2 als Wiederholung stattfinden.

In der zweiten in U1 verwendeten Geschichte (Phase U1.D) werden nun gezielt Gesprächsimpulse in den Verlauf der Geschichte eingebunden. Ziel ist es, die Kinder mit Hilfe der Impulse an das Philosophieren heranzuführen. Hierfür werden niedrigschwellige Impulse gewählt (im Text kursiv gesetzt, → S. 267), damit sich im Sinne einer *Rampe* (Ruf & Gallin, 2014) zunächst alle Kinder gedanklich und auch verbal am philosophischen Gespräch beteiligen können. So kann ein Raum des Erforschens, Hinterfragens und der Exploration geschaffen werden (Mcguinness, 2005).

Erste Berührungspunkte mit dem Thema Unendlichkeit werden in der Geschichte zum einen über die potentiell unendliche Addition der Eins zur Realisation größerer Zahlen/ eines unendlichen Zählprozesses geschaffen (Induktionsprinzip, Nachfolgerfunktion → S. 40), zum anderen über die Frage, wie viele Kaugummis bereits auf der Welt gekaut wurden. Beide Fragen sind so, wie auch der Rest des Textes für die Stunde U1, entnommen aus Enzensberger & Berner (2011). Den Kindern wird die Vorgehensweise des Zahlenteufels als Rezept präsentiert, was anschließend in Phase U1.E mit anderen Inhalten (als Kaugummis) reproduziert werden soll. Diese Phase gilt aus Perspektive der Datenerhebung auch zur Sicherung des Verständnisses zum Thema Unendlichkeit, da aus den Dokumenten herausgelesen werden kann, ob die Argumentation des Zahlenteufels aus der Geschichte von den Kindern verstanden wurde und somit auch reproduziert werden kann. Entgegen der auf S. 262 aufgeführten Planung wurde die Phase U1.E an beiden Schulen in Einzelarbeit durchgeführt. Als Ergebnissicherung werden in Phase U1.G die Rezepte vorgestellt. Dies geschah in beiden praktischen Durchführungen nicht wie im Plan vorgesehen an der Tafel, sondern verbal im Plenum.

Zur Genese dichten Materials soll im zeitlichen „Puffer“ noch gemeinsam mit den Kindern reflektiert werden, welchen Eindruck die Inhalte und Durchführung der Stunde hinterlassen haben.

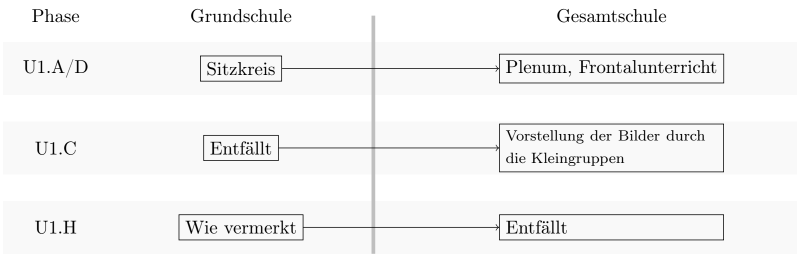


Abbildung 4.2: Entwicklungsprozess des Designs für Unterrichtsstunde U1

Zum besseren Einblick in das Datenmaterial wird in Tabelle 4.2 aufgeführt, welches Datenmaterial bzw. Transkript zu welcher Phase der Stundenverlaufsplanung an welcher Schule zuzuordnen ist und auf welchen Seiten des Transkriptionsbuches das jeweilige Transkript aufzufinden ist. Das Kürzel GR steht dabei für Grundschule, das Kürzel GS für Gesamtschule.

Phase	Name des Transkripts
U1.A GR	22.04.2021 - Kamera 1 - Sitzkreis: Geschichte mit Impulsen
U1.A GS	nicht transkribiert, da keine Impulse
U1.B GR	22.04.2021 - Kamera 1 - Sitzkreis: Geschichte mit Impulsen (Gruppenarbeit Nadja, Nazan, Nadine) 22.04.2021 - Gruppenarbeit Ben, Tristan, Elijah, Berat
U1.B GS	01.06.2022: Gruppenarbeit Beatrice, Feline, Gina, Nina
U1.C GS	01.06.2022: Vorstellung der Bilder
U1.D GR	22.04.2021 - Kamera 1 - Sitzkreis: Geschichte mit Impulsen (nach der Gruppenarbeit)
U1.D GS	01.06.2022: Plenum mit Gesprächsimpulsen

Tabelle 4.2: Stunde U1: Zuordnung der Transkripte zu den Phasen der Verlaufsplanung

4.3.3 Kurzvorstellung einiger interessanter Dokumente aus den Unterrichtsphasen

Im Folgenden sollen kurz die prägnantesten Ergebnisse aus der Phase U1.B bzw. U1. C zusammengefasst werden. Manche der Kinder, insbesondere in der Grundschule, brachten ihre Lebenswelt mit in die Bilder ein und versuchten, über die Repräsentation von Zahlen innerhalb ihrer Lebenswelt darzustellen, was für sie Mathematik außerhalb des Rechnens ist. So brachten beispielsweise Ben, Tristan, Elijah und Berat das Thema Fußball in ihr Bild, da sowohl Strategien (Kombinationen über Zahlen ausgedrückt) als auch die Zahlen auf dem Rücken der Spieler[23] ohne Rechnungen für die Kinder Mathematik verkörpern (vgl. Abb. 4.3).

23 An dieser Stelle wurde absichtlich keine gendersensible Schreibweise benutzt.

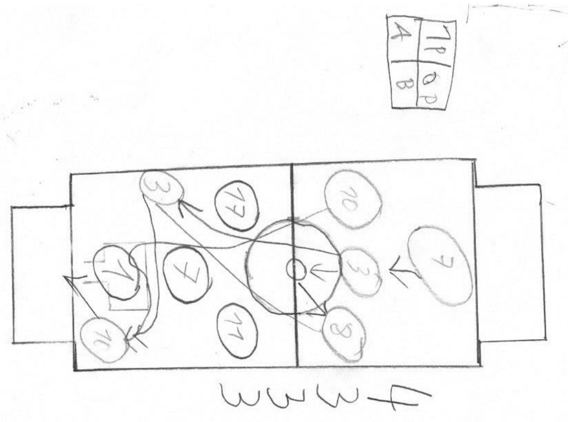


Abbildung 4.3: Fußballfeld mit Zahlen: Auszug aus dem in Phase U1.B bei der Gruppenarbeit von Berat, Tristan, Ben und Elijah entstandenen Bild

Ein weiteres Beispiel aus der Lebenswelt stammt von Kilian (vgl. Abb. 4.4), der einen Schwimmer gezeichnet hat. Im Unterrichtsgespräch begründet er seine Wahl mit der Größe *Längen*, insbesondere den Metern, die man beim Schwimmen zurücklegt (siehe Transkript: 26.04.2021 - Sitzkreis und Einführung, Turn 397). Kilian vereint hier lebensweltliche Aspekte mit der inhaltlichen Leitidee *Größen und Messen* (Kultusministerkonferenz, 2004).

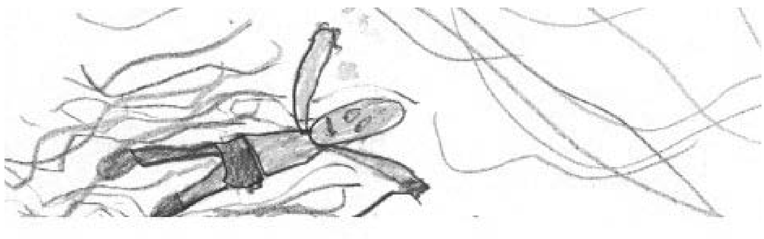


Abbildung 4.4: Schwimmer: Auszug aus dem in Phase U1.B bei der Gruppenarbeit von Kilian gezeichnetem Bild

Wieder andere Kinder versuchten, Mathematik außerhalb des Rechnens innermathematisch zu umreißen und bedienten sich den Leitideen *Größen und Messen* sowie *Raum und Form* (Kultusministerkonferenz, 2004). Gerade bei der Leitidee *Größen und Messen* kamen natürlich auch lebensweltliche Aspekte mit zum Tragen, daher ist die hier scheinbar etablierte Kategorisierung (z.B. zu Kilians Bild) nicht trennscharf zu lesen. Nadja, Nazan und Nadine bilden sogar die für die Grundschule relevanten Größen komplett ab, benennen bis auf die Hohlmaße (hier führen sie Liter als Standardeinheit an) alle Größen korrekt und fügen sogar die Temperatur als Größe hinzu („Wärme“, vgl. Abb. 4.5).

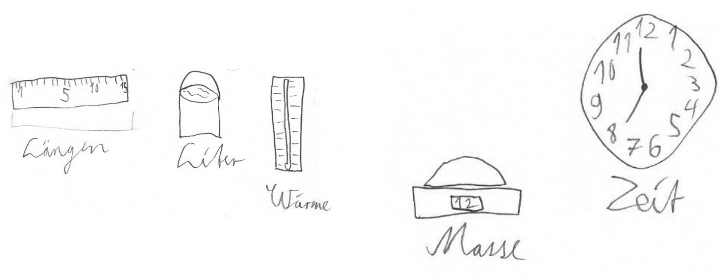


Abbildung 4.5: Beispiele aus dem Bereich *Größen und Messen*: Auszug aus dem in Phase U1.B bei der Gruppenarbeit von Nadja, Nazan und Nadine entstandenen Bild

Quentin, Karl und Günther sehen Mathematik ohne Rechnen zumindest teilweise als Geometrie an, wie es Abb. 4.6 zeigt.

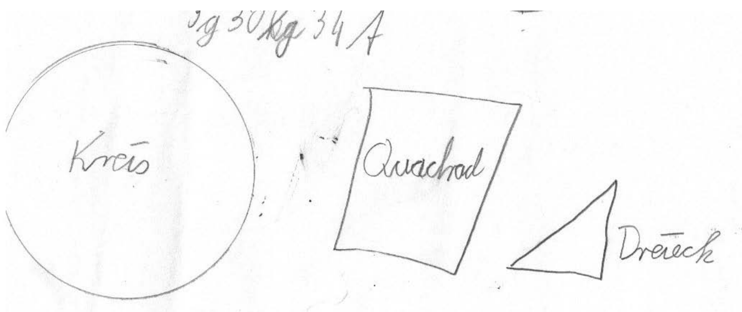


Abbildung 4.6: Geometrische Figuren der Ebene: Auszug aus dem in Phase U1.B bei der Gruppenarbeit von Quentin, Karl und Günther entstandenen Bild

4.4 U2: Robert und der Zahlenteufel treffen Cantor und Leibniz

> „Ja, Robert, klar kann man in Mathe streiten“ sagte er vergnügt. „Wüsstest du auf Anhieb, wem von den beiden du zustimmen sollst?“
>
> Der Zahlenteufel (vgl. S. 268 dieser Arbeit)

Im folgenden Kapitel werden zunächst Ausschnitte von Georg Cantors Mengentheorie konträr zu Aussagen von Gottfried Wilhelm Leibniz präsentiert und diskutiert (Unterkapitel 4.4.1). Anschließend wird erläutert, wie diese Aussagen bzw. der bestehende Sachverhalt didaktisch reduziert wurden. Des Weiteren werden didaktische Schritte begründet und reflektiert sowie eine Übersicht gegeben, welche Änderungen für den zweiten Erhebungszyklus implementiert wurden (Unterkapitel 4.4.2).

4.4.1 Fachliche Hintergründe: Cantors unendliche Mengen und Leibniz' Einwand

Die Frage, ob man alle Zahlen, die es gibt, durch Mengenklammern begrenzen kann (bzw. in einen Beutel packen kann), referiert auf die von Georg Cantor (1845–1918) entwickelte *transfinite Mengenlehre*, heute auch *naive* Mengenlehre genannt (Cantors Paradies, → S. 35). Vor Cantor war das aktual Unendliche in den Grundlagen der Mathematik nicht systematisch verankert bzw. im mathematischen Kontext abgelehnt (bspw. bei Aristoteles, → S. 28) und stattdessen im religiösen Kontext aufgegriffen.[24]

In seinen *Neuen Abhandlungen* lässt so beispielsweise Gottfried Wilhelm Leibniz zwei Personen Streitgespräche miteinander führen: Philalethes, der die fiktive Position John Lockes einnimmt und Theophilus, welcher Leibniz' Positionen wiedergibt (Look, 2020). An Theophilus' Position lässt sich der religiöse Kontext gut erkennen:

> *Philalethes.* Wir haben nicht die Vorstellung eines unendlichen Raumes, und nichts ist klarer, als der Widersinn einer wirklichen Vorstellung einer unendlichen Zahl.
> *Theophilus.* Ich bin derselben Ansicht. Aber das ist nicht der Fall, weil man nicht die Vorstellung des Unendlichen haben kann, sondern weil ein Unendliches nicht ein wahres Ganze sein kann.
> *Philalethes.* Aus dem nämlichen Grunde haben wir also keine positive

24 „Es ist ein gewagter, großer Schritt, den offenen Zählprozess abgeschlossen zu denken. Aristoteles hatte diesen Schritt für unmöglich erklärt und quasi verboten. Cantor war der erste, der den Schritt explizit und konkret tat. Seine Suche nach wirklichen Vorgängern kann man als fast gescheitert betrachten. [...] Leibniz hat zu Ehren des Schöpfers aktual unendliche Mengen einmal gepriesen - abstrakt und schlicht aus Gründen eines universellen Rationalismus. Zumeist hat er sie aber verdammt.“ (Bedürftig & Murawski, 2015, S. 171).

> Vorstellung einer unendlichen Dauer oder der Ewigkeit, ebensowenig wie der Unermeßlichkeit.
> *Theophilus.* Ich glaube, daß wir die positive Vorstellung der einen und der anderen haben, und daß diese Vorstellung wahr ist, falls man sie nicht als ein unendliches Ganze versteht, sondern als ein absolutes oder schrankenloses Attribut, welches sich hinsichtlich der *Ewigkeit* in der Notwendigkeit des Daseins Gottes findet. (Leibniz, 1904, *Neue Abhandlungen*, Buch II, Kap. 17, §8f, S.133)

Am obigen Zitat sind zwei wichtige Erkenntnisse abzuleiten: Erstens lehnt Leibniz die Vorstellung einer mathematischen, aktualen Unendlichkeit ab und zweitens manifestiert sich aktuale Unendlichkeit für ihn lediglich im Göttlichen. Im Rahmen der von Cantor entwickelten *naiven/transfiniten* Mengenlehre manifestiert sich das aktual Unendliche allerdings auch in den Kardinalitäten unendlich großer Mengen, beispielsweise in der Kardinalität der natürlichen Zahlen ($\aleph_0, \rightarrow$ S. 35). Die Auffassung der natürlichen Zahlen als Menge wie auch das Konstatieren der Existenz unendlicher Mengen bedeutet das Abschließen unendlicher Prozesse. Durch das Schließen der Menge mit einer geschweiften Klammer rechts ist „die unendliche Folge eine unendliche Menge, ein »Ganzes« , das »für sich existiert« “ (Bedürftig, 2018, S. 135). Den Begriff der Menge definiert Cantor wie folgt:

> Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen (Cantor, 1895, S. 481)

Dabei werden von Cantor zwei Stufen beschrieben: Objekte der *Anschauung* oder Objekte *unsres Denkens*, also einerseits *a posteriori* erfahrbare, wohlunterschiedene Gegenstände wie beispielsweise ein Stift, eine Schere und ein Lineal als Zusammenfassung von Werkzeugen innerhalb eines Federmäppchens eines Grundschulkindes. Die Objekte *unsres Denkens* können Zahlen, aber auch andere *a priori* erfahrbare Gegenstände des Verstandes sein[25].

Eine weitere Zweiteilung wird durch die Unterscheidung in distinkte Gegenstände (erste Stufe) und deren Zusammenfassung zu einer Menge (zweite Stufe) postuliert (Kreis, 2015, S. 363f.).

Nach diesem Mengenbegriff ist also eine *unendliche* Menge eine Zusammenfassung unendlich vieler wohlunterschiedener Objekte der Anschauung oder des Denkens. Betrachtet man die Leibniz'sche Position, so ist es fraglich, ob eine *Zusammenfassung* unendlich vieler Objekte nicht eine Begrenzung der Objekte immanent mitdenken lässt. Diese Begrenzung steht kontradiktorisch zur unendlichen Anzahl der Objekte, besonders wenn man die von Cantor eröffnete Beschaffenheit der Objekte in Betracht zieht. Dass eine absolut unendlich große Menge von Objekten des Denkens (also für die Mathematik) wie bspw. die *Allmenge* existiert,

25 Dass Zahlen *a priori* erfahrbar sind, ist nicht bei jeder Positionierung zur Ontologie mathematischer Entitäten eine selbstverständliche These, die man Cantor aber durchaus zuschreiben kann: „Da aus jedem einzelnen Element m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine Eins wird, so ist die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellektuelles Abbild oder Projektion der gegebenen Menge M in unserem Geiste Existenz hat“ (Cantor, 1895, S. 482).

bestreitet Cantor. „*[A]ußerhalb* der Mathematik [erkennt er diese an], und zwar als ein Absolut-Unendliches oder Absolutes, dessen angemessene Thematisierung - falls sie überhaupt möglich sein sollte - bestenfalls Aufgabe der Philosophie und der Theologie sein kann“(Kreis, 2015, S. 393). Die Objekte der Anschauung lassen sich demzufolge laut Cantor durchaus zu einer absolut unendlich großen Menge zusammenfassen, die Objekte der Mathematik nicht. So umgeht er die Paradoxien, die sich durch die Totalität einer absolut unendlich großen Menge ergeben (siehe auch: Paradoxien der Unendlichkeit, Kap. 4.6.1 auf S. 92).

4.4.2 Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung

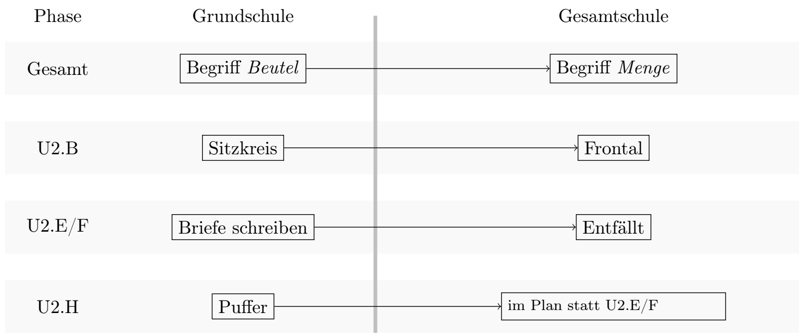


Abbildung 4.7: Entwicklungsprozess des Designs für Unterrichtsstunde U2

Die didaktische Reduktion des in Kapitel 4.4.1 beschriebenen Problems erfolgte für die Grundschule mit Hilfe einer Metapher: Die Zusammenfassung (wohlunterschiedener) Objekte wurde für die Grundschule als Beutel/Sack metaphorisiert, in welchen die natürlichen Zahlen ‚gepackt' werden sollten. Auf diese Weise sollten die Kinder einen lebensweltlichen Bezug zum Begriff der Menge aufbauen. Bei Lakoff & Núñez (2000, S. 141f.) können *sets as containers* der Metapher *sets are objects* zugeordnet werden, was zwar die Schwierigkeit mit sich bringt, dass sich Mengen nach dieser Metapher nicht selbst enthalten können, andererseits aber wohl gängige Praxis in der modernen Mengenlehre ist:

> Modern set theory begins with these basic elements of our grounding metaphor for classes and with Boole's metaphor. That is, it starts with the notion of a class as a containerlike entity; [...]As subsets, intuitive sets are Container schemas, mental containers organizing objects into groups. (Lakoff & Núñez, 2000, S. 140)

Auch Tall (2001, S. 8f.) benutzt im Gespräch mit seinem Sohn die Metapher „bag“, um eine Menge zu verdeutlichen.

Weiterhin wurde die Vorstellung von gezielten Zusammenfassungen von Zahlen über Gesprächsimpulse in der Geschichte angeregt (siehe S. 268). Nach Analyse des ersten Zyklus stellte sich jedoch heraus, dass die Reduktion auf eine *räumlich begrenzte* Metapher die Kinder auch zum räumlichen Denken anregte und dass die

Übungen zum Verständnis, in welchen Zahlenkärtchen eingesetzt wurden, auch eine Vorstellung räumlich ausgedehnter Zahlen anregten. Somit waren die Diskussionen durch die Metapher(n) von vornherein im Abstraktionsgrad begrenzt und führten nicht zur gewünschten Auseinandersetzung mit der Begrenzung natürlicher Zahlen durch Mengenklammern. Des Weiteren könnten die rein auf endliche Aufgaben beschränkten Beispiele bei den Kindern auch eine endliche Vorstellung des Mengen- bzw. Beutelbegriffs angeregt haben. Sinnstiftende Interaktionsprozesse und philosophische Gespräche konnten jedoch herausgearbeitet werden (siehe Kap. 6.1 und 6.2). Allerdings sollte im zweiten Zyklus an der Gesamtschule, auch dank des Alters der unterrichteten Kinder, der Abstraktionsgrad bzw. die Stufe des Begriffsverständnisses für den Unterricht angehoben werden, weshalb der Begriff der Menge hier *explizit* und nicht qua Metapher eingeführt wurde. Diese Änderung wurde global für die gesamte Unterrichtsstunde übernommen, ebenso erfolgte eine Anpassung der Geschichte mit Gesprächsimpulsen (vgl. auch Abbildung 4.7).

Um die Metaperspektive zum in Kapitel 4.4.1 beschriebenen Sachverhalt einnehmen zu können, bedarf es hermeneutischer Kompetenzen, um beide Positionierungen adäquat fassen zu können. Trotz der didaktischen Reduktion vorab müssen sich die Schüler*innen mit den Aussagen beider Mathematiker differenziert auseinandersetzen, um in eine dialektische Arbeitsweise übergehen zu können. Des Weiteren müssen die Kinder die phänomenologische Methode (Martens, 2003, siehe auch Kap. 3.3.1 auf S. 63) anwenden, um „von subjektive[n] Vorstellungen zu abstrahieren und zu einem vorurteilsfreien Blick[...] auf eine Sache zu gelangen“ (Montag, 2017, S. 202). Diese Methode sollen die Kinder im Rahmen der Gruppenarbeiten umsetzen, weshalb sie sich in den Gruppen auch mit beiden Positionierungen und nicht mit der für sie *ad hoc* richtigen Meinung auseinandersetzen sollen (Phase U2.C). Mathematikdidaktisch wird durch die Gruppenarbeit die Argumentations- und Kommunikationskompetenz gefördert, da die Kinder vermehrt mathematische Argumentationen hinzuziehen müssen, um das Argument des favorisierten Mathematikers zu bestätigen.

Anschießend an die Gruppenarbeit sollen die Kinder im Rahmen einer Pro-Contra-Debatte (Phase U2.D) dialektisch arbeiten (zuvor war das auch schon nötig, aber die hermeneutisch-phänomenologische Arbeitsweise stand mehr im Fokus). Eine Pro-Contra-Debatte ist eine Methode aus dem Philosophie-, Ethik- sowie Politikunterricht, „die hochformalisiert nach genauen Regeln abläuft“ (Montag, 2017, S. 198). Auch in der vorliegenden Unterrichtsstunde gab es Regeln, nach denen die Debatte geführt werden sollte:

- Ich melde mich, bevor ich rede.
- Ich höre anderen zu und nehme ihre Meinung ernst.
- Ich begründe meine Meinung.
- Ich lasse die anderen ausreden.
- Ich stelle mich zu der Gruppe, deren Meinung ich vertrete.

Es wurde bewusst auf die sonst bei Pro-Contra-Debatten üblichen Eröffnungsplädoyers verzichtet, da innerhalb einer Gruppe auch verschiedene Positionierungen vorkamen und die Kinder nach der gruppenunabhängigen Bestimmung ihres

Phase	Name des Transkripts
U2.B GR	26.04.2021: Sitzkreis und Einführung 03.05.2021: Sitzkreis und Plenum
U2.C GR	26.04.2021: Gruppenarbeit Nadja, Nadine, Berat, Kilian 03.05.2021: Gruppenarbeit Ben, Bernhard, Elijah, Martin
U2.D GR	26.04.2021: Pro-Contra-Debatte 03.05.2021: Pro-Contra-Debatte
U2.D GS	21.06.2022: Pro-Contra-Debatte

Tabelle 4.3: Stunde U2: Zuordnung der Transkripte zu den Phasen der Verlaufsplanung

Standortes erneut Zeit gebraucht hätten, um einen Vortragenden zu bestimmen und die besten Argumente zu sortieren. Dies wäre im Rahmen einer Unterrichtsstunde (90 Minuten) zeitlich nicht möglich gewesen. So konnten außerdem mehr Kinder an den Debatten partizipieren.

Um Einblicke in das philosophische Interesse der Kinder an mathematischen Inhalten gewinnen zu können, wurde in Phase U2.E/F ein Brief an den Zahlenteufel in Auftrag gegeben. Hier sollte das Gedankenexperiment ‚Abenteuer mit dem Zahlenteufel' von den Kindern fortgeführt werden. „Spekulatives Denken oder kreative Einfälle haben können gehört wesentlich zum Philosophieren hinzu" (Martens, 2003, S. 133), wobei die Schüler*innen hierbei eine gewisse Unabhängigkeit, Experimentierfreudigkeit und Produktivität an den Tag legen müssen, um wirklich kreativ denken zu können (Lipman, 2003, S. 245f.).

In der Grundschule konnte die Phase U2.E bzw. U2.F am 26.04. 2021 nicht im Präsenzunterricht durchgeführt werden, da die Pro-Contra-Debatte mehr Zeit als geplant in Anspruch nahm. Die Briefe wurden als Hausaufgabe erteilt und nicht von allen Schüler*innen realisiert. Bei manchen von den zu Hause erstellten Dokumenten ließ sich ein deutlicher Einfluss der Eltern bei der Bearbeitung ableiten, somit war die im obigen Zitat erwähnte Unabhängigkeit beim kreativen Denken nicht unmittelbar gegeben. Die so entstandenen Briefe sind für die Erhebung des philosophischen Interesses der *Kinder* im Datenkorpus also zu vernachlässigen. In der Gesamtschule wurde auf Phase U2.E/F gänzlich verzichtet (vgl. Abb. 4.7), da die Stunden an dieser Schule regulär nur 80 Minuten lang sind und der Fokus auf die Pro-Contra-Debatte gelegt werden sollte.

Die in den einzelnen Phasen entstandenen Transkripte lassen sich im Transkriptionsbuch nachverfolgen. In den folgenden Kapiteln soll sich nur auf Ausschnitte bezogen werden, die vollständigen Transkripte und ihre Zuordnung zu den Phasen können anhand von Tabelle 4.3 nachvollzogen werden.

4.5 U3: Robert und der Zahlenteufel zu Gast in Hilberts Hotel

4.5.1 Fachliche Hintergründe: Hilberts Hotel

Das Gedankenexperiment eines unendlich großen Hotels mit unendlich vielen Gästen brachte David Hilbert erstmals im Rahmen seiner Vorlesung ‚Über das Unendliche' im Wintersemester 1924/1925 in Göttingen an:

> Wie verhält es sich nun mit den unendlichen Mengen? Nehmen wir als einfachstes Beispiel die Menge der ganzen Zahlen. Hier gilt nun schon der Satz: „Der Teil ist kleiner als das Ganze“ nicht mehr. Diese wichtige Tatsache können wir leicht an unserem Beispiel von dem besetzten Hotel deutlich machen. Wir nehmen jetzt an, dass das Hotel unendlich viele numerierte Zimmer 1, 2, 3, 4, 5 . . . haben soll, in denen je ein Gast wohnt. Sobald nun ein neuer Gast hinzukommt, braucht der Wirt nur zu veranlassen, dass jeder der alten Gäste das Zimmer mit der um 1 höheren Nummer bezieht, und es wird für den Neuangekommenen das Zimmer 1 frei. (Hilbert, 2009, S. 730)

Er möchte im Gedankenexperiment verdeutlichen, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}+1$ gleichmächtig sind, dass also die Addition oder Subtraktion einer (in diesem Fall natürlichen) Zahl von einer abzählbaren unendlichen Menge deren Kardinalität nicht verändert. Es gilt $\mathbb{N} \subset \{\mathbb{N}+1\}$ sowie $|\mathbb{N}| = |\{\mathbb{N}+1\}|$, daher ist wie im Zitat beschrieben bei transfiniten Mengen die Regel „der Teil ist kleiner als das Ganze“ aufgehoben.

Weiterhin kann man an Hilberts Hotel gut aufzeigen, dass eine bijektive Abbildung zwischen den beiden oben beschrieben Mengen möglich ist. Des Weiteren wird am Gedankenexperiment deutlich, dass in der Regel $\infty + \infty = \infty$ gelten muss. Ausnahmen dieser Regel werden durch Cantors Diagonalargument spezifiziert (bzw. die Existenz solcher Ausnahmen wird durch Cantor bewiesen).

Auf die Erläuterung weiterer Ausdifferenzierungen und „Spielarten“ von Hilberts Hotel wird an dieser Stelle verzichtet, da für das Unterrichtsdesign lediglich der erste, oben beschriebene Fall relevant ist.

4.5.2 Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung

Phase	Name des Transkripts
U3.A GR	13.07.2021: Sitzkreis mit Impulsen
U3.C GR	13.07.2021: Gruppenarbeit Nadja, Rosa, Fatma, Nazan

Tabelle 4.4: Stunde U3: Zuordnung der Transkripte zu den Phasen der Verlaufsplanung

Das Gedankenexperiment ‚Hilberts Hotel‘ wurde für die Unterrichtsstunde kaum didaktisch reduziert. Zentral für die Stunde war die Frage nach der Unterbringung des neuen Gastes im Hotel mit unendlich vielen Zimmern, welches durch unendlich viele Gäste ausgebucht ist. Wie auch in den anderen Unterrichtsstunden wurde diese Frage mit Hilfe einer Geschichte von Robert und dem Zahlenteufel gerahmt (vgl. S. 271 im Anhang). Es wurden, bis auf den Verzicht auf den Sitzkreis und die Illustrationskarten, keine Anpassungen von Grund- zu Gesamtschule vorgenommen. Die an die Geschichte anschließende Einzelarbeit (Phase U3.B) wurde auf Arbeitsblättern vollzogen, die anschließend eingesammelt wurden (vgl. Kap. 4.5.3 auf S. 88 für Ergebnisse dieser Phase). Zwei videographierte Abschnitte wurden transkribiert und sind im Transkriptionsbuch hinterlegt (vgl. Tab. 4.4 für Namen der Transkripte).

Für die Gruppenarbeiten sollten die Kinder zunächst administrative Rollen festlegen: Schriftführer*in, Präsentator*in, Moderator*in, Aufgabenmanager*in. Diese Rollenvertilung kann rückwirkend weder als bestärkend noch hinderlich im gemeinsamen Prozess der Kinder beurteilt werden, sodass in zukünftigen explorativen Versuchen darauf verzichtet werden könnte, um die in den ko-konstruktiven Bearbeitungsprozessen emergierende Rollenverteilung der Kinder näher untersuchen zu können.

Das Gedankenexperiment wurde einerseits deshalb gewählt, da es eines der, wenn nicht sogar *das* prominenteste zur Unendlichkeit ist. Andererseits ist die Beschäftigung mit Gedankenexperimenten auch als Anregung für die Kinder anzusehen, die *spekulative Methode* (Martens, 2003, siehe auch S. 63 dieser Arbeit) anzuwenden. Des Weiteren dienen Gedankenexperimente oft zur „Aufkündigung des Realitätsprinzips“ (Engels, 2017, S. 190), was einen Weg ins abstrakte Denken ebnen kann, der besonders beim Thema Unendlichkeit und dem mangelnden Lebenswelt- und Realitätsbezugs des Inhalts von Vorteil sein kann. Meist fungiert ein Gedankenexperiment als „*Ersatz für ein Realexperiment*“ (Engels, 2017, S. 190, Herv. i.O.), daher kann es bei einer theoretisch-abstrakten Betrachtung der Bijektion zwischen zwei unendlich großen Mengen, die nicht als Realexperiment durchführbar ist, den Kindern mehr Anschaulichkeit bieten als ein reines Operieren innerhalb der Mathematik. Mehr Anschaulichkeit wurde zudem in der Stunde durch Videos realisiert. Zum einen gab es auf dem Fernseher (in der Gesamtschule auf dem Beamer) ein Video, welches durchgängig ab Phase U3.B abgespielt wurde. In diesem sieht man die Zimmer des Hotels, auf denen „Besetzt“ steht. Die Kamera wandert von Zimmer zu Zimmer und hört nie während der Stunde auf, besetzte Zimmer zu zeigen (vgl. Abb. 4.8).

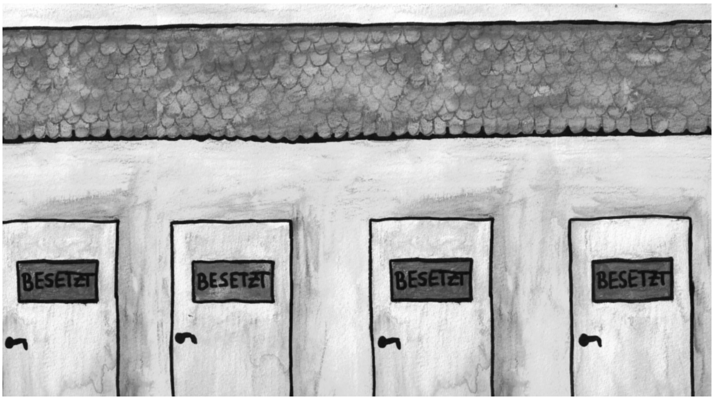


Abbildung 4.8: Standbild aus dem Video zu den besetzten Zimmern aus den Unterrichtsphasen U3.Bf

Als Auflösung des Gedankenexperiments wurde den Kindern ebenfalls ein Video (via Fernseher/Beamer) präsentiert. Hier erläutert David Hilbert den Kindern, dass der erste Gast nur in Zimmer zwei rücken müsste, dann der zweite Gast in Zimmer drei und immer so weiter, damit das erste Zimmer frei werden kann. Für einen Einblick in Standbilder dieses Videos siehe Abb. 4.9.

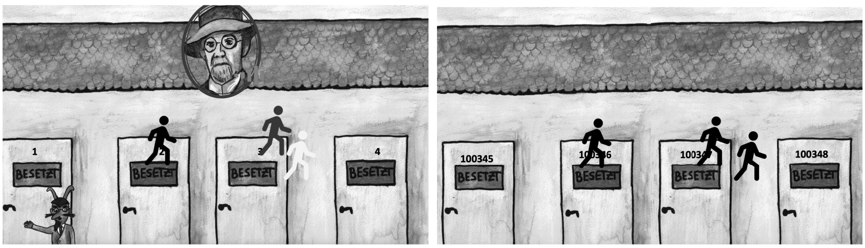


Abbildung 4.9: Standbilder aus dem Auflösungsvideo der Unterrichtsphase U3.F

Rückwirkend kann reflektiert werden, dass die Auflösung sowohl in der Grund- als auch in der Gesamtschule durchaus ein Gespräch mit den Schüler*innen wert gewesen wäre. Eine Beschäftigung mit der Lösung und vor allem damit, dass sie eine Lösung darstellt, wäre auch für die Datenakquise interessant gewesen und hätte sicherlich zu einer Vertiefung des Verständnisses der Kinder des Konzepts Unendlichkeit beigetragen. Die Einzel- und Gruppenarbeitsphasen hätten zusammengelegt werden können, um für eine solche Betrachtung Zeit zu gewinnen und den Kindern mehr Räume für ko-konstruktive Problemlöseprozesse einzuräumen.

4.5.3 Entstandene Dokumente aus Phase U3.B

Die Schriftstücke der Kinder aus der Phase U3.B (Einzelarbeit) wurden im Folgenden verschriftlicht und nach ihren Inhalten sortiert. Viele der von den Kindern erdachten Unterbringungsmöglichkeiten ähneln den von Mamolo & Zazkis

(2008) beschriebenen Antworten der Studierenden (Master Lehramt Mathematik, freie Künste). Daher wird bei den Kategorisierungen der Schüler*innen-Antworten auch zum Teil auf Antworten dieser Studie eingegangen. Insgesamt sind eher pragmatisch-praktische Versuche zu verzeichnen, so in etwa wie auch bei der Hälfte der Proband*innen von Mamolo & Zazkis (2008, S. 173): „Nearly half of the participants in both G1 and G2 initially provided responses that reflected practical experience, but which avoided resolving the mathematics“.

4.5.3.1 Der Zahlenteufel bekommt kein Zimmer, sondern einen anderen Platz im Hotel

„Such responses included recommending the new guest sleep in the lobby [. . .]“(Mamolo & Zazkis, 2008, S. 173)

Im Folgenden werden die Ausführungen der Kinder (in Reinschrift, aber nicht orthografisch korrigiert) tabellarisch aufgeführt.

Kl.	Name	Antwort
3	Ole	Vielleicht auf den Dachboden, auf den Dach, im Flurr vom Hotel, an einer Tür anklopfen und fragen ob mann platz hat, in den Keller, in den Waschraum, ins esszimmer
3	Nadine	Vielleicht könnte David ein Zimmer im Dachboden einrichten. Vielleicht ist in den anderen Zimmern nichts weil David ihn nicht ins Hotel lassen will
3	Berat	Man kann in den Flur des Hotels schlafen. Man kann unter das Dach schlafen. Jeder fragen ob er sie raus kommt. Ich sage einfach „Komm raus!“. Vielleicht lügt er. Auf das Dach schlafen. Klopfen bis er raus kommt.
5	Maxi	Wenn der Zahlenteufel einen Freund vielleicht im Hotel hat, kann er sich mit dem ein Zimmer teilen. Er könnte auf dem Dachboden schlafen
5	Nathaniel	Können auf den Dach schlafen können auf den Fußboden schlafen. Können in ein Zimmer gehen, wo mehrere Betten sind. Können im Keller schlafen.
5	Tanja	Er könnte gucken ob es noch ein Klappbett gibt und das hinstellen wo es ruig ist, oder im Keller; Im Dachboden könnte er auch über Machten. Es fährt vileich noch ein anderer an dem Tag

Tabelle 4.5: Ideen der Kinder, bei denen der Zahlenteufel einen anderen Platz im Hotel bekommt

4.5.3.2 Ein oder mehrere Gäste werden des Hotels verwiesen, der Zahlenteufel rückt auf

Kl.	Name	Antwort
3	Rosa	Alle rausschmeißen, der Andere lückt, oder es ist nicht mehr sein hotel, er mag in net mehr, mehr ranbauen, platz machen, es sind nur unendlich besucher oder vielleicht zweiunendlich zimmer, er weiß nicht mehr wiefiele zimmer, man kann sie nicht zählen, er sagt es einfach so, der schef hat meistens mehrere zimmer er kann ihn doch ein zimmer geben. Der schef möchte nur geld und schmeist ein raus das der zahlenteufel ein platz hat und geld beckomt
5	Georg	Man nimt ein Menschen aus ein Zimmer steckt ihn in ein anderes und Zahli und Schüler teilen sich ein Zimmer
5	Franziskus	Der Zahlenteufel könnte sich ein Zimmer raussuchen und klopfen wenn ein Gast heraus kommt, könnte er ihn mir einem Messer bedrohen

Tabelle 4.6: Ideen der Kinder, bei denen ein bzw. mehrere Gäste des Hotels verwiesen werden

4.5.3.3 Gäste rücken zusammen, dadurch wird ein Zimmer frei

„[...] or putting 2 or more guests in the same room [...]“ (Mamolo & Zazkis, 2008, S. 173)

Kl.	Name	Antwort
3	Kevin	Die Zimmer können nich alle besetzt sein denn es sind unendliche Zimmer. David konnte aber fragen ob der Zahlenteufel und Robert in ein der anderen übernachten dürfen. Mann kann immer 2 oder 4 je viele Betten in ein Zimmer sind konnte man so viele hinschicken.
3	Nadja	Er könnte ein neues Zimmer aus Zahlen bauen. Es ist ja unendlich also könnte jeder in jeder Sekunde ein Zimmer bekommen. Fieleicht gibt es ein Paar das ein Zimmer für jeden gemietet hat und sie könnten in ein Zimmer für zwei und dann währe ein Zimmer frei
5	Ringo	David könnte fragen ob sich Leute kennen und dann fragen ob sie zusammen leben wollen.

Tabelle 4.7: Ideen der Kinder, bei denen mehrere Gäste zusammenrücken müssen

4.5.3.4 Das geht doch gar nicht!

Einige der Kinder lehnten ausgewählte Prämissen des Gedankenexperiments ab. In der folgenden Tabelle sind ihre Einwände einzusehen.

Kl.	**Name**	**Antwort**
3	Kevin	Die Zimmer können nich alle besetzt sein, denn es sind unendliche Zimmer
5	Georg	Es gibt nicht ∞ Menschen.
5	Beatrice	Es gibt keine Lösung, ich müsste vielleicht erst eine Genaue Anzahl wissen.

Tabelle 4.8: Ideen der Kinder, bei denen das Gedankenexperiment angezweifelt wird

4.6 U4: Robert und der Zahlenteufel beschäftigen sich mit Paradoxien und Antinomien

4.6.1 Fachliche Hintergründe: Paradoxien und Antinomien der Unendlichkeit

> Die mathematische Literatur findet sich, wenn man darauf acht gibt, stark durchflutet von Ungereimtheiten und Gedankenlosigkeiten, die meist durch das Unendliche verschuldet sind.
>
> (Hilbert, 1926, S. 162)

In diesem Abschnitt soll zunächst die Taxonomie der Begriffe Paradoxie und Antinomie erläutert werden (die Ungereimtheiten, die Hilbert im obigen Epigraph erwähnt). Hierbei sollen verschiedene Möglichkeiten der Klassifikation vorgestellt und im Anschluss ein eigener Versuch gewagt werden.

Nach der Begriffsklärung und -ausdifferenzierung werden einige berühmte Paradoxien und Antinomien vorgestellt, welche im Rahmen des empirischen Teils der Arbeit in einem Unterrichtsdesign verwendet wurden. Der Teil zur Taxonomie bzw. zu den Klassifikationsmöglichkeiten wurde so ausführlich behandelt, weil den Kindern die Unterscheidung zwischen Antinomie und Paradoxie auch im Unterricht begegnet. Diese Unterscheidung mag vordergründig wie eine Positionierung wirken, im Folgenden wird aber argumentativ dargelegt, dass eine solche Unterscheidung zwingend notwendig ist und diese Meinung nicht nur im Rahmen dieser Arbeit vertreten wird.

4.6.1.1 Taxonomie und Klassifikationsmöglichkeiten

In der Literatur lassen sich diverse Definitionen für Paradoxien finden. Einerseits wird eine Paradoxie als eine „scheinbar unannehmbare Schlussfolgerung, die durch einen scheinbar annehmbaren Gedankengang aus scheinbar annehmbaren Prämissen abgeleitet ist“ (Sainsbury, 2010, S. 11f.) bezeichnet, was m.E. per Definition die Antinomien ausschließen würde. Selbiger Autor bezeichnet aber bspw. die „Paradoxie des Lügners“ (Sainsbury, 2010, S. 13) auch, wie im Zitat erkennbar, mit dem Terminus *Paradoxie*, wobei diese bei anderen Autoren eher den Antinomien zugeordnet wird (Brendel, 2015; Brieger, 2018; Engel, 2018; Meschkowski, 1979; Quine, 1976; Thiel, 2018). Festzuhalten ist, dass im Englischen der Gebrauch beider Termini synonym und unter dem Sammelbegriff „*paradox* für alle unerwarteten, schwer aufzulösenden oder beweisbaren Widersprüche“ (Brendel, 2010, S. 6) üblich ist.

Nach Kannetzky (2010) gibt es fünf verschiedene Arten, den Begriff *Paradoxie* zu gebrauchen:

i) Aussagen, die der allgemein akzeptierten Meinung entgegenstehen
ii) scheinbar unsinnige, absurde Konklusionen von Argumenten

iii) ein ganzes Argument mit einer paradoxen Konklusion

iv) synonym zu *Antinomie*

v) synonym zu *Dilemma, Aporie*

Punkt ii und Punkt iv fassen die Gebrauchsart von Sainsbury (2010) zusammen. Quine (1976) unterscheidet dahingegen zwei Arten von Paradoxien, gegen die er dann die Antinomien abgrenz (aber trotzdem als eine Art Paradoxie bezeichnet). Seine Unterscheidung von „veridical"und „falsidical paradoxes" lässt sich zu Kannetzkys Gebrauchsart ii zuordnen (Quine, 1976). Erstere Art bezeichnet wahrheitsgetreue Paradoxien wie bspw. das Barbier-Paradox (vgl. S. 98 dieser Arbeit - es ist nur dann wahrheitsgetreu, wenn man die Existenz des Dorfes in Sevilla ablehnt). Damit sind Paradoxien gemeint, welche eine kontraintuitive, aber auf zweiten Blick wahre Prämisse enthalten[26] (Quine, 1976, S. 3). *Falsidical Paradoxes* hingegen beinhalten nicht nur eine kontraintuitive Aussage, sondern in der Aussage oder deren Beweis/ Begründung ist auch ein (nicht auf den ersten Blick erkennbarer) Fehler.

Die Zenon'sche Paradoxie der Bewegung von Achilles und der Schildkröte (vgl. S. 94 dieser Arbeit) wäre laut Quine eine fallible Paradoxie, da die Annahme, dass „any infinite succession of intervals has to add up to all eternity" falsch sei (Quine, 1976, S. 3). Die dritte Art der Paradoxien (laut Quine) sind Antinomien, wie bspw. die Grelling-Nelson-Antinomie[27] oder die Lügner-Antinomie, in der Version von *Dieser Satz ist falsch.* Seine Distinktion wird an folgender Passage besonders gut deutlich:

> A veridical paradox packs a surprise, but the surprise quickly disspates itself as we ponder the proof. A falsidical paradox packs a surprise, but it is seen as a false alarm when we solve the underlying fallacy. An antinomy, however, packs a surprise that can be accomodated by nothing less than a repudiation of part of our conceptual heritage. (Quine, 1976, S. 9)

Wie auch Sainsbury (2010) konstatiert Quine, dass die Einteilung *Antinomie - Paradoxie* fließend ist und vom historischen Kontext/ dem Stand der Wissenschaft abhängt. Bei Sainsbury (2010) wird eine Skala zur von 1 bis 10 beschrieben, die den *Grad, wie paradox etwas ist,* darstellt. Als Begrenzungspunkte dieser Skala führt er die Paradoxie des Barbiers (1) und die Lügner-Antinomie[28] (10) an. Alle weiteren in Sainsbury (2010) aufgeführten Paradoxien seien dann, so Sainsbury, auf der Skala mindestens höher als 6 einzuordnen (in Abbildung 4.10 wurden auf dem Abschnitt 6-10 nur die mathematisch-philosophischen Paradoxien mit verbildlicht, Sainsbury führt aber auch bspw. Paradoxien in der Moral, des vernünftigen Handelns oder der vernünftigen Überzeugung an (Sainsbury, 2010, S. 49, S. 140, S. 176)).

26 Quine führt als weiteres Beispiel an, dass es Menschen geben kann, die zwar ihren n-ten Geburtstag feiern, aber schon $4n$ Jahre alt sind - eben jene, die am 29. Februar Geburtstag feiern

27 Ist das Wort 'heterologisch' heterologisch?

28 Bei Sainsbury als *Paradoxie des Lügners* bezeichnet (S.13)

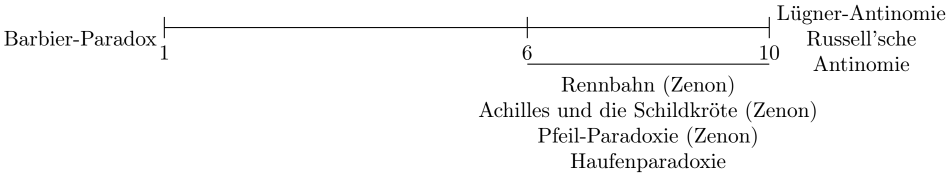


Abbildung 4.10: Bildliche Darstellung der Skala zum Schweregrad einer Paradoxie nach Sainsbury (2010)

Auf der Skala können Paradoxien, wie schon erwähnt, je nach Stand der sie behandelnden Wissenschaft, auch ihre Position ändern:

> Die Position einer Paradoxie auf der Zehn-Punkte-Skala [...] kann sich mit der Zeit ändern: Während wir raffiniertere Entdecker von bloßem Schein werden, kann eine Paradoxie sich abwärts bewegen in Richtung auf den Barbier am Ende der Skala. (Sainsbury, 2010, S. 28)

Bei einer scharfen Trennung der Termini *Paradoxie* und *Antinomie* wird diese Skala m.E. teilweise obsolet. Natürlich kann man die Paradoxien dann skalenweise nach dem Grad des Aufwandes ihrer Auflösung einteilen, dennoch werden die Antinomien immer an den rechten Rand zum Wert 10 zugeordnet werden müssen. Eine Paradoxie ist, wie auch Meschkowski (1979) konstatiert, kein *echter* Widerspruch, sondern „eine [...] Aussage also, die falsch zu sein *scheint*, weil wir alle gewohnt sind, in unseren alten Bildern und Begriffen zu denken“ (Meschkowski, 1979, S. 11). Eine Antinomie hingegen ist wie „ein Krankheitssymptom“ (Tarski, 2013, S. 244) - ein „kontradiktorischer und zugleich beweisbarer Satz“ (Stegmüller, 2013, S. 24).

4.6.1.2 Die Zenon'schen Paradoxien

Die Zenon'schen Paradoxien teilt man geläufig in zwei große Gruppen ein, nämlich zum einen die Paradoxien der Vielheit (mit den drei Argumenten der Dichte[29], der endlichen Größe[30] und der vollständigen Teilung) und in die der Bewegung (Achilles und die Schildkröte, das Teilungsparadoxon und das Pfeil-Paradoxon)(Huggett,

29 Das Argument der Dichte lautet bei Zenon folgendermaßen: „Wenn es Vieles gibt, so muß es notwendig gerade soviel Dinge geben als wirklich vorhanden sind, nicht mehr, nicht minder. Gibt es aber soviel Dinge als es eben gibt, so sind sie [kardinal] begrenzt. Wenn es Vieles gibt, so ist das Seiende [kardinal] unbegrenzt. Denn zwischen den einzelnen Dingen liegen stets andere und zwischen jenen wieder andere. Und somit ist das Seiende unbegrenzt.“ (Diels, 1963, S. 173-175).

30 „Ist [Vielheit] vorhanden, so muß ein jeder seiner einzelnen Teile eine gewisse Größe und Dicke und Abstand [an dieser Stelle ist die Übersetzung nicht einheitlich, es gibt auch Quellen (wie beispielsweise Vlastos & Graham (1995)), die vom Wort *Abstand* abweichen, da das Wort suggeriert, dass etwas zwischen den Dingen liegen können muss, Anm. JB] vom anderen haben. Und dasselbe läßt sich von dem vor jenem liegenden Teile behaupten. Auch dieser wird natürlich Größe haben und es wird ein anderer vor ihm liegen. Das Gleiche gilt also ein für alle Mal. Denn kein derartiger Teil desselben wird die äußerste Grenze bilden, und nie wird der eine ohne Beziehung zum anderen sein. Wenn es also viele Dinge gibt, so müssen sie notwendig zugleich klein und groß sein: klein bis zur Nichtigkeit, groß bis zur Unendlichkeit.“ (Diels, 1963, S. 173-175)

2019). Viele der aufgeführten Paradoxien vermochte erst die moderne Mathematik des 19. Jahrhunderts zu lösen, da bis dahin die Grenzwerte rechnerisch noch nicht voll erschlossen waren.[31] Es gab allerdings auch in der Antike ausreichende Lösungsvorschläge. Zenon wollte mit seinen Paradoxien aufzeigen, dass die Ablehnung der Theorien von Parmenides (griechischer Philosoph, Vorsokratiker) zu logisch absurden Schlüssen führen würde - um die Philosophie von Parmenides zu stärken (Huggett, 2019). Im Folgenden werden nur das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte sowie das Pfeil-Paradoxon genauer vorgestellt, da diese für den vorliegenden Unterrichtsentwurf relevant sind.

4.6.1.2.1 Achilles und die Schildkröte Als eine der berühmtesten Paradoxien bekannte Geschichte (Sainsbury, 2010) erzählt Zenon in *Achilles und die Schildkröte* von einem Wettrennen der beiden Protagonist*innen. Der Schildkröte wird ein gewisser Vorsprung gewährt, Achilles darf erst später starten, weil er wesentlich schneller laufen kann.[32] Durch diesen Vorsprung wird Achilles die Schildkröte nie erreichen, denn immer wenn er sie an einem gewissen Punkt eingeholt hat, ist sie schon wieder ein kleines Stück weiter gelaufen. Sainsbury (2010, S. 30) schlägt vor, dieses Problem mathematisch in eine unendliche Reihe zu überführen, „deren Terme sind: Z, Z_1, Z_2“. Er definiert diese Z-Reihe (die er vorab für ‚die Rennbahn', eine weitere Paradoxie, entwickelt) für Achilles und die Schildkröte neu:

> Z ist Achilles' Startpunkt; Z_1 jener der Schildkröte; Z_2 ist der Punkt, den die Schildkröte erreicht, während Achilles nach Z_1 läuft; und so weiter. Z^* wird jener Punkt, an dem, wie wir alle glauben, Achilles die Schildkröte einholen wird, und der »Beweis« ist, dass Achilles, ganz wie der Läufer vor ihm, $Z*$ nie erreichen wird. (Sainsbury, 2010, S. 43)

Palmer (2021) verbildlicht das Problem graphisch und erläutert es mit Hilfe von Distanzen. Achilles läuft von seinem Startpunkt a_0, die Schildkröte von ihrem Startpunkt t_0 los. Sobald Achilles an $t_0 = a_1$ angekommen ist, ist die Schildkröte aber schon bei $t_1 = t_0 + d_1$, hat also wieder eine gewisse Distanz zurückgelegt (vgl. Abb. 4.11).

---

31 Vgl. den kurzen Exkurs zur potentiellen und aktualen Unendlichkeit ab Seite 28

32 Diese Information wird nicht von Zenon selbst, sondern nachträglich durch Simplikios gegeben (Palmer, 2021)

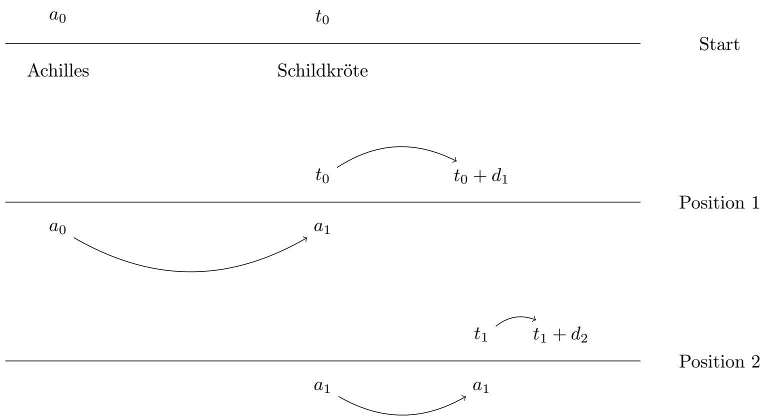


Abbildung 4.11: Verbildlichung der Paradoxie *Achilles und die Schildkröte* in Anlehnung an Palmer (2021)

Quine (1976) fasst das Problem trefflich zusammen und formuliert eine Lösung:

> Take the one about Achilles and the tortoise. Generalized beyond these two fictitious characters, what the paradox purports to establish is the absurd proposition that so long as a runner keeps running, hoewever slowly, another runner can never overtake him.[...] When we try to make this argument mor explicit, the fallacy that emerges is the mistaken notion that any infinite succession of intervals of time has to add up to al eternity. Actually when an infinite succession of intervals of time is so chosen that the succeeding intervals become shorter and shorter, the whole succession may take either a finite or an infinite time. It is a question of a convergent series. (Quine, 1976, S. 3f.)

Die unendliche Reihe, die durch die zeitlichen Abläufe gebildet wird, konvergiert also zu dem Moment hin, in welchem Achilles und die Schildkröte gleichauf sind.

4.6.1.2.2 Das Pfeil-Paradoxon Zenon wirft in diesem Paradoxon die Frage auf, ob ein fliegender Pfeil in Bewegung sein kann. Wenn Zeit auf vielen vereinzelbaren Momenten besteht, so ruht der Pfeil in jedem dieser Momente innerhalb seiner Bewegung:

> Consider an arrow, apparently in motion, at any instant. First, Zeno assumes that it travels no distance during that moment—'it occupies an equal space' for the whole instant. But the entire period of its motion contains only instants, all of which contain an arrow at rest, and so, Zeno concludes, the arrow cannot be moving. (Huggett, 2019)

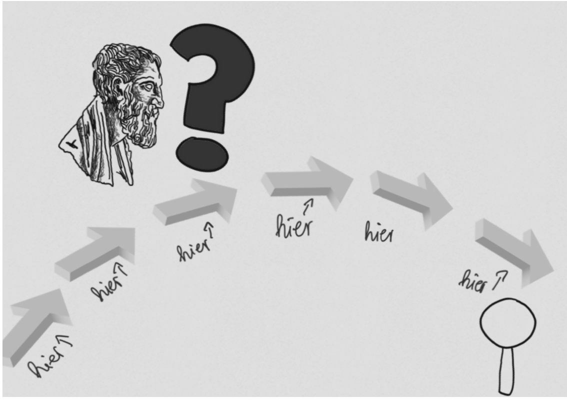


Abbildung 4.12: Verbildlichung des Pfeil-Paradoxons, Screenshot entnommen aus dem Unterrichtsmaterial für Unterrichtseinheit U4

Eine graphische Veranschaulichung kann in Abb. 4.12 nachvollzogen werden. Dieser Schluss, im *modus ponens*[33] gegeben, ist genau dann falsch, wenn seine Prämisse falsch ist. Aristoteles bestreitet diese Prämisse, für ihn besteht Zeit nicht aus unteilbaren Momenten (eine erste Vorstellung des Kontinuums):

> Zenon aber begeht einen Fehlschluß. Wenn nämlich, sagt er, alles ruht oder sich bewegt, sobald es in dem Gleichen ist (es ist aber stets das räumlich sich Bewegende in dem Jetzt als in dem sich Gleichen), so sei unbeweglich der abgeschossene Pfeil. Dieß aber ist falsch. Denn nicht besteht die Zeit aus den Jetzt, welche untheilbar sind; so wie auch keine andere Ausdehnung. (Aristoteles, 1829, *Phys.*, VI.9, S. 166)

Eine zweite Auflösung der Paradoxie wäre es, nicht die Prämisse zu bestreiten, sondern die Schlussfolgerung, die aus dem im modus ponens angebrachten Argument folgt. Hier würde man „bestreiten, dass daraus [der Pfeil ruht in jedem Moment, Anm. JB] folgen würde, der Pfeil bewege sich nicht“ (Sainsbury, 2010, S. 45). Weiterhin kann man auflösen, dass der Pfeil zwar in den einzelnen, unteilbaren Momenten ruht, aber sich in *Intervallen* aus Momenten fortbewegt: „the arrow never changes its position during an instant but only over intervals composed of instants, by the occupation of different positions at different times“ (Huggett, 2019).

Sowohl das Pfeil-Paradoxon als auch das von Achilles und der Schildkröte wären nach Quine (1976) *falsidical paradoxes*, denn in beiden Paradoxien kommen Aussagen (Pfeil: Zeit besteht aus unteilbaren Momenten; Achilles: die Intervalle können in der Realität unendlich klein werden) mit Fehlern vor, die zum insgesamt kontraintuitiven Eindruck der Inhalte führen.

33 A ist wahr, dann ist $(A \rightarrow B)$ auch wahr: Wenn Zeit aus vereinzelbaren, unteilbaren Momenten besteht, dann ruht ein fliegender Pfeil in jedem Moment. Zeit besteht aus unteilbaren Momenten, also ist der Schluss wahr. Wenn Zeit nicht aus unteilbaren Momenten besteht, wird der Schluss falsch

4.6.1.3 Das Barbier-Paradoxon/die Russell'sche Antinomie

Eine Zusammenstellung von Paradoxien und Antinomien, die mathematische und philosophische Gemüter bewegten und bewegen, könnte eine eigene Monographie füllen (und haben solche auch schon gefüllt, bspw. Kannetzky (2000)). In diesem Unterkapitel wird eine weitere Denkirritation aufgeführt, die für die Planung der Unterrichtseinheit U4 relevant war. Die *Russell'sche Antinomie* stammt zwar aus der Mathematik, beinhaltet aber keine Auseinandersetzung mit Unendlichkeit. Da sich in der Unterrichtseinheit U2 mit Mengen beschäftigt wurde, sollte diese in der naiven Mengenlehre auftretende Antinomie für die U4 eine weitere Beschäftigung mit der naiven Mengenlehre darstellen. Die in U4 weiterhin mit den Kindern besprochene *Lügner-Antinomie* wird im Folgenden nicht expliziert, da sie sprachphilosophisch gehaltvoll, aber weder mathematisch noch die Unendlichkeit betreffend ist. Sie wurde zur besseren Gruppierung der Kinder mit in die Stunde eingebracht. Für an der *Lügner-Antinomie* interessierte Leser*innen empfehlen sich Lektüren von Kannetzky (2000) oder Sainsbury (2010).

Die im Englischen als *Russell's Paradox* bekannte Russell'sche Antinomie wurde 1901 von Bertrand Russell (und Ernst Zermelo) während seiner Arbeiten an *The Principles of Mathematics* entdeckt (Irvine & Deutsch, 2016). Damit löste er die so genannte *Grundlagenkrise der Mathematik* aus und beendete die hegemoniale Rolle der naiven Mengenlehre innerhalb der damaligen mathematischen Grundlagenforschungen:

> [...] denn es stellten sich bei bloßer Anwendung der allmählich üblich gewordenen Begriffsbildungen und Schlußweisen Widerprüche heraus, zuerst vereinzelt , allmählich immer schärfer und immer ernster: die sogenannten Paradoxien der Mengenlehre. Insbesondere war es ein von Zermelo und Russell gefundener Widerspruch, dessen Bekanntwerden in der mathematischen Welt geradezu von katastrophaler Wirkung war. (Hilbert, 1926, S. 169)

Russell selbst formulierte die Antinomie im Bereich der *Klassen*, äquivalent kann man die Struktur aber auch auf *Mengen* übertragen. In der Antinomie stehen sich die zwei folgenden Sätze gegenüber, die beide sowohl wahr als auch falsch sein müssen:[34]

1. Die Klasse aller Klassen, die sich nicht selbst enthalten, enthält sich selbst.

2. Die Klasse aller Klassen, die sich nicht selbst enthalten, enthält sich nicht selbst.

Mengentheoretisch kann man eine Menge R bestimmen, die sich folgendermaßen zusammensetzt: $R = \{x|x \notin x\}$, wobei x ebenfalls eine Menge ist. Sie wird also als Menge aller Mengen bestimmt, die sich nicht selbst enthalten. Beispiele hierfür findet man in der Anschauung genug: Die Menge aller Hunde ist selbst kein Hund, enthält sich also nicht selbst. Aber die Menge aller Dinge, die kein Hund sind, ist selbst kein Hund und würde sich somit selbst enthalten. Die paradoxe Frage, die

34 Daher wird in dieser Arbeit auf dem Terminus Russell'sche *Antinomie* bestanden und nicht Russell'sche *Paradoxie* verwendet aus der oben definierten Menge entspringt, liegt auf der Hand: enthält die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, sich selbst? Wie oben bei den Klassen beschrieben kann man auch hier zwei diametrale Aussagen als jeweils wahr/falsch ansehen: Wenn sich die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, selbst enthalten würde, dürfte sie sich nicht selbst enthalten. Wenn sich die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, *nicht* selbst enthalten würde, *müsste* sie sich selbst enthalten. (Irvine & Deutsch, 2016; Quine, 1976; Sainsbury, 2010; Thiel, 2018)

1918 schlug Russell selbst eine metaphorische Variante der Antinomie vor, das *Barbier-Paradoxon*. Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, wird hier durch den Barbier von Sevilla ersetzt, der alle und nur diejenigen Männer in Sevilla rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Die Frage ist dann, wer den Barbier rasiert:

> You can modify its form; some forms of modification are valid and some are not. I once had a form suggested to me which was not valid, namely the question whether the barber shaves himself or not. You can define the barber as "one who shaves all those, and those only, who do not shave themselves". The question is, does the barber shave himself? In this form the contradiction is not very difficult to solve. (Russell, 1985, S. 101)

Wenn er sich selbst rasieren würde, dürfte er sich nicht selbst rasieren (denn er rasiert nur diejenigen Männer, die sich nicht selbst rasieren) und wenn er sich nicht selbst rasiert, müsste er sich selbst rasieren (denn er rasiert ja diejenigen Männer, die sich nicht selbst rasieren). Die Lösung für das Paradoxon des Barbiers liegt klar auf der Hand: „Es kann keinen solchen Barbier oder ein solches Dorf geben" (Sainsbury, 2010, S. 13). Bei der Russell'schen Antinomie lässt sich dieses Lösungsschema nicht direkt übertragen. Mathematisch kann sowohl die Klasse als auch die Menge gebildet werden, die alle Klassen/Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten. Es wird also ein Axiomensystem für die Mengenlehre benötigt, welches diese Mengen ausschließt und trotzdem das Kriterium der Konsistenz erfüllt. Dies ist für ZF bzw. ZFC (axiomatische Mengenlehre, kurz erläutert in Kap. 2.2 auf S. 40) erfüllt:

> Theorem. Jede Menge M besetzt mindestens eine Untermenge M_0, welche nicht Element von M ist. [...]
> Aus dem Theorem folgt, daß nicht alle Dinge x des Bereiches $\mathcal{B}$ Elemente einer und derselben Menge sein können; d.h. *der Bereich $\mathcal{B}$ ist selbst keine Menge*, - womit die „Russellsche Antinomie" für unseren Standpunkt beseitigt ist. (Zermelo, 1908, S. 265)

4.6.2 Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung

Die didaktische Reduktion der im Vorherigen aufgeführten Paradoxien und Antinomien fand zum einen über Videos statt und zum anderen über die rahmende Geschichte, in welcher auch die Begriffstrennung Paradoxie-Antinomie aufgegriffen wird (vgl. S. 273 im Anhang). Die Erstellung der Videos erfolgte mit Hilfe der App

Explain everything (Promethean, 2022), die einzelnen Texte wurden handschriftlich eingefügt und sind so animiert, dass der Schreibprozess im Video sichtbar wird.

Die Videos wurden den Kindern mit Tablets präsentiert (vgl. Ablaufplan in Tab. 11.9 auf S. 265 im Anhang), so konnte eigenständig vor- und zurückgespult und Verständnisprobleme intensiver bearbeitet werden. In jedem Video wird zunächst der Namensgeber[35] der Paradoxie bzw. Antinomie durch den Zahlenteufel vorgestellt und im Anschluss das Problem bildlich erläutert. Die Kinder konnten den Erklärungen mit ihren Kopfhörern (einzeln) oder mit Audio auf Flüsterlautstärke (Gruppe) lauschen.

Im Folgenden sollen die Materialien zur Barbier-Paradoxie und den zwei Zenon'schen Paradoxien mit den jeweiligen entstandenen Schüler*innendokumenten präsentiert werden. Eine Trennung von didaktischem Kommentar und entstandenen Dokumenten wie in den vorherigen Kapiteln ist an dieser Stelle aufgrund des in geringer Quantität vorhandenen Datenmaterials nicht nötig. Anschließend an diese Vorstellung erfolgt eine kritische Reflexion.

Russell'sche Antinomie/ Barbier-Paradoxon

Die Russell'sche Antinomie wurde als Barbier-Paradoxie eingeführt. Bis auf die Darstellung durch das Video fanden kaum didaktische Reduktionen statt, es wurde sogar ein Original-Zitat von Russell (1985) (übersetzt auf Deutsch) angebracht, vgl. Abb. 4.13.

Abbildung 4.13: Screenshots aus dem verwendeten Video zur Barbier-Paradoxie

In Abb. 4.14 kann eingesehen werden, wie Nazan und Fatma (4. Klasse, Grundschule) mit der Barbier-Paradoxie umgegangen sind. Wie auch bei den Ideen der Kinder zu Hilberts Hotel ist hier ein pragmatischer Ansatz und wenig Beschäftigung mit dem Widersprüchlichen zu erkennen („Antwort: er kann sich nich rassiern wenn er kein Spiegel hat?").

35 Hier wird absichtlich keine gendersensible Schreibweise benutzt.

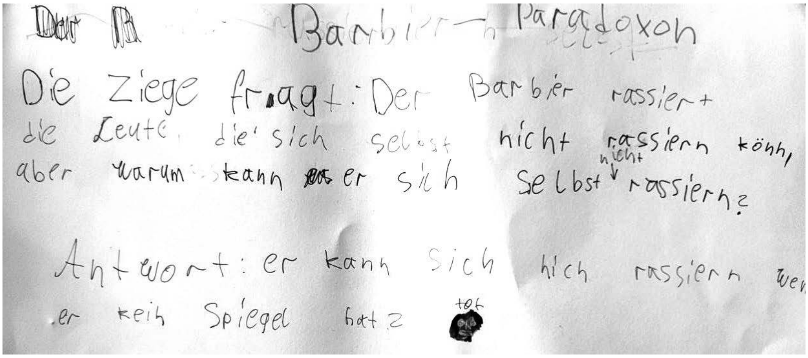


Abbildung 4.14: Nazan und Fatmas Lösung der Barbier-Paradoxie

Zenon'sche Paradoxien: Achilles und die Schildkröte

Für die Vorstellung der Paradoxie von Achilles und der Schildkröte wurde zunächst der Vorsprung der Schildkröte und die Geschwindigkeit von Achilles veranschaulicht und anschließend die Skizze einer Rennbahn mit einem exemplarischen Verlauf des Rennens präsentiert (vgl. Abb. 4.15). Anschließend wurde die Frage gestellt, ob Achilles die Schildkröte überhaupt überholen könne.

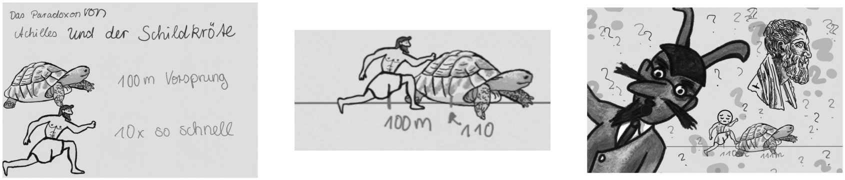


Abbildung 4.15: Screenshots aus dem verwendeten Video zur Paradoxie *Achilles und die Schildkröte*

Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte wird von Ben und Quentin (4. Klasse, Grundschule) eher als Aufforderung zum Rechnen als, wie intendiert, als Beschäftigungsanlass mit widersprüchlichen Aussagen aufgefasst. Bens Lösung ist, dass Achilles die Schildkröte bei 115 Metern einholt (vgl. Abb. 4.16). Im Auswertungsgespräch zu den Plakaten trifft Quentin allerdings folgende Aussage, die eher einer Metaebene zuzuordnen ist (vgl. Transkriptionsbuch, Grundschule U4, 05.07.2022: Abschlussequenz Paradoxien und Antinomien):

37	Quentin	Meine Meinung ist, dass ähm die Schildkröte verlieren würde, weil ähm irgendwann wird ja ähm der Abstand der ähm immer, immer kleiner und irgendwann ist beim Abstand ja Schluss.

Hierbei bezieht sich Quentin intuitiv auf die Trennung zwischen der mathematisch-rechnerisch-theoretischen Ebene und der Referenzebene der Realität. Unendlich kleine Abstände kann es für ihn in der Realität nicht geben („irgendwann ist beim Abstand ja Schluss“, Turn 37).

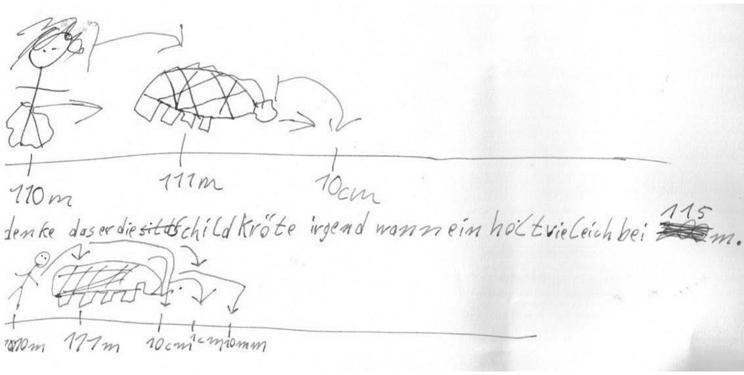


Abbildung 4.16: Bens Zeichnung zur Zenon'schen Paradoxie *Achilles und die Schildkröte*

Was von Quentin noch implizit ausgedrückt wurde (Referenzebene der Realität), wird von Niklas, Samuel und Nino auf ihrem Plakat expliziert („Aber in der Realität hätte er sie überholt, wie geht das?", vgl. Abb. 4.17). Auch diese Gruppe argumentiert, dass der Abstand irgendwann „so klein [wird] das er sie überholt" (Abb. 4.17). Interessant ist, dass Niklas, Samuel und Nino wie auch Ben und Quentin (und andere, an dieser Stelle nicht präsentierte Gruppen) die Skizze aus dem Video zur Paradoxie (vgl. Abb. 4.15) aufgegriffen haben. In ihrer Skizze zeigt sich allerdings die Besonderheit, dass der (räumliche) Punkt, an dem Achilles die Schildkröte überholt, mit eingezeichnet wurde und dass die immer kleiner werdenden Schritte der Schildkröte mit veranschaulicht wurden.

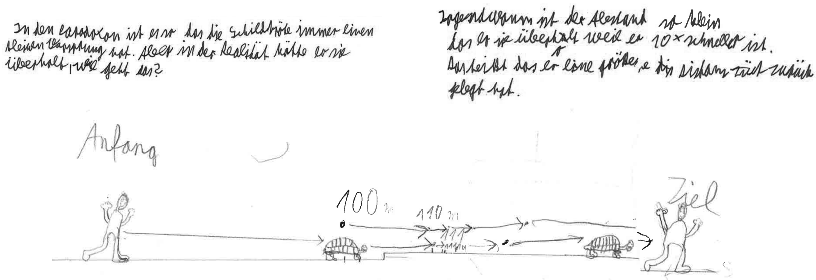


Abbildung 4.17: Auszüge aus dem Plakat von Niklas, Samuel und Nino zur Paradoxie von *Achilles und der Schildkröte*

Zenon'sche Paradoxien: Pfeil-Paradoxon

Das Pfeil-Paradoxon (Zenon von Elea) wurde mit Hilfe einer im Video präsentierten Animation verbildlicht (vgl. Abb. 4.18 und auch Abb. 4.12 auf S. 97). Es sollten die einzelnen Momente mit einer Lupe verbildlicht werden und auch das von Zenon benannte Problem, es gäbe keine wahre Bewegung, wurde erwähnt.

Abbildung 4.18: Screenshots aus dem verwendeten Video zur Pfeil-Paradoxie

Die grafische Veranschaulichung aus dem Video wurde von manchen Kindern aufgegriffen (vgl. Abb. 4.19). Sowohl an der Grund- als auch an der Gesamtschule wurden Fotos als Argumentationshilfe herangezogen. Die Fotos sollen m.E. beispielhaft das Festhalten von Momenten verdeutlichen.

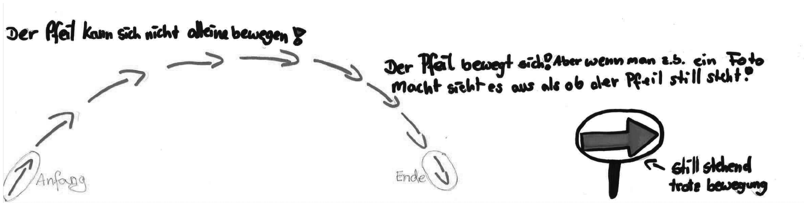


Abbildung 4.19: Tami, Nina, Kelly und Mayas Lösung zur Pfeil-Paradoxie

An der Gesamtschule erfolgte bei der Vorstellung des Plakats (Abb. 4.19) eine Demonstration der Bewegung über das Werfen eines Bleistifts. Weiterhin gab es interessante Erklärungsversuche (vgl. Transkriptionsbuch, Gesamtschule: U4, 08.07.2022: Abschlussequenz Paradoxien und Antinomien):

141	Tami	Al:so der Pfeil, (.) wenn man ihn (.) zum Beispiel mit ei=m Stift; wenn man den Stift └wirft (.) dann; «Nina adressierend> Ja (mach).>┘ Ein Stift zum Beispiel wirft zu jemand anderem [winkt und fängt einen geworfenen Stift] └Dann bewegt sich ja der Stift sozusagen von ei=m zum ander=n, aber alleine bewegt sich der Stift (nicht),┘ man muss ihn ja werfen; (.) und zum Beispiel, wenn man ein Pfeil abschießt und dann äh ganz viele Fotos davon macht [wirft den Stift] dann °@(.)@° dann bewegt sich der Pfeil auf den Fotos nicht, └sondern (ist im) Stillstand,┘ aber trotzdem in echt bewegt sich der Pfeil ja, man macht nur=n Foto und fängt den Moment, wo er sozusagen still steht ein (.) un:d ähm (2) °@(ja)@°.
142	Nina	└«Tami adressierend> (Soll ich Bleistift)?> [tritt aus dem Bild]┘
143	Kommentar	└Die Schulklingel ist zu hören.┘
144	Nina	└[tritt wieder ins Bild]┘

145	Nina	Also sagen wir jetzt ma ich renne (.) und man macht ganz viele Fotos von mir, dann (.) steh; also man hält ja den Moment dann nur fest. Ich steh ja nicht wirklich.

In diesem Auszug ist, wie auch im Beispiel von Quentin oder Niklas, Samuel und Nino (Achilles und die Schildkröte, siehe oben) erkennbar, dass die Kinder eine Trennung zwischen (mathematischer) Modellierung und Realität zur Lösung der Paradoxien vornehmen („aber trotzdem in echt bewegt sich der Pfeil ja", Tami, Turn 141 und „Ich steh ja nicht wirklich", Nina, Turn 145).

Kritische Betrachtung

Die letzte Stunde der für die Studie untersuchten Unterrichtsstunden war, verglichen mit den Stunden U1-U3, mit sehr vielen verschiedenen Inhalten rückblickend zu intensiv, um eine tiefgründige Beschäftigung der Kinder mit den Paradoxien erwarten zu können. Nichtsdestotrotz gab es viele spannende Lösungsvorschläge, die bereits im obigen Teil des didaktischen Kommentars vorgestellt wurden. Allerdings wäre retrospektiv die Beschränkung auf eine ausgewählte Paradoxie, bestenfalls die von Achilles und der Schildkröte, eine Grundlage für mehr ko-kontruktive Bearbeitungsprozesse und tiefergehende Argumentationen gewesen. So konnte bei den zeitlich zu kurz geplanten Abschlussequenzen nicht adäquat auf die eigentlichen „Knackpunkte" eingegangen werden und auch ein paradoxieübergreifender Austausch der verschiedenen Gruppen untereinander fand nicht statt. Betts (2017) stellt eine bessere Möglichkeit, sich intensiv mit Zenon'schen Paradoxien beschäftigen zu können, vor. Für eine Abwandlung des hier vorgestellten Unterrichtsdesigns *zwischen* den einzelnen Durchführungen war in der praktischen Realisation nicht genügend Zeit, dennoch war bereits nach dem Durchlauf an der Grundschule (05.07.2022) klar, dass das Design auch für die Gesamtschule (08.07.2022) hätte abgewandelt werden müssen. Im Sinne des DBR hätte man zwischen beiden Durchführungen eine längere Zeitspanne zum Abwandeln einplanen müssen. Konkrete Vorschläge zur Abwandlung würde ich in der intensiveren Beschäftigung mit den Begriffen Paradoxie und Antinomie anhand einfacherer Beispiele, in der Beschränkung auf eine ausgewählte Zenon'sche Paradoxie (Achilles und die Schildkröte) innerhalb einer Doppelstunde und im kollektiven Lösungsprozess dieser durch philosophische Gespräche im Plenum oder in Gruppen sehen. Auch eine Beschäftigung mit den anderen Paradoxien bzw. Antinomien wäre m.E. sicher in den beiden untersuchten Klassen möglich gewesen, allerdings tiefgründiger und maximal mit einer Paradoxie/ Antinomie pro Doppelstunde. Des Weiteren hätte hier im Voraus eine intensivere Schulung der Lehrkräfte zu den Inhalten und auch zum Modus der Gesprächsführung stattfinden müssen.

5. Methodik

Was erwartet Sie in diesem Kapitel?

Zunächst wird die Arbeit im Spannungsfeld zwischen Design Research und der Erforschung tradierter Unterrichtspraxis eingeordnet. Anschließend werden die den Ergebnissen zu Grunde liegenden Methoden Interaktions-, Argumentations- sowie qualitative Inhaltsanalyse einzeln vorgestellt und auf die vorliegende Arbeit bezogen erläutert. Zusammenfassend wird in Kapitel 5.5 kurz dargelegt, in welcher Art diese Methoden zur Gewinnung von Erkenntnissen in dieser Arbeit zusammengewirkt haben.

Und warum ist das wichtig für die Arbeit?

Ein solides methodisches Fundament ist zur Datenauswertung wichtig. Ebenso wichtig ist es, die verwendeten Methoden für die Leser*innen so zu beschreiben, dass das Vorgehen bei der Auswertung möglichst transparent dargelegt werden kann.

5.1 Zur Rolle der Unterrichtsdesigns

Die in Kapitel 4 vorgestellten Unterrichtsdesigns wurden in zwei Zyklen abgehalten (vgl. Abb. 4.1 auf S. 71). Trotz einiger Veränderungen an den Designs zwischen beiden Zyklen ist diese Dissertation keine Arbeit im Rahmen des *Design Research*. Die Designs werden in Kap. 4 so ausführlich vorgestellt, weil sie keine etablierte Unterrichtspraxis widerspiegeln und ihr explorativer Charakter auch einige Auffälligkeiten im Datenmaterial bedeutet. In Abb. 5.1 kann eingesehen werden, wie *Design Research* im eigentlichen Sinn verstanden wird:

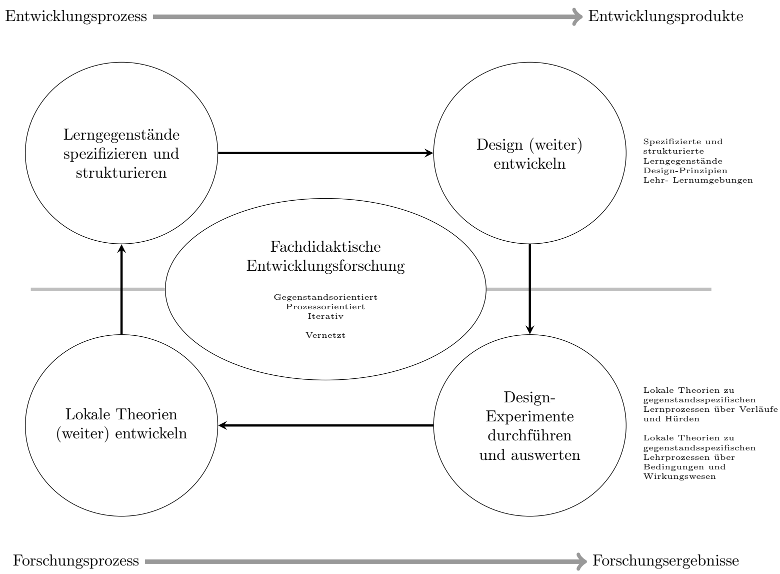


Abbildung 5.1: Ziele im Zyklus fachdidaktischer Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell (Hussmann et al., 2013, S. 32)

In Abgrenzung und Anlehnung dazu werden in Abb. 5.2 die Ziele dieser Arbeit graphisch veranschaulicht. Zum einen rückt für diese Arbeit der Anspruch, den Entwicklungsprozess der Designs in ein Entwicklungsprodukt überführen zu können, in den Hintergrund. Weiterhin wird der Zyklus zwei mal durchlaufen und nicht bis zum Erreichen einer gewissen (theoretischen) Sättigung. Es soll und kann im Rahmen der für diese Arbeit stattfindenden Entwicklungsprozesse an den Designs nicht der von bspw. McKenney & Reeves (2018, S. 13) formulierte Anspruch einer didaktischen *Lösung* erfüllt werden, da hier im Gegensatz zu den von McKenney & Reeves (2018) beschriebenen Unterrichtsdesigns nicht auf einem Fundament bereits bestehender didaktischer Konzeptionierungen und empirischen Wissens (1) zur Unendlichkeit in der Grundschule und (2) zum Philosophieren im Mathematikunterricht aufgebaut werden kann. Die von Gravemeijer & Prediger (2019) formulierten Charakteristika für Design Research werden aber, bis auf das vierte Kriterium der Iteration (hier nur zwei Zyklen, keine „Testung“ des Designs im eigentlichen Sinn), m.E. weitestgehend erfüllt:

Even if design research approaches can differ in their concrete realization, they usually share five common characteristics (Cobb et al. 2003; Prediger et al. 2015).
They are

1. *interventionist,* i.e., the intent of design research is to create and study new forms of instruction, in this sense, it must be intended to intervene in the classroom practices (interventionist) rather than just to involve observation of regular classroom practices (naturalistic);
2. *theory generative*, i.e., the goal of design research is to generate theories about the process of learning and the means of supporting that learning (see above); generating theories here means both developing and refining theories in terms of inventing categories and generating hypotheses (but rarely 'testing hypotheses' in the narrow sense of experimental psychology);
3. *prospective and reflective,* i.e., design experiments create conditions for developing theory (prospective), however, these theories are in turn the subject of critical examination (reflective);
4. *iterative*, i.e., theory is developed in an iteration of cycles of conjecturing, testing, and revising;
5. *pragmatic roots and humble theories*, i.e., design experiments accept the complexity of the classroom as a research setting, and theories are domain- or even topic-specific and are meant to have practical implications.

(Gravemeijer & Prediger, 2019, S. 34)

Die Studie erfüllt das erste Kriterium, da eine neue Form des Unterrichtens (Philosophieren im Mathematikunterricht) sowie ein neuer Lerngegenstand (Unendlichkeit in der Grundschule) in die Unterrichtsdesigns implementiert wurde. Das zweite Kriterium wird durch die explizite Fokussierung auf Forschungsergebnisse statt auf Design-Ergebnisse gewährleistet. Reflexion kommt vor allem durch das qualitative Vorgehen der Datenauswertung sowie die (kleinen) Änderungen zwischen beiden Zyklen zustande. Alle entstandenen Ergebnisse sind lokal auf die Versuche beschränkt, jegliche Hypothesen werden unter der Einschränkung des kleinen Datensatzes formuliert (Punkt 5).

Weiterhin wurde vor der Erstellung der Unterrichtsdesigns die von Hußmann & Prediger (2016, S. 35f) vorgeschlagene Reihenfolge des *four-level-approachs* bei der Betrachtung von Unendlichkeit als Unterrichtsgegenstand eingehalten:

1. *formal level*: Mathematische Objekte und Phänomene werden auf einer formal-logischen Ebene durchdrungen, typische logische Strukturen und Beziehungen offen gelegt, formale Begründungen und/ oder Beweise gesucht, das Netzwerk zwischen den Konzepten, Begründungen, Beweisen und Prozessen ausgebaut

2. *semantic level*: Sinn und Bedeutung der Konzepte des mathematischen Inhalts werden durchdrungen, epistemologische Aspekte der Strukturen zwi-

schen den Konzepten aufgedeckt, die für Erkennen von Sinn und Bedeutung relevanten mentalen Modelle erkannt

3. *concrete level*: Reduktion des Inhalts auf Kernideen/Probleme/Situationen, in welchen das Wissen zum mathematischen Objekt/Phänomen relevant und unterrichtspraktisch realisierbar ist

4. *empirical level*: Mögliche kognitive/soziale Aspekte des Denkens der Schüler*innen werden wie auch mögliche Hürden im Lernprozess identifiziert

Neben dem hintergründigen Entwickeln der Designs wird auch die Auswertung der Designs im Sinne einer lernzielorientierten Evaluation nicht angestrebt. Eher liegt der Fokus nun bei den Forschungsergebnissen und dem Forschungsprozess, wodurch auch die Spezifikation des Lerngegenstands Unendlichkeit mehr in den Bereich der Forschung rückt und nicht mehr rein unterrichtspraktisch verhaftet ist (vgl. Abb. 5.2). Die lokalen Theorien, die in den explorativen Unterrichtsdesigns beobachtbar sind, sollen das Zentrum der Studie ausmachen und nicht die Weiterentwicklung der Unterrichtsdesigns. Im Gegensatz zum bei Cramer (2018, S. 121f) beschriebenen Vorgehen, die Designs komplett dem Forschungsprozess unterzuordnen, spielen sie hier aber aufgrund ihrer bislang nicht in tradierte Praxis übergegangenen Inhalte dennoch eine Rolle. Im Paradigma der Interpretativen Forschung, die sich eher auf Verständnis von Unterrichtsalltag statt auf normative praktische Regulierungen dessen konzentriert (vgl. Kap. 5.2), werden also zum besseren Verständnis der auftretenden Phänomene die Unterrichtsdesigns sowie Änderungen zwischen den Zyklen in dieser Arbeit mit erläutert. Die Abgrenzungen und auch Anlehnungen an das Dortmunder Modell sind in ihrer graphischen Veranschaulichung in Abb. 5.2 auf S. 108 einsehbar.

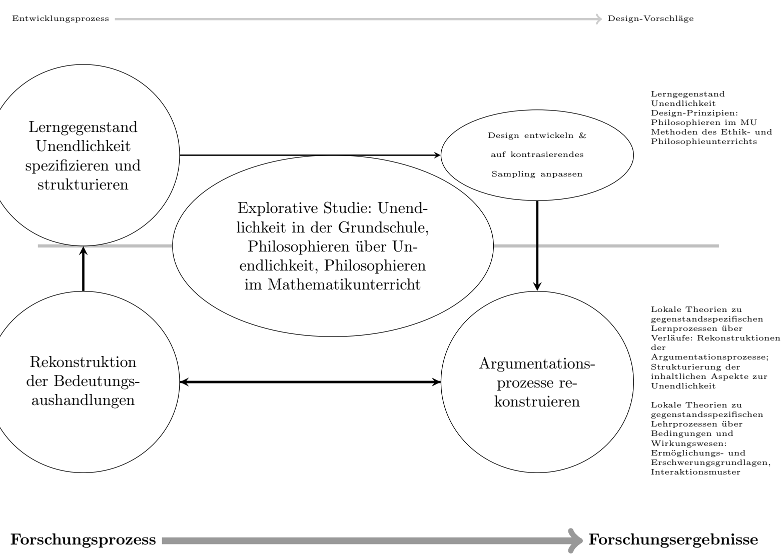


Abbildung 5.2: Ziele dieser Arbeit in Anlehnung und Abgrenzung an Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell (Hussmann et al., 2013, S. 32)

5.2 Interaktionsanalyse

Die Interaktionsanalyse ist eine der grundlegenden Methoden der Interpretativen Forschung (der Mathematikdidaktik), welche sich für Rekonstruktionen unterschiedlicher mathematischer Lehr-Lern-Prozesse in vielfältigsten Settings (Kindertagesstätten, Unterricht in Schulen, familialen Situationen, Universitäten ...) etabliert hat (Brandt et al., 2023, S. 754f). Für diese Arbeit stellt sie ebenfalls die grundlegende Methode zur Rekonstruktion von Bedeutungsaushandlungen in Interaktionen dar. Diese Rekonstruktionen werden in Kap. 6 ab S. 117 anschaulich dargelegt und fokussieren, ganz im Paradigma der Interpretativen Forschung, eher auf ein „Verstehen-Wollen als auf ein Verändern-Wollen" (Krummheuer, 2004, S. 113).

Als eine Art Anker für die Analyse dienen gewisse Analyseschritte, deren Abfolge aber nicht dogmatisch zu verfolgen ist, sondern als eine Art Führung zur Rekonstruktion von in Interaktionen geltenden Deutungen dienen (Krummheuer, 2012, S. 236):

1. Gliederung der Interaktionseinheit
2. Allgemeine Beschreibung
3. Ausführliche Analyse der Einzeläußerungen - Interpretationsalternativen (re-)konstruieren
4. Turn-by-Turn-Analyse
5. Zusammenfassende Interpretation

Bei der Turn-by-Turn-Analyse wird dabei sequentiell vorgegangen und sich an konversationstheoretischen Ansätzen orientiert (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 90). Für die Rekonstruktionen in Kapitel 6 wurde sich im Wesentlichen an diese Abfolge gehalten. Viele der Turn-by-Turn-Analysen wurden nicht allein, sondern mit anderen Wissenschaftler*innen oder Studierenden zusammen durchgeführt, um die Interpretationsalternativen etwas von der subjektiven Vorprägung der interpretierenden Person abzulösen. Dennoch wurden alle Alternativen von mir als Forschende beim Verschriftlichen der Rekonstruktionen auf Plausibilität geprüft und dann mit meiner subjektiven „mathematisch-philosophischen Brille" in die „am besten zu begründenden Gesamtinterpretationen der Szene[n]" (Krummheuer, 2012, S. 238) unter Einschränkung der Deutungsvielfalt überführt. Diese Einschränkung erfüllt keineswegs den Anspruch, *die <u>eine</u> richtige* Deutung der Szene präsentieren zu können, sondern bedeutet eher eine Fokussierung auf die theoretische Rahmung, unter der die Szenen betrachtet wurden:

> Die Einschränkung der zunächst generierten Deutungsvielfalt durch die Turn-by-Turn-Analyse zielt jedoch nicht auf eine Eindeutigkeit der Interpretation. Vielmehr erlangen hier die zu Interpretationen getroffenen Vorhersagen für den Interaktionsablauf Bedeutung, indem sie eventuell zur Ablehnung einzelner Äußerungen führen oder im Sinne abduktiver Theorieentwicklung eine Änderung in den Theorieansätzen bewirken. (Brandt, 2004, S. 53)

Das bedeutet auch, dass mit den theoretischen Vorannahmen fachdidaktischer sowie inhaltlicher Theorien zum Unterrichtsgegenstand Unendlichkeit ein ausgewähltes „Spektrum plausibler Deutungsalternativen generier[t]“ (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 90) wird. In den Rekonstruktionskapiteln werden mitunter verschiedene Deutungsalternativen aufgelistet, deren Reihenfolge aber keinesfalls eine Hierarchie in ihrer Geltungsbegründung widerspiegelt.

5.2.1 Interaktionale Verdichtungen und interaktionaler Gleichfluss

Bei der Rekonstruktion von Unterrichtsalltag lassen sich zwei Ausprägungen unterscheiden: interaktionale Verdichtung und interaktionaler Gleichfluss (Krummheuer, 2004; Krummheuer & Brandt, 2001). Aufgrund von fünf Strukturierungsdimensionen (Krummheuer & Brandt, 2001) werden für diese zwei Ausprägungen Eigenschaften dieser Strukturierungsdimensionen formuliert. Nach Krummheuer (2004) können folgende Dimensionen für interaktionale Verdichtungen festgehalten werden (S.117, siehe auch Krummheuer & Brandt (2001), S. 56f):

1. Thematisierung eines fachbezogenen Inhalts
2. Hervorbringung von relativ umfassenden kollektiven Argumentationen
3. Emergenz einer musterhaften Interaktionsstruktur mit flexiblen Rollenzuteilungen
4. Partizipationsmöglichkeiten für tätig-werdende Schüler*innen mit unterschiedlichen Autonomiegraden
5. Partizipationsmöglichkeiten für nicht-tätig werdende Schüler*innen mit einer klaren Konturierung des Rezipient*innenstatus

Vergleichend dazu werden folgende Dimensionen für das Vorliegen eines interaktionalen Gleichflusses formuliert(Krummheuer, 2004, S. 116):

1. Thematisierung eines mathematischen Inhalts
2. Argumentationen, die gewöhnlich nur aus der Präsentation eines Schlusses bestehen ohne einer weiteren Legitimierung dieses Schlusses bzw. einer Thematisierung dieser Legitimierungen ausschließlich durch die Lehrerin
3. Interaktionsmuster mit starren Rollenzuteilungen
4. Partizipationsmöglichkeiten für tätig-werdende Schüler*innen mit geringer Autonomie
5. Partizipationsmöglichkeiten für die nicht-tätig-werdenden Schüler*innen mit diffusem bzw. geringem Aufmerksamkeitsgrad

In den Auswertungskapiteln 7.1 und 7.2 werden diese Dimensionen aufgegriffen und zur Analyse mit herangezogen.

5.3 Argumentationsanalyse

Zur strukturellen Rekonstruktion von Argumentationsprozessen kann auch, oder insbesondere im Rahmen der mathematikdidaktischen Forschung auf die Argumentationsanalyse zurückgegriffen werden. Dieser sollte zunächst eine die Bedeutungsaushandlungen, Inhalte und sozialen Interaktionen rekonstruierende Interaktionsanalyse vorangehen (so zum Beispiel bei Krummheuer & Brandt, 2001). Daran anschließend werden zentrale Bestandteile eines Arguments bzw. einer Argumentation identifiziert und mit Hilfe eines Toulmin-Schemas (vgl. auch Abb. 5.3) graphisch rekonstruiert. Eine strenge Trennung der Begriffe Argument und Argumentation scheint in Bezug auf die Trennung zwischen Objekt und Prozess (Sfard, 1991) angebracht. Bredow (2023) beschreibt nach einer ausführlichen Auseinandersetzung mit den Begriffen *Argument* und *Argumentation* ersteres als Produkt von Interaktions- und Aushandlungsprozessen, welche wiederum als *Argumentationen* bezeichnet werden können. Dies deckt sich mit der durch Schwarzkopf (2000) vorgenommenen Unterscheidung beider Begriffe. Da in der vorliegenden Arbeit keine Produkte,[36], sondern im Unterricht entstandene Interaktions- und Aushandlungsprozesse betrachtet werden, wird hier auch generell von *Argumentationen* gesprochen. Ein *Argumentationsprozess* liegt im Folgenden immer genau dann vor, wenn über mehrere Turns kollektiv Argumentationen (weiter) entwickelt werden. Dieser Begriff wird aber nicht streng von dem der Argumentation abgegrenzt, denn das prozesshafte ist in beiden verhaftet und daher werden Argumentation und Argumentationsprozess in dieser Arbeit mitunter synonym verwendet.

Wie oben beschrieben, sind die graphischen Rekonstruktionen von Argumentationen nach Toulmin (2003) zentraler Bestandteil der Argumentationsanalyse. Dabei sind für ihn drei Bestandteile obligatorisch für Argumente: das Datum (*data*, Gründe, Prämissen), die Konklusion (*claim*, aus dem Datum resultierende Behauptung) und der Garant (*warrant*, die von Datum zur Konklusion führende Schlussregel) (Toulmin, 2003, S. 90ff). Die graphische Veranschaulichung dieser obligatorischen Bestandteile in ihrer strukturellen Umsetzung kann in Abb. 5.3 eingesehen werden.

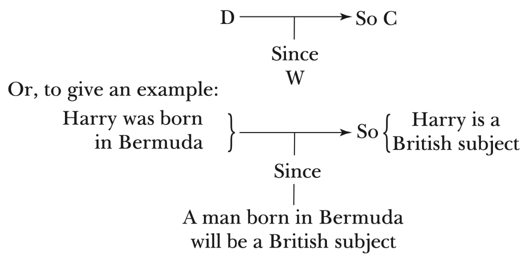


Abbildung 5.3: Beispiel für die Anwendung des Toulmin-Schemas (Toulmin, 2003, S. 92)

36 Wie beispielsweise schriftliche Beweise, Dokumente ...

Der Garant (Bredow, 2023; Cramer, 2018; Knipping & Reid, 2019; Krummheuer & Brandt, 2001) wird mitunter auch als *Regel* gekennzeichnet (Meyer, 2021). Als weitere, nicht obligatorische Bestandteile können der Modale Operator (*qualifier*, Sicherheit, mit der vom Garanten auf die Konklusion geschlossen werden kann), die (Ausnahme-)Bedingung (*rebuttal*, Abweichung von der Regel oder Bedingung für Gültigkeit der Regel) und die Stützung (*backing*, Absicherung des Garanten, Geltungsbereich des Garanten) angeführt werden (Toulmin, 2003, S. 93ff). In dieser Arbeit wird zusätzlich noch die *Kritik* (bspw. in Abb. 6.19) verwendet, die das explizite Infragestellen anderer Propositionen kenntlich machen soll.

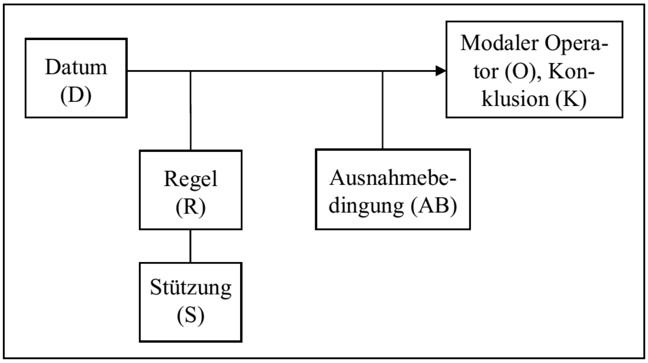


Abbildung 5.4: Vollständiges Toulmin-Schema (Meyer, 2021, S. 84)

Für die in der Arbeit erstellten Schemata wurden auch nicht explizierte Aussagen, die aber implizit aus den Bedeutungsaushandlungen mit erschließbar sind und zur Vollständigkeit der Argumentationen beitragen, mit aufgegriffen. Dieses Vorgehen findet man bspw. auch bei Bredow (2023), Cramer (2018), Krummheuer & Brandt (2001) oder Fetzer (2011). In der Tradition dieser Autor*innen wurden implizite Argumentationsbestandteile mit gestrichelten Umrandungen gekennzeichnet (vgl. bspw. Abb. 6.14). Weiterhin wurden sich inhaltlich widersprechende Aussagen (meist diametral gegenüberstehend) mit einem Blitz zwischen ihnen gekennzeichnet (so auch bei Bredow (2023), in dieser Arbeit einsehbar bspw. in Abb. 6.29).

Weiterhin relevant für die Analyse der Struktur und Inhalte der Argumentationen ist die Unterscheidung zwischen *analytischen* und *substanziellen* Argumentationen. Syllogismen und auch Strukturen der Aussagenlogik treffen Aussagen auf einer rein analytischen[37] Ebene unabhängig vom tatsächlichen Wahrheitsgehalt ihrer Prämissen. Das Argumentationsmodell von Toulmin soll unabhängig von einer Konsistenz der Argumentation auch synthetisch gehaltvolle Argumentationsmodelle nachzeichnen können (Höck, 2015, S. 194; Pfeifer, 2003, S. 153). Synthetisch gehaltvolle Argumentationen kennzeichnet Toulmin (2003, S. 105) mit dem Ad-

37 *Analytisch* wird an dieser Stelle in der Kant'schen Tradition in Abgrenzung zu *synthetisch* gebraucht; bzw. in der Toulminschen Tradition abgegrenzt von *substanziell* (beide Autoren benutzen *analytisch* als Kennzeichnung für Propositionen ohne Aussagegehalt über die empirische Erfahrungswelt) jektiv *substanziell* bzw. substancial und orientiert diese eher an rhetorischen statt deduktiven Argumentationsprozessen (Brandt, 2004, S. 18). Argumentationen, die von Toulmin (2003) als *analytisch* gekennzeichnet werden, „lassen argumentationstheoretisch betrachtet keinen Zweifel über den Schluss zu“ (Fetzer, 2011, S. 35). Dies bedeutet, dass die Schlussregel argumentationstheoretisch zwingend vom Datum zur Konklusion führen muss. Aussagekräftig entgegen des tautologischen Charakters werden solch analytische Argumentationen genau dann, wenn das Datum einen empirischen Gehalt hat, also seine Wahrheit und die darauf korrekt geschlossene Konklusion etwas über die Welt aussagen.

5.4 Qualitative Inhaltsanalyse

Die Inhaltsanalyse entwickelte sich aus der Notwendigkeit eines Auswertungsverfahrens für eine große Menge an Texten aus den Printmedien in den Vereinigten Staaten der 1930er und 1940er Jahre (Reichertz, 2016, S. 225). So etablierte sich die (quantitative) Inhaltsanalyse nicht nur in den Kommunikationswissenschaften (wie ursprünglich), sondern wird auch von Sozialwissenschaften benutzt, „um über fixiertes Material Schlussfolgerungen auf dessen Entstehungshintergrund zu ziehen“ (Mayring, 2008a, S. 8). Eine Entwicklung in Richtung steigender Quantifizierungen nach der Entstehung der Inhaltsanalyse schreibt Kuckartz (2018, S. 15) dem stärkeren Einfluss des Behaviourismus auf die Sozialwissenschaften zu. Gegensätzlich zur stärkeren Quantifizierung der Inhaltsanalyse entwickelte Philipp Mayring 1983 „eine qualitative Inhaltsanalyse, die sich darum bemüht, dem Text mehr abzugewinnen als das, was offensichtlich gegeben ist und die den Interpret/innen mehr Spielraum einräumt“ (Reichertz, 2016, S. 226). Im Vergleich zur eher der Theoriebildung verschriebenen *Grounded Theory* (Corbin & Strauss, 2015) bleibt die qualitative Inhaltsanalyse sehr nah am unmittelbar Gegebenen, fungiert eher beschreibend und „zielt auf eine sorgfältige und methodisch kontrollierte Zusammenfassung und Kategorienbildung“ (Kuckartz, 2009, S. 96). Nach Lamnek & Krell (2016, S. 475) können zwei Arten qualitativer Inhaltsanalyse unterschieden werden, wobei die Variante nach Mayring (2008b) eher der ersten Art zuzuordnen ist:

1. Die eine Form qualitativer Inhaltsanalyse unterscheidet sich von der quantitativen nur dadurch, dass sie nicht oder nur in Teilbereichen nicht quantifiziert. Ansonsten ist sie wie die quantitative Datenerhebung: Zuvor theoretisch entwickelte Analyseeinheiten, -dimensionen und -kategorien werden auf akzidentale oder systematische Dokumente angewandt.
2. Im strengeren Sinne interpretativer Sozialforschung ist die qualitative Inhaltsanalyse jedoch eine Auswertungsstrategie von zum Zwecke der Analyse erstellter oder auch akzidentaler Dokumente ohne a priori formulierte theoretische Analysekriterien

Für diese Arbeit wurde sich vor allem an der Vorgehensweise nach Kuckartz (2018) orientiert, die m.E. unter beide Arten qualitativer Inhaltsanalyse fallen kann.[38] Die durch Mayring offerierte strenge Regelgeleitetheit sollte zu Gunsten von mehr *Offenheit* einer weniger strukturierten Variante der qualitativen Inhaltsanalyse weichen. In diesem Sinne wurde das Verfahren nach Kuckartz (2018) ausgewählt, wobei auch hier noch zwischen drei verschiedenen Basisverfahren der qualitativen Inhaltsanalyse zu unterscheiden ist. Das zweite Basisverfahren ist die *evaluative qualitative Inhaltsanalyse*, die sich durch eine „*Einschätzung, Klassifizierung und Bewertung von Inhalten* durch die Forschenden" auszeichnet (Kuckartz, 2018, S. 123, Herv.i.O.). Das dritte Basisverfahren ist die *typenbildende qualitative Inhaltsanalyse*, welche im Vergleich zu den anderen beiden Basisverfahren methodisch anspruchsvoller und komplexer ist, da hier nach mehrdimensionalen Mustern gesucht wird, die ein tieferes Verständnis von Handlungsfeldern und/oder Gegenstandsbereichen ermöglichen (Kuckartz, 2018, S. 143). Für diese Arbeit wurde sich allerdings zur Strukturierung der von den Kindern eingebrachten *inhaltlichen* Aspekte zur Unendlichkeit für das erste Basisverfahren entschieden, die *inhaltlich strukturierende Inhaltsanalyse*. Dadurch, dass dieses Basisverfahren auch die Nutzung deduktiver Hauptkategorien sowie die induktive Bildung von Subkategorien ermöglicht (Kuckartz, 2018, S. 97), schien es zur inhaltlichen Strukturierung der von den Kindern eingebrachten Aspekte bestens geeignet. In Abb. 5.5 kann das Ablaufschema der inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2018) nachvollzogen werden. Der Ablauf wurde allerdings für diese Arbeit geringfügig abgewandelt.

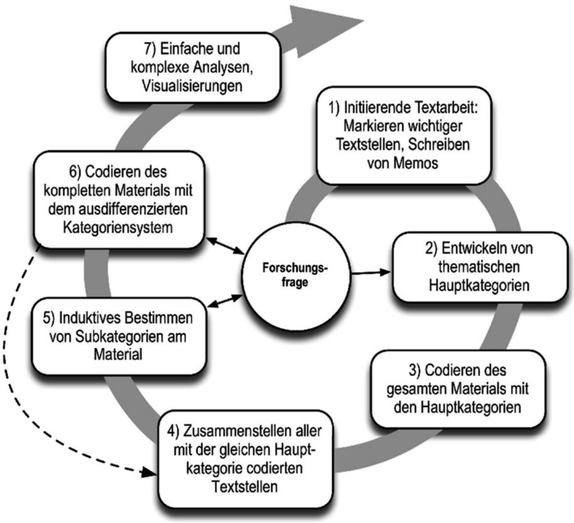


Abbildung 5.5: Ablaufschema einer inhaltlich strukturierenden Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2018, S. 100)

38 Die hier angewendete deduktive Bestimmung der Oberkategorien spricht allerdings für eine Anwendung im Rahmen der ersten Art.

Im ersten Schritt der initiierenden Textarbeit wurden nicht etwa Memos oder Fallzusammenfassungen geschrieben, sondern die Rekonstruktionen mit Hilfe der Interaktions- und Argumentationsanalyse vollzogen (vgl. Kap. 5.2 und Kap. 5.3). Diese Rekonstruktionen wurden soweit es ging verschriftlicht und die entstandenen handschriftlichen Notizen (anstelle der Memos) gesammelt und strukturiert. In diesem Schritt wurde sich aber auch sowohl an der übergeordneten Forschungsfrage sowie an den untergeordneten Forschungsfragen orientiert (für einen Überblick siehe Kap. 1). Die Entwicklung der thematischen Hauptkategorien erfolgte deduktiv in Anlehnung an Monaghan (2001) und Luis et al. (1991). Anschließend wurde, wie im Ablaufschema gekennzeichnet (Schritt 3), das gesamte Material mit den Hauptkategorien einmal komplett kodiert. Schritt 4 wurde mit Hilfe der Datenauswertungssoftware MaxQDA umgesetzt. Anschließend wurden die Hauptkategorien einzelnd anhand der Daten der Pro-Contra-Debatten an beiden Schulen betrachtet und induktiv Subkategorien gebildet (Schritt 5). Hierbei wurden die bereits rekonstruierten Bedeutungsaushandlungen zur Ausschärfung und Bestimmung der Inhalte sukzessiv mit herangezogen. Folgend wurden in Schritt 6 alle entstandenen Dokumente und Transkripte mit den entstandenen Subkategorien vollständig kodiert. Dabei emergierten neue Subkategorien, die in das Codesystem eingepflegt wurden. Abschließend erfolgte eine einfache Analyse und systematische Darstellung, nachzulesen in Kap. 7.4 dieser Arbeit. In Abb. 5.6 kann das Vorgehen in dieser Arbeit in Anlehnung an die von Kuckartz (2018) erstellte Grafik eingesehen werden.

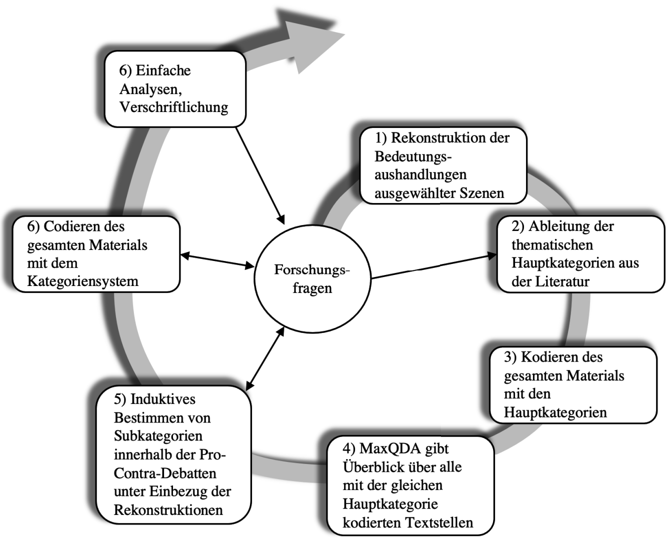


Abbildung 5.6: Ablaufschema der hier vorgenommenen inhaltlich strukturierenden Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2018, S. 100), erstellt mit Powerpoint

5.5 Zusammenspiel der Auswertungs- bzw. Analysemethoden

Wie bereits kurz in Kap. 5.4 erwähnt, werden die durch die Interaktionsanalyse gewonnenen inhaltlichen Aspekte der Bedeutungsaushandlungen bei der induktiven Kategoriengewinnung der qualitativen Inhaltsanalyse mit herangezogen. Diese inhaltlichen Aspekte wurden zum größten Teil in Interpretationssitzungen mit weiteren Wissenschaftler*innen auf ihre Gültigkeit geprüft und anschließend in den Rekonstruktionskapiteln neben Aspekten der sozialen Interaktion mit eingebunden. Durch dieses Vorgehen ist zwar das an die qualitative Inhaltsanalyse gestellte Kriterium der *Reliabilität* nicht vollständig erfüllt, da aber bei der Auswertung auf Quantifizierungen, Typenbildung oder die Darstellung von Zusammenhängen zwischen den induktiv gebildeten Subkategorien verzichtet wird, genügen die Absicherungen durch Peers im Rahmen der Interpretationssitzungen, um einen inhaltlichen Überblick über die von den Kindern eingebrachten inhaltlichen Aspekten der Unendlichkeit geben zu können. Aus diesem Grund wurde auch die Bestimmung der Inter- und Intrakoderreliabilität nicht für nötig erachtet.

Auch bei der Argumentationsanalyse fließen die sinngemäßen Rekonstruktionen aus der Interaktionsanalyse mit ein. Hier wird in den graphischen Darstellungen auf wörtliche Wiedergabe der Aussagen der Kinder verzichtet, sondern der verdichtete Sinngehalt angeführt. Des Weiteren helfen die mittels Interaktionsanalyse gewonnenen Erkenntnisse sowohl beim Rekonstruktionsprozess der implizit gegebenen Argumentationsbestandteile als auch bei der Bestimmung der Urheber*innen sinngemäß rekonstruierter Aussagen. Die Rekonstruktionen, welche in Interpretationssitzungen mit Hilfe von Peers abgesichert wurden, dienen somit sowohl der qualitativen Inhaltsanalyse als auch der Argumentationsanalyse als interpretative Unterstützung und inhaltliches Fundament.

6. Rekonstruktion ausgewählter Szenen

Was erwartet Sie in diesem Kapitel?

Im folgenden Kapitel werden die Rekonstruktionen aus insgesamt 5 ausgewählten Szenen dargelegt. Zunächst werden Bedeutungsaushandlungen auf Peer-Ebene untersucht, anschließend sollen die in der Stunde U2 an der Grund- und Gesamtschule stattgefundenen Pro-Contra-Debatten mit Hilfe von Toulmin-Schemata und schriftlichen Ausformulierungen in ihren Bedeutungsaushandlungen und Argumentationsprozessen rekonstruiert werden. Abschließend wird ein Klassengespräch zur selben Impulsfrage in der Grundschule sowie in der Gesamtschule rekonstruiert.

Und warum ist das wichtig für die Arbeit?

Die im Folgenden dargelegten Rekonstruktionen bilden das Fundament für komparative Vergleiche, welche schlussendlich in mehreren Iterationen zur Genese „abduktiver Blitze“ und somit zu den im nächsten Kapitel beschriebenen Ergebnissen geführt haben. Sie sind also als allen anderen Ergebnissen vorangehend anzusehen.

6.1 Gruppenarbeit: Nadja, Nadine, Berat und Kilian

Im Folgenden soll der Verlauf der Gruppenarbeit der Kinder Nadja, Nadine, Berat und Kilian rekonstruiert werden. Die hierbei primäre Fragestellung bei der Analyse war:

Welche inhaltlichen Ideen werden *von wem* wann eingebracht und wie verändern sich diese Ideen?

Weiterhin wird eine Rekonstruktion im dialektischen Sinne im fokussiert, d.h. die Analyse und Rekonstruktion der von den Kindern bevorzugten Thesen/ Antithesen und deren Begründungen im Verlauf der Diskussion. Der Wechsel von Positionierungen der Kinder und die dafür verantwortlichen Ereignisse im Rahmen der Diskussion können in Kurzform am Ende des Unterkapitels in Abb. 6.7 eingesehen werden.

In Phase U2.C finden sich die Kinder zu einer Gruppenarbeit zusammen. Phase U2.B endet im Sitzkreis mit folgendem Gesprächsimpuls: *Was meint ihr, kann man einen Beutel finden, in den man ALLE Zahlen packen kann? Findet in der Gruppe Argumente für Cantor und für Leibniz und entscheidet euch dann für eine Position.*
Neben den Kindern im Raum anwesend sind Herr Bämpfer (leitet die Unterrichtsstunde), Frau Ellestar (Klassenlehrerin) und die Forschende zur Steuerung der Technik.

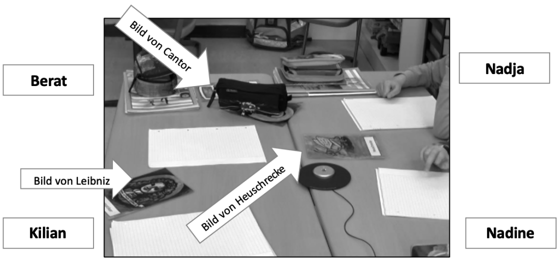


Abbildung 6.1: Bildschirmfoto des Gruppentisches der Kinder Kilian, Berat, Nadine, Nadja (26.04.2021)

Nadja, Nadine, Berat und Kilian sitzen gemeinsam an einem Gruppentisch. Vor Berat liegt ein Bild von Georg Cantor, vor Kilian liegt ein Bild von Gottfried Wilhelm Leibniz und vor Nadine das Bild einer Heuschrecke (siehe Abb. 6.1). Auf dem Tisch liegen die Blöcke und Schreibunterlagen der Kinder sowie ein mit der Kamera verbundenes Mikrofon.

Kurzbeschreibung der Turns 1-143:
Nadine nimmt innerhalb der Gruppe eine administrative Funktion ein. Berat verteidigt die Position Georg Cantors, dessen Bild vor ihm liegt. Nadja und Nadine

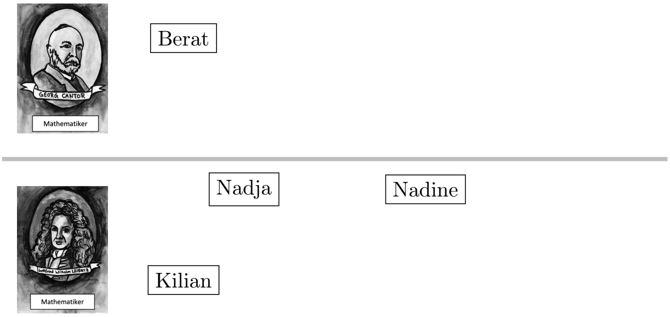


Abbildung 6.2: Ausgangspositionen der Schüler*innen Nadja, Nadine, Berat und Kilian zu Beginn der Gruppenarbeit in Unterrichtsstunde U2

versuchen ihn dabei zu unterstützen, obwohl sie Leibniz' Standpunkt teilen. Nadja moderiert die Gruppe oft, sie fordert Abstimmungen ein und möchte gern schnell mit der Aufgabe fertig werden. Kilian bringt sich eher zurückhaltend ein, ist aber von Cantors Position nicht überzeugt und positioniert sich eindeutig bei Leibniz. Berat bringt zu Beginn (Turn 30) die Idee ein, mehrere kleinere Säcke mit Zahlen zu füllen, um dann mit diesen vielen endlich begrenzten ,Teilsäcken' den großen Sack zu befüllen. Diese Idee wird von den anderen Kindern mit Verweis auf die Aufgabenstellung („in ei:nen Sack“ Nadja, Turn 41) verworfen.

Die Ausganslage der Positionierungen der Kinder für das folgende Transkript kann graphisch in Abb. 6.2 nachvollzogen werden.

144	Berat	Aber Cantor hat auch Recht, └ (unverständlich, für etwa eine Sekunde) ┘
145	Kilian	└ (unverständlich, für etwa eine Sekunde ┘
146	Nadine	└ Beide hab=m Recht. ┘
147	Nadja	»Berat adressierend›Sagst du nur, dass └ Cantor Recht hat °ab-° ┘
148	Berat	└ Na ich sag **alle** ┘ beide └ ham eigentlich Recht ┘ . Äh »zeigt auf das Bild von Leibniz, welches vor Kilian liegt›Leibniz hat auch Recht, es passt nicht **all:e**›
149	Nadine	└ °(Da ist ein) (unverständlich, für etwa eine Sekunde)° ┘ (3) Das weiß man ja @ni:cht@
150	Berat	(Es └ passt nicht rein ┘) (.) »zeigt auf das Bild von Cantor vor ihm›und der hat eigentlich auch Recht, man kann ein großen Sack (.) hol=n und »schaut in Nadines Richtung›(näh)›
151	Nadja	└ »Berat adressierend›Hat auch die Heuschrecke ┘ Recht?›

Berat besteht auf Cantors Position, bringt aber inhaltlich keine Begründungen. (Turns 144, 150). Auf Nadines Aussage, dass auch beiden Recht gegeben werden kann, reagiert er mit Zustimmung. Die vorherige Positionierung seiner Gruppenmitglieder ist in der Gruppe etabliert und Berat erkennt eine Möglichkeit, wie er Cantor, dessen Verteidigung er sich zum Auftrag gemacht hat, nun doch in das Ergebnis der Gruppenarbeit einbringen kann. Als er in Turn 150 beginnen möchte, inhaltliche Argumente zu sammeln, bricht er diesen Versuch selbst ab

(„näh“). Nadja erkennt, dass Berat Cantor nicht inhaltlich verteidigt, sondern aufgrund der Zuweisung von Cantors Bild: „Sagst du nur, dass Cantor Recht hat [...]“ (Turn 147). Anschließend versucht sie ihn humorvoll darauf hinzuweisen, indem sie den Fokus der Diskussion weg von den Inhalten der Aussagen auf die Bilder lenkt: „Hat auch die Heuschrecke Recht?“.

Nadine versucht, weiter inhaltlich zu arbeiten und sich vermittelnd zwischen dem Gruppenkonsens und Berats Wunsch einzubringen (Turns 146, 149). Hier tritt die dialektische Kompetenz Nadines stark hervor, welche die Komplexität der Suche nach einer Synthese von zwei so konträren Positionen nicht so ambitioniert wahrnimmt, wie sie eigentlich ist. Der oben angeführte Abschnitt der Gruppenarbeit führt nun zu einer neuen Ausrichtung der Positionierungen der Kinder, einzusehen in Abb. 6.3.

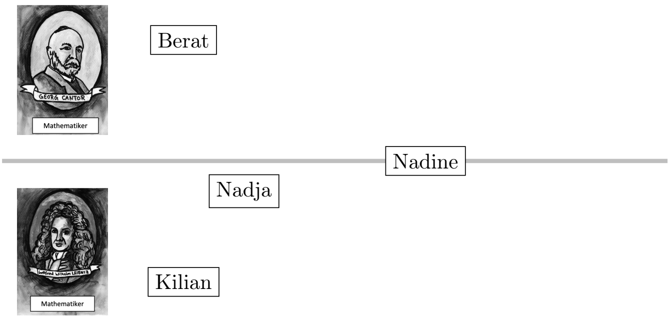


Abbildung 6.3: Positionierungen der Schüler*innen Nadja, Nadine, Berat und Kilian; Stand Turn 151 der Gruppenarbeit in Unterrichtsstunde U2

152	Kommentar	Für etwa zwei Sekunden redet niemand
153	Nadine	(Das Mikrofon) °@(2)@°
154	Nadja	Aber gibt es so ein Sack?
155	Kilian	└ Aber man kann ja (nicht und dann gleich Säcke) (.) sonst wär die Erde ein Sack ┘
156	Berat	└ »ich Richtung Nadja nickend›Ja (unverständlich, für etwa eine Sekunde) Ich kann selber ein basteln ┘
157	Nadja	└ (Aber) das dauert Milliarden Jahre. ┘
158	Berat	Dauert nen Monat oder so.
159	Nadja	└ @(.)@ ┘
160	Nadine	└ Ein Jahr oder so ┘

Nadja versucht, die Diskussion auf die inhaltliche Ebene zurückzuführen (Turn 154). Ihre konstruktive Vorgehensweise mit der Aufgabenstellung zeigt sich darin, dass sie die Gruppe oft moderiert und einen klaren Eindruck von der Arbeitsweise ihrer Mitstreiter*innen hat.

Kilian verteidigt Leibniz’ Position, in welcher die Existenz eines Sackes/ Beutels abgelehnt wird. Zur Aussage „sonst wär’ die Erde ein Sack“ (Turn 155) gibt es mehrere Deutungsalternativen:

- Kilian hat noch keine Vorstellung von der Erde als *Sphäre*, also als etwas Abgeschlossenes. Er bezieht sich ontologisch nicht auf den Erdball, sondern auf ein absolutes Konglomerat von Entitäten, eine aus Objekten der Anschauung gebildete *Allmenge*. Mit *Erde* fasst er alles zusammen, was ihm lebensweltlich bekannt ist - also auch Zahlen.

- Er hat zwar eine Vorstellung des Planeten Erde als Sphäre, sieht aber die Erde als etwas zyklisches. Am Meridian entlang könnte man unendlich oft die Erde umkreisen. In dieser Deutungsalternative spielt die Unendlichkeit eine Rolle.

- Er verwechselt die Erde mit dem Universum und möchte ausdrücken, dass ein Gefäß, welches unendlich viele Dinge fassen können muss, selbst auch unendlich groß sein müsste. Ein unendlich großes Gefäß wäre bei ihm dann gleichzusetzen mit dem Universum, da die Vorstellung von etwas unendlich Ausgedehntem *innerhalb* etwas unendlich Ausgedehntem, also einer kleineren Unendlichkeit, die in einer größeren Unendlichkeit eingeschlossen ist, für ihn irritierend ist.

- Er benötigt explizit eine Vorstellung von etwas sehr Großem, um die inhaltliche Argumentation auf einer abstrakteren Ebene fassen zu können. Das größte ihm lebensweltlich bekannte Objekt ist die Erde.

Auf Kilians Einwand gehen die restlichen Gruppenmitglieder nicht ein. Berat bringt die Idee ein, einen Sack selbst zu basteln (Turn 156). Die in Phase U2.B der Stunde angeleiteten Impulse wurden von Demonstrationen der Lehrkraft begleitet, in welchen selbst gebastelte Beutel mit Zahlenkärtchen befüllt wurden. Eine mögliche Deutung von Berats Aussage wäre also, dass er diese Demonstration wieder aufgreifen möchte und denkt, dass er eine ähnliche Vorgehensweise auch bei unendlich vielen Zahlen wiederholen kann. Eine andere mögliche Deutung wäre, dass Berat nun inhaltlich für Cantor argumentieren möchte, aber der Abstraktionsgrad der Aufgabenstellung seine konkret an Anschauung gebundene Vorstellung so weit übersteigt, dass er versucht, auf der enaktiven Ebene Lösungen zu finden. Nadja geht auf die Problematik der räumlichen Ausdehnung eines derartig gebastelten Beutels nicht ein (was Kilians Argumentation aus Turn 155 eigentlich inhaltlich anstößt), sondern bezieht sich direkt auf den zeitlichen Aspekt („Aber das dauert Milliarden Jahre“, Turn 157). Dies spricht dafür, dass sie Unendlichkeit stärker mit dem zeitlichen statt dem räumlichen Aspekt assoziiert.

165	Kilian	└ Mindestens ein Jahr (oder). ┘
166	Berat	└ Ja wer is denn jetzt für Cantor? ┘ (.)
167	Nadja	└ @(.)@ ┘
168	Berat	(.) Wer ist jetzt für alle beide?
169	Kommentar	Nadja und Nadine melden sich.
170	Nadja	Ich denke schon alle beide.
171	Berat	(also sa- sagt ihr Ca- └ Cantor? ┘)
172	Nadja	└ Kilian hat verlorn ┘ , wir schreiben alle beide Ende. @(.)@

173	Berat	(.) Wer ist für Cantor? [meldet sich]
174	Kommentar	In der nächsten Sekunde meldet sich Nadine erneut.
175	Kilian	Ach ihr seid nur für Cantor
176	Berat	└ (Was) ist mit Leipzig, Lei- Leibniz? ┘ (3) okay ja, ich hab gewonn, Spaß.
177	Kilian	└ (unverständlich, für etwa eine Sekunde) ┘
178	Nadine	└ Leibniz ┘
179	Nadja	Wer hat für beide?
180	Kommentar	Nadine, Nadja und Berat melden sich.

Berat fordert eine klare Positionierung seitens Nadja und Nadine ein, wobei nicht auf inhaltliche Argumentationen eingegangen wird. Es wird eine Abstimmung initiiert, die Berat und Nadja als eine Art Wettkampf mit Kilian ansehen (Turns 172, 176: „Kilian hat verlorn“ und „okay ja, ich hab gewonn“). Es finden mehrere Abstimmungen in kurzer Zeit statt, die aber per Mehrheitsentscheid und nicht auf Basis inhaltlicher Diskussionen geführt werden. Kilian durchblickt den Wettkampfcharakter der Abstimmung und möchte Nadja und Nadine darauf hinweisen, dass sie keine inhaltliche Position verteidigen sondern Berats Partei aufgrund von Sympathien ergreifen (Turns 175, (vermutlich) 177). Nadine meldet sich bei der Abstimmung auch bei Cantor. Entweder möchte sie Berat damit abermals unterstützen, oder sie versteht die Frage im Sinne der Klasseninklusion: Wer für beide abstimmt, muss somit *auch* für Cantor stimmen. Nach der letzten Abstimmung stimmen Berat, Nadine und Nadja dafür, dass beiden Mathematikern Recht gegeben werden kann (vgl. Abb. 6.4). Zunächst ohne argumentative Begründung ein Ergebnis festzulegen, nach dessen Regel und Fall erst noch gesucht wird, hat einen abduktiven Charakter. Die Kinder haben, ohne sich vorab an These und Antithese substanziell inhaltlich abzuarbeiten, eine Synthese gefunden, deren Begründung noch aussteht.

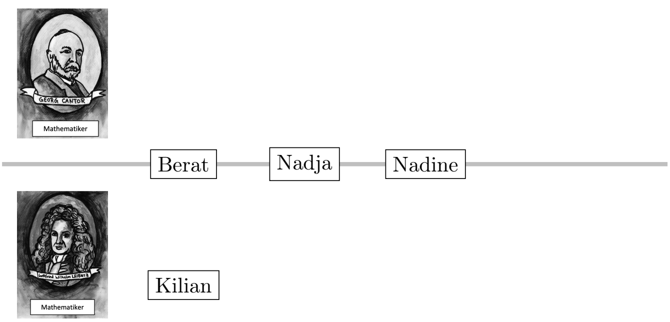


Abbildung 6.4: Positionierungen der Schüler*innen Nadja, Nadine, Berat und Kilian; Stand Turn 180 der Gruppenarbeit in Unterrichtsstunde U2

181	Frau Ellestar	[ist nicht zu sehen] Kann man da jetzt Argumente (bring? Was du grade gesagt hast?)

Die Kinder werden von Frau Ellestar dazu aufgefordert, ihre Festlegung argumentativ zu begründen.

Kurzbeschreibung der Turns 182-199 (siehe Transkriptionsbuch):
Herr Bämpfer tritt an den Tisch und Nadine eröffnet ihm, dass sie es schwer findet, sich festzulegen. Berat möchte Herrn Bämpfer eine Idee präsentieren. Dabei wird er von ihm mit dem Angebot, den Kindern ein Beispiel geben zu können, unterbrochen.

200	Rosa	Geben Sie keins, sonst wird's doch └ schwieriger. ┘

Einige Kinder am Nebentisch (insbesondere Rosa) intervenieren.

208	Herr Bämpfer	└ [kniet sich vor den Tisch] ┘ »zu den vier Schüler:innen sprechend›°Also ich Herr Bämpfer würde zum Beispiel sagen, das ist ganz schön schwierig, was └ Cantor vor hat. ┘ Ja? (.) Weil ich persönlich kann mir nicht vorstellen, dass es so einen großen Beutel gibt, wo ich alle wirklich alle Zahlen weil wie viel Zahlen gibt es? Unendlich └ viel. ┘ (.) Dann muss ja auch der der Beutel°
[...]		
212	Nadja	Und es komm immer wieder └ neue (.) ┘ Es gibt mehr └ als unendlich. ┘
213	Herr Bämpfer	└ »Nadja zunickend›Jaja›┘ (2) └ so und ┘ da würde ich └ doch aufschreiben ┘ »macht mit seiner Hand Schreibbewegungen in die Luft›ja, ich aufschreiben, so einen großen Beutel (.) kann ich mir nicht vorstellen, dass es den gibt.

Herr Bämpfer kommuniziert auf Rosas Einwand hin das Beispiel nur am Gruppentisch und achtet darauf, dass die anderen Gruppen nicht beeinflusst werden. Berat versucht anschließend an das Beispiel, Herrn Bämpfer seine Idee der Reduktion des Unendlichen in unendliche Teilschritte zu erläutern. Diese Idee wurde zuvor (Turn 30) schon von ihm eingebracht und von der Gruppe verworfen, ebenso wird sie nun von Herrn Bämpfer abgelehnt. Herr Bämpfer verweist allerdings dabei nicht auf die Aufgabenstellung, sondern versteht Berats Ausführungen nicht. Er lässt die Kinder nun allein weiterarbeiten. Nadja nimmt sofort die Position des vorgegebenen Beispiels an, während Nadine vorerst weiterhin Berat unterstützen möchte („für beide“, Nadine, Turn 222). Nach einer kurzen Diskussion am Beispiel stimmen alle Kinder der Position von Leibniz' (bzw. Herrn Bämpfer) zu (vgl. Abb. 6.5). Sie entscheiden sich ‚Leibniz hat Recht' zu verschriftlichen und setzen es sofort um (Turns 236-269). Als Begründung wählen sie dabei die in Herrn Bämpfers Beispiel gewählte Argumentation, dass ein so großer Sack nicht vorstellbar sei.

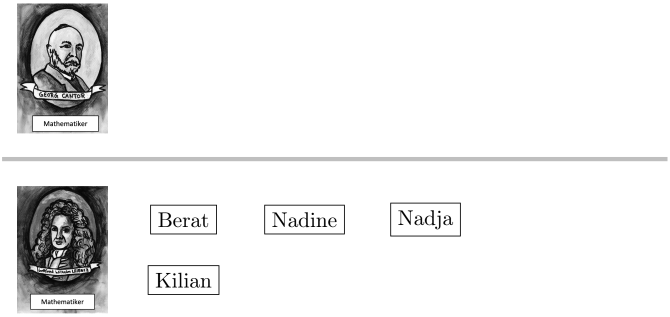


Abbildung 6.5: Positionierungen der Schüler*innen Nadja, Nadine, Berat und Kilian; Stand Turn 236 der Gruppenarbeit in Unterrichtsstunde U2

270	Frau Ellestar	└ °(unverständlich, für etwa zwei Sekunden) ┘ (nach Lösungen zu gucken, vielleicht gibt es ja noch ne Lösung)°
271	Nadine	└ Oka:y jetzt (2) jetzt denken (.) ┘ jetzt denken wir mal wa::s Cantor denken würde └ wir stelln uns das (.)°@(2)@° ┘

Frau Ellestar gibt der Gruppe einen kurzen Impuls, noch nach Lösungen über das bereits Aufgeschriebene hinaus zu suchen. Nadine greift dies auf und motiviert ihre Mitstreiter*innen, hermeneutisch[39] tätig zu werden. Die Kinder besprechen anschließend, was in einen riesigen Sack passen könnte. Dabei werden Beispiele von *Objekten der Anschauung* gebracht wie ein drei Meter langes Seil (Berat, Turn 291) oder der gesamte Klassenraum mit einer Länge von acht Metern (Nadine, Turn 294). Des Weiteren führen sie auf, dass auch *neu erfundene Zahlen* wie eine Brillion (Nadja, Turn 286) oder eine Brillian (Berat, Turn 289) in den Beutel gelegt werden könnten, also *Objekte des Denkens* (Cantors Begriff einer Menge, → S. 81f). An diese Ausführungen schließt sich die folgende Interaktion an, deren Interpretation/ Auswertung (Turns 304-314) auch in Brieger (2022b) sowie Brieger (2022a) nachgelesen werden kann.

304	Nadja	└ »erst Berat, dann Nadine ansprechend›Man brau-, man ┘ bräuchte mini kleine Zahlen, damit es in einen Beutel pa:sst.
305	Nadine	°@Kopfexplosion@°
306	Berat	(2) °@Explosion@° └ [stellt eine Explosion mit den Händen dar] ┘
307	Nadja	(.) └ »eine Explosion des Kopfes nachahmend›°@(2)@° ┘ └ @(.)@ ┘

Nadja bringt mit ihrer Idee der räumlich kleinen Zahlen die erste inhaltliche Idee ins Spiel, wie beiden Mathematikern Recht gegeben werden kann. Sie bezieht sich dabei aber nicht auf *unendlich* kleine Zahlen, sondern benutzt das Wort ‚mini'

39 Vgl. Kap. 3.3.1 auf S. 63

(Turns 301, 304) und schreibt den Zahlen damit eine gewisse räumliche Ausdehnung zu. Diese Zuschreibung kann ihren Ursprung in der Einführung des Beutels durch Herrn Bämpfer in Phase U2.B genommen haben, als die Zahlen über kleine Kärtchen in den Beutel sortiert wurden. Durch diese Versinnbildlichung kann eine mentale Vorstellung von Zahlen mit räumlicher Ausdehnung bzw. Zahlen als Kärtchen angeregt worden sein. Alternativ kann von ihr auch ein dynamischer Prozess gemeint werden: wenn man sukzessiv die Zahlen verkleinert, passen bei jedem Schritt der Verkleinerung mehr Zahlen in den Beutel. Führt man diesen dynamischen Prozess ins Unendliche fort, so können alle Zahlen sukzessiv in den Beutel gepackt werden.

Die anschließenden Ausrufe, die von Lachen begleitet werden, können als Erleichterung, aber auch als Ausdruck kognitiver Aktivierung interpretiert werden. Die Kinder äußern sich auf Basis einer lebensweltlichen Sprache (‚Kopfexplosion' bezieht sich auf ein Emoji), sie nehmen sich also eine Pause vom mathematischen Kontext (sind also kurzfristig erleichtert, dass sie einen gemeinsamen Durchbruch bei der Bearbeitung der Aufgabe erleben).

308	Nadine	└ Wie geht das? Ich kann, ich kann (nicht richtig zeichnen.) ┘
309	Nadja	└ @(.)@ ┘
310	Kilian	└ Trotzdem ┘
311	Nadja	└ Diese Welt ┘ (spinnt) mit mir.

Nadines Aussage (Turn 308) kann verschiedenartig interpretiert werden:

- Sie möchte die Idee von Nadja vom Abstrakten ins Konkrete holen und überlegt, anschließend an Phase U2.B[40], wie sie ‚mini kleine' Zahlenkärtchen realisieren kann.

- Nadine möchte Nadjas Idee als Argumentation für Cantor verschriftlichen, hat die Idee aber noch nicht weitgreifend genug verstanden, um sie paraphrasieren und auf Papier bringen zu können.

Auf Nadines Frage reagieren die anderen Kinder inhaltlich nicht, sodass diese Deutungsalternativen gleichrangig nebeneinander stehen bleiben. Kilian beginnt einen Satz (siehe nächster Absatz) und Nadja unterbricht ihn. Sie äußert „Diese Welt spinnt mit mir" (Turn 311) und drückt damit aus, dass sie trotz der vorab beschriebenen Erleichterung eine kognitive Dissonanz erfährt. Auslöser für kognitive Dissonanzen können u.A. philosophische Gespräche sein (Lafortune et al., 2003). Nadjas Aussage spricht für eine tiefgründige Beschäftigung ihrerseits mit dem Thema.

312	Kilian	»Nadja adressierend›Trotzdem passt das dann nicht, └ (weil es sind) unendlich. ┘ ›
313	Berat	└ Ich versteh überhaupt gar nichts. ┘
314	Nadja	»Kilian adressierend›Kilian du denkst zu sehr an die Realität. Denk mal an die un- @Unrealität@.

Kilian versteht Nadjas Idee der ‚mini' kleinen Zahlen als *Objekte der Anschauung* mit räumlicher Ausdehnung, von denen unendlich viele zusammengefasst werden

40 In Phase U2.B wurden auf Kärtchen geschriebene Zahlen in aus Papier gebastelte Beutel gelegt sollen. Ein Konglomerat unendlich vieler räumlich ausgedehnter Objekte ist für ihn aber unendlich groß und „passt [..] dann nicht“ (Turn 312). Die Begrenzung durch den Beutel versteht er als *Ende*, was der *Un*endlichkeit der enthaltenen Gegenstände widerspricht. Nadjas Idee wird von ihm als Zusammenfassung unendlich vieler Zahlen mit räumlicher Ausdehnung interpretiert und nicht als dynamischer Prozess immer kleiner werdender Zahlen. Nadja fordert ihn daraufhin direkt dazu auf, abstrakter zu denken (Turn 314). Die angesprochene Realität steht für sie an Stelle einer konkreten Realisierung der Zahlen (beispielsweise auf Kärtchen), mit der ‚Unrealität' meint sie nicht etwa, dass Kilian *unrealistisch* denken, sondern dass er sich von den konkreten Vorstellungen lösen soll. Er ist nun wieder der Einzige, dessen Positionierung bei Leibniz verbleibt (wie zuvor: vgl. Abb. 6.4).

Die Kinder verknüpfen Nadjas Aussage anschließend mit der Zukunft, in welcher die angesprochene ‚Unrealität' denkbar wäre (Berat, Turn 315; Nadja, Turn 316). Nadja betont damit ihre Aufforderung zum Abstrahieren und rückt den dynamischen Charakter ihrer ‚mini' kleinen Zahlen in den Fokus. Weiterhin wird auch die Vergangenheit genannt (Nadine, Turn 317) - Zeit als etwas Unendliches, dynamisches und Abstraktes wird auch in vorhergehenden Ausschnitten dieser Gruppenarbeit beim Thema Unendlichkeit mit angebracht[41]. Vergangenheit und Zukunft sind zudem beide nicht präsent für die Kinder erfahrbar, sie bilden somit einen weiteren Schritt des Abstrahierens. Nachdem die Gruppe sich humorvoll am Thema der Zeitformen abgearbeitet hat, interveniert Frau Ellestar und fordert die Kinder dazu auf, Kilian eine Idee formulieren zu lassen (Turn 337). Damit unterbricht sie den Diskussionsfluss und kommuniziert ihre Einschätzung zur Gruppendynamik. Kilian drückt nach der Aufforderung seine Positionierung zu Leibniz aus, hat aber seine zugehörige Argumentation vergessen. Frau Ellestar begründet dieses Phänomen der Gruppe gegenüber damit, dass sie ihn nicht gleichberechtigt an den Diskussionen partizipieren lassen. Nadine fragt anschließend in die Runde, wer noch Ideen hat (Turn 349).

350	Nadja	« sich kurz meldend> Also ich> (.) de:nke wir sollten schreiben, dass (.) Leibniz hatten wir schon, hat Recht, └ weil es so einen großen Sack nicht gibt ┘ « Handbewegung machend > und └ und weil und Cantor hat Recht, weil wenn es so ┘ kleine Zahl=n gä:be, so mini └ kleine die die so ┘ pul:verisiert zumindesten sind so mini klein, so> « den Körper wippend> └ mini, mini, mini klein (.)> so klein wie Luft ┘ da- die würden in so ein Sack passen.

Nadja fasst den aktuellen Stand der Gruppenarbeit zusammen. Sie versucht hier, dialektisch zu arbeiten und führt aber beide Positionen nicht zu einer Synthese, sondern stellt sie als Dissens nebeneinander (Turn 350). Sie möchte beide Argumentationen auch verschriftlichen, sieht also die Aufgabe mit ihrer Lösung zur Cantorschen Position als erledigt an.

Die Idee der ‚mini' kleinen Zahlen greift sie hier wieder auf, modifiziert sie aber um den dynamischen Prozess zu unterstreichen. Dennoch hat für Nadja diese

41 Interessant ist, dass die Kinder sich in der gesamten Gruppenarbeit nicht mit der Unendlichkeit des Raumes auseinandersetzen (außer Kilian, Turn 155) - Zeit hingegen fließt oft mit ein und dient als lebensweltlicher Anker für die Beschäftigung mit Unendlichkeit

Dynamik ein Ende - sich unendlich verkleinernde Zahlen können minimal so klein wie Luft werden. Ihre Vorstellung unendlich kleiner, aber räumlich ausgedehnter Objekte endet nicht, wie von einem älteren Kind erwartbar, beim Atom, sondern bei Luftmolekülen.

356	Berat	« mit den Händen einen Sack formend> So einen kleinen Sack wird=s ein Billion bl- Billion reichen.>
357	Kilian	└ Wird es nich. (2) Wird es nich. ┘
358	Nadja	└ »zu Berat›J::a. (.) Also (zu) z- ┘
359	Kilian	└ Wird es nich, es ist unendlich. ┘

Berat versucht, Nadjas Idee vom Abstrakten ins Konkrete zu übertragen und dabei seine Idee der Reduktion des Beutels in mehrere kleinere Beutel wieder aufzugreifen. Kilians Aussage (Turn 359) kann man verschiedenartig deuten:

- Kilian bezieht sich auf Nadjas Idee:
  Kilian hat verstanden, dass selbst Luftmoleküle eine gewisse räumliche Ausdehnung haben und dass eine Ansammlung solch kleiner, aber unendlich vieler Zahlen trotz allem eine insgesamt unendliche Ausdehnung hätte. Somit könnten die sich ins Unendliche ausgedehnten Zahlen nicht begrenzt werden, schon gar nicht räumlich durch einen Beutel.

- Kilian bezieht sich auf Berats Idee:
  Berats Idee der kleineren Beutel ist für Kilian nur eine Scheinlösung, da auch von den kleineren Beuteln mit jeweils einer Billion Zahlen unendlich viele existieren müssen, um unendlich viele Zahlen unterzubringen. Unendlich viele kleine Beutel können für ihn genauso wenig begrenzt werden wie unendlich viele kleine Zahlen.

Beide Deutungsalternativen sprechen dafür, dass Kilian schon ein ausgeprägteres Verständnis von *aktualer* Unendlichkeit hat als die anderen Kinder. Er geht mit der Aufgabenstellung seriös um und möchte bei den ‚Blödeleien' der anderen Kinder nicht partizipieren. Die meisten seiner Beiträge sind inhaltlich gehaltvoll, worauf auch meist von der Gruppe reagiert wird.

Nadja möchte, dass ihre Idee verschriftlicht wird während Berat auch noch eine Idee einbringen möchte. Berat formuliert These und Antithese gegenüberstellend, ohne inhaltlich zu argumentieren (Turn 372). Nadine führt ihre administrative Funktion in der Gruppe aus und fordert eine Abstimmung ein. Zunächst fragt sie Zustimmung zu Cantor ab, dabei melden sich Berat und sie selbst (Turn 376-378). Bei einer zweiten Abstimmung, aufgegriffen durch Nadja, melden sich alle Kinder für „Wer ist für beide?“ (Nadja, Turn 379). Die Gruppe beginnt, Nadjas Lösung (Zahlen so klein wie Luft) aufzuschreiben. Auch Kilian schreibt nach einer kurzen Rückfrage (Turn 392) mit. Alle Kinder haben sich nun auf die Mitte beider Positionen geeinigt (vgl. Abb. 6.6). Sie unterstützen sich gegenseitig im Schreibprozess.

470	Frau Ellestar	»Kilian adressierend› └ Für wen ┘ hast du dich entschieden?›
471	Berat	»flüsternd Kilian adressierend›°Leibniz°›
472	Kilian	Für beide.

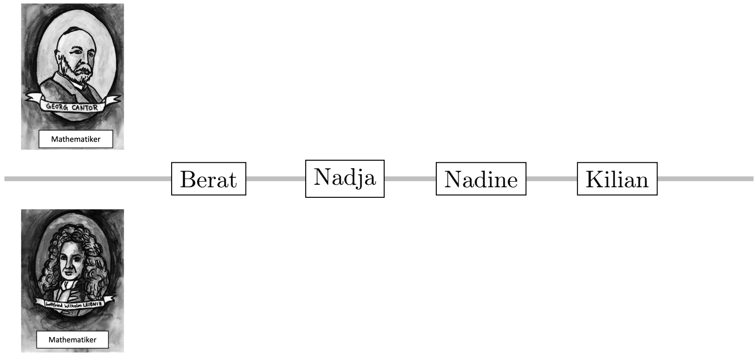


Abbildung 6.6: Positionierungen der Schüler*innen Nadja, Nadine, Berat und Kilian; Endergebnis der Gruppenarbeit in Unterrichtsstunde U2

473	Frau Ellestar	»Kilian adressierend›Auch für beide. └ Und wie ist deine Begründung?›┘
474	Nadja	└ Ich ha- ┘
475	Kommentar	Für die nächsten vier Sekunden redet Kilian sowie Berat, Nadja und Nadine nicht. Es laufen verschiedene Personen durch das Bild.
476	Kilian	»Frau Ellestar adressierend›Ich habe bei beiden ne Begründung hingeschrieben.›
477	Frau Ellestar	»Kilian adressierend›Bei beiden?›
478	Kilian	»Lehrerin adressierend›(.) Ja.

Frau Ellestar nimmt abermals eine Rolle der Beschützerin gegenüber Kilian ein. Berat beantwortet die ausdrücklich an Kilian gerichtete Frage für ihn (Turn 471). Dies kann man zum einen als Hilfestellung für Kilian deuten, zum anderen als Fortführung der Rivalität und versuchte Bloßstellung. Kilian geht auf Berats Hinweis nicht in direkter Konfrontation ein und antwortet „Für beide“ (Turn 472). Hiermit drückt er seine Zugehörigkeit zur Gruppe über die Adaption der Position der anderen Kinder aus. Aus der vorhergehenden Abstimmung (Turn 379ff) war schon deutlich hervorgegangen, dass Kilian zwar nicht *für Cantor*, aber durchaus für beide stimmen kann. Daher, dass die versöhnliche Idee zur Lösung der Cantor'schen Position nicht von von Berat initiiert wurde, sondern von Nadja, kann die Rivalität der beiden Jungen nun beendet werden. Frau Ellestar ist kurz verwundert (Turn 477), dass Kilian Gründe für die Richtigkeit beider Positionen aufgeschrieben hat, davon lässt er sich aber nicht beirren.

Innerhalb der Gruppe wurden somit, einer Antinomie gleichkommend, Gründe für die Wahrheit zweier konträrer Positionen aufgeschrieben. Die Begründung für Cantors Position ist aber nur scheinbar konträr zu der von Leibniz: Die Idee der ‚mini' kleinen Zahlen ist inhaltlich eher eine Synthese von Leibniz' und Cantors Standpunkt, die sich zuvor als These und Antithese diametral gegenüberstanden.

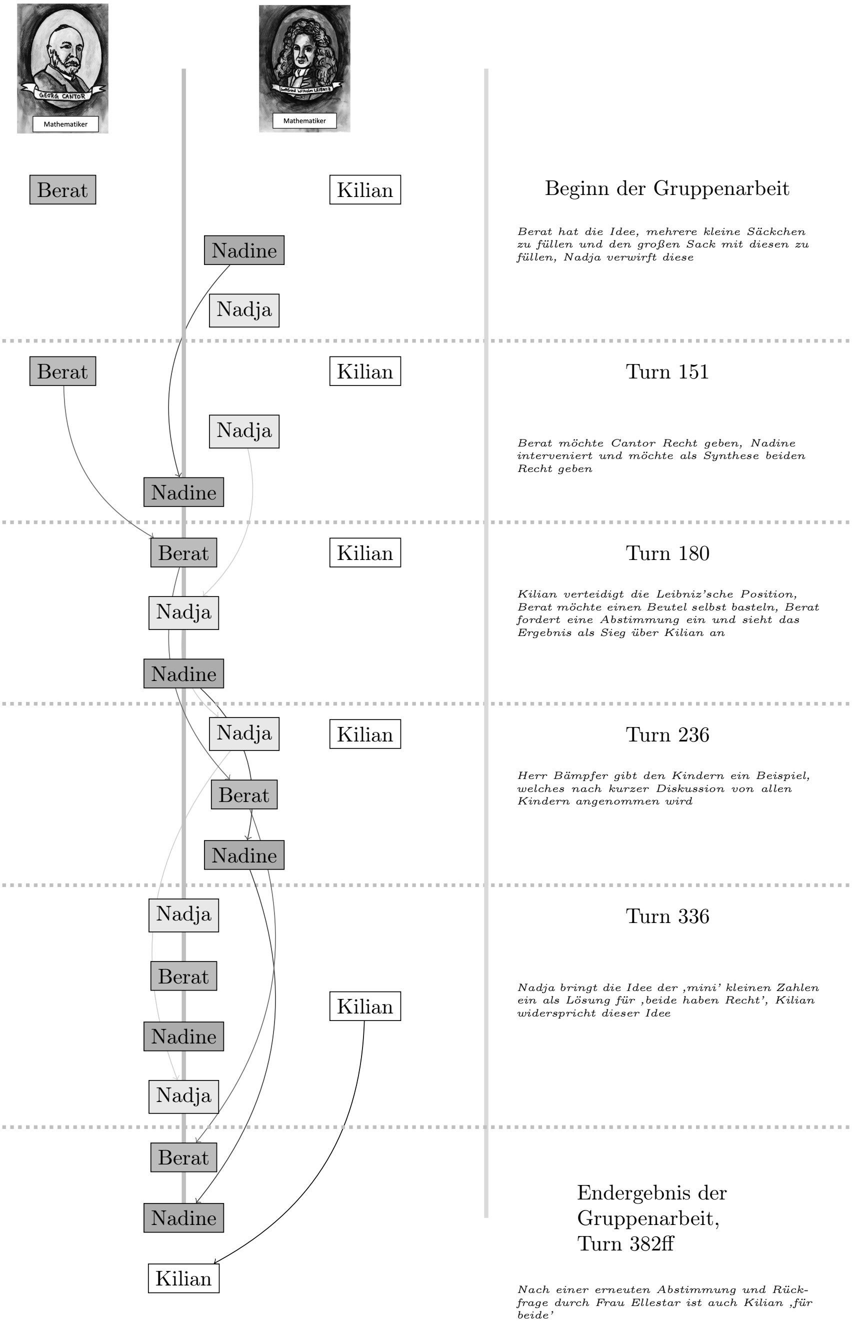


Abbildung 6.7: Graphische Rekonstruktion der Positionierungen der Schüler*innen Nadja, Nadine, Berat und Kilian im Verlauf der Gruppenarbeit in Stunde U2

6.2 Pro-Contra-Debatte: Grundschule

An die Gruppenarbeit folgend schließt sich die Phase der Pro-Contra-Debatte an. Auf eine strengere Debattenkultur wurde hier verzichtet (siehe auch Kap. 4.4.2), weshalb sich weder die für Pro-Contra-Debatten üblichen Eröffnungsplädoyers noch die Einhaltung gewisser Zeitphasen im Verlauf der Debatte wiederfinden.

Die primäre Fragestellung zur Rekonstruktion dieser Unterrichtsphase (Phase U2.D) ist

Welche Argumentationsprozesse lassen sich wie mit Hilfe von Toulmin-Schemata nachzeichnen?

Hierzu werden dichte Passagen zunächst interaktionistisch rekonstruiert und anschließend mit Hilfe der Argumentationsanalyse (Kap. 5.3) in ihrer Struktur nach Toulmin (2003) graphisch verbildlicht. Der Aufbau der Rekonstruktion bzw. des Kapitels folgt linear dem Verlauf der Debatte. Ein besonderer Fokus bei der Rekonstruktion der Argumentationen wird auf die durch die diametral gegenübergestellten Propositionen von Cantor und Leibniz erzeugten *dialektischen* Argumentationsprozesse der Kinder gelegt. Diametrale Aussagen werden durch Blitze in den Schemata symbolisiert.

Die Kinder befinden sich am 26.04.2021 im geteilten Unterricht (aufgrund der Maßnahmen wegen der COVID-19-Pandemie). Die Schule hat sich dazu entschieden, die Teilung in homogenen Lerngruppen vorzunehmen, wobei die Homogenisierung bzw. Zusammenstellung der Gruppen am Notendurchschnitt der Kinder orientiert ist. Die im Folgenden debattierenden Kinder haben Noten in der oberen Hälfte des Durchschnitts.

Für die Pro-Contra-Debatte stellen sich die Kinder in der Grundschule vor der Tafel auf. An der (von der*dem Betrachter*in aus gesehen) linken Seite der Tafel steht in Druckbuchstaben „CANTOR: Ich möchte alle Zahlen in einen Beutel packen“. Auf der rechten Seite der Tafel stehen die Regeln der Pro-Contra-Debatte (vgl. Kap. 4.4.2, vgl. Abb. 6.8). Die Seite der Regeln ist aufgeklappt, auf der Rückseite steht „LEIBNIZ: So einen großen Beutel findest du nicht“ (vgl. Abb. 6.8). Die Kinder sollen sich, je nach Positionierung, entweder links *für Cantor* oder rechts *für Leibniz* vor der Tafel aufstellen. Die Aufstellung der Kinder kann in Tabelle 6.3 nachvollzogen werden. Rosa und Kevin stehen außerhalb des zu filmenden Bereiches, da nur Audioaufnahmen von ihnen genehmigt wurden.

Cantor		Leibniz
Quentin Franziska Deborah	Kilian Berat Nadine Nadja	Ole Karl

Tabelle 6.3: Aufstellung der Kinder während der Pro-Contra-Debatte (Grundschule, 26.04.2021)

Außer Herrn Bämpfer, der die Stunde leitet, sind noch Frau Ellestar (Klassenlehrerin) und die Forschende während der Debatte anwesend. Herr Bämpfer leitet

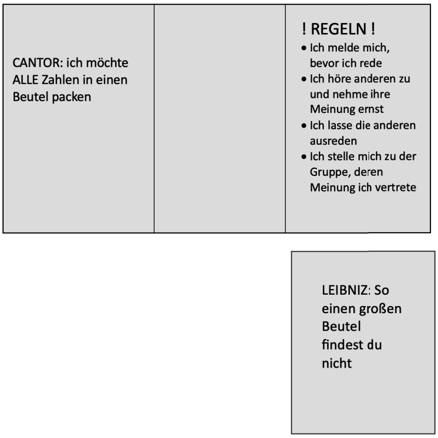


Abbildung 6.8: Schematische Darstellung des Tafelbildes

die Debatte mit der Frage, wer anfangen möchte, ein. Daraufhin melden sich Nadja und Quentin, Herr Bämpfer erteilt Nadja das Wort und es beginnt folgende Interaktion:

6	Nadja	Also::o ich bin für bei::de (.) also dass alle beide Recht ham (.) °Leibniz »tief Luft holend›und ›Cantor wei::l Leibniz könnte Recht ham wei::l es so ein großen Sack nisch gibt **a::be::r** wenn die Zahlen so klein wie Lu::ft si- sind könnten sie sogar reinpassen.
7	Herr Bämpfer	Okay (.) äh::m Franzisk- äh Rosa möchtest du darauf antworten oder was anderes sagen?
8	Rosa	Ich will sowas (mehr) sagen dazu
9	Herr Bämpfer	Also möchtest du auf sie Bezug nehmen **ja**?
10	Rosa:	Ja
11	Herr Bämpfer	Okay dann?
12	Rosa	Nadja ja es kann sein abe::r (.) das geht doch garnich sonst würden hier jetz überall um uns Zahlen schweben (..)
13	Nadja	└ mhm┘
14	Rosa	dann sind wir voller Za::hln

Nadja schreibt hier anscheinend den Zahlen eine gewisse räumliche Ausdehnung zu, wie es auch schon in der Gruppenarbeit (vgl. Kap. 6.1) anklang. Sie stellt die von ihr erdachte Synthese als Kompromiss beider diametral gegenübergestellter Aussagen dar („dass alle beide Recht ham“, Turn 6). Mögliche Deutungsalternativen zu ihrer Lösung wären:

- Scheinbar hat Nadja noch keine Vorstellung von kleineren Dingen als Luft oder misst Luftmolekülen keine räumliche Ausdehnung zu, daher wären unendlich viele Dinge ohne räumliche Ausdehnung auch in Summe nicht räumlich ausgedehnt, würden als als Konglomerat in ein räumlich begrenztes Gefäß passen.

- Sie denkt, dass unendlich viele sehr kleine, aber dennoch räumlich ausgedehnte Dinge in Summe räumlich begrenzbar sind.

Für die Rekonstruktion des Argumentationsprozesses zwischen Nadja und Rosa wurde die zweite Deutungsalternative gewählt (vgl. auch Abb. 6.9 auf S. 133).

Herr Bämpfer achtet auf die Einhaltung der an der Tafel fixierten Regeln und sorgt somit dafür, dass statt einer Sammlung neuer Argumente zunächst Nadjas These diskutiert wird.

Rosa greift Nadjas Idee auf, versteht Nadjas Idee aber inhaltlich nicht so, wie von Nadja intendiert (dies klärt sich im späteren Verlauf noch auf, siehe Turn 20). Nadja möchte nämlich die räumliche Ausdehnung der Zahlen auf die räumliche Ausdehnung von Luftmolekülen beschränken, Rosa nimmt aber an, dass sie Zahlen und Luftmoleküle gleich setzt (und nicht nur in Bezug auf ein Merkmal vergleicht). Rosas mentales Bild von *Zahlen als Luft* beinhaltet „Zahlen, klein wie Luftmoleküle, die in physischer Präsenz um sie herum schweben und aufgrund ihrer Größe mit dem Auge nicht erkennbar sind“ (Brieger, 2023, S. 35).

An dieser Stelle hervorzuheben ist, dass Rosa die Regeln der Debatte verinnerlicht zu haben scheint: sie würdigt zunächst Nadjas Beitrag („Nadja es kann sein“, Turn 12) und bringt anschließend eine völlig konträre Argumentation bzw. einen Widerspruch ein („abe::r (.) das geht doch garnich“, Turn 12). Gegenüberstellend ist es aber auch möglich, dass Rosa im Moment der ersten Formulierung („Nadja es kann sein“, Turn 12) ihren Denkprozess noch nicht vollständig abgeschlossen hat, aber intuitiv Nadjas Argumentation ablehnt. Für diese Deutung sprechen das langgezogene „abe::r“ und die Pause, die sie vor der Formulierung ihres Widerspruchs macht.

16	Nadja	Die Welt ist doch voller Zah::ln
17	Rosa	aber die Bäum- äh- die Bäume ähm (geben) doch die Luft aber die- die die Zah::ln selber (in wissenschaftlich) die soll=n (dann da lieg=n) (.)
18	Nadja	Also ich meine
20	Nadja	Isch meine nich=die Luft (.) Ich meine nur wenn sie so klein wären
21	Rosa	Aber=denn würden sie doch grade auch ein (Raum nehm)
23	Nadja	Ja aber die Welt ist eben voller Za::hln

Auf Rosas Widerspruch antwortet Nadja wie oben ersichtlich (Turns 19 und 22 sind inhaltlich nicht relevant und können im Transkriptionsbuch nachgelesen werden). Nadja versteht nicht, warum Rosas Argumentation ein Einwand gegen ihre Idee sein soll. Für sie gehören Zahlen zu ihrer Lebenswelt und sind allgegenwärtig (Turn 16). Sie hat an dieser Stelle Rosas Verständnis von *Zahlen als Luft* noch nicht durchdrungen.

Die folgende Interpretation konnte nicht abduktiv überprüft werden und somit stellt der kommende Absatz eine Vermutung dar: Rosa versucht, ihr dieses Verständnis näherzubringen (Turn 17), indem sie sich implizit nach dem Ursprung der Zahlen erkundigt. Um *Zahlen als Luft* zu widerlegen, bringt sie den Ursprung der Luft - für sie die Bäume - an und überlegt laut, ob man so einen Ursprung auch bei Zahlen (natur-)wissenschaftlich ausmachen kann.

Nadja versteht nun Rosas Einwand und klärt auf, dass sie nicht *Zahlen als Luft* sondern *Zahlen so klein wie Luft* (bezogen auf die räumliche Ausdehnung) meint („Ich meine nur wenn sie so klein wären“, Turn 20). Rosa antwortet, dass auch sehr kleine Zahlen Raum einnehmen, bzw. räumlich ausgedehnt sind. Für sie würde sich trotz unendlich vieler kleiner Dinge der Beutel, in den diese Dinge gelegt werden sollen, immer weiter ausdehnen.

Implizit wird hier vermutlich auch mit der unendlichen Anzahl argumentiert, also dass auch sehr kleine Dinge in unendlicher Anzahl wiederum unendlich viel Platz einnehmen, bzw. sich nicht endlich im Raum begrenzen lassen. Das Gegenteil dieser Aussage scheint bei Nadja implizit mitgedacht zu sein: Unendlich viele sehr kleine[42] Dinge sind aufgrund ihrer kleinen räumlichen Ausdehnung als Konglomerat räumlich begrenzt. Diese zwei impliziten Stützungen/ Garanten sind im Toulmin-Schema (Abb. 6.9) mit gestrichelten Linien markiert, da sie nicht explizit von einer der beteiligten Debattierenden ausgesprochen werden.

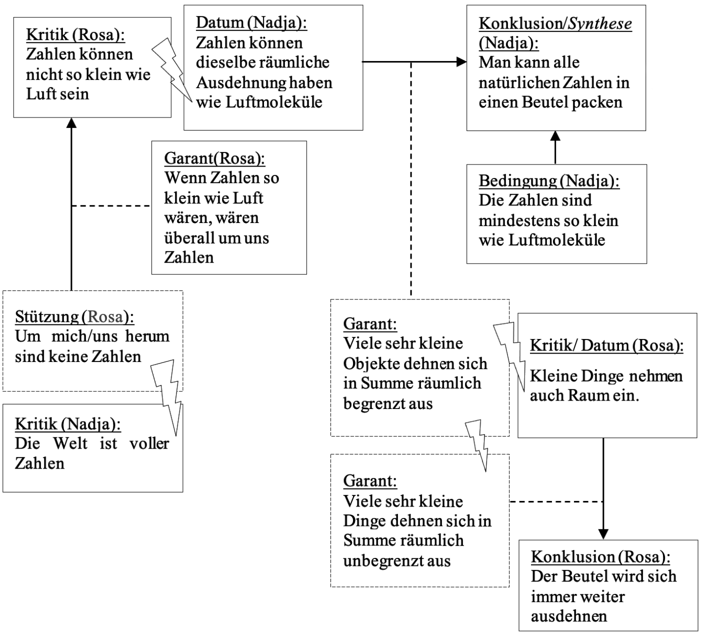


Abbildung 6.9: Rekonstruktion des Argumentationsprozesses zwischen Nadja und Rosa als Toulmin-Schema

Zusammenfassung der Turns 24-28:
Im Anschluss an Nadjas und Rosas Argumentation ruft Herr Bämpfer erneut dazu auf, auf die Argumente zu reagieren. Hierfür gibt es keine Meldungen also

42 Achtung: An dieser Stelle sei das *sehr klein* ausdrücklich von *unendlich klein* abzugrenzen - einer Formulierung, die Nadja nicht benutzt

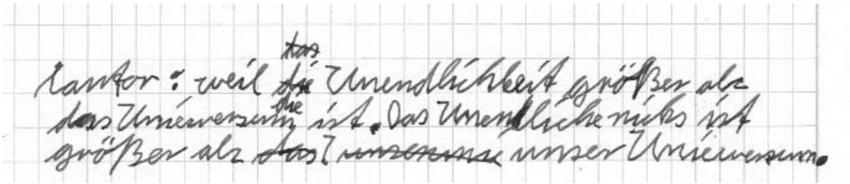

Cantor: weil ~~die~~ das Unendlichkeit größer als das Universum ist. Das Unendliche nicks ist größer als ~~das?~~ ~~unsere~~ unser Universum.

Abbildung 6.10: Quentins Notizen aus der Gruppenarbeit vom 26.04.2021

kann das nächste Kind ein neues Argument in die Debatte einbringen, auf welches es dann zu reagieren gilt.

29	Quentin	»auf seinen Zettel, den er hochhält, schauend›mh (.) ich glaube Cantor weil (.) das Unive::rsum (. . .) hm (.) größer is::st (..) äh::m als die Une::ndlichkeit?
31	Frau Ellestar	Wie hast du=s vorhin erzählt?
32	Quentin	Dass (.) die Unendlichkeit größer is als das Universum

Wie am Anfang meldet sich nun Quentin, der etwas Neues einbringen möchte. Er ist, ausgehend von den vielen Pausen und Verzögerungslauten („mh [...] hm [...]äh::m“) mit dem, was er aufgeschrieben hat, entweder mittlerweile unzufrieden oder konnte in der Gruppenarbeitsphase seine Gedanken nicht so zu Papier bringen, wie er sie eigentlich gemeint hatte. Auf seinem Zettel (Abb. 6.10) stehen zwei entgegengesetzte Aussagen, nämlich $\infty \rangle Universum$, aber auch „nicks ist größer als unser Universum“, was $Universum \rangle \infty$ zur Folge hätte. Quentin benutzt hier die Unendlichkeit als Objekt und nicht etwa als Eigenschaft bzw. Merkmal, die man dem Universum auch zuschreiben könnte. Beide entgegengesetzten Aussagen finden sich auch in den zuvor abgebildeten Turns (29, 32) wieder. Sie beinhalten implizit auch die Gleichsetzung der Menge aller Zahlen mit der Unendlichkeit (die Aufgabenstellung beinhaltete nicht Unendlichkeit, sondern alle Zahlen). Quentins Argumentation *für Cantor* aus Turn 29 sowie Abb. 6.10 kann, zur Beantwortung der Fragestellung, als Toulmin-Schema wie folgt (Abb. 6.11) nachgezeichnet werden:

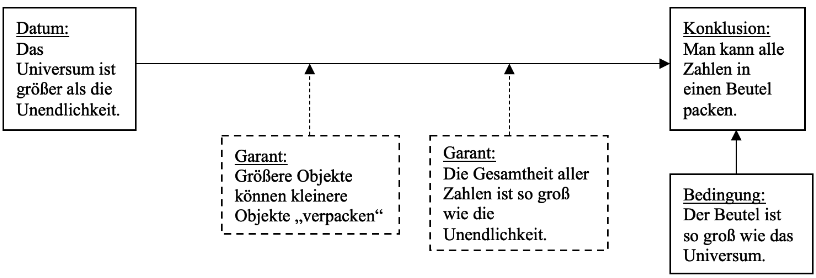


Abbildung 6.11: Rekonstruktion von Quentins Argumentation als Toulmin-Schema unter Einbezug impliziter Garanten

Alternativ kann man Quentins Mitschriften auch anders deuten, was seine Aussage im Rahmen der Debatte besser erklären würde. Statt „nicks ist größer als unser Universum“ ohne „das Unendliche“ zu betrachten, könnte man unter Beachtung korrekter Orthografie und Grammatik auch folgenden Satz aus den Notizen herauslesen: „Das unendliche Nichts ist größer als unser Universum“, der inhaltlich zur Aussage aus Turn 32 passt. Implizit müsste man dann, um eine Positionierung bei Cantor rechtfertigen zu können, mitdenken, dass Quentin das unendliche Nichts außerhalb jeglicher Grenzen von Zahlen bzw. Zahlenfolgen auffasst. Hierbei würde dann ein neues Toulmin-Schema entstehen (vgl. Abb. 6.12), welches strukturell der vorherigen Argumentation gleicht, aber bei Datum und Garanten andere Propositionen beinhaltet:

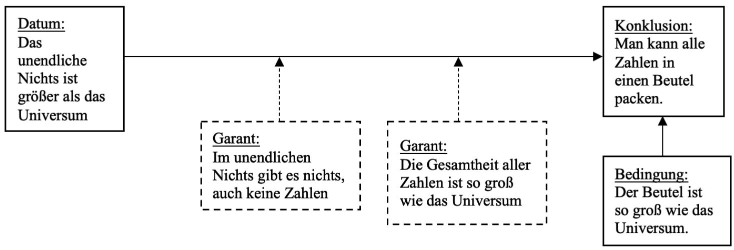


Abbildung 6.12: Rekonstruktion von Quentins neu gedeuteter Argumentation als Toulmin-Schema unter Einbezug impliziter Garanten

Frau Ellestar möchte diesem von ihr vermutlich in einer vorherigen Beobachtung während der Gruppenarbeit wahrgenommenen Kontrast in die Debatte mit einbringen. Für sie passt die vorgelesene Frage offensichtlich nicht zu Quentins Aussagen während der Gruppenarbeitsphase. Mit ihrer Zwischenfrage übergeht sie nun (etwas übergriffig) die eigentliche Debattenleitung Herrn Bämpfer und hakt, ohne vorher eine Gesprächsbeteiligung anzumelden (durch Handmeldung, Frage, ...), bei Quentin nach. Die Debatte, die eigentlich mit ein wenig organisatorisch-administrativer Hilfe von Herrn Bämpfer gelenkt, aber inhaltlich durch die Kinder gestaltet werde sollte, wird somit durch ein Hierarchiegefälle zwischen Frau Ellestar und den Kindern geprägt.

33	Herr Bämpfer	mhm
34	Berat	»mit den flachen Händen gestikulierend›°(is doch) gleich°›
35	Berat	[meldet sich]
36	Nadine	°das Universum is doch unendlich groß°
37	Frau Ellestar	Quentin hat das ja ein=tlich auch jemeint (.) Gemeint dass das Universum=unendlich=is? und auch die Zahlen unendlich sind richtig?
38	Nadine	°Achso::o°

Das im vorherigen Absatz erwähnte Hiearchiegefälle drückt sich auch darin aus, dass nun Nadine und Berat ihre Einschübe nicht aktiv mit einbringen, sondern sich diese gegenseitig zuflüstern. Berat artikuliert flüsternd, dass für ihn das Universum genauso groß ist wie Unendlichkeit (Turn 34), anscheinend möchte er diesen Gedankengang auch in die Debatte einbringen und meldet sich im Anschluss. Nadine fasst Berats Einschub auf und reformuliert seinen Gedankengang, nutzt hier aber *unendlich* als Merkmal des Universums statt als zweites Vergleichsobjekt (Turn 36). Bei Berat und Quentin wären sowohl Universum als auch Unendlichkeit Objekte, welche zueinander in Relation gesetzt werden können, bspw. $U \succ \infty$[43] (Quentin) oder $U = \infty$ (Berat). Für Nadine ist Unendlichkeit ein Prädikat, welches Objekten zu- oder abgesprochen werden kann: [44] $\exists U : \infty U$, d.h. , es gibt ein Universum und dieses Universum hat die Eigenschaft, unendlich zu sein.

Frau Ellestar greift Nadines Aussage auf und benutzt unendlich ebenso als Prädikat (Turn 37). Sie interpretiert Quentins Aussage, die sie vorher in der Gruppenarbeit wahrgenommen hat, und phrasiert diese um. Herrn Bämpfer gegenüber verhält sie sich abermals latent übergriffig. Während er durch kleine Rückversicherungsimpulse („mhm“, Turn 33) oder administrative Steuerung („So (.) denkt dran, nä? Wir reden nich rein, gibt es noch jemand der auf Nadja und Rosa antworten möchte oder (.) Ansonsten mach=n ma mal mit dem nächst=n Argument weiter?“, Turn 26) versucht, die Kinder mit der Gestaltung der Inhalte unter sich zu lassen, übergeht Frau Ellestar seine Offenheit, setzt einen inhaltlichen Fokus und interpretiert sogar Quentins Aussage aus der Gruppenarbeit. Inhaltlich übergeht sie dabei Quentins Gebrauch von Unendlichkeit als Objekt und greift Nadines Beschreibung von unendlich als Eigenschaft auf. Des Weiteren rekurriert sie auf die ursprüngliche Fragestellung, in der von *allen Zahlen* statt von *Unendlichkeit* die Rede war. Diese Verknüpfung muss bei Quentin nicht unbedingt schon vorhanden gewesen sein, Frau Ellestar bringt hier also vermutlich einen inhaltlich neuen Gedanken unter dem Schleier der Interpretation von Quentins Aussage ein. Als sie unter dem Gebrauch von Nadines *unendlich* Quentins Gedanken traduziert, deckt sich Quentins vermeintliche Meinung (aus Frau Ellestars Beschreibung) nun mit der von Nadine, was ihre Interjektion zur Folge hat (Turn 38). Nadine hatte Quentin vorab wörtlicher und vermutlich besser verstanden als Frau Ellestar und ist von der Interpretation des Gesagten durch die Lehrkraft nun überrascht, doch dieselbe Meinung wie Quentin zu haben. Quentin selbst hat sich dazu bislang nicht geäußert, auch auf das „richtig?“ von Frau Ellestar reagiert er nicht.

39	Frau Ellestar	Ja? Oder was hab ich dich da so verstanden.
40	Franziska	[meldet sich immer noch]
41	Frau Ellestar	Hast=es so gemeint oder nich gemeint?
42	Nadja	[hustet]
43	Quentin	[schüttelt den Kopf]
44	Frau Ellestar	So has=es nich gemeint (.) dann bin ich still

Frau Ellestar möchte eine erneute Rückversicherung, ob sie Quentins Ideen korrekt tradiert hat. Sie lässt hier Quentin frei bestimmen, ob sie ihn falsch

43 Das U steht für Universum.

44 In der Prädikatenlogik werden die Prädikate konventionell eigentlich mit Großbuchstaben gekennzeichnet, dies wurde hier nicht vorgenommen, da das große U schon durch das Universum belegt war

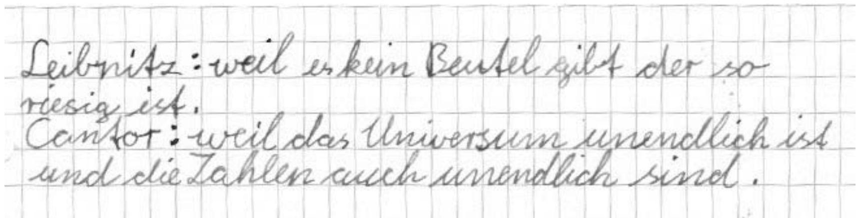

Leibnitz: weil es kein Beutel gibt der so riesig ist.
Cantor: weil das Universum unendlich ist und die Zahlen auch unendlich sind.

Abbildung 6.13: Franziskas Notizen aus der Gruppenarbeit vom 26.04.2021

verstanden hat und möchte keinen Konflikt durch ihre eventuell falsch tradierte Aussage aus Turn 37 erzeugen (Turn 39). Die Aushandlung findet nun ohne weiteren Einbezug von Nadine oder Berat statt (die ja inhaltlich auch zu Turn 37 beigetragen hatten), sondern zwischen Frau Ellestar und Quentin. Quentin antwortet nicht direkt auf Turn 39, sondern auf erneute Nachfrage durch Frau Ellestar (nun muss er auch antworten, da er mehrfach direkt angesprochen wurde). Auf die *Entweder-Oder-Frage* (Turn 41) antwortet er nicht konkret, sondern mit einem Kopfschütteln (Turn 43). Durch Frau Ellestars Rückmeldung in Turn 44 kann dieses Kopfschütteln als Verneinung der Traduktion gewertet werden. Quentin fühlt sich von der Lehrkraft unverstanden. Diese reagiert anschließend aber nicht etwa mit einer erneuten Nachfrage, bspw. nach einer korrekten Reformulierung von Quentins Argumentation durch ihn selbst, sondern bricht den Aushandlungsprozess ab („dann bin ich still“, Turn 44). Franziska, die sich seit Turn 28 kontinuierlich meldet, wird nun von Herrn Bämpfer zu einem Wortbeitrag aufgefordert. Auch er interpretiert scheinbar den Aushandlungsprozess zwischen Frau Ellestar und Quentin als beendet.

45	Herr Bämpfer	Okay (.) Franziska, möchtest du darauf antworten oder möchtst=du= was neues sagen?
46	Franziska	»die Hand herunter nehmend›nee›(.) ich::h möchte auch ahm gerne sagen was ich aufgeschrieben hab ich bin für Cantor weil das (.) Universum auch=unendlich is und die Zahlen auch unendlich sind.

Abermals bringt sich Herr Bämpfer eher administrativ statt inhaltlich leitend ein und achtet auf die Einhaltung der Regeln für die Debatte (Turn 45). Franziska bezieht sich hier, wie auch Quentin, auf das von ihr im Rahmen der Gruppenarbeit Aufgeschriebene (vgl. Abb. 6.13). Sie benutzt hier unendlich wie eine Art Maßzahl zur Kennzeichnung einer räumlichen Größe (Turn 46), also wie Nadine/Berat als Prädikat und nicht wie Quentin als Vergleichsobjekt. Sie setzt die räumliche Größe zweier Objekte (Universum U und Zahlen Z) in Relation und stellt fest, dass diese gleich sein muss: $\infty U \wedge \infty Z \Rightarrow |U| = |Z|$. Unklar bleibt, ob Franziska hier eine Vorstellung von potentieller oder aktualer Unendlichkeit bzw. eine potentielle Vorstellung des Prädikats unendlich hat, woraus sich zwei Deutungsalternativen für ihre durch „ich bin für Cantor“ gegebene Konklusion ergeben:

- *potentiell unendlich*: Sowohl Zahlen als auch das Universum befinden sich im *Werden*; das Universum dehnt sich größenmäßig aus und Zahlen können weitergezählt werden. Sollen die Zahlen also durch das Universum (=Beutel) „verpackt“ werden, so dehnen sich beide ineinander kontinuierlich aus. Der Beutel muss sich demnach auch kontinuierlich ausweiten.

- *aktual unendlich:* Die gesetzten Objekte Zahlen und Universum sind jeweils unendlich groß. Dann ergeben sich wiederum zwei Möglichkeiten für die Konklusion:
  - Daher können die Zahlen durch das Universum, welches die Funktion eines Beutels einnimmt, begrenzt werden.
  - Daher muss es sowohl bei den Zahlen als auch beim Universum einen Beutel geben, der die Objekte fassen kann. Das Universum ist lebensweltlich bekannt und wird als unendlich, aber begrenzbar angesehen. Wenn das Universum begrenzbar ist und die Zahlen so groß sind wie das Universum, kann man auch die Zahlen begrenzen, beispielsweise durch eben jenen Beutel, der schon das Universum beinhaltet.

Betrachtet man die zweite Deutungsalternative bei der aktualen Unendlichkeit, so wäre Franziskas Argumentation durch viele implizite Garanten gestützt, welche von ihr nicht explizit artikuliert werden (das Universum kann umschlossen werden, gleich große Dinge können von demselben „Behältnis“ umschlossen werden). In Abbildung 6.14 wurden diese implizit mitgedachten Garanten im Toulmin-Schema verbildlicht:

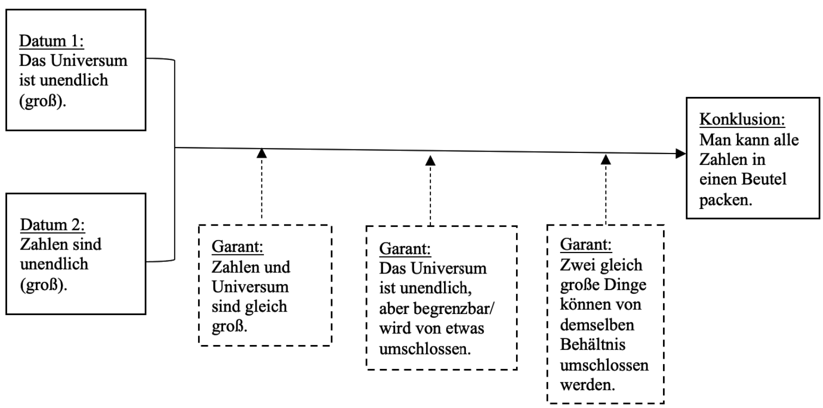


Abbildung 6.14: Franziskas Argumentation als Toulmin-Schema unter Einbezug impliziter Garanten

Auf Franziskas Idee gehen weder die anderen Kinder noch die Lehrkräfte ein (welche sich inhaltlich zurückhalten). Herr Bämpfer reagiert mit einer kurzen Anerkennung von Franziskas Aussage („Mhm Okay“, Turn 47) und ruft, nach kurzer Nachfrage, ob sie auf Franziska reagieren oder etwas Neues einbringen möchte, Nadine auf (Turns 47-51). Diese bringt erneut Nadjas Idee der kleinen Zahlen ein, aber auch einen neuen, mit der Unendlichkeit der Zeit rekurrierenden

Aspekt:

52	Nadine	Also::o es könnten ja beide sein man weiß ja nich ob ürgendwann mal in der Zukunft oder so einen großen Sack gibt (..)wo alle Zahln reinpassen (.) a::ber er=s sehr schwer u::nd des halt [kratzt sich am Bein und schaut auf ihr Blatt] (. . . .) Die könnten ja auch so Nadj- so wie Nadja gesagt hat @könnten@ auch so Luft sein, (.) So ganz klein ähm Luft dass man die gar nich sieht so wie Bakte::rien und ich denk- (. . .)

Nadine macht hier zwei Begründungen für je Leibniz und Cantor stark: Ihr erster Einschub gilt Leibniz, denn „ürgendwann mal in der Zukunft“ (Turn 52) spricht dafür, dass sie aktuell bzw. im Moment der Debatte keine Möglichkeit sieht, dass ein alle Zahlen fassender Beutel existieren kann. Dieses Argument könnte man allerdings auch Cantor zusprechen, wenn man die *Möglichkeit* des Beutels in der Zukunft fokussiert. Interessant ist, dass hier beim Nachdenken über Unendlichkeit (wie auch in der Gruppenarbeit, vgl. Kap. 6.1) die Zeit zur Sprache kommt, welche auch in Überlegungen von Philosoph*innen zur Unendlichkeit oft aufgegriffen wurde (Begriffsbestimmung Unendlichkeit, → Kap. 2.1 auf S. 25).

Das zweite Argument gilt eher Cantor und stellt eine Traduktion von Nadjas Argumentation (vgl. auch Abb. 6.9 auf S. 133 für die Darstellung von Nadjas Argumentation) dar. Sie ergänzt Nadjas Idee der kleinen Zahlen um eine weitere Interpretation von *klein*, nachdem sie Nadjas Idee der Luft(-moleküle) wiederholt. Für Nadine scheinen zu sehr kleinen Dingen auch Bakterien zu gehören. Fraglich an dieser Stelle (wie auch bei Nadjas Argumentation) ist, ob sie Dingen, die man „gar nich sieht“ (Turn 52) keine räumliche Ausdehnung zuschreibt, sodass deren Summe dann auch im Unendlichen keine unendliche Ausdehnung hätte oder ob sie zwar davon ausgeht, dass auch Bakterien eine gewisse räumliche Ausdehnung haben, diese aber in Summe der unendlichen Anzahl trotzdem räumlich begrenzbar ist. Für letztere Interpretation spricht, dass sie vorab einen mit unendlich vielen Zahlen gefüllten Beutel als „sehr schwer“ (Turn 52) bezeichnet. Es könnte sein, dass sie Masse/Gewicht nicht mit räumlicher Ausdehnung verknüpft und sich ausschließlich auf das Gewicht der unendlich vielen Zahlen bezieht, alterstypisch wäre aber eine Verknüpfung von räumlicher Ausdehnung/Volumen und Gewicht (Franke & Ruwisch, 2010, S. 210).

Auf Nadines Argumentation folgend sorgt Herr Bämpfer durch Rückfragen erneut für die Einhaltung der Debattenregeln (Turns 53,54).

55	Rosa	Ähm ich würd zum Schluss (da ist doch der andere) dann (.) gibt seinen Senf dazu (. . .) <u>**Eigentlich**</u> haben beide Recht weil es ist doch ein <u>Traum</u> (..) weil das ist doch nich in Wirklichke::it so. Äh=Es könnte doch im Traum wenn man sich das vorstellt da gibts (auf einmal dann) (.) könntes so ein Sack sein (.) das <u>muss</u> ja nich in der Realität sein? Ich hab eben das Gefühl die Geschichte wurde dafür geschrieben dass man die Kinder durchei<u>nander</u> bringt und zu überlegen was ist richtig (.) wenn ich dann <u>**weiß**</u> [holt tief Luft] und (zuhören dass man irgendwie auch dann zustimmt (.) bei der Verwirrung hier) (.) das ist n Traum (..)

Rosa meldet sich zu Wort und greift Nadines Idee nicht explizit[45] auf, sondern bringt ein skeptizistisches Argument neu in die Debatte ein. Oberflächlich betrachtet bringt sie an dieser Stelle das bisher nicht eingebrachte Konzept der Abstraktion in die Debatte ein („das muss ja nich in der Realität sein“, Turn 55). Wie in der Gruppenarbeit von Nadja, Nadine, Berat und Kilian schon durch Nadja ausgedrückt („Denk mal an die un- @Unrealität@“, Nadja, Gruppenarbeit 26.04.2021, Turn 314), versucht auch Rosa sich von dem in der Grundschule üblichen Lebensweltbezug zu lösen und die Aufgabe als Gedankenexperiment anzusehen („weil das is doch nich in Wirklichke::it so“, Turn 55). Für sie ist der Traum eine Möglichkeit, die von Nadine beschriebene Zukunft gedanklich realisieren zu können und „beide“ (Nadine, Turn 52) Positionen als richtig zu markieren, bzw. „beide[n] Recht“ (Turn 55) zu geben. Dass sie diese Möglichkeit in der Lebenswelt nicht ansiedelt spricht dafür, dass sie verstanden hat, dass es sich um diametral entgegengesetzte Positionen handelt. Auch scheint sie Probleme mit einer lebensweltlich verankerten Vorstellung eines mit unendlich vielen Dingen gefüllten Sacks zu haben, was sie zuvor auch schon anbrachte („Aber=denn würden sie doch grade auch ein (Raum nehm)“, Turn 21). Auf die Aufgabenbestellung bezogen kann man Rosas Argumentation mit Toulmin (2003) wie in Abb. 6.15 verbildlicht rekonstruieren.

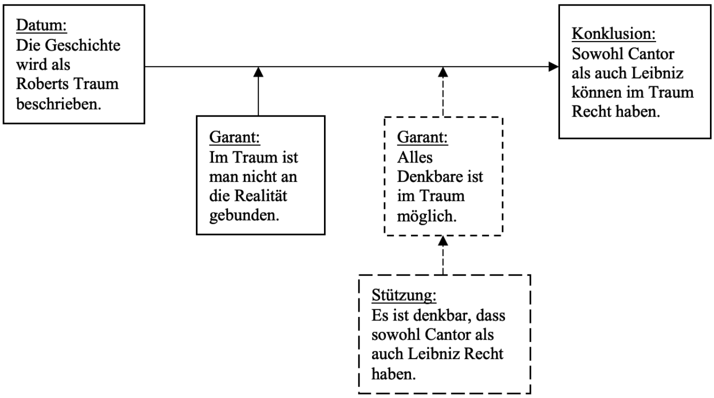


Abbildung 6.15: Rosas Traum-Argumentation als Toulmin-Schema unter Einbezug impliziter Garanten und Stützungen

Aus Sicht der Philosophiedidaktik wendet Rosa mit dem Gedankenexperiment die spekulative Methode (Martens, 2003) an. Die Relevanz, die das Traum-Setting für sie als Möglichkeit des Gedankenexperiments und der Abstraktion hat, drückt sich auch in ihren Mitschriften aus der Gruppenarbeit aus (Abb. 6.16). Dort hat sie „Es ist ein Traum“ mit buntem Stift eingekreist und ein Exklamationszeichen ans Ende gesetzt, um den Gedanken/Aspekt zweifach zu betonen.

45 Implizit schon, siehe Analyse im Folgenden

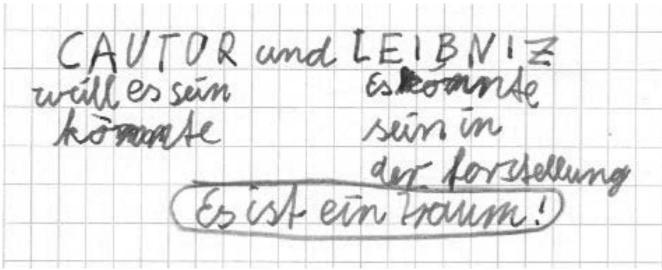


Abbildung 6.16: Rosas Notizen aus der Gruppenarbeit vom 26.04.2021

Neben dem Aspekt des Traums bringt Rosa noch ihre Ansicht zur didaktischen Maßnahme mit ein. Das von ihr formulierte „durcheinander bring[en]“ (Turn 55) kann als von ihr reflektierte kognitive Dissonanz interpretiert werden – ein Vorteil des Philosophierens mit Kindern (Lafortune et al., 2003). Des Weiteren spricht das Hinterfragen der im Unterricht gegangenen Schritte für eine ausgebildete Reflexionskompetenz; dass Rosa sich traut diesen Gedanken auch zu artikulieren und zu verteidigen für eine standhaft entwickelte Persönlichkeit, deren Bildung wie auch die Entwicklung einer Reflexionskompetenz normative Ansprüche an den Philosophieunterricht darstellen (Martens, 2017, S. 47).

59	Frau Ellestar	Nun stelln wir mal fest (.) Die Rosa hat ja eigentlich auch von nem <u>Traum</u> gesprochen, das hab ich noch nicht ganz verstanden, wie du des meinst vom └ Traum ┘
60	Herr Bämpfer	└ **Rosa**┘ äh da äh vielleicht darf ich mal was dazu sagen
61	Frau Ellestar	Ja?
62	Herr Bämpfer	Leibniz und Cantor die gabs wirklich
63	Frau Ellestar	└ mhm┘
64	Rosa?	└ Ja okay?┘
65	Herr Bämpferr	und die ham sich also (.) die ham zwar nicht zu selben Zeit gelebt aber die Auseinandersetzung mit dieser Thematik die gab es <u>wirklich</u>
66	Ole	Was?
67	Herr Bämpfer	<u>**Nicht**</u> nur im Traum.

Nach kurzem Murmeln ihrer Mitschüler*innen und einer inhaltlich nicht zuzuordnenden Nachfrage durch Frau Ellestar sowie einer Reaktion durch Nadine (Turns 56-58) fragt Frau Ellestar Rosa nach ihrer Vorstellung von Träumen. Die Einmischung trotz der Stundenleitung durch Herrn Bämpfer wird diesmal durch ihn nicht übergangen, denn er steigt nach Frau Ellestars Rückfrage auch inhaltlich in die Diskussion mit ein.

Frau Ellestar möchte von Rosa, dass sie ihre Argumentation weiter ausführt. Eventuell zieht sie die Verbindung von der Einstiegsgeschichte (einzusehen auf S. 268) und dem durch die Geschichte aufgemachten Traum-Setting nicht, eventuell möchte sie, dass Rosa den Aspekt der Abstraktion („nich in der Realität“, Turn 55) weiter ausführt. Abermals interveniert sie hier inhaltlich, statt den Kindern

Raum für Rückfragen oder Reaktionen zu geben. Sie paraphrasiert Rosa (wie vorab bei Quentin, Turn 37) und stellt somit inhaltlich auch ihre Interpretation von Rosas Aussage zur Debatte (Turn 59). Herr Bämpfer möchte ebenfalls inhaltlich etwas beitragen, tut dies aber nicht paraphrasierend, sondern fragt zunächst explizit bei Rosa nach, ob er eingreifen darf (Turn 60). Interessant ist hier, dass er seine Frage nicht an Frau Ellestar richtet, was aufgrund des vorherigen Wortbeitrags durch sie nicht abwegig gewesen wäre, sondern an Rosa. Die Methode der Pro-Contra-Debatte, bei der die Lehrkraft eine lediglich administrative Steuerung hat und die Kinder inhaltlich untereinander debattieren lässt, scheint von Herrn Bämpfer durchdrungen zu sein. Trotz dessen, dass er sich der Rolle der Lehrkraft innerhalb der Debatte bewusst ist, möchte nun auch er inhaltlich intervenieren und holt sich die Genehmigung für dieses Eingreifen aber nicht bei der Klassenlehrerin/ Wortführerin, sondern bei den (eigentlich für Wortbeiträge verantwortlichen) Debattierenden. Dass er sich die Genehmigung bei den Kindern einholt, spricht für eine von ihm gewünschte Debattenkultur auf Augenhöhe mit flachen Hierarchien. Diese flache Hierarchie scheint Frau Ellestar nicht zu verinnerlichen, denn neben den inhaltlichen Beiträgen, die sie zur Debatte beisteuert (Turns 59, 37), antwortet sie nun auf Herrn Bämpfers Frage an Rosa. Somit etabliert Frau Ellestar eventuell, dass die Verteilung von Wortbeiträgen nicht den Kindern, sondern der Lehrkraft (in diesem Fall ihr) obliegt.

In Turn 62 bringt Herr Bämpfer sich, vermutlich geprägt von Vorgesprächen zur Unterrichtseinheit mit der Forschenden, erstmals aktiv inhaltlich ein und versucht, Rosas Skeptizismus mit historischen Fakten zu begegnen. Es scheint, als möchte Herr Bämpfer das Traum-Argument von Rosa als Debattenimpuls abbrechen und nicht weiter ausdiskutieren lassen. Dabei hat er eventuell in den Blick gefasst, dass skeptizistische Argumente eher „erkenntnispessimistisch" (Klaus & Buhr, 1971b, S. 990) und somit nicht zum kollektiven Erkenntnisgewinn beim Debattieren geeignet sind, um für den weiteren Verlauf der Diskussion ein „Zurückfallen in die *Unwesentlichkeit*" (Hegel, 1979, Phänomenologie des Geistes, IV B.) vermeiden zu können. Weiterhin denkbar ist, dass die von ihm habitualisierte Er- und Aufklärpraxis des Lehrer*innenberufs Herrn Bämpfer zur Korrektur von Rosas Argumentation bewegen könnte. Er betont in Turn 67 abschließend, dass das (vermeintlich die Diskussion obsolet machende) Argument des Traums inhaltlich durch die historische Relevanz und Realität Cantors und Leibniz' (Turn 65) entkräftet wird.

73	Rosa	Eins möcht ich noch dazu sagen Sie ham von Träumen nur gesprochen (.) └ es jetz┘
74	Herr Bämpfer	└ (oh ja)┘
75	Rosa	es jetzt nicht aus Wirklichkeit

Nach kurzer Unruhe unter den Kindern möchte Rosa ihre Argumentation verteidigen und führt dazu an, dass in der Einstiegsgeschichte (mit Impulsen, siehe S. 268) das Szenario von Cantors und Leibniz' Streit auch in Roberts Traum passiert. Nach Rückfrage durch Frau Ellestar (Turns 76, 78, 80, siehe Transkriptionsbuch) soll Rosa nun ihre Vorstellung unendlicher Zahlen erläutern.

81	Rosa	Es sind nunmal Za::ln die sind so groß das geht bis zur (unverständlich) (.) deswe::gen kann ich es eigentlich nich einschätzen (.) es könnte wi::e ein Spiel sein [holt tief Luft] der=das könnte wi::e (.) äh sein das ist halt so n großer Beutel oder so? und jeder (..) jede einzelne Zahl fällt da so nach un nach rein und dann (..) kann mans nich auffüllen weil (.) der Beutel is zu groß und die Za::hln werden auch immer groß aber der Beutel wird doch immer breiter (unverständlich, ca. 0.2 Sek) wenn man da::a zum Beispiel °Zahln° reinpackt kann das ja auch voll werden
82	Frau Ellestar	└ Mhm ┘
83	Rosa	Bis es dann nich mehr pa::ss dann gibs nen zweiten Beutel (.) aber (.) des=is halt::s (.) °keine Ahnung des is halt kompliziert°
[...]		
87	Rosa	└ °Dann gibs n andern° ┘
88	Frau Ellestar	└ mh::m┘
89	Rosa	Und (.) wo alles reinpasst
[....]		
91	Rosa	und die andern könn dann reingekippt we::rdn (.) der dann noch größer is da- da müssen wir überlegn zu paar tausend Jahre später könnts ja immer was Größeres gebn wie zum Beispiel [holt tief Luft] es sind jetz erstma=alles Autos und später sind es UFOs mit (°denma fa::hrn°) und so muss man sich das vorstelln (.) wi- wir ham ja jetzt son kleinen Baby Beutel
92	Nadine	└ [meldet sich] ┘
93	Rosa	└ ähm und später könnten die ja noch größer sein┘
94	Franziska	└ [meldet sich] ┘
95	Rosa	bis vielleich so groß wie n Mensch (.) un man muss sich das halt immer vorstelln └ weil die Menschen┘

Rosa baut hier ihre Kritik zu Nadjas Argumentation (Turns 6, 20, vgl. auch Abb. 6.9 auf S. 133) weiter aus (auch wenn sie sich an dieser Stelle nicht explizit auf Nadja bezieht). Selbst die Vorstellung, der Beutel könne sich weiter ausdehnen, hat für Rosa eine klare Begrenzung und kann nicht ins Unendliche fortgeführt werden („Bis es dann nich mehr pa::ss dann gibs nen zweiten Beutel“, Turn 83). Für sie wird der Beutel sukzessiv gefüllt („fällt da so nach un nach rein“, Turn 81), das Füllen verbindet sie mit einem Zeit einnehmenden Prozess. Diesen greift sie in Turn 91 und 93 erneut auf, indem sie nun statt des Traum-Gedankenexperiments ein Zukunfts-Gedankenexperiment (vermutlich) wieder zur besseren Loslösung von der eigenen Lebenswelt und zum Abstrahieren benutzt (die Idee des „Spiel[s]“, Turn 81, könnte einen ähnlichen Versuch darstellen, wird von Rosa aber nicht so ausführlich aufgebaut wie die der Zukunft). Ihre Probleme, die Thematik auf einer konkret-lebensweltlichen Ebene lösen zu können, drücken sich auch durch „keine Ahnung des is halt kompliziert“ (Turn 83) aus.

Würde man das Argument der Begrenzung des Beutels und Neubefüllung eines anderen Beutels fortführen („Bis es dann nich mehr pa::ss dann gibs nen zweiten Beutel“, Turn 83), so müsste diese Argumentationskette für die Leibnizsche Position sprechen, da selbst die immer wieder neu befüllten Beutel von unendlicher Anzahl wären. Graphisch rekonstruiert kann Rosas Argumentation sowie die implizit daraus folgende Konklusion in Abb. 6.17 nachvollzogen werden.

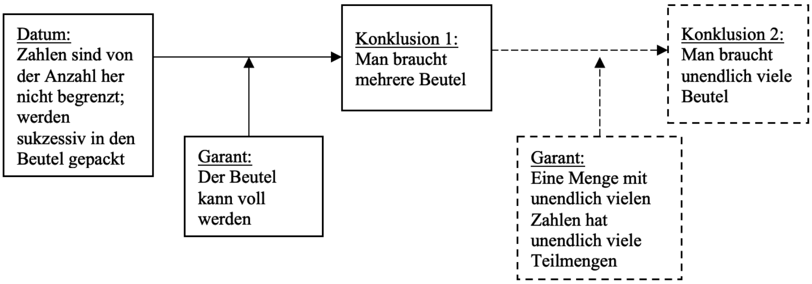


Abbildung 6.17: Rosas Argumentation zum begrenzten Beutel als Toulmin-Schema unter Einbezug der implizit enthaltenen weiterführenden Konklusion

Frau Ellestar stellt Rosa anschließend Nachfragen zu ihrer Argumentation (Turns 92-103), insbesondere paraphrasiert sie in einer der Rückfragen etwas von Rosa nicht explizit Erwähntes: „Du meinst wir ham also bisher noch nicht alle Za::hln gefunden“ (Turn 98). Rosa bejaht dies (Turn 99).

107	Nadine	Aber halt zur Zukunft, könnte es halt noch sone Zahl geben die heißt @unendlich@ wie Nadja schon gesagt hat des eine Mal (..) isch glaub örgenwie da gibs örgenwann in der Zukunft son großen Sack °wo man alles reinmachen kann°.
[...]		
119	Nadja	Es wirds- (.) ja auch n::noch me::hr Za::hln gebn? also::o, zum Beispiel unendlich un eins (.) unendlich un zwei (unverständlich ca. 0.3 sek) das könnte=s auch ge::bn
120	Herr Bämpfer	Mhm
121	Nadja	(Hier/ Rosa) erfindet ebn immer wieder neue Zah::ln (.) also denk=ich (.) jeder hat Recht und niemand hat Recht [hält beide Hände zur Seite] Ende.

Nadine bezieht sich hier auf Nadja statt auf Rosa und meint vermutlich Nadjas Aussage, die in der Gruppenarbeit fiel („Aber in der Zukunft. (Als Zauber)“, Turn 326 Gruppenarbeit Nadja, Kilian, Berat, Nadine, vgl. Kap. 6.1 oder Transkriptionsbuch). Interessant an dieser Stelle ist, dass Nadja und Rosa scheinbar unabhängig voneinander auf die Idee des Einbezugs der Zukunft gekommen sind. Weiterhin fällt auf, dass Nadine *unendlich* als Namen für eine Zahl benutzen möchte. Der von Cantor entwickelten Notation für die Kardinalität der natürlichen Zahlen kommt solch eine Benennung nah, wenn er auch $\aleph_0$ statt *unendlich* benutzt, so hat auch er eine unendlich große Zahl benannt und deren Existenz postuliert. Nadines Vorstellung zur Zahl namens *unendlich* in der Zukunft spricht dafür, dass sie aktuale Unendlichkeit nicht per se ausschließt, aber noch keine ausreichende Bildung in höherer Mathematik erfahren hat (in der dritten Klasse ja auch nicht üblich), sodass sie eine solche Zahl der Zukunft und nicht bestehenden mathematischen Grundlagen zuschreibt. Nadja scheint diese Vorstellung von aktualer Unendlichkeit nicht in dem Maße zu teilen, sie versucht weiterhin mit der prozesshaften potentiellen Unendlichkeit zu argumentieren: „unendlich un eins", Turn 119. Die Abgeschlossenheit der benannten Kardinalität wird von Nadja nicht als solche aufgefasst, fraglich ist ob auch sie sich auf eine Anzahlbestimmung bezieht oder auf die Beschaffenheit des Zählprozesses/ der Zahlen bzw. auf das Peano-Axiom, welches besagt, dass jede natürliche Zahl auch einen Nachfolger haben muss und somit die vermeintlich letzte natürliche Zahl, von der sie annimmt, dass Nadine sich auf sie bezieht, auch einen Nachfolger haben muss. Offen im Interpretationsprozess bleibt, ob Nadine mit der Zahl *unendlich*

- eine letzte natürliche Zahl, genannt *unendlich* oder
- die Kardinalität der natürlichen Zahlen, anzugeben mit der Zahl *unendlich*

gemeint hat. Dass sie Nadja in ihrem Einschub nicht berichtigt, könnte für die erste Variante sprechen. Allerdings können im Diskussionsverlauf auch andere Faktoren dazu geführt haben, dass sich Nadine nicht noch einmal auf Nadja bezieht und die vermeintlich falsch verstandene Darstellung ihrer Argumentation richtig stellt. Daher sollten an vorheriger Stelle beide Alternativen aufgeführt werden.

126	Rosa	ähm (..) es is ja nich nur das Nadja (.) es- zum Beischpiel in dieser Sekunde grad ne neue Zahl erfundn das (.) das Gute ist daran wir wissen ja ä::hm wie es halt weitergeht mit den Zahlen wir wissen ja wie die heißen weil zum Beispiel ich »räuspernd›mh ›Hundert die zweische- die zwei Zahlen davor helfen ja schon das is ja kein Problem, aber wie dann (.) wenn di::e (.) zum Beischpiel die Einhundertneunneunzig wie äh=hat man das wi::e hat man das herausgefunden dass es dann Zweihundert sind (.) so muss man sich das auf der andern Seite vorstelln
127	Nadja	└ (da muss dreizig me::hr werden ┘
128	Rosa	also kommn doch immer mehr dazu, (.) und dis=s kompliziert deswegen dass das wirklich komisch und daher sitzen wir jetz so lange an den andern Zahln sitzen wir ja nich so lang weil die ham die ja, ja fü- schon erforscht (.) °und es geht ja dann immer so weiter.°

Nach einer kurzen Rückfrage durch Herrn Bämpfer, der Rosas Meldung bemerkt hat (Turn 123), antwortet Rosa auf Nadjas Aussage, Rosa würde immer wieder neue Zahlen erfinden (Turn 121). Rosa wirft die Frage auf, wie die Benennung von Zahlen, bzw. die *Erfindung* neuer Zahlen funktioniert. Sie räumt ein, dass der aus kleineren Zahlenräumen (ZR) bekannte Aufbau aufeinander folgender Zahlen (im dekadischen System) hilfreich sein kann („die zwei Zahlen davor helfen ja schon“, Turn 126). Dass sie den Aufbau des dekadischen Stellenwertsystems nicht in Gänze durchdrungen hat, zeigt das Beispiel der Zahl 199 und ihre Frage, wie Menschen herausgefunden haben, dass nach der 199 die 200 kommen muss. Diese Frage würde sie, so meine Vermutung, nicht derart formulieren, wenn die Stellenwerttafel bzw. der Aufbau unseres dekadischen Positionssystems von ihr verinnerlicht wäre. Sie siedelt ihr Beispiel im für Klasse 3 üblichen ZR 1000 an, expliziert in Turn 128 aber, dass das Beispiel repräsentativ für größere Zahlenräume stehen sollte. Fraglich an dieser Stelle ist, ob es ihr um eine reine Benennung neuer Zahlen oder auch um Bildungsregeln und Schreibweisen geht. Das Argument zur Benennung neuer Zahlen wäre durchaus der Realität entnommen, erst 2022 (ein Jahr NACH Rosas Ausführungen) wurden neue Präfixe für extrem große Zahlen (bspw. Ronna für 10^{27}) durch die Generalkonferenz für Maß und Gewicht festgelegt (Gesellschaft für deutsche Sprache e.V., 2022). Dass sie die Bildungsregeln zur Zahl 200 hinterfragt bzw. Bildungsregeln bei ihr nicht auftauchen, spricht aber eher für die zweite Interpretationsalternative.

Interessant an Rosas Ausführungen ist außerdem, dass sie wieder *Zeit* einbringt („daher sitzen wir jetz so lange an den andern Zahln sitzen wir ja nich so lang“, Turn 128).

Nach Rosas Antwort auf Nadja möchte auch Karl auf Nadja antworten, der von Herrn Bämpfer nach einer Meldung aufgerufen wird (Turns 129-130, Herr Bämpfer verwechselt ihn mit seinem Zwillingsbruder Quentin; nach Sichtung der geschriebenen Dokumente beider Kinder (vgl. Abb. 6.18 und Abb. 6.10) ist es an dieser Stelle aber Karl, der seine Meinung kundtun möchte).

131	Karl	Ich hab ähm eine Meinung? zu Nadjas Idee? [holt tief Luft]
132	Herr Bämpfer	Ja?
133	Karl	Es:s könnte nich die Zahl unendlich geben weil die is ja unendlich und dann kommen ja noch mehr unendlisch zu::u [hebt die Hand nach oben]

Karl baut hier Nadjas Argumentation aus Turn 119 weiter aus. Während es bei ihr um einzelne Nachfolger der fiktiven Zahl *unendlich* ging („unendlich un eins“, Turn 119), argumentiert Karl gegen die Existenz einer Zahl *unendlich*. Seine Argumentation kann man verschiedenartig interpretieren:

- Er argumentiert, indem er die additive Bildung neuer Unendlichkeiten in Frage stellt. Sein Einschub in Turn 133 erinnert an eine Spielart von Hilberts Hotel, bei der unendlich viele neue Gäste in das unendlich große, aber ausgebuchte Hotel einchecken möchten. Die Regel $\infty + \infty = \infty$ ist Karl in der dritten Klasse selbstredend noch unbekannt, dennoch hat er eine ungefähre Vorstellung von Unendlichkeit (kosmologisch angehaucht, siehe Abb. 6.18) und kann sich die Addition zweier Unendlichkeiten nicht vorstellen. Durch diese *reductio ad absurdum* schließt er die Existenz einer Zahl *unendlich* ganz aus.

- Karl denkt Nadjas Zählprozess aus Turn 119 weiter. Während Nadja bei „unendlich un zwei“ ihre Argumentation beendet, führt er das Gedankenex-

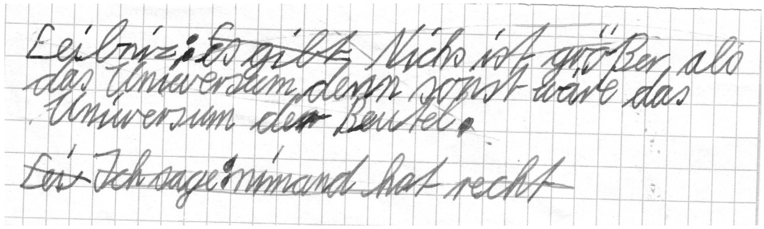


Abbildung 6.18: Karls Notizen aus der Gruppenarbeit vom 26.04.2021

periment weiter und stellt fest, dass wenn im ersten Zählprozess als eine Art Grenze die Zahl *unendlich* genannt wird, dies auch im Zählprozess *von dieser Zahl aus* geschehen muss. Im unendlichen Regress dieser Zählprozesse sieht er ein Problem, welches er durch den Ausschluss der Zahl *unendlich* löst.

Durch die Interaktion und Nadjas Reaktion im Folgenden (Turn 144) ist es naheliegend, die zweite Interpretationsalternative für kommende Interpretationen/ Rekonstruktion im Toulmin-Schema anzunehmen.

Nach kurzer administrativer Regelung des sich chaotisch entwickelnden Gespräches (Turns 134-143) durch Herrn Bämpfer und mehrfacher Einschübe und Meldungen von Nadja darf diese nun auf Karls Aussage antworten.

144	Nadja	Also (.) Aber das meinte ich ja genau Unendlich und dann noch mehr Unendlich und eins Unendlich und zwei, und dann gibt es eine neu- eine neue Zahl geben und (.) die heißt zum Beispiel Trillion (unverständlich)

Nadja fühlt sich von Karl missverstanden, denn sie meinte in Turn 119ff auch einen unendlichen Regress des Weiterzählens. Sie sieht seine Aussage aber als Einwand gegen ihre, teilt aber seinen Einwand nicht - für sie ist der unendliche Regress in gewisse Segmente unterteilt, deren Grenzpunkte man immer wieder neu benennen kann. Ab jedem Grenzpunkt geht der Zählprozess wieder neu los, ganz in Anlehnung an Zahlbildungsregeln und das dekadische Stellenwertsystem. Auch hier wird eine neue Stelle mit einer neuen Vorsilbe belegt und ab dort so wie bislang bekannt weiter gezählt. Nadjas Überlegung wäre also eine gewisse Stelle im Stellenwertsystem, die für *unendlich* steht und ab der man dann bis zur nächsten Unendlichkeit zählen kann, bzw. bis zur nächsten unbekannten Stelle (sie nennt das Trillion). M.E. drückt sich durch Nadjas Argumentation aus, dass sie entweder das Konzept des Zählens zur Unendlichkeit nicht komplett fassen kann und sich daher endlicher Strukturen bedient, oder dass sie das Konzept sehr gut begriffen hat und sich tatsächlich einfach Segmente der Unendlichkeit aus einem unendlichen Zahlenraum herausnimmt. Man denke zur besseren Vorstellung nur an das Intervall $[0, 1]$ im Bereich der reellen Zahlen - eine Art Segment von Unendlichkeit, eingebettet in eine „größere" Unendlichkeit.

Die Argumentation der Kinder zum Thema *Zahl unendlich in der Zukunft* kann in Abb. 6.19 nachvollzogen werden. Da hier mehrere Kinder über einen längeren Zeitraum argumentieren, sind sowohl die Turnnummern als auch die Urheber*innen der einzelnen Teile der Argumentation im Schema gekennzeichnet.

Mehrere implizit gegebenen Garanten/ Stützungen und sogar ein implizit mitzudenkendes Datum sind mit gestrichelten Linien und ohne Urheber*in angegeben. Diametral gegenübergestellte Aussagen sind mit Blitzen gekennzeichnet, wie bspw. Konklusion 2 von Karl (Turn 133) und Konklusion 2 von Nadja (Turn 107).

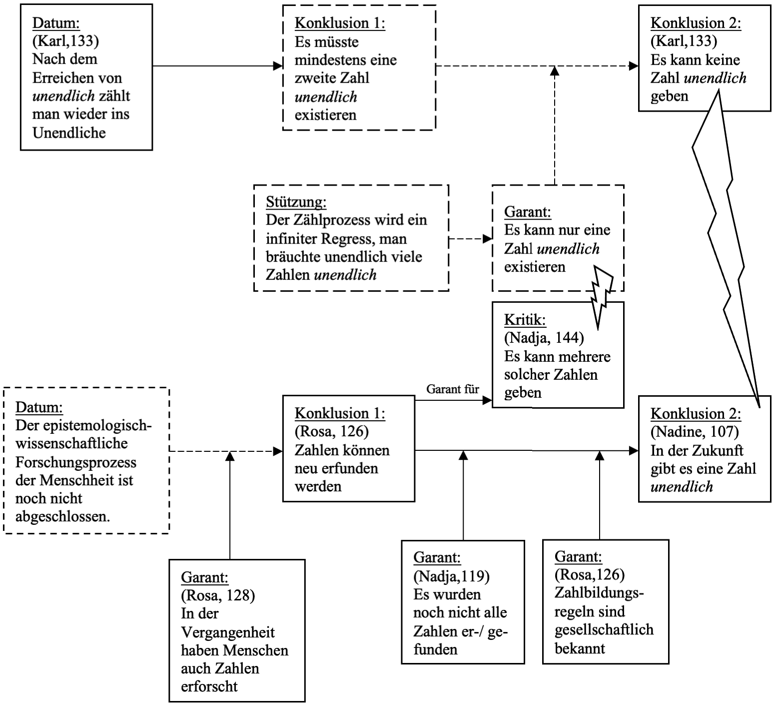


Abbildung 6.19: Argumentationsrekonstruktion der Turns 119 –144 als Toulmin-Schema (Nadja, Rosa, Nadine, Karl)

148	Herr Bämpfer	Denkt dran, wir redn nich dazwischen, wir melden uns. Wir reden nich dazwischen wir melden m- uns so wie Berat. Berat?
149	Berat	[wendert sich zu Nadja] Na:dja? Abe::r das ergibt überhaupt keinen Sinn [dreht sich um] (..) we::e- (.) wir nehm nich eins [begleitet die Aussage mit der Hand] wir nehm nich zwei [abermals Handgeste] wir nehm nich drei [Handgeste, wendet sich wieder Nadja zu] s- s=ergibt überhaupt kein Sinn

[...]

154	Rosa	(Ich möcht dazu) was sagen i::rgendwie alle::e di::e äh für den ein oder für den andern stimmn haben Recht weil (.) es könnte auf der einen Seite so in der Art passiern und auf der anderen Seite so, und vielleicht wenn man das genug erklärt hat man den Sinn auch daran verstanden aber trotzdem werden Zah::ln (.) jetz zum Beispiel gibt es jetz eine Millarden neunhundertneunundneunzigdreitausendkeineAhnung von den Zahlen (.) Vielleicht wird jetzt noch mehr da dran gehängt (.) (ich mein die ham ja nich- die ham ja kein) fünf sechs sieben. Es geht immer weiter. Ich weiß das weil mein Va::ter ähm der kennt sich gut mit Mathe aus der äh war (unverständlich) (aber s=is sehr ärgerlich) weil Pi das hatter mir gesagt deswegen glaub=ich da jetz ebn nich dran
155	Herr Bämpfer	└Okay. ┘
156	Rosa	└ Aber er ┘ tritt zu meinem (unverständlich, ca. 0.2 sek) das geht nich
157	Herr Bämpfer	Mhm
158	Frau Ellestar	Also Punkt heißt jetze Zahl sozusagen. Ja?
159	Rosa	└ Das gibs ┘ aber nich

Nach Nadjas Idee wird die Klasse kurz laut. Herr Bämpfer bringt sich hier abermals administrativ ein und erinnert an die an der Tafel fixierten Regeln (vgl. Kap. 4.4.2). Berat versteht Nadjas Äußerung nicht. Es wird, auch in den folgenden Turns, nicht ganz deutlich, worauf er sich konkret bezieht. Möglich sind folgende Varianten:

- *Berat denkt, Nadja möchte verschiedene, unendlich große Zahlbereiche als Segmente „schichten“*:
  In diesem Fall kann man die Handgesten als Vergestikulierung des Unendlichkeitsbegriffes deuten, so dass er der Vorstellung widerspricht, dass zunächst die erste Unendlichkeit, folgend die zweite Unendlichkeit etc. aneinandergereiht werden. Berats Vorstellung von Unendlichkeit wäre somit in gewisser Weise abgeschlossen. Damit ist gemeint, dass er nur an einer Unendlichkeit festhält, das Prädikat *unendlich* nimmt er wörtlich - die für ihn im Endlichen gesetzten Grenzen, bei denen Nadja die nächste Unendlichkeit „starten“ würde, sind für ihn durch sein Verständnis von *Un*-Endlichkeit allein begrifflich nicht fassbar.

- *Berat denkt, Nadja möchte nach dem Erreichen der Unendlichkeit im Sinne der Nachfolgerfunktion weiterzählen*:
  Auch hier hat Berat vermutlich ein Verständnis von *Un*-Endlichkeit, welches es ihm schwer macht, einen Punkt festzuhalten, von dem an weitergezählt werden kann. Allerdings ist im Gegensatz zu oben hier nicht von verschiedenen, geschichteten Unendlichkeiten auszugehen, sondern beide Kinder benutzen bei dieser Lesart nur eine Unendlichkeit, verstehen diese aber ver-

schiedenartig. Die Handgesten symbolisieren in diesem Fall einen Zuwachs der Zahlen, jeweils in Einerschritten.

Nadja antwortet humorvoll auf Berats Einwand, geht aber nicht inhaltlich auf ihn ein oder versucht, ihren Standpunkt noch einmal deutlicher zu erläutern („**Nix** auf der Welt hat Sinn“, Turn 151). Nach kurzen Einschüben durch andere Kinder meldet sich nun, wiederum ohne administrative Führung durch eine der Lehrkräfte, Rosa zu Wort.

Die langgezogenen Passagen am Anfang von Turn 154 könnten zum einen dafür sprechen, dass Rosa ihren Gedanken noch nicht vollständig artikulieren kann und daher Zeit gewinnen möchte, um sich verständlich ausdrücken zu können. Zum anderen könnte sie bereits einen Gedanken gefasst und in Gedanken ausformuliert haben, muss aber das eben Gehörte in ihre Argumentation einbinden und versucht daher, mit dem Langziehen der ersten Wörter etwas Zeit zum Sortieren der Argumentationen zu gewinnen. Mit „auf der einen Seite so in der Art und auf der anderen Seite so“ (Turn 154) drückt sie ihr Verständnis des Widerstreits der Aussagen von Cantor und Leibniz aus, schließt aber auch eine Synthese trotz der Unvereinbarkeit beider Aussagen nicht aus („i::rgendwie alle::e di::e äh für den ein oder für den andern stimmn haben Recht“, Turn 154). Dass sie beiden „Lagern“ Recht gibt, kann auch daran liegen, dass bereits von ihr geschätzte Klassenkamerad*innen sich diametral positioniert haben (Nadja und Quentin z.B.) und sie daher aus einer Art sozialem Druck heraus zunächst die Argumentationen nicht als falsch abtun möchte. Da sie genau dies aber in Turn 182 tut, könnte diese Deutungsalternative zumindest auf die gesamte Gruppe ausgeschlossen werden und als Vermutung für einzelne Kinder, denen sich Rosa nahe fühlt, bestehen bleiben. Rosas Einbindung in das Klassengefüge und eventuelle Freundschaften konnten im Rahmen des Forschungsprojektes nicht ausreichend erhoben/überprüft werden.

Das von ihr angebrachte Beispiel der Zahl „eine Millarden neunhundertneunundneunzigdreitausendkeineAhnung“ (Turn 154) spricht, wie auch ihre Ausführungen in Turn 126 („zum Beischpiel die Einhundertneunneunzig wie äh=hat man das wi::e hat man das herausgefunden dass es dann Zweihundert sind“) dafür, dass Rosa die Stellenwerte im dekadischen Positionssystem noch nicht vollständig verinnerlicht hat. Die Zahl 3.000 kommt bei ihr nach der 999. Dies könnte auch an der in Klasse 3 noch nicht vollständigen Erschließung des ZR 1.000.000 liegen, wobei der Begriff „Milliarde“ ihr bereits bekannt ist. Auch, dass sie mit „die ham ja kein fünf sechs sieben“ (Turn 154) die Einerstelle bei großen Zahlen ausschließt, könnte für diese Deutung sprechen. Allerdings kann man diese Passage auch als Negierung von Nadjas Argumentation aus Turn 144 deuten, damit würde Rosa das Weiterzählen ab der Zahl *unendlich* ausschließen und Berat beipflichten. Die folgende Passage „Es geht immer weiter“ würde für Rosas Einnehmen von Berats Sichweise sprechen.

Folgend bringt Rosa in Turn 154 noch das Beispiel der Zahl Pi an, dessen Anführung sie über die Sachkenntnis ihres Vaters rechtfertigt, welcher ihr von Pi berichtet hat. Man kann spekulieren, dass Rosa mit ihren Eltern über die Stunde U1 bzw. das in ihrer Klasse erhobene Forschungsprojekt kommuniziert hat oder dass Gespräche über besondere mathematische Inhalte in der Familie auch ohne Bezug zum Projekt stattfinden. Interessant ist, dass Pi als Beispiel kommt, da hier auch der direkte Bezug zum Thema Unendlichkeit deutlich wird: Pi als berühmteste, nichtperiodisch unendliche Dezimalzahl.

Nach einer nicht transkribierbaren Passage Rosas gibt Herr Bämpfer einen bestätigenden Impuls und etabliert sich somit erneut als administrativ steuernder Diskussionsleiter. Daraufhin stellt Frau Ellestar die Rückfrage „Also Punkt heißt jetze Zahl sozusagen. Ja?“ (Turn 158), die sich vermutlich auf die nicht transkribierbare Aussage Rosas bezieht. Frau Ellestar übernimmt damit den gesprächsführenden Impuls von Herrn Bämpfer, unterschwellig ist die Hierarchie zwischen beiden Lehrkräften durch diese Übernahme anscheinend schon etabliert. Frau Ellestar dominiert als Klassenlehrerin, während Herr Bämpfer sich trotz seiner Funktion als unterrichts- und gesprächsleitende Person unterordnet und auf die Übernahme des Turns auch nicht weiter reagiert. Die Rückfrage durch Frau Ellestar ist, wie auch bereits im Gespräch mit Quentin (siehe S. 134ff, Turns 31ff) eine inhaltliche Paraphrase, die wieder durch eine Ablehnung des paraphrasierten Kindes beantwortet wird („Das gibs aber nich“, Rosa, Turn 159). Es scheint, als würden Frau Ellestars Paraphrasen den Kern der Aussagen der Kinder nicht vollends treffen. Weiterhin kommt der Eindruck auf, die Kinder würden diese *inhaltliche* und nicht rein administrative Einmischung durch Lehrkräfte während der Debatte nicht unbedingt begrüßen. Auf Rosas Antwort reagiert Herr Bämpfer wieder mit einer bestätigenden Lautmeldung („Mhm“, Turn 160) und Frau Ellestar mit einem „Aha“ (Turn 161), welches man als Beendigung der Aushandlung interpretieren kann. Dadurch, dass Frau Ellestar auf die Ablehnung ihrer Paraphrase nicht mit weiteren Rückfragen antwortet, wird Rosas Argumentation an dieser Stelle abgebrochen und eine weitere inhaltliche Aushandlung im gegenseitigen Verständnisprozess beendet.

162	Herr Bämpfer	Ähm. Ole du hast die ganze Zeit dich glaub ich zurückgehalten und ich we:iß vorhin hab ich paar mal bei euch reingehört du hast doch auch n paar Argumente gehabt,
163	Ole	Ja:::a?
164	Herr Bämpfer	Schieß mal los
165	Ole	Also=ich stimme für Leibniz?
166	Herr Bämpfer	Ja,
167	Ole	weil es gibt eigentlich keine große Tü::te
168	Nadja	[hustet]
169	Ole	Ja wie denn?
170	Kommentar	die Kinder werden fast alle schnell sehr laut, es folgt eine unverständliche Passage (ca. 2 Sekunden)
171	Herr Bämpfer	Äh nich- nee nee (.) nich reinreden (.) wir melden uns wir melden uns (.) Ole hat gesagt so einen großen Beutel gibs nich? (.) so wie Leibniz quasi? Warum?
172	Ole	Weil es kommt ja immer eine Zah:l dazu::
173	Herr Bämpfer	Berat? was sagst du dazu?
174	Berat	Äh=in Zukunf gibs ein (.) [fiept und hebt die Schultern]
175	Nadine	Is der nich (unverständlich)
176	Ole	«Augenbrauen hochziehend›weißt du=s?›
177	Berat	Ja::a
178	Nadja	[hustet laut]

179	Berat	Hunderteinzentich [hebt seinen Finger]

Administrativ lenkend ermuntert Herr Bämpfer im Folgenden ein bisher nicht zu Wort gekommenes Kind, Ole. Die Ermunterung durch Herrn Bämpfer kann als positive Verstärkung zu Oles Arbeiten in der Gruppe gewertet werden. Hinweise für diese Interpretation sind, dass Herr Bämpfer in den Gruppenarbeiten Ole scheinbar aufmerksam zugehört und sich auch dessen Wortmeldungen gemerkt hat. Somit ruft er ihn auch aus inhaltlichen Gründen und nicht nur aus dem sozialen Grund, dass Ole noch nicht zu Wort kam, auf und greift dabei auf die Formulierung „zurückgehalten“ zurück, statt Ole Desinteresse vorzuwerfen. Zudem benutzt er das positiv konnotierte Wort „Argumente“ (Turn 162), statt neutral konnotierte (bspw. „du hattest doch auch was gesagt“) oder negativ konnotierte (bspw. „darüber habt ihr doch auch geplaudert“) Formulierungen zu nutzen. Trotz der positiven Bestärkung drückt sich durch Herrn Bämpfers Formulierung hier ein Hierarchiegefälle der Lehrkraft zu den Kindern aus, da „bei euch rein[..]hör[en]“ in Gruppenarbeiten den Lehrkräften vorbehalten ist und eine solche Aktion zwischen den Kindern zumindest nicht offen im Laufe der Debatte kommuniziert worden wäre.

Ole bestätigt in Turn 163 Herrn Bämpfers Aussage, er hätte Argumente. Diese nennt er allerdings nicht gleich. Die stark steigende Intonation am Ende des Turns kann entweder so gedeutet werden, dass Ole nicht mehr genau weiß, auf welches Argument sich Herr Bämpfer konkret bezieht, oder dass Ole überrascht ist, dass seine Gedanken so positiv gewürdigt wurden. Weiterhin ist denkbar, dass er nicht genau weiß, was Herr Bämpfer nun von ihm erwartet und eine gewisse Unsicherheit bezüglich der Wertigkeit seiner Argumente zeigt (Verbindung der ersten beiden Interpretationsalternativen). Herr Bämpfer gibt ihm anschließend freie Hand bei der Antwort und impliziert mit „Schieß mal los“ (Turn 164), dass Ole eigentlich wissen müsste, was gemeint ist. Dabei hilft er ihm inhaltlich nicht weiter auf die Sprünge.

Ole startet seine Argumentation mit einer Paraphrase des in der Vorlesesituation gebrachten Argumentes von Leibniz (Turn 167, beim Vorlesen: „Allerdings teilte Robert auch die Bedenken, die Leibniz hatte: kann es so einen großen Beutel überhaupt geben?“, siehe auch U2 Text auf S. 268), dessen Namen er auch anbringt (Turn 165). Zuvor bringt er seine Positionierung ein, die allerdings auch durch seine Position vor der Tafel bereits deutlich ist (vgl. Aufstellung der Kinder in Tb. 6.3). Dass er hier wieder mit einer steigenden Intonation endet, spricht dafür, dass er sich wieder an die Erwartungen Herrn Bämpfers herantastet, um diese erfüllen zu können. Herr Bämpfer versucht ihn in der weiteren Argumentation zu unterstützen und zu motivieren, ohne inhaltlich weiter einzugreifen (Turn 166).

Im Gegensatz zu seinen Notizen aus der Gruppenarbeit (vgl. Abb. 6.20) benutzt Ole in Turn 167 den Begriff *Tüte* statt Beutel. Im bisherigen Verlauf der Debatte und auch der Gruppenarbeiten kam bereits ein Synonym zu Beutel, nämlich *Sack* auf, Tüte ist hier erstmals als Synonym eingebracht worden. Damit bekommt der als Metapher für *Menge* genutzte Begriff eine alltäglichere Bedeutung, außerdem kann *Tüte* als etwas Kleineres gewertet werden als Beutel oder Sack. Eventuell möchte Ole mit diesem Begriff seine Argumentation, dass ein Füllgefäß in dieser Größe nicht existieren kann, doppelt untermauern, indem er auch den kleiner konnotierten Begriff benutzt. Sein „eigentlich“ (Turn 167) kann einerseits als eine gewisse Unsicherheit beim Argumentieren gedeutet werden, andererseits könnte es

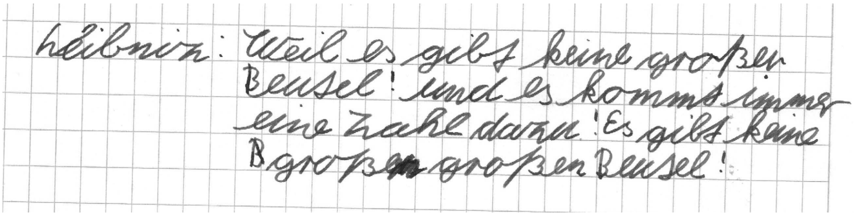


Abbildung 6.20: Oles Notizen aus der Gruppenarbeit vom 26.04.2021

eine Antwort auf die bspw. von Franziska (vgl. S. 138) vorgebrachte Argumentationen sein, die die Existenz eines solchen Beutels/Sacks/Tüte nicht negiert. Nachdem Nadja hustet (Turn 168), fragt Ole „Ja wie denn?“ (Turn 169), was sich einerseits auf das Husten beziehen kann, was er dann als Widerspruch zu Turn 167 werten könnte, andererseits könnte es sich darauf beziehen, dass eines der Kinder außerhalb der Kamera (Rosa, Kevin) sich parasprachlich geäußert hat, was im Nachhinein nicht mehr nachvollziehbar ist. Weiterhin kann man seine Rückfrage, unabhängig davon, worauf er reagiert, als Wunsch einer konkreten Rückmeldung zur Gestaltung einer großen Tüte werten. An welchen Adressaten er sich damit richtet, bleibt unklar.

Auf Oles Rückfrage hin wird die Klasse sehr laut, was durch Herrn Bämpfer administrativ steuernd unterbrochen wird (Turns 170, 171). Dieser sieht scheinbar den Gesprächsverlauf in Gefahr und versucht nach der administrativen Steuerung inhaltlich paraphrasierend das Gespräch auf den Ausgangspunkt zurückzuführen. Somit gibt er Oles Aussage zum einen als Statement an alle Kinder weiter, gibt aber (weitere Argumente fordernd) den Turn wieder an Ole ab. In seiner inhaltlichen Paraphrase benutzt er das Wort *Beutel* statt *Tüte*, vermutlich um Oles Aussage an die Aufgabenstellung anzupassen.

In Turn 172 antwortet dann Ole nicht direkt auf Herrn Bämpfers Rückfrage, der Beutel/ die Tüte taucht in seiner Antwort nicht mehr auf. Er begründet die unendlich große Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und nicht direkt, warum es die große Tüte nicht geben kann. Dies tut er mit einer Vorstellung von potentieller Unendlichkeit, also der Zahlenmenge im Prozess des Werdens, des *Dazukommens* und nicht mit der gesetzten Mächtigkeit. Implizit stützt die Aussage, es kämen immer neue Zahlen hinzu, genau seine Konklusion, dass es eine so große Tüte nicht geben kann, er führt die Argumentation aber nicht logisch korrekt geschlossen aus. Graphisch lassen sich Oles Aussagen folgendermaßen (Abb. 6.21) nach Toulmin (2003) veranschaulichen:

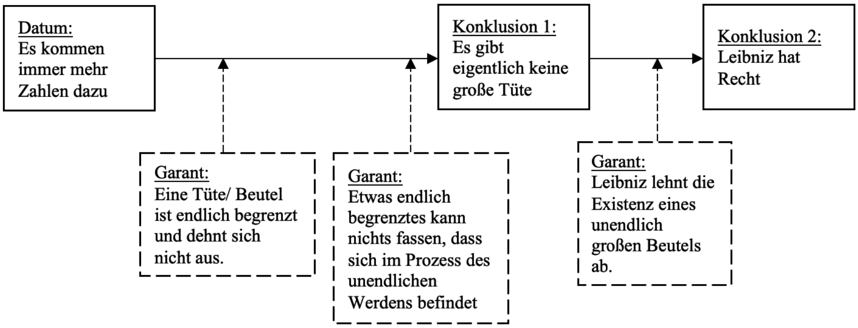


Abbildung 6.21: Oles Argumentation als Toulmin-Schema unter Einbezug impliziter Garanten

Nach Oles Turn in 172 meldet sich Berat (im Transkript nicht festgehalten, durch videographiertes Material überprüft) und Herr Bämpfer ruft ihn in Turn 173 promt auf, wobei wieder die administrative Steuerung der Debatte durch ihn etabliert wird. Er paraphrasiert Ole nicht, bevor er Berat aufruft, weil er vermutlich davon ausgeht, dass die Kinder der Debatte aktiv folgen. Oles Argumentation wird nun nicht weiter verfolgt, daher kommen seine Ausführungen und Begründungen etwas kurz (deshalb sind auch in Abb. 6.21 viele Garanten implizit, bei denen er nicht die Chance hatte, sie zu explizieren).

Berat bringt nochmal das Argument der Möglichkeiten in der Zukunft ein (Turn 174), welches schon zuvor von Nadja, Rosa, Nadine und Karl (vgl. Abb. 6.19) vorgestellt wurde. Er äußert sich hier sehr absolut/ definitiv (ohne Konjunktiv) und gibt Ole auf eine vermutlich pragmatisch zu deutende Art eine Möglichkeit, wie es so eine Tüte doch geben könnte. Das Fiepen steht stellvertretend für einen der Begriffe Beutel/Sack/Tüte, möglicherweise weiß Berat nicht genau, welchen dieser Begriffe er benutzen soll, da noch eine dritte Option durch Ole gegeben wurde (in Turn 167). Ole schließt als Antwort (Turn 176) nicht aus, dass es so eine Tüte in der Zukunft geben könnte, er stellt aber Berats Absolutheit in Frage. Es scheint ihm wichtig zu sein, dass man Begründungen sicher annehmen kann. Möglicherweise geht er auch davon aus, nun seine Argumentation verteidigen zu müssen. Die Aushandlung findet nun zwischen Berat und Ole statt, keine der beiden Lehrkräfte interveniert. Berat ist sich absolut sicher (Turns 177, 179), was er durch „Hunderteinzentich“ (Turn 179) noch steigert (mehr als 100 Prozent). Durch das Heben seines Arms und Zeigefingers kommt in der Aussage auch Humor zum Tragen, es scheint als wollte Berat eine Lehrkraft oder Autoritätsperson imitieren. Dass solche Äußerungen im Rahmen der Debatte möglich sind, spricht für generell sehr flache Hierarchien, die von den Lehrkräften als solche ausgestrahlt werden. Eventuell kann an dieser Stelle auch das Nicht-Eingreifen der Lehrkräfte in den Aushandlungsprozess zwischen Ole und Berat als Begründung angeführt werden.

181 Herr Bämpfer		Rosa? Möchtest du auch was drauf antworten?
182 Rosa		Ne- äh das was du grad erzählst is=Quoark (.) weil zum Beispiel es gibt jetz uns
183 Herr Bämpfer		Rosa (.) warte mal ganz kurz. Wir <u>nehmen</u> die Meinung der anderen <u>**ernst**</u>. Ja:? Sag nich pauschal zu jedm das is Quark. Okay?
184 Rosa		Okay. Sozusagen vielleicht könnte es ja sein aber [holt Luft] <u>trotzdem</u> man muss bedenken (.) also vielleicht sind wir jetzt die Menschen die daran glauben wenn da noch mehr Menschen leben dass die jetz da ran denken dann (.) <u>was</u> wir gesagt haben. Das was wir gesagt haben nehm die dann ernst und dann ähm gibt es noch mehr (zettel) und so geht das immer weiter das is wie in der S- P - also n Kind kommt auf die Welt und dann kommt immer wieder=n=neues
185 Berat		[meldet sich]
186 Rosa		Denn man kann kein Punkt setzen [holt Luft] wie zum Beispiel wir Menschen, es sind nur noch- es sind zwei Menschen dann kommt trotzdem nochn Baby und immer so wei::ter?

Nachdem Ole noch etwas schwer transkribierbares, vermutlich der Jugendsprache angehöriges auf Berat antwortet (Turn 180, „(Ne Plasse?)“), ruft Herr Bämpfer die sich vermutlich erneut meldende Rosa abermals auf. Dabei wird in Turn 181 Herrn Bämpfers administrative Steuerung erneut deutlich, er wertet die Aussagen der Kinder fast nie, lenkt administrativ und hält dabei eine gewisse Linie für die Debatte ein, paraphrasiert aber äußerst selten und überlässt dadurch die inhaltliche Gestaltung den Kindern. Fraglich ist in diesem Turn, ob er sich mit dem „auch“ auf Ole oder auf Berat bezieht (oder auf beide). Auch in Turn 182 ist es nicht deutlich, ob sich Rosa auf Ole oder Berat bezieht. Da sie außerhalb des gefilmten Bereichs steht, kann auch nicht überprüft werden, wen der beiden sie ansieht. Berats Meldung in Turn 185 könnte eventuell darauf hinweisen, dass sie sich auf ihn bezogen hat und er es für notwendig hält, seine Position zu verteidigen. Rosa antwortet mir einer sehr scharf formulierten Passage (Turn 182). Interessant ist, dass sie das Wort *Quark* benutzt; eine zwar abwertende (synonym für *unsinnig, belanglos*) Formulierung, die aber genauso wie die Formulierung „kein Punkt setzen“ (Turn 186) im Sprachgebrauch von Kindern m.E. eher unüblich ist. Durch die Aussage „es gibt jetz uns“ verstetigt sie sich in der Realität und holt die Debatte aus der Abstraktheit inhaltlich wieder in ihre Lebenswelt. Auch denkbar ist, dass sie sich in Bezug auf die von Berat angesprochene Zukunft, die sie als ungewiss wertet, in der Gegenwart verorten möchte („jetz“). Mit Blick auf die Antinomien nach Kant (vgl. die Ausführungen zur Unendlichkeit nach der Antike, → Kap. 2.1.3 auf S. 30) ist dieser Gedankengang nicht neu, auch hier scheint dem Menschen eine zwingender Wunsch nach Verortung innerhalb der Trias Vergangenheit - Gegenwart - Zukunft immanent.

Herr Bämpfer fasst Rosas Formulierung als Störung für den Verlauf der Debatte auf und greift regelnd ein. Dies tut er wieder rein auf der administrativen Ebene, er versucht sich inhaltlich nicht zu beteiligen und rügt lediglich Rosas Formulierung (Turn 183). Die Aussage, sie sage „pauschal zu jedm das is Quark“ (Ebd.)

bezieht sich vermutlich auf vorherige pauschalisierte Formulierungen durch Rosa, wie bspw. in Turn 55 („gibt seinen Senf dazu“). Obwohl Rosas Formulierung nicht direkt impliziert, dass sie die Meinungen der anderen nicht ernst nimmt, verknüpft Herr Bämpfer ihre Aussage vermutlich aufgrund der abwertenden Formulierung mit dem Verstoß gegen eben jene Regel, man solle die Meinungen der anderen ernst nehmen. Er greift nun also auf der administrativen Ebene in ihre begonnene Argumentationskette ein, um einen wertschätzenden Umgang der Kinder im Verlauf der Debatte sicherzustellen.

Rosa versteht Herrn Bämpfers Eingriff nicht als Unterbrechung auf der administrativen Ebene, sondern interpretiert es auch als inhaltliches Eingreifen und denkt nun, sie müsse die Positionen/Meinungen der anderen Kinder als *richtig* werten, um die Debattenregeln korrekt anzuwenden (Turn 184, „Sozusagen vielleicht könnte es ja sein“). Das „Sozusagen“ und das „aber“ zu Beginn von Turn 184 sprechen für einen kleinen Widerstand gegen dieses Vorgehen, wobei sie aber Herrn Bämpfers Zurückweisung ohne direkte Konfrontation sofort akzeptiert und nicht als persönlichen Angriff wertet. Sie argumentiert die oben angesprochene Trias weiter aus, was man als Aufzählung einer Reihe von Metagesprächen interpretieren kann. In der Vergangenheit brachten Cantor und Leibniz (wenn auch fiktiv, ob diese Fiktion auch von Rosa verinnerlicht wird bleibt unklar) das Thema der Zahlen im Beutel auf, in der Gegenwart unterhalten sich Berat und Rosa über Cantor und Leibniz und in der Zukunft werden „noch mehr Menschen leben [die sich darüber unterhalten] was wir [(die Klasse, Rosa und Berat, Ole...)] gesagt haben“. Neue Menschen, die sich über dieselben Themen nochmals austauschen, bringen auch neue Sichtweisen auf die Thematik vor dem Hintergrund der dann vorherrschenden Technik und Möglichkeiten ein. Diese Art, die Zukunft mit einzubeziehen, kann als ein Versuch Rosas interpretiert werden, die abstrakte Diskussion über *A-priori*-Wahrheiten (wie auch durch Karl geführt, vgl. Abb. 6.19) wieder auf die Ebene des Lebensweltlichen, der empirisch erfahrbaren *A-posteriori*-Wahrheiten herunterzubrechen und mit sinnlich erfahrbaren Bedingungen wie Technikentwicklung oder der Verknüpfung von Reproduktion und Unendlichkeit („also n Kind kommt auf die Welt und dann kommt immer wieder=n=neues“, Turn 184) greifbarer zu machen. Zur Verbildlichung kann folgende Übersicht (Abb. 6.22) zum Prozess der Metagespräche herangezogen werden:

Vergangenheit		Gegenwart		Zukunft
Cantor vs. Leibniz: Kann man ALLE Zahlen in einen Beutel packen?	→	Rosa vs. Berat **über** Cantor vs.Leibniz: Kann es einen solchen Beutel in der Zukunft geben?	→	A vs. B **über** Rosa vs. Berat **über** Cantor vs. Leibniz: Frage/ Thema/Lösung XYZ

Abbildung 6.22: Graphische Veranschaulichung von Rosas Verständnis zur Änderung von Sichtweisen über Metagespräche

Für Rosa ist diese Art, wie Menschen im Laufe der Geschichte ihre Sichtweisen verändern und anders über Themen der Vergangenheit denken, eine Art unendlicher Regress des Fortschritts (Turn 186). Durch die potentiell unendlich lange mögliche Reproduktion des Menschen und dadurch entstehende neue Arten zu denken, werden für Rosa niemals endgültige Wahrheiten in Diskussionen entstehen. Diese Art, sich zu positionieren, erinnert an ihre skeptizistische Argumentation aus Turn 55 und stellt auch hier eine Möglichkeit dar, die Ernsthaftigkeit der Debatte anzuzweifeln. Rosas steigende Intonation am Ende von Turn 186 könnte man verschiedenartig deuten:

- Sie wünscht sich Zustimmung durch den Rest der Klasse bzw. Rückversicherung durch die gesprächsleitende Lehrkraft
- Sie ist sich unsicher, ob sie ihre Gedanken deutlich gemacht hat
- Sie ist sich unsicher, ob ihre Gedanken als *richtig* gewertet werden (eng am ersten Stichpunkt)
- Sie möchte durch eine erneute skeptizistische Argumentation Herrn Bämpfer zur inhaltlichen Einmischung in die Debatte bewegen, die steigende Intonation ist provokativ

Herr Bämpfer reagiert darauf folgendermaßen:

187	Herr Bämpfer	Okay
188	Rosa	Also=s ist doch so

Turn 187 kann man so deuten, dass Herr Bämpfer Rosas Argumentation vollständig nachvollziehen kann, sich aber entsprechend seines in der Debatte etablierten Interaktionsmusters nicht weiter inhaltlich beteiligen möchte. Im Gegenteil dazu könnte man auch interpretieren, dass er Rosa so durchdringend *nicht* verstanden hat, dass ihm weder eine Nachfrage noch eine Antwort zu ihrer Argumentation einfällt. Rosas Antwort in Turn 188 spricht für die provokativere Auslegung der Intonation in Turn 186, da sie sich mit dem eine gewisse Akzeptanz ausstrahlenden „Okay“ von Herrn Bämpfer nicht zufrieden gibt und eventuell eine Gegenargumentation von seiner Seite erwartet hatte, wie es auch in Turn 55 auftrat. Das könnte unter Umständen dafür sprechen, dass Rosa sich im Hierarchiegefüge der Debatte eher im Streit mit den Lehrkräften als mit den Mitschüler*innen sieht, also ihre Diskussionskompetenz über die der anderen Kinder hinaus einschätzt und sich daher an den Erwachsenen für tiefergehende Auseinandersetzungen mit ihren Gedanken orientiert. Zusammenfassend kann Rosas Argumentation folgendermaßen nach Toulmin (2003) veranschaulicht werden:

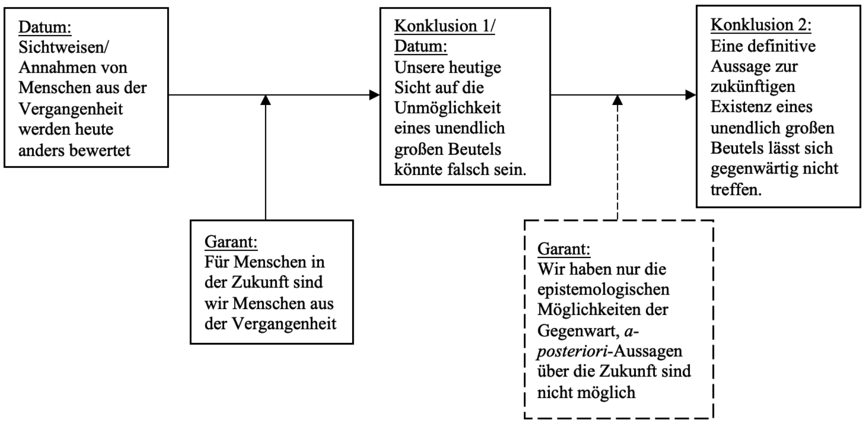


Abbildung 6.23: Rosas Argumentation zur Entwicklung neuer Sichtweisen als Toulmin-Schema

189	Herr Bämpfer	Kevin, du hattst dich auch? gemeldet, was wolltest du sagn?
190	Kevin	°Eigntlich hat Ole Recht wei:l (.)°
191	Herr Bämpfer	Aha
192	Kevin	Cantor hat ja gesagt i- er möchte einen Beutel mit allen Za:hln aber
193	Nadja	└ [hustet] ┘
194	Kevin	└ es gibt ┘ echt viele Zah:ln wie soll man (...) da- (.) da kommt doch=immer eine dazu?
195	Herr Bämpfer	Du kanns=dir nicht vorstelln dass=es=s:o: nen großen Beutel gib wo alle Zah:ln reinpassen?
196	Kevin	°Ja°

Obwohl eine Wortmeldung durch Berat (meldet sich in Turn 185) noch aussteht, ruft Herr Bämpfer ohne Gegenrede an Rosa nun Kevin (außerhalb des gefilmten Bereichs) auf. Kevin gibt Ole Recht (Turn 190) und positioniert sich damit auch bei Leibniz. Interessant ist an dieser Stelle, dass er seine Argumentation zunächst mit der Wiedergabe von Cantors fiktiver Aussage beginnt, die auch an der Tafel sichtbar ist (vgl. Abb. 6.8 auf S. 131). Auf die Argumentationen innerhalb der Debatte bezogen ist Kevins Argumentation nicht neu, die immer neu hinzukommenden Zahlen wurden bereits von Ole (den er als Urheber auch nennt) und Karl (vgl. S. 148 und die Ausführungen vorab) eingebracht und mit der Klasse diskutiert. Die Interaktion mit Herrn Bämpfer ist an dieser Stelle aber neu, denn dieser schaltet sich zum zweiten Mal im Verlauf der Debatte inhaltlich mit ein und paraphrasiert, obwohl Kevin sich inhaltlich sehr deutlich ausdrückt, nochmals dessen bzw. Oles Argumentation (Turn 195). Während sich bei tradierenden Einmischungen durch Frau Ellestar eine ablehnende Reaktion durch die Kinder als Interaktionsmuster abgezeichnet hat (Turns 39ff, 158), reagiert Kevin bekräftigend auf die Traduktion durch Herrn Bämpfer. Es bleibt offen, was Herrn Bämpfer an dieser Stelle dazu bewegt hat, seine gewohnt administrative Steuerung der Debatte aufzugeben. Mutmaßlich könnte Kevins sehr leise Sprechweise ihn (Bämpfer) dazu verleitet haben, die Aussage für die gesamte Klasse nochmals zu wiederholen und aber als Rückfrage zu formulieren, um die Aufmerksamkeit nicht auf Kevins Stimme, sondern die Inhalte der Debatte zu lenken. Weiterhin interessant ist, dass Kevin von „echt viele[n] Zah:ln“ (Turn 194) spricht und nicht von unendlich vielen Zahlen. Dies und die Aussage, dass er weiter mit „da kommt doch=immer eine dazu?“ (Ebd.) ausführt, erweckt den Eindruck, dass Kevins Vorstellung von Unendlichkeit vollkommen im *Potentiellen* verhaftet ist. Die Unendlichkeit im Werden wird nicht mit der Aussage, es gäbe unendlich viele Zahlen (Vorstellung aktualer Unendlichkeit) verknüpft, sondern das Werden wird bei Kevin an die Endlichkeit angeschlossen, ganz im Sinne eines *A-Peiron*[46]; Etwas, das nach dem Überschreiten einer Grenze *wird*.

197	Herr Bämpfer	Mhm, (.) Berat du hattst dich auch noch gemeldet?
198	Berat	Rosa isch hat nur ganz kurz (.) also=s su dir sa::gn (..) Du hast Recht, (.) abba in welchem Zukunf **wä:re** «die Hände fragend hoch nehmend›(der Unterschied)?›(.)
199	Rosa	Also vielleich gibs auch noch (.) ebn (Sauerstoff), Sauerstoff (.) └ vielleich äh ┘
200	Nadja	[meldet sich]
201	Rosa	pflanzn wir jetz neue Bäume an? Es kann mehr oder weniger gebn das wissn wir └ alles nich ┘
202	Berat	└ (gut ich weiß) ┘

Nach Kevins Bestätigung zu Herrn Bämpfers Paraphrase wird nun Berats Meldung aus Turn 190 anerkannt und Herr Bämpfer ruft ihn auf (Turn 197). Er scheint an der Debatte interessierte Kinder aufmerksam zu verfolgen und sich zu merken, wer eine Wortmeldung angemeldet hat. Obwohl Berats Meldung schon 7 Turns zurückliegt, wird er nun nach Kevin aufgerufen. Zunächst hält er sich an die Ansage Herrn Bämpfers in Turn 183, wobei auch Berat diese Ansage nicht administrativ, sondern inhaltlich interpretiert und Rosas Argumentation insofern ernst nimmt, dass er ihr zunächst einräumt, Recht zu haben, bevor er ihre Argumentation entkräften möchte. Eine Möglichkeit, Turn 198 zu interpretieren, wäre, dass Berat die Themen der Debatte auf einer *a-priori*-entscheidbaren Ebene sieht, also ohne empirische Erfahrungen entscheidbar („in welchem Zukunf **wä:re** [...] der Unterschied?“, Turn 198). Rosas Statement, man müsse eventuell mit dem epistemologischen Prozess auf empirisch erfahrbare Eindrücke in der Zukunft warten, ergibt für ihn daher keinen Sinn. Unabhängig davon, welche Erfahrungen in der Zukunft gemacht werden könnten und welche Zukunft und neue Sichtweisen eintreten könnten, ist die Frage, ob alle Zahlen in einen Beutel passen können, für ihn entscheidbar.

Rosa versucht ihre Argumentation der nur *a-posteriori* überprüfbaren Wahrheiten anhand einer neuen skeptizistischen Aussage zu bekräftigen (Turn 201). Damit betont sie erneut die Ungewissheit der Gegebenheiten in der Zukunft an einem lebensweltlichen Beispiel, um die Abstraktion der eigentlichen Debatte umgehen

46 Der Bindestrich steht hier absichtlich da, um die Zusammensetzung des Wortes *Apeiron* zu untermalen zu können. Berat scheint sie anhand des Beispiels besser verstehen zu können (Turn 202) und erläutert nicht nochmals, dass gewisse *a priori* erkennbaren Wahrheiten durchaus auch induktiv für die Zukunft vorhersagbar sind, besonders wenn sie nicht an die Lebenswelt gebunden sind. Ob er diesen Gedankengang überhaupt verbalisieren und somit auch eine Reduktion dieser Komplexizität vornehmen könnte, bleibt zu diskutieren. Eventuell könnte eine Beschäftigung mit skeptizistischen Argumentationsweisen, philosophisch grundlegenden Termini und dem Begriff *Wahrheit* ihm dabei helfen, dies ist aber für die Rekonstruktion des Verlaufs der Debatte nicht weiter relevant und sei an dieser Stelle nur kurz erwähnt.

203	Herr Bämpfer	Ai Rosa ich glaub des- da- des is jetz n **ganz** andres Thema wo wir grad sin=ja? (.) Nadja möchtes du noch was sagn? Ich würd sagn (.) Nadja ähm (..) würdest du ma jetz n Abschluss mach? du kannst was sagn, und wir könn noch n paar Antworten haben, abba danach würd=ich das mal └ beenden (und für den Ganzen) ┘
204	Nadja	└Also ich ┘ will was:s zu Rosa s:sa:gn (.) Also:: isch denke dass (.) also isch äh (Honululu) ham schon erforscht dass ürgendwann die Sonne: zerschtört wird also abschtirbt und dann wird es nix mit (Leben)
205	Rosa	Aber └ es (kann ja) ┘
206	Nadja	└ Es wird ┘ ein Ende geben, wo (dann) irgendeine Zah:l [holt tief Luft] da- das Ende ist
207	Rosa	Aber trotzdem kann man doch immer und immer wieder eine Zahl fabriziern= wenns kein Ende gibt(.) gut äh also wenn- äh wenns n Ende gibt wenn zum Beispiel jetz wie bei den └ Dinosaurier (zieht irgendwer auf die Welt kommt) ┘
208	Frau Ellestar	└ (Ah ja ah ja ja? ja) ┘
209	Rosa	Trotzdem kann es wieder neu=äh kommn eh trotzdem kann es wieder neue Menschen gebn und dann wissn die ja °also° wenn die schlau genug sin wissen die doch, was es für Zah:ln gab und vielleicht dachten die da: weiter, (.) und dann is das für den die ein zum Beispiel ne ganz neue Zah:l (.) und die zum Beispie:l Dreitausend Millarden °keine Ahnung° (.) ähm ist für den ne (banale) Zahl und die eins is für den ne neue Zahl mit den müssten die erstma rechnen die müssten ja überle:gn [holt tief Luft] wie das sein könnte (.) [schluckt] nadja es (.) kann immer wieder mal Menschn gebn das wissn wir nich

Herr Bämpfer scheint der Aushandlung zwischen Rosa und Berat nicht vollständig folgen zu können, denn er markiert die Aussagen als „ganz andres Thema“ (Turn 203) und leitet, das Gespräch zwischen Berat und Rosa beendend, zu Nadja über. Über die Kennzeichnung als anderes Thema wertet er die doch tiefgründig verlaufende Passage zwischen Rosa und Berat ab, was ihm vermutlich selbst nicht gänzlich bewusst ist. Das Beispiel der Bäume (Rosa, Turn 201) gehört für ihn nicht zu der auf einer relativ abstrakten Ebene geführten Debatte, die (vermutlichen)

Grundzüge an Rosas Ausführungen hat er nicht erkannt. Somit mischt er sich durch den künstlichen Abbruch des Aushandlungsprozesses inhaltlich ein und etabliert das Hierarchiegefälle zwischen den Kindern und der (die Debatte leitenden) Lehrkraft. Anschließend markiert er, nun wieder administrativ steuernd, dass der Zeitrahmen der Debatte überschritten ist und er die Aushandlungen gern beenden würde.

Nadja bezieht sich in Turn 206 auf den von Rosa angesprochenen unendlichen Regress der Sichtweisen bzw. Metagespräche. Dass diese Ausführung, obwohl sie von Rosa in Turn 184 (20 Turns zuvor!) vorgebracht wurde, bei Nadja noch Gedankengänge anstößt, spricht für ein aufmerksames Nachvollziehen des Verlaufs der Debatte durch Nadja. Nun gestalten die Kinder die Debatte wieder untereinander ohne ein (administratives oder inhaltliches) Eingreifen der Lehrkräfte, daher kommen viele Wortüberschneidungen in den Turns 204-207 vor.

Nadja bringt als Gegenargumentation zum unendlichen Regress der Metagespräche hervor, dass das Leben auf der Erde allein aufgrund der Endlichkeit der Leben spendenden Sonne begrenzt ist und somit zwar von hohen Zahlen an Sichtweisen ausgehen kann, aber nicht von unendlich vielen. In Turn 206 bezieht sie sich nicht auf die Sichtweisen, sondern auf die (Neu-)Erfindung von Zahlen, die sie mit der Existenz und Erkenntnisfähigkeit der Menschheit sowie der Existenz einer Außenwelt zum Gewinn von Sinneserfahrungen verknüpft (empiristische Position zur Herkunft von Zahlen, rein an die Existenz der Menschheit gebunden könnte man die Aussage zum Mentalismus zuordnen). Nadjas Aussage in Turn 206 widerspricht sich mit ihren Positionierungen aus der Gruppenarbeit (vgl Kap. 6.1) und dem vorherigen Verlauf der Debatte, da man ihr hier eine Auffassung von der *Endlichkeit* der natürlichen Zahlen unterstellen könnte. In meiner Lesart möchte Nadja mit diesem Beispiel aber lediglich unterstreichen, dass *wenn* man die Existenz neuer Zahlen an ein Erfinden durch Menschen knüpft, dann die Endlichkeit der Zahlen in einer Kausalbeziehung zur Endlichkeit der Menschheit steht. Rosa widerspricht dieser *Reductio ad absurdum*, indem sie zunächst versucht auf einer abstrakteren Ebene in Richtung *A-priori*-Wahrheiten zu argumentieren („Aber trotzdem kann man doch immer und immer wieder eine neue Zahl fabriziern=wenns kein Ende gibt“, Turn 207). Diese Argumentation kann sie nicht weiter fortführen und kehrt umgehend zu einem mehr lebensweltlichen, wenn auch in der Vergangenheit verhafteten Beispiel zurück („äh wenns n Ende gibt wenn zum Beispiel jetz wie bei den Dinosauriern“, Turn 207). Der von ihr konstatierte unendliche Regress der Metagespräche hört anscheinend durch die Auslöschung der Zahlen konstituierenden Spezies nicht zwingend auf („trotzdem kann es wieder neue Menschen gebn“, Turn 209). Es ist an dieser Stelle allerdings anzumerken, dass es interpretativ sehr unsicher ist, ob sich Rosa in den Turns 207, 209 noch auf neue Sichtweisen und Metagespräche implizit mit bezieht oder ob sie sich auf die „Erfindung“ neuer Zahlen fokussiert. Sie scheint auf jeden Fall davon auszugehen, dass selbst bei einer vollständigen Auslöschung der Zivilisation (wie in Nadjas Beispiel mit dem Sterben der Sonne) weiterhin Spuren der Menschheit und auch der Zahlen für neue Genrerationen abrufbar sein werden. Dass diese neuen Generationen dann laut Rosa auf den Erkenntnissen vergangener „Zahlentheoretiker“ aufbauen können, zeugt wie auch ihre vorherigen Aussagen in den Turns 126 und 154 davon, dass sie Zahlbildungsregeln noch nicht vollständig verstanden hat. Eventuell verwechselt sie das *Erschließen und Benen-*

nen neuer Zahlen mit dem *„Fabriziern“* oder sie geht tatsächlich davon aus, dass neue Zahlen aus Denkprozessen von Menschen heraus entstehen (Mentalismus). Alles in allem sind Nadja und Rosa nun, wie von Herrn Bämpfer eigentlich bei Rosa und Berat befürchtet, bei einem anderen Thema angelangt. Herr Bämpfer unterbricht die beiden, bedankt sich und schließt die Debatte damit ab (Turn 210).

6.3 Pro-Contra-Debatte: Gesamtschule

Die Kinder haben sich, wie in der Verlaufsplanung beschrieben, nach der einführenden Vorlesesituation (Phase U2.B) in einer Gruppenarbeit mit den Positionen von Cantor und Leibniz auseinandergesetzt und ihre eigene Zuordnung zu einer dieser Positionen entwickelt (Phase U2. C). Im Anschluss an diese Gruppenarbeit findet die von Frau Fichtel geleitete Pro-Contra-Debatte statt, deren Rekonstruktion Bestandteil dieses Kapitels sein soll. Auch bei dieser Rekonstruktion stellt sich, wie in Kap. 6.2, die zentrale Frage:

Welche Argumentationsprozesse lassen sich wie mit Hilfe von Toulmin-Schemata nachzeichnen?

Hierzu werden, auch äquivalent zu Kap. 6.2, dichte Passagen interaktionistisch rekonstruiert und anschließend nach Toulmin (2003) graphisch verbildlicht. Ebenso wurde in diesem Kapitel der Aufbau am Verlauf der Debatte ausgerichtet.

Im Klassenraum sind die Tische in U-Form aufgestellt, einzelne Tische stehen frei in der Mitte des Us. Die Kinder sollen sich für die Debatte an den zwei langen Seiten des Us aufstellen, wobei die von der Tafel aus gesehene Seite für eine Positionierung bei Cantor, die von der Tafel aus rechts gesehene Seite für eine Positionierung bei Leibniz stehen soll. Keines der Kinder hat sich in der Mitte positioniert, alle haben durch die Stellung im Raum eine eindeutige Zuordnung zu einem Mathematiker (siehe Abb. 6.24). Da von allen Kindern eine Filmgenehmigung vorliegt, müssen keine Kinder außerhalb des Kamerabereiches stehen. Allerdings kann die Kamera nicht den ganzen Raum filmen, sodass bei einem Sprecher*innenwechsel mit verschiedenen Positionierungen eine Schwenkung durchgeführt werden muss, was eine Identifizierung des/der Sprecher*in bei schnellem Turnwechsel erschwert, sodass manche Sprecher*innen im Transkript nicht zuzuordnen sind.

1	Frau Fichtel	(.) fassen (..) fang ma::al mit Neville an (.) Was denkst du? was? ist richtig?
2	Neville	°(naja des) ähm (ist halt einfach) (.) (von von den)° ähm (.) man kann nicht jede Za:hl (.) ähm in ein (.) «bewegt die Hände auf und ab> in eine Gruppe packen> (.) wei:l man immer weiter zähl:n kann (.) also unendlich (..) °zähl:n.°

Frau Fichtel, die unterrichtsleitende Lehrkraft, eröffnet die Debatte mit dem Aufruf von Neville. Sie impliziert mit der Aussage „was? ist richtig?“ (Turn 1), dass eine der Positionen von Cantor oder Leibniz *richtig* und somit auch eine *falsch* sein muss, sie fragt nicht explizit nach einer Begründung, sondern nur

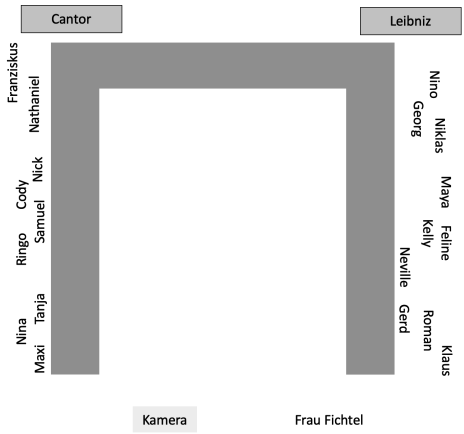


Abbildung 6.24: Aufstellung der Kinder an der Gesamtschule für die Pro-Contra-Debatte

nach der Angabe von Nevilles Positionierung, die aber durch seinen Standort (bei Leibniz, vgl. Abb. 6.24) im Klassenraum deutlich wird. Sie initiiert die Debatte somit auf die Positionierung und nicht auf die Begründung lenkend. Sie spricht nicht zur Gruppe, zum Anfang von Turn 1 wirkt es so, als spreche sie mit sich selbst. Auch etabliert sie mit dem aktiven Aufrufen eines Schülers ihre Position als administrative und eventuell inhaltliche Führung in der Klasse. Durch das Aufrufen von Neville gibt sie den Start auf Leibniz' Seite vor. Neville reagiert auf die geschlossene Frage nicht wie zu erwarten einsilbig, sondern liefert eine Begründung für seine Positionierung. Nach der Aufforderung, etwas *richtiges* sagen zu müssen, ist er zunächst gehemmt („°(naja des) ähm (ist halt einfach) (.) (von von den)° ähm (.) “, Turn 2), die vielen Verzögerungslaute sprechen für eine Unsicherheit auf seiner Seite. In der folgenden Aussage findet sich trotzdem viel Inhalt und eben die Begründung, die Frau Fichtel nicht eingefordert hat, die aber scheinbar für ihn notwendig ist, um seinen räumlichen Standort in der Klasse zu verteidigen. Die von ihm angesprochene „Gruppe“ (Turn 2) ist ein durch ihn gesetztes Synonym für den in der Gesamtschule explizit eingeführten Mengenbegriff und er scheint diese Gruppe als etwas Endliches zu fassen. Dies kann den Ursprung in den bei der Einführung durchweg im Endlichen verhafteten Beispielen für Mengen liegen oder an seiner Vorstellung des Begriffs. Das „immer weiter zähl:n“ (Turn 2) ist seine inhaltliche Deutung von unendlich, bei dem er sich am *Zählprozess* orientiert. Diesem Prozess schreibt er eine unendliche Dauer bzw. Ausweitung zu. Interessant ist hier, dass er sich nicht auf die Kardinalität der Zahlen bezieht, sondern dass bei Neville implizit die Zeit (des Zählprozesses) und deren Unendlichkeit eine Rolle spielt. Anschließend an Nevilles Ausführungen meldet sich vermutlich Samuel (durch Kamera nicht überprüfbar, weil Samuel am anderen Ende des Us steht).

3	Frau Fichtel	mh (..) da drüben, ja:a Samuel super (.) äh- ähm (wo) haste den mal zujehört ne? und haste jetz nen=n Gegenargument └für ihn┘.
4	Samuel	└(nur eines)┘
5	Frau Fichtel	sehr gut (unklar, ob evtl. Servus?)
6	Samuel	(Die tippel haben) Recht weil man immer weiter zählen kann (.) und man dadurch (..) dadurch können die Zahlen immer (durch buchstabiern) (.) und so kann man alle Zahle:n in einer Zahl (einbaun)

Frau Fichtel steuert die Beiträge der Schüler*innen zwar administrativ, lässt in diese Steuerung aber immanent inhaltliche Aspekte einfließen. So lässt sie nun den sich vermutlich meldenden Samuel zu Wort kommen, steuert seinen Beitrag aber, bevor er etwas sagen kann: „und haste jetz nen=n Gegenargument └für ihn┘..“ (Turn 3). Auch an dieser Stelle ist die Frage geschlossen und erzeugt bei Samuel auch nur eine kurze, bestätigende aber auch (wie bei Neville) etwas gehemmte Antwort (Turn 4). Das „zujehört“ (Turn 3) von Frau Fichtel kann man zum einen als Erstaunen darüber, dass Samuel zugehört hat, deuten oder als Frage zu seiner *Zugehörigkeit* bzgl. der Positionierung. Auch ist unklar, ob sich das „für ihn“ (Turn 3) auf Neville oder auf Leibniz bezieht. Als Reaktion auf Samuels kurze Antwort lobt sie ihn dafür, dass er ein Gegenargument gefunden hat, geht aber nicht weiter inhaltlich darauf ein und gibt den Turn an Samuel ab. Dieser gibt im Rahmen seines Gegenargumentes zunächst Neville recht („(Die tippel haben) Recht weil man immer weiter zählen kann“ (Turn 6). Die Aussage, man könne alle Zahlen in einer Zahl einbauen (Turn 6), bezieht sich inhaltlich auf die symbolische Darstellung der Zahl als Ziffer, Samuel verwendet hier *Zahl* anstelle von Ziffer und möchte mit seiner Aussage darauf aufmerksam machen, dass sich im dekadischen Stellenwertsystem die Zahlen durch Positionierung der Ziffern 0-9 an den jeweiligen Stellen konstituieren. Somit kann man bei potentiell unendlich vielen Stellenwerten auch alle möglichen Kombinationen an Ziffernfolgen „einbaun“ (Turn 6). Seine Vorstellung erinnert stark an die Nachkommastellen von transzendentalen Zahlen wie bspw. π. Weiterhin kann man Samuels Argument so deuten, dass er den Begriff *Zahl* in „in einer Zahl (einbaun)“ (Turn 6) für das Konzept der *Menge* benutzt. Somit hätte er in Turn 6 die Bildungsvorschrift für die Menge der natürlichen Zahlen umrissen („weil man immer weiter zählen kann“), das „(durch buchstabiern)“ würde für den Wechsel auf die nächsthöhere Ziffer an der passenden Stelle im dekadischen Positionssystem stehen. Die *Zahlen* würden hier weiterhin eher Ziffern ansprechen, könnten aber durchaus auch als Zahlen gemeint sein (die Argumentation wäre dann immer noch konsistent). Für das in Abb. 6.25 veranschaulichte Toulmin-Schema wurde letztere Deutungsalternative gewählt.

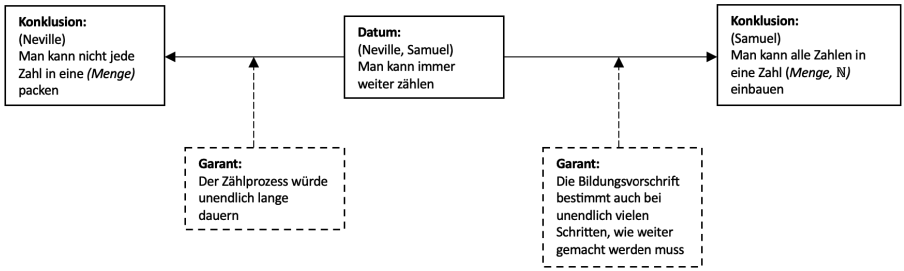


Abbildung 6.25: Nevilles und Samuels Argumentationen unter Verwendung des selben Datums als Toulmin-Schema

7	Frau Fichtel	m-hm (.) m=hm (..) Jetz wär=s wieder ganz wichtig entweder sagt jetzt jeder aus eurer Gruppe, der Samuel. das was der gesagt hat das stimmt wei::l (2) oder ihr sagt ne:e Samuel. Moment mal (4) Wer kann denn als Nächstes, (.) Fransziskus wolltest du=grade?
8	Franziskus	°nja° ich kann meins auch=vorle:sn (3) ich finde:e Cantor hat recht weil alle Zahlen die (ineinander schreibn kann) °und° das dann eine (.) das=ne Zahl ergibt
9	Kommentar	es wird kurz laut in der Klasse (keine Stimmen, sondern Rücken von Gegenständen)
10	Georg	(mh ja aber) alle ja alle (da wäre ja) auch=n Ende ge:bn
11	Franziskus	Ja
12	Georg	und unendlich dann wäre └(unverständlich)┘
13	S?	└(alter mehrere Zah:ln)┘
14	Samuel	man kann aber auch unendlich dann weiter=zä:hln und dann kann unendlich dann die Zah:ln weiter(rennen)
15	Kommentar	die Kinder reden durcheinander, nicht transkribierbar
16	Roman	ja aber man hat (.) man hat ja nich (.) man hat ja nich für jede Zahl=n Na:m
17	S? (Samuel?)	**Doch**
18	Mehrere SuS	**Nein**

Frau Fichtel impliziert mit ihrer Aussage abermals, dass im Verlauf des Gesprächs zwischen *richtig* und *falsch* unterschieden wird („das was der gesagt hat das stimmt", Turn 7). Es scheint allerdings auch, als bestünde eine Diskrepanz zwischen dem für die Gesprächsführung nötigen Kenntnisniveau und dem tatsächlich aus den Daten erkennbaren Kenntnisstand der Lehrkraft, sodass eventuell eine Stellungnahme durch Frau Fichtel selbst nicht erfolgen könnte.

Sie fungiert nicht nur als Moderatorin, sondern versucht auch durch ihre Wortwahl das Gespräch in der Rede der Kinder zu strukturieren. Die Gruppe, die sich bei Leibniz positioniert hat, soll sich geschlossen („jeder aus eurer Gruppe", Turn 7) zu Samuels Aussage festlegen, wobei diesmal von Seiten Frau Fichtels eine Begründung zusätzlich zur Bewertung von Samuels Aussage eingefordert wird. Dass sie die Pause von vier Sekunden ohne Intervention der Klasse halten kann, spricht für klar geordnete und etablierte Hierarchien in der Lehrer*innen-Schüler*innen-Interaktion beim Führen von Unterrichtsgesprächen. Die Schüler*innen sind scheinbar darauf konditioniert, dass ihnen das Wort durch die Lehrkraft erteilt wird. Durch die Frage, wer als nächstes wolle (Turn 7), weicht Frau Fichtel aber die zuvor etablierte Gesprächsstruktur des Abwechselns der Pro- und Contra-Seite auf und öffnet die Debatte somit mehr für inhaltliche Entwicklungen.

Franziskus startet mit der Angabe seiner Positionierung und folgt nicht dem von Frau Fichtel vorgegebenen Sprachmuster, zunächst einmal Samuels Beitrag zu bewerten (Turn 8). Er liest seine Mitschriften vor (auf die kein Zugriff mehr besteht), wobei er statt des von Frau Fichtel initiierten *Wirs* („oder ihr sagt", Turn 7) auf die eigene Person bezogen antwortet („ich finde", Turn 8). Auch hier entsteht der Eindruck, als würde er sich auf eine Art transzendentale Zahl beziehen, in welcher bei einer unendlichen Abfolge von Ziffern, bspw. nach dem Komma wie bei π, jede kombinatorische Möglichkeit an Ziffernfolgen vorkommen kann und die sich aus dieser unendlichen, musterhaften Abfolge von Ziffern bildet. Statt *Ziffer* benutzt Franziskus *Zahl*. Auch kann er sich, wie Samuel, auf eine Art Durchzählen an der jeweiligen Stelle im Positionssystem beziehen, bei dem die Ziffer als Faktor für die jeweilige Zehnerpotenz gesetzt wird.

Falls er, im Falle einer anderen Deutung, doch *Zahlen* meint, ergibt sich die Frage, welche Vorstellung einer *Menge* Franziskus durch die Impulse in Unterrichtsphase U2.B ausgebildet bzw. welche Vorstellungen er zur Bildung neuer Zahlen hat. Es könnte sein, dass er die Bildung neuer Zahlen aus einem Hintereinanderschreiben der Zahl heraus auffasst, also eine Abfolge von Zahlen, die sich dann (eventuell) additiv zu einer neuen Zahl formiert.

Nachdem Franziskus seine Argumentation präsentiert, erfolgt ein Turnwechsel ohne Intervention der Lehrkraft (Turn 10). Georg nimmt das von Frau Fichtel vorgegebene Muster auf und antwortet von der Gegenseite auf Franziskus' Argumentation. Er unterstellt, dass in Franziskus' Argumentation ein Ende enthalten sein muss, welches es seiner Meinung nach nicht geben kann. Implizit grenzt er sich damit von der links bei Cantor stehenden Gruppe ab, sieht aber davon ab, explizit zu formulieren, dass das Argument der Gegenseite (Samuel, Franziskus) falsch sei. Sein Einwand kann eher so gedeutet werden, dass er an die Gegenseite apelliert, die Idee weiter auszuführen. Franziskus bestätigt diese Proposition, abermals erfolgt der Turnwechsel ohne Intervention durch die Lehrkraft (Turn 11). Georg führt weiter aus, dass wenn es ein Ende geben würde, die Prämisse der Unendlichkeit der Zahlen verletzt wäre (Turn 12). Während ein durch die Kamerastellung nicht identifizierbares Kind, welches aus der Cantor-Seite heraus spricht, interveniert (Turn 13), führt Georg sein nun durch die Intervention unverständliches Argument fort. S? fühlt sich von Georg missverstanden. Mit dem „alter" (Turn 13), einem Einschub auf Peer-Ebene, bricht der bis dahin eher förmlich gehaltene Diskurs. Dies könnte eventuell in der Distanzierung der Lehrkraft aus dem Diskurs begründet sein. Die Kinder agieren nun mit flachen Hierarchien untereinander.

Samuel greift Georgs Einwand auf und versucht, ihn zu entkräften. Dabei beruft er sich, ähnlich wie in Turn 6 (oder vgl. Abb. 6.25), auf die Bildungsvorschriften der natürlichen Zahlen, indem er den Prozess des Weiterzählens und, *implizit*, auch die Bekanntheit des Zählvorgangs im Unendlichen anspricht. Der *Weg* der Zahlen ist somit bekannt, auch wenn er ein unendlich langer Weg ist - eine lebensweltliche

Metapher, die durch „rennen“ (Turn 14) von ihm gesetzt wird. Das sehr abstrakte Konzept der Unendlichkeit wird hier metaphorisch in die Lebenswelt der Kinder gebracht - eine Art Konzeptualisierung der arithmetischen Operation *Addition der natürlichen Zahlen/ Addition der 1 in* $\mathbb{N}$, was unter die Fähigkeit *Metaphorizing capacity* geordnet werden kann (Lakoff & Núñez, 2000, S. 52), eine wichtige Voraussetzung zur Erarbeitung mathematischer Inhalte, die über angeborene, einfache arithmetische Inhalte hinaus eine Beschäftigung mit höherer Mathematik ermöglicht (Ebd.).

Samuel und Franziskus, die auch in der Gruppenarbeit gemeinsam das Thema bearbeitet haben, wollen nun gemeinsam Georg überzeugen, daher interveniert Samuel (siehe oben, Turn 14). Im Wesentlichen unterscheidet sich das Argument der beiden nicht von Georgs, bis auf die diametral entgegengesetzte Konklusion. Das Weiterzählen endet bei Georg in der Aussage, dass alle Zahlen nicht innerhalb einer Menge darstellbar sind, weil der Zählprozess bzw. die Abfolge der Zahlen immer weiter geht. Bei Samuel und Franziskus wird dieser unendliche Zählprozess zwar auch anerkannt, aber nicht als verhindernde Bedingung für die Bildung einer Menge angesehen, da man ja die Bildungsvorschrift angeben kann (vgl. Turn 6). Auch hier, wie schon in der Auseinandersetzung mit Neville, kommt die Proposition des *Weiterzählens* in beiden Argumentationen vor. Das theoretisch unbegrenzt mögliche Weiterzählen ist für Roman (Turn 16) praktisch nicht umsetzbar, da er die Benennung auf dem Weg in die Unendlichkeit schwierig findet. Roman steht auf der Seite von Leibniz, seine Argumentation kann als versuchte Entkräftung von Samuels Einschub in Turn 14 interpretiert werden. Wenn man von der von Samuel eröffneten Metapher des unendlich langen Weges bzw. des „[W]eiter(rennen)[s]“ (Turn 14) ausgeht, so wäre bei Roman ein Teil des Weges eben nicht durch die von Samuel gezeichnete Bildungsvorschrift geebnet, sondern unbekannt. Die Verwendung von *Zahlen* statt *Ziffern*, obwohl eigentlich Ziffern gemeint sind, könnte die Möglichkeit der auch im Unendlichen fortführbaren Bildungsvorschrift von Samuel rechtfertigen, eine Benennung der Zahlen wäre hier unnötig, da lediglich mit den Ziffern von 0-9 und der jeweiligen Stelle im Positionssystem operiert wird. Romans Einwand wird also von Samuel in Turn 17 ohne weitere Begründung entkräftet; woraufhin die zu Roman bzw. Leibniz positionierte Gruppe ihm, ebenso ohne weitere Begründung, mit „Nein“ (Turn 18) antwortet. Abermals erfolgen die Turnwechsel 15-18 ohne Intervention der Lehrkraft. Die Argumentationen der Turns 8-17 können nach Toulmin (2003) veranschaulicht in Abb. 6.26 nachvollzogen werden. Für Franziskus wurde hier die Deutungsalternative der Nutzung des Wortes *Zahl* für das Konzept *Menge* verwendet. Bei der impliziten Konklusion/ Datum „Man kann nicht unendlich weiterzählen“ ist die *praktische* Möglichkeit gemeint, nicht die *theoretische* Möglichkeit des unendlichen Weiterzählens.

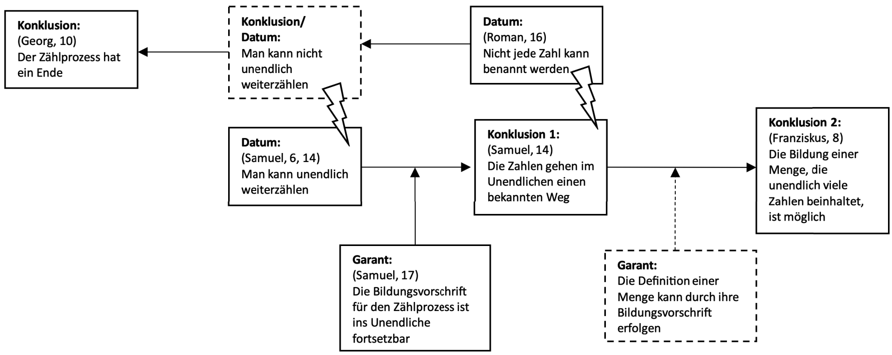


Abbildung 6.26: Georgs, Franziskus', Samuels und Romans Diskurs veranschaulicht als Toulmin-Schema

Anschließend an die Interaktion der Kinder wird die Klasse etwas lauter (Turn 19).

20	Klaus?	Und selbst (.) und selbst (.) und dann (.) wenn man immer weiter zählt? (.) ähm (2) «sein Blatt hochnehmend und darauf schauend> (°Was hab ich denn hier noch°)> (.) ähm (3) äh man kann ja:a nich sa:gn (.) was=äh also was jetz alles bedeutet (.) also es kann ja immer weiter gezählt └werdn┘
21	Samuel	└**Ja**┘ (aber wenns ganz neu gezählt wird) dann denkt man sich die neuen Namen für die Zah:ln └aus┘
22	Gerd	└Ja:a┘ aber (du kannst ja=nich alles)
23	Samuel	Ja oder man hängt ne <u>Null</u> dann=ne andere Zah:ln dann weiter hintn dran
24	Feline?	Aber man muss dann die Zah:ln ja aufschreiben könn (.) ja?
25	Kommentar	die Kinder reden laut durcheinander, nicht transkribierbar

Klaus macht den Anschein, als würde er um Worte ringen (Turn 20). Er bricht die in der Klasse ausgebrochene Unruhe (Turn 19); erstaunlich ist, dass ihm dies ohne weitere Intervention der Lehrkraft gelingt und seine Pausen nicht durch Einwürfe der anderen Schüler*innen unterbrochen werden, sondern dass er seinen Gedankengang in Ruhe darlegen kann. Eine mögliche Interpretation dieses Phänomens ist, dass die anderen Schüler*innen inhaltliches Interesse an einer argumentativen Weiterentwicklung des Klassengespräches haben und aus diesem Grund Klaus' Argumentation bis zum Ende anhören möchten.

Er greift die Diskussion um die Benennung aller Zahlen auf und führt hier eine *Reductio ad Absurdum* an. Er geht davon aus, dass man alle Zahlen benennen und auch praktisch immer weiter zählen kann und führt diese Aussagen der Gegenseite zu dem Widerspruch, dass trotzdem die Bedeutung von „[A]lle[m]“ (Turn 20) nicht erfassbar ist. Es scheint, als fände Klaus die abschließende *Benennung* einer unendlich großen Menge schwierig („äh man kann ja nich sa:gn (.) was=äh also was jetz alles bedeutet“, Turn 20). Für ihn ist die Definition einer Menge über die Bildungsvorschrift, wie von Samuel angestoßen, nicht möglich. Samuel unterbricht ihn, scheinbar inhaltlich angeregt durch Klaus’ Argumentation, und gibt Klaus zunächst Recht (Turn 21). Wie schon in der vorherigen Interaktion mit Neville steht die Idee des möglichen *Weiterzählens* nicht zur Debatte, sondern wird sowohl von Samuel als auch von Klaus als gegeben akzeptiert. Samuel bringt hier nun das Argument der möglichen Benennung neuer Zahlen an. Sein Einschub erinnert stark an Rosas Argumentation aus der Debatte an der Grundschule (vgl. Abb. 6.19). Allerdings ist, mit Hinblick auf der Verständnis von Mathematik, hier ein Unterschied deutlich hervorzuheben. Rosa spricht von der *Erfindung* neuer Zahlen, was die Existenz von Zahlen bei ihr an die Existenz von *Erfindern*, also Menschen knüpft. Samuel hingegen geht davon aus, dass die Zahlen bereits bis in die Unendlichkeit vorhanden sind und nur von Menschen noch benannt werden müssen, um eine Verständigungsgrundlage zu schaffen bzw. den Zählprozess im Praktischen realisieren zu können. Dieses hier herauszulesende Verständnis unterstützt auch die Deutung, dass Samuel mit Bildungsvorschriften für den Fortgang der Zahlen argumentiert. Solche Vorschriften können dann, wie auch durch die PEANO-Axiome gesetzt (Induktionsaxiom), die Menge der natürlichen Zahlen definieren.

Gerd greift Klaus’ Argumentation auf und betont nochmals, dass trotz Samuels Einschub eine Definition für alle (natürlichen Zahlen) nicht realisierbar ist. Gerd und Klaus sind dabei im Prozesshaften verortet, sie haben eher eine Vorstellung der Unendlichkeit im Werden, im Prozess, also von *potentieller* Unendlichkeit. Samuels (und auch Franziskus’ aus Turn 8) Vorstellung von Unendlichkeit kann eher in Richtung *aktuale* Unendlichkeit gedeutet werden: Unendlichkeit im Sein, durch das Induktionsprinzip im Werden beschrieben und im Sein manifestiert.

Ein Beispiel für eine solche Bildungsvorschrift kommt durch Samuel in Turn 23. Die hier angesprochene Vorschrift bildet allerdings nicht die komplette Menge der natürlichen Zahlen, sondern eher der Menge aller durch Zehn teilbaren natürlichen Zahlen („man hängt ne Null [...] hintn dran“, Turn 23). Da aber auch diese Menge die Kardinalität $\aleph_0$ hat, generiert Samuel hier wieder am neuen Beispiel eine aktual unendlich große Menge über eine Bildungsvorschrift. Die hypothetische Möglichkeit der Bestimmung aller in der Menge enthaltenen Zahlen über die bekannte Bildungsvorschrift wird von Feline in ihrer praktischen Umsetzbarkeit angegriffen (Turn 24). Während bei Neville noch das prozesshafte des *Zählens* im Vordergrund stand (also das Aussprechen der Namen der Zahlen, Turn 2), geht es Feline um die schriftliche Fixierung aller Zahlen (Turn 24). Bei ihr stünde dann zusätzlich zum Problem des *unendlich langen* Prozesses des Aufschreibens auch das Problem des *unendlich großen* verfügbaren Raums zum Aufschreiben implizit mit im Fokus. Mit den Argumentationen von Klaus, Samuel, Gerd und Feline aus den Turns 20–24 kann das Schema aus Abb. 6.26 wie folgt (Abb. 6.27) erweitert werden:

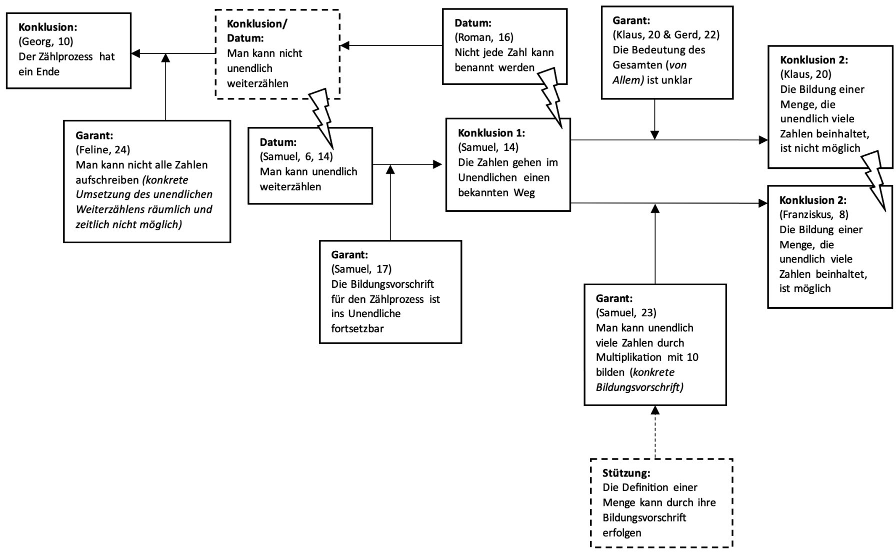


Abbildung 6.27: Erweiterung des Schemas aus Abb. 6.26 um die Turns 20–24

An der neuen Darstellung ist erkennbar, dass über mehrere Turns (6-24) hinweg inhaltlich argumentiert wurde, wobei diametrale Aussagen nicht zwingend linear auftauchen. So widersprechen sich beispielsweise die Propositionen von Klaus (Turn 20) und Franziskus (Turn 8). Dies ist beachtlich, da beide Konklusionen auf demselben Datum aufgebaut sind. Während Klaus den logischen Schluss von Samuel infrage stellt (Turn 20), indem er den Weg vom Datum zur Konklusion durch einen anderen Garanten stützt und somit zu einer völlig anderen Konklusion kommt, bringt Samuel in Turn 23 eine Ausschärfung seines bisher nur implizit bedeutsamen Garanten konkret an. Die Entwicklung der Propositionen von Roman (Turn 16), Feline (Turn 24) und Georg (Turn 10) erinnert an die von Fischbein et al. (1979, S. 13) entwickelte Kategorie „[p]ractically the process comes to an end. Theoretically the process is infinite“ oder an die Kritik Paul Lorenzens an Cantors Paradies:

> Durch Hintereinanderschreiben von Zählzeichen sind endliche Mengen unmittelbar zu konstruieren - aber unendlich viele Zeichen kann man nicht hinschreiben. Man kann nur Formeln $F(n)$ mit einer Zahlvariablen n hinschreiben - und damit die Menge der Zahlen n für die $F(n)$ gilt, definieren. Unendliche Mengen von Zahlen erfordern also die Konstruktion einer Formelsprache. Diese Forderung wird von der herrschenden freien Mathematik ignoriert. Aber ihre technisch brauchbaren Rechenverfahren sind auch konstruktiv zu begründen. (Lorenzen, 1994, S. 130)

In den Turns 26-31 versucht Frau Fichtel, das Gespräch wieder administrativ zu steuern. Dabei geht sie diesmal nicht auf *richtig* oder *falsch* ein, sondern fragt explizit nach Argumenten (Turn 26). Georg antwortet zunächst verhalten

(Turn 27), aber nach erneuter, diesmal persönlicher Aufforderung durch Frau Fichtel begründet er, dass man nicht alle Zahlen in eine Menge fassen kann, da es kein Ende gibt und „unendlich Zah:ln“ (Turn 29). Samuel möchte darauf ohne Aufforderung durch die Lehrkraft antworten, tut dies gleichzeitig zu Georgs Ausführungen und wird daraufhin von Frau Fichtel auf die von ihr bisher nicht transparent gemachten Regeln der Debatte hingewiesen (Turns 30,31). Sie kündigt die Regel, dass die Kinder einander ausreden lassen, aber mit der Erklärung, sie habe es zuvor vergessen, an. Durch diese implizite Entschuldigung ist die administrative Ansage an Samuel auch eine Etablierung einer etwas flacheren Hierarchie (Turn 31).

32	Georg	(Also beim) Alphabet kann man ja alle:e Buchsta:bn weils=geht ja von A bis Zett (.) weil (.) bei den Zah:ln da gehts ja von eins bis «die rechte Hand nach oben bewegend> irgendne:e größere (.) keine Ahnung was für=ne Zah:l (.) (irgendwann unendlich)
33	Klaus?	Deswegen kann=ma nich bestimmen was └alles is┘
34	Samuel?	└Darf ich┘ (zuerst reden) └und (unverständlich)┘
35	Ringo?	└Naja man kann┘ aber nich (.) äh:h einfach so:o. die Za:hln mit dem Alphabet vergleichn (.) weil die Za:hln äh:h sind ja immer (.) ähm (2) unendlich aba nur aus sozusagn neuen Zah:ln oder zehn Za:hln bestehend (2) weil=ä:h die bilden sich ja immer wieder neu aus (.) null bis neun,

Georg bringt den Vergleich der Menge aller Zahlen mit der Menge aller Buchstaben, also dem Alphabet, an (Turn 32). Er argumentiert mit der Endlichkeit der Menge aller Buchstaben und stellt diese der Zahlenreihe gegenüber. Interessant ist hier, dass er auf der Ebene der Buchstaben mit einem abgeschlossenen Ganzen argumentiert (Alphabet), sich bei den Zahlen aber wieder in eine prozesshafte Formulierung begibt („(irgendwann unendlich)“, Turn 32), die durch das Wort „irgendwann“ eine zeitliche Konnotierung bekommt. Weiterhin auffällig ist, dass er *unendlich* als eine Art fiktive Grenze der Zahlen markiert und aber zeigen möchte, dass die Abgeschlossenheit aller Zahlen nicht gegeben ist. Seine Formulierung vorab („irgendne:e größere (.) keine Ahnung was für=ne Zah:l“, Turn 32) drückt die von ihm beschriebene Diskrepanz zwischen dem Alphabet und der Menge aller Zahlen weiterhin, besonders weil er das Ende des Alphabets bereits angegeben hat, in einer Prozesshaftigkeit aus.

Klaus drückt nochmals seinen Einwand aus Turn 20 (und Gerds Einwand aus 22) aus, dass die Bestimmung von *Allem* nicht möglich ist (Turn 33) und begründet dies in Georgs vorheriger Aussage aus Turn 32. Beide Schüler scheinen ein Problem mit der Abgeschlossenheit der Menge aller Zahlen zu haben, der Fortgang der Zahlen im Unendlichen ist für sie nicht bestimmbar und daher die Menge aller Zahlen auch nicht.

Ringo wirft ein, dass ein Vergleich der Zahlen mit dem Alphabet nicht möglich ist (Turn 35). Zahlen als Elemente der Menge aller Zahlen korrespondieren für ihn nicht mit Buchstaben, den Elementen des Alphabets. Eher würde er die von ihm als Zahlen bezeichneten *Ziffern* mit den Buchstaben vergleichen, deren Anzahl von „null bis neun“ (Turn 35) ebenso begrenzt ist wie die Anzahl der Buchstaben im Alphabet. Dieser Einwand zeigt, dass Ringo sich mit Georgs Argumentation aus Turn 32 gedanklich soweit auseinander gesetzt hat, dass er sie mit der von ihm neu eingeführten Vergleichsebene entkräften kann. Die Kinder argumentieren hier untereinander und scheinen sich auf Peer-Ebene, auch ohne Verwendung der Peer-Sprache, inhaltlich gut folgen zu können. Das Gespräch folgt einem dichten Interaktions- und Argumentationsfluss auch ohne Intervention durch die Lehrkraft.

Die Erweiterung der Argumentation aus den Abbildungen 6.26 und 6.27 um die Turns 32–35 kann in Abb. 6.28 auf S. 173 nachvollzogen werden.

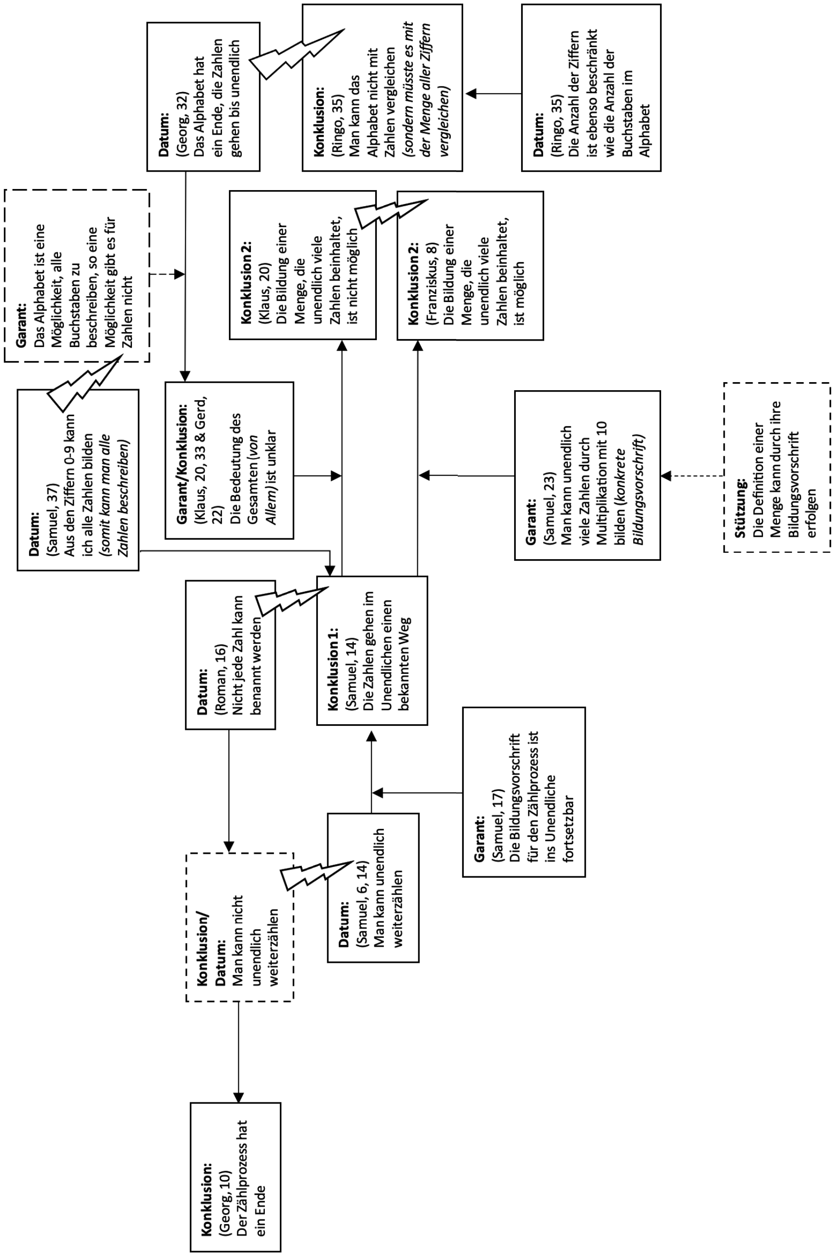


Abbildung 6.28: Erweiterung des Schemas aus Abb. 6.27 um die Turns 32–35

In den Turns 37-40 baut Samuel seine Argumentation der unendlichen kombinatorischen Möglichkeit der Zusammenstellung von Ziffern (bei ihm *Zahlen*) weiter aus und wird dabei einmal von der Geräuschkulisse der Klasse (Turn 38) und einmal von Klaus (Turn 40) unterbrochen.

41	Samuel	Man kann ja nich- man weiß [sieht in den Raum, gestikuliert mit der Hand] kann man auch? äh:m (.) wenn Alphabet beim Wort kann=man auch (.) wenn=man (2) n=langes Wort schreibt kann man (.) hängt man auch Buchsta:bn (.) an s müssen ja=nich 26 Buchsta:bn nur=sein

Samuel bezieht sich in Turn 41 auf Georgs Argumentation aus Turn 32 und bekräftigt Ringos Einschub, Zahlen könne man nicht mit dem Alphabet vergleichen (Turn 35). Die für ihn korrekte Korrespondenz zur Menge aller Zahlen wäre nicht die der Menge aller Buchstaben im Alphabet, sondern die Menge aller Worte. Er zieht hier den Vergleich, dass Zahlen sich aus Ziffern (bei ihm auch *Zahlen*) konstituieren, genauso wie sich Worte aus Buchstaben konstituieren. Das Alphabet würde also mit seiner begrenzten Anzahl an Buchstaben mit der ebenso kardinal begrenzten Menge der Ziffern statt mit der Menge aller Zahlen korrespondieren. Damit traduziert er Ringos Argumentaton aus Turn 35 und fügt noch das *Wort* als Vergleichsobjekt zu *Zahl* hinzu. Interessant ist hier, wie auch bei Ringo und Georg, dass von einem Standpunkt der Endlichkeit aus versucht wird, die Argumentation aufzubauen. Georg (Turn 32) benutzt die Endlichkeit, um aufzuzeigen, dass es keine Möglichkeit gibt, die Menge aller Zahlen zu definieren oder zu benennen (wie beim Alphabet), da diese unendlich groß ist. Ringo und Samuel benutzen Endlichkeit bzw. endliche Objekte wie das Alphabet, um den Begriff der *Un*endlichkeit auszuschärfen („s müssen ja=nich 26 Buchsta:bn nur=sein“, Turn 41). Samuel ist hierbei schon eher, besonders in Hinblick auf die von ihm formulierten Bildungsvorschriften, auf einem Weg von einem Verständnis der potentiellen hin zu einem Verständnis der aktualen Unendlichkeit. Ringo ist, sich auf die Endlichkeit stützend („die bilden sich ja immer wieder neu aus (.) null bis neun,“, Turn 35), im Prozess des Iterierens von Endlichem hin zu Unendlichem, also Endliches in unendlich vielen Schritten bis ins Unendliche zu verbinden.

43	Samuel	za- also=s könn immer wieder └neu┘
44	Klaus	└Aba┘ (.) aba um=alles zu bestimmn müsstes=s ja=n Ende ge:bn und=das gibts=ja nich
45	Kommentar	Mehrere SuS (außerhalb des Bildes) sagen vereinzelt „ja“
46	Samuel	Ja=und wenn (.) es gibt kein Ende «die Hände von oben nach unten bewegend> aba> (.) es- man kann ja immer wieder ne Null oder ne └Eins┘
47	S?	└Ja.┘
48	Samuel	Oder ne (.) Zahl dranhängn (.) da is=wieder die nächste Zahl in der großen Zahl drin
49	Klaus?	Na wenns ein Ende ge:bn- wenns ein Ende ge:bn würde dann kann=ma (ja auch so sa:gn) a:ba
50	Samuel	Mann kann doch (.) «sich mit der rechten Hand an den Kopf greifend, wieder wegnehmend> unendlich lange Zah:l man kann doch ne unendlich lange Zahl schreibn °(das is ja nich das Problem)

Samuel greift, nach einer kurzen Unterbrechung („mhm“, S?, Turn 42) den Inhalt aus Turn 41 kurz nochmals auf und fügt auf Basis der von ihm geschaffenen

Analogie *Zahl zu Wort* hinzu, dass er auch bei Wörtern neue kombinatorische Möglichkeiten zur Bildung aus Buchstaben sieht (analog zur Bildung von Zahlen aus Ziffern). Die Sinnhaftigkeit bzw. Bedeutung der Zusammenstellung von Buchstaben (als Wörtern) im Vergleich zu Zahlen aus Ziffern bleibt dabei unerwähnt.

Klaus greift abermals seine Proposition der Turns 20 und 33 auf. In Turn 44 fügt er allerdings noch eine Stützung seiner Argumentation hinzu, nämlich, dass ohne ein Ende die Bestimmung von *Allem* nicht möglich ist. Weiterhin führt er an, dass es dieses Ende (*bei Zahlen*) nicht gäbe. Fraglich ist an dieser Stelle abermals, ob Klaus mit *Allem* eine Bezeichnung der Menge aller Zahlen oder den ontologischen Gehalt der Menge aller Zahlen anspricht. Seine Äußerung scheint, unabhängig von ihrer Bedeutung, auf Zustimmung innerhalb seiner Gruppe (Seite Leibniz) zu stoßen (Turn 45). Diese Intervention ist im Verlauf des dyadisch emergierenden Gesprächs zwischen Samuel und Klaus ein Zeichen dafür, dass zumindest einige der restlichen Kinder nicht die Rolle des *Bystanders*, sondern die der*des *aufmerksamen Zuhörers/aufmerksamen Zuhörerin* (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 62f, weibliche Form ergänzt) einnehmen. Sie sind somit „Rezipienten mit einem Aufmerksamkeitsgrad, der es ihnen ermöglicht, in der Folge die Podiumsdiskussion aktiv mitzugestalten“ (Ebd., S. 63).

Samuel führt als Antwort an, dass der von Klaus angebrachte Garant nicht zwingend zur Konklusion, *Alles* sei nicht bestimmbar, führen müsse („Ja=und wenn (.)“, Turn 46) und führt als Begründung seines Einwands sein Beispiel einer konkreten Bildungsvorschrift (Multiplikation mit 10) und ein neues Beispiel, nämlich Multiplikation mit 10 und anschließende Addition der 1 bzw. einer beliebigen Zahl(„man kan ja immer wieder ne Null oder ne └Eins┘“, Turn 46, „oder ne Zahl dranhängn“, Turn 48), an. Seine Aussage, die nächste Zahl sei dann wieder „in der großen Zahl drin“, kann entweder auf Ziffern- oder auf Mengen- bzw. kardinaler Ebene gedeutet werden. Im Falle eines Bezugs auf der Ziffernebene würde könnte man ihn so deuten, dass er sich auf die Ziffernkombination der Ausgangszahl bezieht, die im Falle einer Multiplikation mit 10 (und auch bei anschließender Addition einer beliebigen Zahl) erhalten bleiben würde. Zum Beispiel könnte man die Zahl 876 mit 10 multiplizieren, was auf der Ziffernebene lediglich ein Rücken der Stellen an die nächste Zehnerpotenz im Stellenwertsystem zur Folge hätte, also 8760 oder, bei Addition einer beliebigen Zahl x, dann $876x$. Die Reihenfolge in der Kombination der Ziffern bleibt hierbei erhalten. Auf Ebene der kardinalen Inklusionsbeziehung wäre auch die Zahl 876 in der Zahl $876x$ enthalten. Für Samuel ist dieses Rücken der Stellen potentiell unendlich fortführbar und dadurch, dass er diese Bildungsvorschrift angeben kann, ist für ihn die Menge aller Zahlen auch in ihrer aktualen Manifestation erschlossen. Klaus scheint Samuels Einwand unter der Prämisse, es gäbe ein potentielles Ende, anzunehmen, möchte aber vermutlich etwas entkräftendes entgegnen („a:ba“, Turn 49), wobei er wiederum von Samuel unterbrochen wird. Dieser fühlt sich von Klaus scheinbar missverstanden und signalisiert dies durch eine sein Unverständnis ausdrückende Geste (Turn 50). Das Rücken der Ziffern bzw. inkludieren kleinerer Zahlen in größere bringt er nun mit dem praktischen Prozess des Schreibens in Verbindung. Unklar an dieser Stelle ist, ob er sich auf den praktischen Prozess, also die Durchführung des Schreibens in der Realität bezieht oder auf die theoretische Möglichkeit des *Denkens* eines Schreibprozesses einer unendlich großen Zahl. Aus Basis seiner bisher getroffenen Aussagen ist eher die zweite Alternative anzunehmen.

51	Franziskus	Man muss ja=jetz nich n=Na:mn dafür findn
52	Frau Fichtel	Meldet euch=ma wenner was zu sa:gn habt damit=ma alle ma drankomm hier [zeigt auf Gerd]
53	Gerd	(man kann halt) nicht ne unendlich lange Zahl Zahl auf jetz zum Beispiel (könn=wir/ Papier) schreibn weil dann brauchste ja=auch unendlich Papier weil die (obere ja durchschreiben)
54	Samuel	Es geht jetz nich um das Papier
55	Gerd	Ja aufm Tisch schreibn oder was.
56	Samuel	Es geht jetz nich um das Papier es geht um die Zahl (.) man kann doch (.) [hebt die rechte Hand in Richtung Tafel] man kann doch (.) auf der Ta:fel all- durchschreibn oder man kann überall schreibn es geht jetz nich ums Papier (oder um) das Mate:rial worauf man schreibt es geht um die Za:hln. °(naja s- schreibn)°
57	Niklas	[meldet sich, nimmt Hand runter] Aba man muss doch (unverständlich, ca. 2 sek) (so vieles) man weiß den Namen nich dafür dann (.) dann kann=mans ja auch=nich behaupten (dass=s das gibt/geht)

Franziskus unterbricht die d-Interaktion zwischen Samuel und Klaus. Er verteidigt die potentielle Möglichkeit der Bildung einer unendlich langen Zahl qua Bildungsvorschrift, auch ohne endgültige Benennung dieser (Turn 51). Geht man von einer Unterscheidung in Sinn und Bedeutung (Frege, 1892) aus, so wäre für Franziskus (und auch Samuel) die *Bedeutung* der unendlich langen Zahl irrelevant, wohingegen ihr *Sinn* unmittelbar durch die Bildungsvorschrift erschlossen werden kann. Interessant ist an dieser Stelle auch Franziskus' Verwendung von „man“, das für eine gewisse Distanz zu den Inhalten und Abstraktion in der Aussage sprechen könnte. Weiterhin interessant ist die Verwendung von „findn“ (Turn 51) statt beispielsweise „sagen“, da hier implizit ausgedrückt wird, dass der ontologische Status der unendlich langen Zahl (also ihre *Bedeutung*) ungewiss ist, aber ihr *Sinn*, also die Art ihres Gegebenseins, sich durch die Bildungsvorschrift konstituiert. Es reicht also, zu wissen, dass die Zahl potentiell existieren könnte, auch wenn der Name nicht *gefunden* werden kann.

Gerd und andere Kinder auf der Seite von Leibniz melden sich. Frau Fichtel bricht die Interaktion zwischen Klaus, Samuel und Franziskus auf (Turn 52). Dabei scheint sie sich formal auf administrativer Ebene zu bewegen, die Gesprächsnorm wird von ihr angesprochen und ein Ansprechen der Inhalte bleibt aus. Abermals stellt sich hier die Frage, ob die Argumentation zwischen den Kindern von Frau Fichtel in dem Maße durchdrungen wird, das es für eine inhaltliche Intervention benötigt hätte. Ihr Eingreifen auf administrativer Ebene kann auch eine intendierte Öffnung der (bis auf Franziskus' Einwurf) dyadischen Konversation hin zur Podiumsdiskussion bzw. eines polyadischen Diskurs' bedeuten („damit=ma alle ma drankomm hier“, Turn 52) und würde damit eine Ermöglichungsgrundlage zur Beteiligung von Schüler*innen im Status *aufmerksame*r Zuhörer*in* bedeuten.

Eventuell stellt Franziskus' Äußerung für sie auch einen Abschluss bzw. eine Konklusion eines Argumentationsstranges dar. In diesem Falle wäre die Intervention zur Eröffnung einer neuen Argumentation, diesmal ausgehend von Prämissen der Leibniz-Seite, denkbar. Anschließend an die Ansage, die Einbindung aller Kinder fortan über Meldungen umzusetzen, ruft Frau Fichtel den sich meldenden Gerd auf.

Gerd greift die von Samuel in Turn 50 formulierte praktische Umsetzung des *Schreibens* einer unendlich langen Zahl auf. Im Gegensatz zu Samuel, der wie auf S. 175 beschrieben eher die theoretische Möglichkeit anspricht, bezieht sich Gerd in Turn 53 eher auf die praktische Realisation des Schreibprozesses. Hierbei steht nicht der Zeit-Aspekt des Prozesses im Vordergrund, sondern der des Raumes. Durch die Überlegung zur praktischen Umsetzung ändert Gerd den Argumentationsverlauf und bringt lebensweltliche[47] Aspekte mit ein. Damit wird das sehr abstrakte Thema sowie die in den letzten Turns abstrakt verlaufende Debatte auf eine greifbare Ebene geholt (u.A. „zum Beispiel", Turn 53). Das versucht Samuel vermutlich zu revidieren, da er die Materialität und den lebensweltlichen Aspekt (manifestiert im Papier) nicht im Argumentationsverlauf weiter verfolgen möchte. Auf die konkret-realisierte Ebene von Gerd lässt er sich argumentativ nicht ein, seine Unterbrechung beinhaltet keine aufklärenden Worte zu seiner Intention bezüglich der von ihm gewünschten Diskursebene. An dieser Stelle bleibt offen, ob Samuel die von ihm gewünschte Diskursebene (abstrakt-theoretisch, auf die Möglichkeit bezogen) nicht kommunizieren *kann* oder nicht kommunizieren *will*.

Mit Gerds Antwort in Turn 55 spitzt sich die Interaktion der beiden Kinder zu. Scheinbar etwas patzig möchte er eventuell Samuel verdeutlichen, dass das Papier lediglich als Beispiel gemeint war. Andererseits könnte man ihn auch so deuten, dass er nach der Endlichkeit des Papiers den Anfang des Tisches (eventuell aus erlebter Schreibpraxis) als Grenzüberschreitung des Endlichen ansieht und Samuel darauf hinweist, dass man nach dem Ende des Papiers auf dem Tisch weiterschreiben müsse. Eventuell reagiert er so emotional aufgeladen, weil Samuel (in Turn 54) sich nicht auf seine Argumentationsebene einlassen möchte.

Auch Samuel scheint angespannt zu sein, eventuell weil auch er sich von den unterschiedlichen Ebenen des Diskurses keinen Konsens erhofft bzw. seine Position weiterhin als richtig erachtet und es emotional erlebt, dass Gerd dies nicht akzeptiert. Die exakte Wiederholung der Passage „Es geht jetz nich um das Papier" (Turns 53, 56) spricht dafür, dass er sich von Gerd in 55 entweder missverstanden oder provoziert fühlen könnte. Er macht in seiner Antwort nun ausführlicher klar, dass das Material (die Schreibunter- bzw. Schreibgrundlage), auf dem geschrieben wird, für die von ihm formulierten unendlich langen Zahlen irrelevant ist. Dabei ist interessant, dass er mit Papier und Tafel zwei aus dem Schulkontext erfahrene Materialien anführt und eine Erwähnung digitaler Schreibmaterialien unerwähnt bleibt. Die Materialität des Papiers lässt den unendlichen Prozess nicht zu, wohingegen z.B. praktische Erkundungsversuche mit Computern zum Thema Unendlichkeit dazu führen können, dass „infinity can be approached in a learnable way" (Kahn et al., 2011, S. 3).

47 Mit Blick auf Konzepte und Referenzentitäten zum Thema Unendlichkeit scheint das Einbinden lebensweltlicher Aspekte zur Begründung der Cantor'schen Seite schwierig, zur Widerlegung dieser sowie der Vorstellung von aktualer Unendlichkeit aber ist die Frage nach dem praktischen Schreibprozess durchaus angebracht.

Niklas bringt im Anschluss an Samuel erneut (wie auch Roman, Turn 16 und in Ansätzen Klaus, Turn 20,33 und Gerd, Turn 22) die Kritik an, dass die Benennung der unendlich langen Zahl eine Bedingung für ihre Existenz wäre und diese Benennung nicht möglich ist („dann kann=mans ja auch=nich behaupten (dass=s das gibt)“, Turn 57). Sein Einwurf erinnert an den vielzitierten Satz 5.6 von Wittgenstein (1953): „Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt“. Hiermit wirft er auch implizit nicht nur die Frage nach der Benennung einer unendlich langen Zahl, sondern auch nach der Möglichkeit der Existenz einer solchen Zahl. Einhergehend damit würde sich die Frage ergeben, ob Unendlichkeit überhaupt eine Existenz zugesprochen werden kann, bzw. ob mit dem Prädikat *unendlich* versehene Dinge überhaupt existieren.

Niklas scheint mit seiner Aussage eine neue gedankliche Auseinandersetzungen mit den Inhalten der Debatte bei vielen Schüler*innen angestoßen zu haben (Turn 58). Samuel antwortet ihm, dass man sich die (bislang unbekannten) Namen der Zahlen „ausdenken“ (Turn 60) kann, worauf ihm Tami (Turn 62, 66) antwortet, dass die neuen Namen durch eine solche Beliebigkeit ihre Bedeutung (im Sinne von Referenzobjekt) verlieren würden („dann weiß de=ja nich was man meint“, Turn 66). Cody bringt sich, von Frau Fichtel aufgerufen (welche damit Samuel unterbricht), mit der These ein, dass sich das Referenzobjekt ja über den *Sinn* (Frege, 1987) konstituiert und die Bedeutung sowie auch der Name irrelevant sind (Turn 69). Mit ihrer Moderation bricht Frau Fichtel die im bisherigen Diskurs vorherrschende Dominanz von Samuel (Turns 61, 68, 70).

73	Frau Fichtel	Äh- Franziskus?
74	Franziskus	Ä:h (achso, unverständlich, ca. 2 sek.) ich mein jetz einfach (.) jede Zahl einfach hinternander schreiben (.) und immer so weiter (.) bis irgendwie └(unverständlich)┘
75	S?	└Immer n ┘Ende, das hat immer N=ende
76	Gerd	«die Hand hebend>(unverständlich) alles bestimm>
77	Frau Fichtel	ähm, Gerd?
78	Gerd	«beide Hände auf Schulterhöhe hebend> Joa> (da könnte man=ja) theoretisch schon Jahre schreibn da hat man immer noch nich=des Ende
79	S?	Ja, └weil es gibt ja immer n Ende┘
80	Gerd	└Ja ein Ende┘also kann man nich alle Za:hln «mit den Händen gestikulierend> (.) aufschreibn>
81	Klaus?	(ja) man kann nich alle Zah:ln (suchn) (.) «mit den Händen gestikulierend> (ham ja kein) (unverständlich, ca. 1 sek)

82	Samuel	wenn man alle- (.) es geht also:o mir darum (gleich gesagt nächste) Zahl (.) n Ende hat (die Zahl von mir aus) kann immer wieder ne Null dranhängn (aber dann wird) die Zahl (.) größer wenn (kann man ja) immer mehr Zah:ln (mit der eins halt drin=is) schreibn (2) und=mir=ham=ja nich gesagt dass (.) [atmet laut aus] (gelten) dass die Za:hl ähm dass die einfach irgendwann ein Ende hat wir=ham nur gesagt dass man immer die Null irgendner Zahl hintendranhängen kann? Dann wird die Zahl immer größer (und man mehr Zah:ln am Ende)

Franziskus bringt in Turn 74, nach Aufforderung durch Frau Fichtel (Turn 73), erneut die Argumentation der Bildungsvorschrift (Samuel, Turns 17, 23 u.a.) ein, diesmal nicht durch Multiplikation mit 10, sondern als Multiplikation der Zahl mit der ihrem höchsten Stellenwert inneliegenden Zehnerpotenz mit anschließender Addition der Zahl zu den Stellen, die nun mit Nullen belegt sind (Bsp: 876$\rightarrow$ 876000 $\rightarrow$ 876876 usw.). Ein*e nicht identifizierbare*r Schüler*in wirft daraufhin ein, dass auch mit dieser Bildungsvorschrift die resultierende Zahl immer endlich sein muss (Turn 75). Gerd missachtet die von Frau Fichtel in Turn 52 etablierte Norm, sich vor einem Wortbeitrag melden zu müssen (Turn 76). Trotz dieser Missachtung wird er anschließend ohne erneute Erwähnung der Norm von Frau Fichtel aufgerufen. Eventuell könnte Gerd eine Art Sonderstatus im Klassengefüge haben, sodass Frau Fichtel von ihm einen inhaltlich weiterführenden Beitrag erwarten würde und ihn deshalb trotz des Nichteinhaltens ihrer Regel partizipieren lässt. Er bringt die Debatte wieder auf die Ebene der praktische Umsetzung, im Gegensatz zu Turn 53 diesmal nicht bezogen auf das Problem des Raumes, sondern der Zeit (Turn 78). Die Unendlichkeit der von Franziskus (Turn 74) aufgemachten Iteration steht für ihn im Widerspruch zur endlich verfügbaren Zeit eines Schreibprozesses, ähnlich wie bei Georg (Turn 10) der Widerspruch zur endlich verfügbaren Zeit zur praktischen Umsetzung des Zählens besteht. S? bestätigt Gerds Argumentation. An dieser Stelle bleibt offen, ob S? meint, es gäbe im *Schreibprozess* „immer n Ende“ (Turn 79), oder ob sich S? auf die Menge aller Zahlen bezieht und von dieser eine endliche Vorstellung hat. In direkter Reaktion auf Gerds Turn 78 scheint die erstere Variante wahrscheinlicher. Gerd greift auf S? zurück und klärt auf, dass (zumindest von ihm) das Ende des Schreibprozesses gemeint war (Turn 80). Klaus (nicht vollständig identifizierbar aufgrund der Kamerastellung) bringt eine Begründung zu Gerds Konklusion aus den Turns 78 und 80 und expliziert an dieser Stelle die bereits von Gerd implizit ausgedrückte Diskrepanz zwischen der Endlichkeit des praktisch umgesetzten (Schreib-) Prozesses und der Unendlichkeit der Menge aller Zahlen. Er bezieht sich hier allerdings nicht auf den Schreibprozess, sondern drückt mit „suchn“ eher den zeitlich begrenzten epistemologischen Prozess der Erkenntnis zum ontologischen Status der Menge aller Zahlen aus (Turn 81). Samuel versucht in Turn 82 anschließend, den anderen Schüler*innen seinen Weg von der Bildungsvorschrift, die im potentiell Unendlichen durchgeführt wird, zu seiner Vorstellung der aktualen Abgeschlossenheit einer unendlich langen Zahl qua Bildungsvorschrift näher zu bringen. Er scheint den Einwand von Klaus nicht anzunehmen, da für ihn der ontologische Status wie auch die Referenzentität *aller* Zahlen irrelevant ist. Er operiert auf einer abstrakteren Ebene und versteht die Fragestellung vermutlich als mathematisch-theoretisches Gedankenexperiment, während Klaus' und Gerds Vorstellung von Mathematik vermutlich stark von lebensweltlichen Kontexten geprägt ist.

Im Folgenden sind die Kinder sehr ruhig und es kommen keine neuen Meldungen (Turns 83-89). Nach dieser Zeit wird die Klasse lauter (Turn 90), scheinbar fallen auch pejorative Ausdrücke, welche von Frau Fichtel angemahnt werden (Turn 91). Im Zuge ihrer Ermahnung lobt sie die Kinder auch für die „super Argumente" (Turn 91) und erzeugt daraufhin wieder einen Eindruck von *richtig* oder *falsch*, indem sie das Wort „unentschiedn" (Turn 91) verwendet. Anschließend versucht Samuel, die anderen bei ihm stehenden Kinder (vorrangig die Mädchen vorn links) mit einzubeziehen (Turn 95), um Unterstützung aus den eigenen Reihen zu bekommen. Es ist bemerkenswert, dass das Aufrufen anderer Kinder durch einen Mitschüler in der emergierten Hierarchie möglich ist. Maxi antwortet Samuel und meint, die von ihr aufgeschriebenen Argumente wurden bereits von anderen Kindern (aus der Cantor-Gruppe) angebracht (Turn 95). Die Klasse wird abermals laut, woraufhin auch wieder pejorative Ausdrücke fallen, die von der anwesenden Forscherin mit einem „och nein" (Turn 100) bezeichnet werden. Gerd meldet sich seit Turn 99.

101	Samuel	Ihr habt ja vorgelesen aba wenn ihr nich zuhört °dann° (.) könnt ihr (nich) ich=hab gesagt man kann auch immer weiter zä:hln (hä bekloppt?) man kann wenn dadurch denn die Zahl immer größer wird (unverständlich, ca. 1 sek.) dann braucht man (eine/alle) Zahl(n) (unverständlich)
102	Kommentar	Die Kinder reden laut durcheinander, nicht transkribierbar. Nino und Gerd melden sich.
103	Frau Fichtel	ä:hm Gerd? (.) Gerd?
104	Gerd	Also man kann Z- Zah:ln (erwerben) aber man ja immer=noch ne Null hin«mit den Schultern zuckend>zufügen> (.) also des=is (.) weils ja unendlich is kann man muss man ja des └theoretisch unendlich schreibn┘
105	Samuel	└(das Zahl eigntlich und nich schreibn)┘
106	Frau Fichtel	└Äh Samuel┘ wir lassen jemanden ausreden └wenn er┘
107	Gerd	└Kann=ich┘ dann alle in eine eine Zahln zusamm packn weil unendlich is keine natürlichn Zahl [holt Luft] und man könnte einfach dann wieder ne Null dranmachn (.) und. «mit den Schultern zuckend> dann brauch ich (den Ball) nich> (.) ü:be:r also unendlich (wirds schwerer dann die) Za:hln (zu) schreibn (°unverständlich°)

Samuel macht den Eindruck, als wäre er emotional durch das Unverständnis seiner Mitschüler*innen aufgebracht (Turn 101). Aus den Turns 83-100 geht nicht hervor, wen er mit „ihr" meinen könnte. Möglich wäre zum einen Maxi und der Rest ihrer Kleingruppe, die auch auf der Seite Cantors stehen. Weiterhin denkbar wäre eine Adressierung der Leibniz-Seite. Für diese Variante würde sprechen, dass

Samuel das Hauptargument der Gegenseite nochmals anführt und expliziert, dass er das „immer weiter zä:hln“ ja ebenfalls bereits als Aussage getroffen hat. Seinen Unmut darüber, dass die Gegenseite dies trotzdem in eine Argumentation *gegen* die Existenz einer Menge aller Zahlen benutzt, drückt er aus, indem er ihnen (im Falle dessen, dass er die Gegenseite meint) unterstellt, nicht zugehört zu haben.

In Anschluss an Samuels Aussage entsteht ein Tumult (Turn 102), den Frau Fichtel mit dem Aufrufen von Gerd beendet (Turn 103). Es bleibt offen, ob Frau Fichtel Gerd aufgrund der in dieser Arbeit vermuteten Sonderrolle oder ob sie ihn aufgrund der schon länger bestehenden Meldung aufruft. Das hier emergierende Muster ist jedenfalls auffällig ähnlich zu dem in den Turns 52 und 53, in welchem, auch nach einer scheinbar durch Frau Fichtel nicht erwünschten Diskussion der Kinder untereinander, Gerd aufgerufen wird.

Samuels Idee (Turn 82), eine Zahl durch unendlich häufiges Hinzufügen von Nullen an den letzten Stellenwerten (also ein Verrücken der Stellenwerte um unendlich viele Zehnerpotenzen nach links) zu vergrößern, wird zunächst von Gerd bestätigt (Turn 104). Er bringt aber wiederum das Gegenargument, dass der Schreibprozess dieser Zahl *unendlich* lange wäre. Gerd benutzt hier das Wort „theoretisch“ (Turn 104), meint damit aber eine theoretische Vorabbetrachtung des *praktischen* Schreibprozesses und nicht eine komplett theoretische Betrachtung (auf rein mathematischer und nicht realer Ebene) des Prozesses des unendlichen Verrückens der Stellen. Samuel scheint dies auch so zu verstehen und möchte Gerd nun vermitteln, dass er nicht auf der realistischen, sondern einer rein theoretisch-mathematischen Ebene argumentiert (Turn 105). Bei diesem Versuch wird er von Frau Fichtel unterbrochen (Turn 106). Abermals scheint es, als würde Frau Fichtel der Debatte nicht in dem Maße inhaltlich folgen können, um die Sinnhaftigkeit von Samuels Einschub angemessen unterstützen zu können. Der primäre Fokus liegt nun hier nicht auf der inhaltlichen Weiterentwicklung, sondern auf der Regelkonformität der Debatte. Gerd geht in seiner weiteren Ausführung wieder auf den Schreibprozess (Ebene der Realisation) und nicht auf die Ebene des mathematisch Denkbaren ein, die inhaltliche Neuerung durch Samuels Einschub (in Turn 105) sorgt nicht für eine Weiterentwicklung der Inhalte („ü:be:r also unendlich (wirds schwerer dann die) Za:hln (zu) schreibn“, Turn 107).

110	Frau Fichtel	Okay? Klaus?
111	Klaus	(Ihr hört zu?) Also:o das (.) dass man immer wieder nur Nullen hinten dranhängen kann, is=ja nich falsch (.) abbor um (.) besch- (.) um zu bestimmen was alle Zah:ln sind muss=es ja n Ende gebn und das gibs=ja └nich┘
112	Gerd	└Jo┘
113	Klaus	Deswegen kann=ma=nich bestimmn. wann (.) alle Zah:ln (beisammn) sind

In den Turns 108-109 wird ein durch die Videoaufnahme nicht identifizierbares Kind von Frau Fichtel ermahnt, leiser zu reden. Im Anschluss ruft sie Klaus auf, welcher sich vermutlich gemeldet hat (Turn 110). Klaus versucht nun scheinbar, die Argumentation wieder rein auf der Ebene der mathematisch-theoretischen Überlegungen zu führen und von den Überlegungen zum praktisch zu realisierenden Schreibprozess zu distanzieren (Turn 111). Dabei bringt er, wie in den Turns 20 und 33, die Argumentation der Bedeutung des Gesamten an, die durch das fehlende Ende nicht gesetzt werden kann. Dass er diese Argumentation hier nochmal anbringt sowie am Anfang der Debatte mehrfach ausführt, spricht dafür, dass zumindest zu seiner Position keine inhaltliche Weiterentwicklung stattgefunden hat. Die von Samuel neu eingebrachte Bildungsvorschrift des *Nullen Anhängens* lässt den Einwand, die Bedeutung des Gesamten bliebe trotzdem ungeklärt, unberührt. Die Teile der Klasse, die sich Georg Cantors Meinung zugeordnet haben, sind bislang in ihren Gegenargumentationen inhaltlich nicht auf Klaus' Einwand eingegangen. In den Turns 114-124 findet dies auch nicht statt, einzig Cody erwähnt, dass das Ende ja nicht nötig sei (Turn 116). Dabei scheint er in Turn 116 mehr ausdrücken zu wollen, als ihm seine Sprache ermöglicht.

125	Frau Fichtel	So. Mal Stopp? (2) Ähm. Nino noch?
126	Nino	Äh wenn es ne neue Zahl gibt um alle Zahlen zu bestimmen dann (.) äh dann ist des=ja keine richtje Zahl weil wegen un**end**lich «seinen Kopf schüttelnd> unendlich is auch keine richtige Zahl>

Frau Fichtel unterbricht Samuel, welcher in Turn 124 gegen eine im Hintergrund sehr lautstarke Klasse anredet (Turn 125). Dies tut sie, ohne weiter inhaltlich auf Samuels Beschwerde (Turn 121, 124), von der Gegenseite scheinbar verstanden, aber nicht argumentativ ernst genommen zu werden, einzugehen. Frau Fichtels „So. Mal Stopp?“ (Turn 125) kann als Versuch angesehen werden, die ausufernde Lautstärke und emotional gewordene Debatte wieder auf eine sachliche Ebene zurückzuführen. Des Weiteren könnte es sein, dass ihr Samuels Redeanteil zu dominierend wirkt und sie die Diskussion für andere Teilnehmer*innen öffnen möchte. Von den anderen Kindern würde sie in dem Fall annehmen, dass sie als *aufmerksame Zuhörer*innen* (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 62f.) der Debatte gefolgt sind und sie nun aktiv mitgestalten könnten. Sie ruft nach ihrem Appell Nino auf, drückt aber durch das „noch“ (Turn 125) auch aus, dass sie als Lehrperson die Debatte gern zu einem Abschluss führen würde. Somit greift sie einerseits administrativ ein, wenn man aber davon ausgeht, dass sie auch Samuels emotionale Aussage beenden wollte, könnte hier auch ein inhaltliches Eingreifen angenommen werden.

Nino muss zunächst kurz seine Gedanken sammeln („Äh“, Turn 126) und antwortet dann mit einer *reductio ad absurdum* auf die vermutlich in Turn 123 (Klasse wird so laut, dass eine Transkription nicht möglich ist) geäußerte Aussage, dass man eine „neue Zahl [erfinden könne] um alle Zahlen zu bestimmen“, Turn 126 - Ninos Interpretation des vorher Gesagten). Er geht hier von der Annahme aus, das Argument der Gegenseite sei wahr und schlussfolgert dann einen Widerspruch: eine neue Zahl erfinden ist nicht möglich, da diese unendlich (groß) sein müsste, eine Eigenschaft, die eine „richtige Zahl“ (Turn 126) nicht haben kann. Es ist bemerkenswert, dass Nino diesen Gedankengang auch so artikuliert und nicht durch Ungesagtes die *reductio ad absurdum* implizit ausdrückt, sondern sogar expliziert.

Nach Ninos Ausführungen wird die Klasse abermals so laut, dass keine Transkription möglich ist (Turn 127).

128	Frau Fichtel	Ich würd gerne? (So von vorhin nochmal ein Gespräch) gerne mal einfach hörn? Mädels auch wenns schon gesagt wurde? Welches Argument hattet ihr?
129	Maya, Tami, Kelly	@(.)@ [schauen auf ein A4-Blatt in Mayas Hand]
130	Frau Fichtel	Weiß es jemand von euch? (2) die Maya zum Beispiel?
131	Tami	@einer von euch@
132	Frau Fichtel	Oder Kelly?
133	Kelly	ähm (2) als:o bei de:n is halt das (.) das man immer wieder ne Zahl ranhängn kann (.) und (.) aba [schaut zu Maya] (unverständlich)
134	Kommentar	eine Weile ist Ruhe, die Mädchen murmeln leise (unverständlich, nicht transkribierbar), Maya lächelt und schüttelt den Kopf
135	Tami	«ihre linke Hand und Arm bewegend> (is so wir lassns so)>
136	Maya	(wir lassns so)

Frau Fichtel greift wieder administrativ ein, indem sie durch ein Aufrufen neuer Schüler*innen versucht, den Sprecher*innenanteil wieder auf eine Person zu reduzieren (Turn 128). Dabei ruft sie die (auf der Leibniz-Seite stehenden, vgl. Abb. 6.24 auf S. 163) „Mädels“ (Turn 128) auf. Dabei wertet sie die potentiellen Aussagen der „Mädels“ schon beim Aufrufen ab, indem sie verdeutlicht, dass eine inhaltliche Relevanz der kommenden Positionierung eher nebensächlich ist („auch wenns schon gesagt wurde?“, Turn 128). Weiterhin wird dadurch, dass sich Frau Fichtel nach dem Argument erkundigt, auch deutlich, dass sie die „Mädels“ nicht aus einem bestimmten inhaltlichen Anlass heraus aufruft, sondern scheinbar aufgrund ihres Geschlechts (welches sie durch die Bezeichnung Mädels hervorhebt) oder aufgrund dessen, dass alle Kinder partizipieren sollen und Maya, Tami und Kelly bisher nichts zur Debatte beigetragen haben. Maya, Tami und Kelly reagieren darauf mit einem Lachen (Turn 129) und müssen sich scheinbar zunächst mit einem Blick auf ihre Notizen rückversichern, welches Argument sie hatten (Turn 129). Eine Antwort auf die direkte Aufforderung von Frau Fichtel erfolgt nicht. Diese fragt nun erneut bei allen nach (Turn 130) und ruft anschließend gezielt Maya auf, da die Adressierung aller „Mädels“ nicht zum inhaltlichen Beitrag durch diese führte. Abermals führt auch der generalisierte Aufruf zum Lachen (Tami, Turn 131); Maya reagiert auf Frau Fichtels *cold call*[48] nicht. Es gibt mehrere Alternativen, Tamis Lachen in Turn 131 zu deuten. Zum einen könnte es bedeuten, dass sie mit „einer von euch“ lachend auf den Rest der „Mädels“ verweist und somit entweder aus Häme oder Verlegenheit lacht. Des Weiteren könnte sie lachen, weil sie der gesamten Gruppe oder Maya eine inhaltliche Beteiligung an der Stelle nicht zutraut. Außerdem könnte es sich auf das von Frau Fichtel verwendete „jemand“ (geschlechtsneutral) beziehen, was bei Tami zu „einer“ (generisches Maskulinum) abgewandelt wird. Frau Fichtels

48 Ein *cold call* bezeichnet das Aufrufen von Schüler*innen, die sich nicht gemeldet haben. Laut Dallimore et al. (2019) können cold calls im Unterricht zu einer Steigerung der Partizipation von Schüler*innen führen.

Reaktion in Turn 132 lässt darauf schließen, dass die erste Deutungsalternative zu Tamis Lachen am wahrscheinlichsten ist. So ruft Frau Fichtel nun Kelly und nicht Tami (oder nochmal Maya) gezielt auf (Turn 132). Kelly antwortet zögerlich (vgl. die verhältnismäßig vielen Pausen, Turn 133) und wirkt eher verhalten (spricht am Ende des Turns zu Maya und nicht zu Frau Fichtel und beendet den Turn so leise, dass sie nicht mehr transkribierbar ist). Obwohl Frau Fichtel eventuell die aktive Teilnahme an der Diskussion durch die „Mädels" durch die cold calls erreichen wollte, wird eine Art Nebendiskussion der Gruppe (Turn 134) angeregt und führt nicht zur (vermutlich) gewünschten inhaltlichen Partizipation und/ oder Weiterentwicklung. Nach einem kurzen Austausch untereinander erklärt Tami, dass das kurze Statement durch Kelly in Turn 133 nicht weiter inhaltlich ausgeführt werden soll (Turn 135) und Maya bestätigt dies (Turn 136).

137	Frau Fichtel	ähm (.) Maya ich geb dir mal nochn bisschen (und geb) euch alljemein nochma=n bisschen Zeit? Fracht euch auch=mal «auf die Mädchen links (also Tanja, Maxi, Nina) zeigend> wel-was habt denn ihr für=n Argument für eure Position gefunden?>
138	Maxi	«Auf das Blatt auf dem Tisch schauend>Ähm dass äh von Null bis neun ähm alle Zah:ln auch drin sind > und die kommn immer wieder vor. [schaut Frau Fichtel an] (.) also ist die=äh Zahl unendlich [zuckt mit den Schultern]
139	Frau Fichtel	mhm.
140	Kommentar	in der Klasse ist es still, einige Blätter rascheln, es wird leise gemurmelt (nicht transkribierbar)
141	Frau Fichtel	Noch was? (2) eins zufügen oder Nathaniel hat ja auch noch nichts gesagt? (.) Als:o das was er jetz als Argument gefundn hat?
142	Nathaniel	[zuckt mit den Schulter, schüttelt den Kopf]
143	Frau Fichtel	Kannste dich dann einmischn?
144	Samuel	[meldet sich]
145	Frau Fichtel	Nein? «zu Leonie, Maya und Tami gewandt>so wie siehts bei euch aus? > (.) Kannst dus in Wort fassen Maya?
146	Maya	@(3)@ [streicht sich die Haare von der Schulter] Naja es hat halt noch kein Mensch: halt bis unendlich gezä:hlt (.) ähm
147	Neville	«sich meldend> └unverständlich┘ >
148	Gerd	«mit den Händen gestikulierend>└unverständlich┘ >
149	Frau Fichtel	└Pschhh┘ «auf Neville zeigend>du bist nich dran> kannst glei=nochmal helfen wenn ähm
150	Maya	Es gibt kein (Ort) Menschen die ha:lt jetz immernoch so zäh:ln (.) es gibt halt kein unendlich es geht halt immer weiter die Zah:ln so da wo (Menschen) is «mit den Schultern zuckend, lächelnd, kopfschüttelnd>kein Ende> ja?

Frau Fichtel greift das zaghafte Verhalten der „Mädels" auf und deutet es für die Klasse so, dass Maya (und Co) wohl noch Zeit für Überlegungen benötigen (Turn

137). Scheinbar schreibt Frau Fichtel ihnen den Status der *Bystander* zu. Dafür spricht, dass die Gruppe in einer inhaltlich weit entwickelten Debatte doch ihre Aussage aus der Gruppenarbeit vorlesen und nicht auf die bereits gebrachten Argumentationen der anderen Kinder eingehen. Die Zeit, die Frau Fichtel der Gruppe einräumt, könnte zum Einordnen des eigenen Arguments in den Gesamtverlauf der Debatte gedacht sein. Frau Fichtel bringt diesen Transfer selbst aber nicht inhaltlich ein, sondern agiert weiterhin eher administrativ in der Gesprächsleitung. Weiterhin ruft sie dann die nächste reine Mädchengruppe auf. Auch hier wird von ihr nicht etwa die inhaltliche Weiterentwicklung der Argumentationen von Samuel, Gerd, Ringo und Klaus angestoßen, sondern ein Hervorholen des für die Debatte lediglich als Fundament dienenden Arguments aus der Gruppenarbeit initiiert („wel-was habt ihr denn für=n Argument für eure Position gefunden?“, Turn 137). Auffällig an dieser Stelle ist auch, dass sie nach der ausdrücklichen Aufforderung an „Mädels“ (Turn 128) die nächste rein weiblich besetzte Gruppe aufruft. Auch auffällig ist, dass Maxi stellvertretend für ihre Gruppe bereits in Turn 96 (als Antwort an Samuel) konstatiert, dass sie der Debatte nichts inhaltlich hinzufügen können und Frau Fichtel die Gruppe nun trotz dieses Einwurfs aufruft.

Maxi entgegnet der Aufforderung mit Vorlesen ihres in der Gruppenarbeit verfassten Arguments. Sie scheint sich in einer Art Sprecherinnen-Rolle für ihre Gruppe zu sehen (vgl. Turn 96). Sie bringt die gleiche Argumentation wie Samuel, nämlich die der randomisierten Bildungsvorschrift über beliebige Ziffern an unendlich vielen Stellen einer unendlich langen Zahl. Es ist nicht eindeutig auszumachen, ob sie mit „also ist die=äh Zahl unendlich“ meint, die Zahl sei unendlich lang oder ob sie damit ausdrücken will, die Zahl ist die *Zahl unendlich.* Das Schulterzucken kann entweder als Desinteresse am inhaltlichen Verlauf der Debatte, als Ausdrücken einer Ratlosigkeit bzw. eine Art Hilferuf an die Lehrkraft oder als Zeichen dafür, dass sie keine weitere Ausführung inhaltlich gestalten kann, gedeutet werden. Da Maxis Blick auf Frau Fichtel gerichtet ist, ist es wahrscheinlich, dass ihr Schulterzucken eher eine Geste der Ratlosigkeit ist, bzw. eine Art Entschuldigung dafür, dass sie ihre Argumentation nicht weiter ausführen kann.

Frau Fichtel geht darauf inhaltlich nicht ein (Turn 139). Auch das Schulterzucken wird nicht aufgegriffen, außerdem bleibt es unerwähnt, dass die vorgebrachte Argumentation schon mehrfach diskutiert wurde und Maxi nach eigener Aussage (Turn 96) der Debatte nichts hinzuzufügen hätte. Gegen einen Peer-cold-call hat sie sich in Turn 96 noch erfolgreich behauptet, dem der Lehrkraft antwortet sie trotz der von ihr zuvor konstatierten Sinnlosigkeit ihres Beitrags. Dies spricht für klare hierarchische Strukturen zwischen der Lehrkraft und den Kindern. Auch spricht dafür, dass der Rest der Klasse nun still murmelt (Turn 140) und keines der Kinder anbringt, dass Maxis Vorlesen ein inhaltliches Zurückschreiten der Debatte bedeutet.

Die Stille wird durch Frau Fichtel mit einem Aufrufen Nathaniels gebrochen (Turn 141). Dabei agiert sie abermals (siehe Turns 128, 137) administrativ und kommuniziert dieses Vorgehen auch weitestgehend transparent („Nathaniel hat ja auch noch nichts gesagt?“, Turn 141). Nathaniels Einbinden in das Gespräch auf administrativer Ebene führt zu keinem inhaltlichen Vorankommen der Debatte (Turn 142, Schulterzucken). Obwohl der sich meldende Samuel (Turn 144) vermutlich einen inhaltlichen Beitrag leisten möchte, verbleibt Frau Fichtel weiterhin bei cold-calls und ruft nun erneut die „Mädels“, genauer gesagt Maya, auf (Turn

145). Diese macht, wie Maxi vor ihr, eine für die Debatte im Klassenverband inhaltlich zurückschreitende Argumention auf („es hat halt noch kein Mensch: halt bis unendlich gezä:hlt“, Turn 146). Inhaltlich setzt es die Gruppe daher zurück, dass im vorherigen Verlauf schon geklärt wurde, dass beide Gruppen der These, man kann potentiell bis unendlich zählen, zustimmen (Samuel, Turn 101; Klaus, Turn 20, Neville, Turn 2 ...). Es wäre einerseits möglich, Mayas Einschub als Ausdruck der Verwirrung wegen dieses Konsens' zu lesen. Andererseits könnte man auch interpretieren, dass sie intendiert, den bereits bestehenden Konsens absichtlich zu durchbrechen und die Debatte absichtlich im Inhalt so zurückzuführen, dass basale Grundfragen und Ausgangspositionen hinterfragt und somit dann durch dieses Zurückschreiten doch ein inhaltlich konstruktiver Debattenprozess angeregt wird. Durch das Anbringen des praktischen Zählprozesses, der durch Menschen realisiert werden kann, ist dieser Einschub noch aus zwei weiteren Gründen erwähnenswert:

- *Unendlich* wird implizit als eine fiktive Grenze erwähnt, zu der noch kein Mensch gezählt hat („bis unendlich“, Turn 146). Das ist besonders interessant, weil der Begriff *unendlich* an sich schon die Existenz von Grenzen (oder einem *Ende*) ausschließt.

- Die Aussage kann auch auf ein gewisses Mathematikverständnis Mayas hindeuten. Das Knüpfen mathematischer Sachverhalte an menschliche Existenz bzw. menschlich-mathematische Tätigkeit und Realisation ist deshalb so interessant, weil ihre Klassenkamerad*innen bislang zwar teilweise auch auf praktische Prozesse verwiesen haben, aber dennoch theoretische Möglichkeiten im Bereich mathematischer Strukturen nicht von diesen praktischen Prozessen abhängig gemacht haben.

In ihrer Aussage wird Maya von Neville und Gerd unterbrochen (Turns 147, 148), die wie Samuel (Turn 144) scheinbar auch inhaltlich etwas beitragen möchten und auf Mayas Aussage reagieren möchten. Frau Fichtel unterbindet diese Unterbrechung in Turn 149 mit der inhaltlichen Unterstellung, Neville wolle Maya „helfen“ (Turn 149). Hierbei bezieht sich Frau Fichtel eventuell auch auf die Debattenregeln, zu denen es auch gehört, andere Debattierende ausreden zu lassen.

Maya korrigiert sich in Turn 150 selbst (sie korrigiert Turn 146) und negiert nun die Existenz einer ontologisierten Unendlichkeit („es gibt halt kein unendlich“, Turn 150). Auch betont sie die Bedeutung des Wortes *unendlich* („es geht halt immer weiter [...] kein Ende“, Turn 150).

In Turn 151 ruft Frau Fichtel, entgegen der Ansage aus Turn 149 an Neville, Roman auf. Vermutlich hat sich Roman vorab gemeldet, diese Vermutung geht aber aufgrund der Kamerastellung nur aus Frau Fichtels Formulierung (Turn 151) hervor. Dass Frau Fichtel damit Neville übergeht und Roman vor ihm aufruft, könnte unter Umständen in Romans Sonderstellung als Inklusionsschüler begründet sein (Autismus). Roman erläutert und begründet kurz, dass für ihn sowohl Leibniz' als auch Cantors Standpunkt für ihn gleichermaßen richtig scheint. Anschließend ruft Frau Fichtel nun Neville auf (Turn 153).

154	Neville	Es gibt (eins noch kein Anfang) deswegen kann man auch nicht bis unendlich zä:hln (.) also bis örgendne Zahl zä:hl (.) wei:l es gibt ja nich in jeder (Riesen) Zah:ln (.) also Minus (.) «mit den Händen auf dem Tisch gestikulierend>es gibt keinen Anfang und kein Ende>[legt die Hände schwungvoll auf den Tisch]

Auch Neville benutzt *unendlich* hier implizit als fiktive Grenze („bis unendlich“, Turn 154), korrigiert sich aber sofort („also bis örgendne Zahl“, Turn 154). Er bringt mit seiner Aussage zum ersten Mal in die Debatte ein, dass bei einem unendlichen Zählprozess auch der Anfang (und nicht nur das Ende) nicht existiert. Somit verschiebt sich für ihn die Debatte heraus aus dem Berich der natürlichen Zahlen hin zu den ganzen Zahlen. Interessant ist, dass er diese Vorstellung trotzdem mit dem *Zählen* verknüpft, obwohl die ganzen Zahlen kein als *Zählzahlen* bekannter Zahlbereich sind (im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen).

Im Anschluss an Nevilles Argumentation fragt Frau Fichtel, ob man „die“ in eine Menge bringen kann (Turn 158, es ist davon auszugehen, dass sie mit „die“ Zahlen meint). Die auf der rechten Seite des Raums bei Leibniz stehenden Kinder antworten mit Nein (Turn 159, insbesondere Gerd, Roman, Klaus und Georg). Georg meldet sich (Turn 160), Frau Fichtel ruft ihn auf (Turn 161) und er bringt erneut die Argumentation ein, dass es kein Ende gäbe (Turn 162). Anschließend ruft Frau Fichtel (den sich vermutlich meldenden) Samuel auf (Turn 163). Er macht den Vorschlag, statt unendlich vieler Zahlen eine begrenzte Anzahl unendlich langer Zahlen, in welchen andere Zahlen enthalten sind, in die Menge zu implementieren (Turn 164). Somit wäre dann die Kardinalität der Menge endlich, die Kardinalität ihrer Elemente aber nicht. Man kann sich Samuels Vorschlag symbolisch so vorstellen: $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...\omega_n\}$. Die Kardinalität dieser Menge wäre dann auf n begrenzt, die ω allerdings sind unendlich lange (große, von unendlicher Kardinalität ...) Zahlen. Frau Fichtel fragt ihn, wie diese Menge dann heißen würde (Turn 165). Samuel antwortet, dass der Name sich neu konstituieren würde und davon abhängig sei, wie viele dieser unendlichen Zahlen in der Menge enthalten sind (Turn 168). In den Turns 169-172 wird die Klasse sehr laut, einzelne Kinder (Samuel, Niklas) sind mit ihrer Stimme heraushörbar, aber Inhalte der Einschübe nicht ausmachbar.

173	Samuel	**Ja sie- die Zahln die (bleiben ja) wir wissen doch dass es kein Ende gibt** «mit beiden Händen gestikulierend> (.) **aber man kann die Zahln doch (prinzipiell) erwei:tern also is=es noch (einwas Stück)> das kann man auch unendlich lange machen und daran liegt dass es kein** (.) dass es ähm dann (.) (zufällige) sa:gen wir doch gar nich wir sa:gn muss man «mit der linken Hand/ Arm gestikulierend>immer wieder ne Zahl draäh [macht ein Geräusch aus dem Rachen heraus] zwei äh eins und null bis ebend immer wieder dran äh kommen> (.) «mit der rechten Hand gestikulierend> immer so weiter>
174	Kommentar	die Klasse wird laut, nicht transkribierbar (vermutlich hat Gerd etwas gesagt, seine Stimme klingt lauter und er bewegt den Mund, es ist aber nicht herauszubekommen was er gesagt hat)

175	Samuel	[sehr laut] **Es geht jetz=nich dass man irgendwann sti:rbt (.) es geht jetz nich dass man irgendwann stirbt(.) es geht nur um die Zahl** wenn du«rechten Arm auf Schulterhöhe hochnehmend, dabei seinen Zettel in der Hand haltend>stirbst dann schreibt halt jemand anderes> weiter das=doch egal [zuckt mit den Schultern]
176	Gerd?	**Boa!** Also wie oft soll das gehn? Zehn Million Jahre oder was?
177	Kommentar	die Klasse wird sehr laut, nicht transkribierbar (11 sek.)
178	S?	Es wird immer (wieder weiter) es wird kein Ende geben
179	Frau Fichtel	Ringo?
180	Ringo	Es gibt abe:r nich richtich unendlich die Zahln weil sie ja immernoch nur aus den äh (Ringzon) (.) ä::hm:: s wär ja eigentlich ähm man kann ja alles zusamm=fassen (.) im äh ja äh (neuen Reihenfolgen)
181	S?	(wird doch nie gut sein)
182	Ringo	Naja äh ähm es gibt (.) die werden (.) man könnte halt alle Zahln zusammen bilden in einem Satz sag ich jetz mal wenn man sagt äh man könnte einfach immer weiter zähln und die Grundzahln von null bis neun ähm (.) immer wieder äh weiter sozusagen

Samuel verweist darauf, dass die Unendlichkeit der Zahlen bereits akzeptierter Konsens auch auf der Seite der Cantor zustimmenden Kinder war (Turn 173). Die steigende Lautstärke und gestische Unterstützung seiner Ausführungen weisen auf eine gewisse Aufgewühltheit Samuels hin. Möglicherweise fühlt er sich von der Gegenseite nicht angemessen verstanden. Auf diese Lesart würde hinweisen, dass er die auch von der Leibniz-Seite akzeptierte Unendlichkeit der Zahlen zu Beginn nochmals hervorhebt. Eventuell hat er das Gefühl, dass die Gegenseite diesen Punkt unnötig oft anbringt, obwohl er und seine Kamerad*innen ihre Argumentation damit genauso stützen. Des Weiteren kann es auch sein, dass sowohl Lautstärke als auch Gesten aus dem Wunsch, Recht zu haben und zu behalten, stammen. M.E. ist es wahrscheinlicher, dass Samuel sich unverstanden fühlt („sa:gen wir doch gar nich", Turn 173). Er versucht deutlich zu machen, dass seine Idee der Bildungsvorschrift (Turns 14, 23) nicht ausschließt, dass es kein Ende gibt („**wir wissen doch dass es kein Ende gibt** [...] **aber man kann die Zahln doch (prinzipiell) erweitern** [...] bis ebend immer wieder dran äh kommen [...] immer so weiter", Turn 173). Im Anschluss an seine Ausführungen wird die Klasse sehr laut (Turn 174), dies könnte für eine kognitive Aktivierung der Kinder durch Samuel stehen, aber auch für eine emotionale Reaktion auf seine eher emotionalen Erklärversuche. Vermutlich sagt Gerd etwas, das inhaltlich aber durch die Lautstärke der Klasse nicht verständlich ist (Turn 174). Samuel reagiert vermutlich auf das von Gerd Gesagte (Turn 175). Aus Samuels Beitrag geht hervor, dass Gerd vermutlich etwas wie „dann stirbt man irgendwann" gesagt hat, das ist aber am Datenmaterial nicht überprüfbar. Samuel jedenfalls reagiert darauf sehr laut, eventuell, weil er sich abermals nicht genug verstanden fühlt („**Es geht jetz=nich** [...] **es geht jetz nich** [...] **es geht nur um**", Turn 175). Mit der Argumentation, man würde sterben, wenn man versuchen würde, bis ins Unendliche zu zählen (welches vermutlich

Gerd in 174 eingebracht haben könnte), wird die Debatte auf eine praktische Ebene der Umsetzung geholt, während Samuel anscheinend auf einer theoretischen Ebene der mathematischen Möglichkeit diskutieren möchte. Gegen diese Interpretation spricht, dass er beim Abschließen seiner Argumentation selbst auf der praktischen Ebene agiert, indem er eine praktische Lösung für das Problem des Sterbens vorschlägt. Allerdings betont er auch, dass die praktische Ebene „egal“ (Turn 175) sei, was wiederum dafür spricht, dass er die praktische Realisation des Zählprozesses für nicht diskussionswürdig hält.

Gerd versteht scheinbar nicht, dass Samuel den praktischen Zählprozess bei seinen Überlegungen vorerst ausklammern möchte und geht weiter auf die Realisation ein (Turn 176). Dieser spricht er einen sehr langen, aber endlichen („Zehn Millionen Jahre“, Turn 176) Prozess zu. Dies wird von einem durch die Kameraführung nicht identifizierbaren Kind sogleich aufgegriffen (Turn 178) und negiert. Hier wird deutlich, dass S? (Turn 178) *aufmerksam zugehört* (Krummheuer & Brandt, 2001) hat und die Endlichkeit der „Zehn Millionen Jahre“ (Turn 176) erkannt hat. Auch wenn diese Zeitspanne für Kinder so groß ist, dass sie über den eigenen Erfahrungshorizont hinaus unendlich erscheinen mag, merkt S? korrekt an, dass es statt „Zehn Millionen Jahre[n]“ (Turn 176) wohl eher „kein Ende geben“ (Turn 178) kann.

Frau Fichtel unterbricht diesen Argumentationsstrang und ruft Ringo auf (Turn 179). Es lässt sich durch die videographierte Aufnahme nicht nachvollziehen, ob Ringo sich vorab gemeldet hat. Sein Aufrufen durch Frau Fichtel kann als Versuch Frau Fichtels gedeutet werden, die eher emotionale Debatte wieder auf Einzelbeiträge und in eine ruhigere Diskussion zu überführen. Sie agiert hier durch das reine Aufrufen Ringos Namen nicht inhaltlich und auch nach außen hin nicht explizit administrativ steuernd. Ringo (auf Cantors Seite stehend) argumentiert, dass es „nich richtig unendlich“ (Turn 180) gibt. Damit könnte er meinen, dass auf Ziffernebene durch kombinatorische Zusammenstellung Bildungsvorschriften gemacht werden (Bezug zu Samuel), die dann als Vorschrift einen endlichen Charakter haben, aber ein Verhalten ins Unendliche beschreiben (siehe auch Turn 182). Es ist bemerkenswert, dass sich die Debatte hier zirkulär wieder zu Samuels Thesen bewegt. Eventuell sind die Turns 180 und 182 Ringos Versuch, bei der Gegenseite das Verständnis für die Argumentation der Cantor-Gruppe, insbesondere bei Samuel, herbeizuführen.

Die gesamte graphische Rekonstruktion des Argumentationsverlaufs kann im Folgenden (Abb. 6.29, S. 190) eingesehen werden.

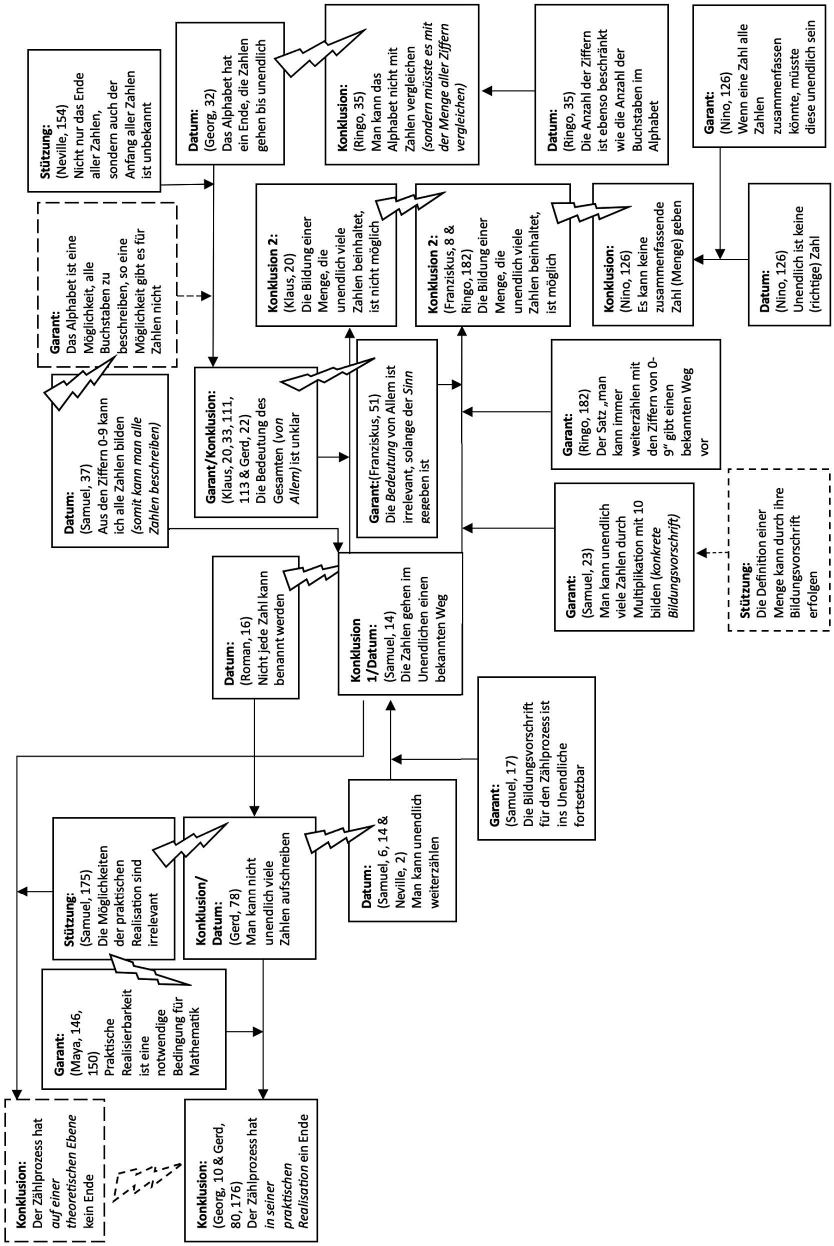


Abbildung 6.29: Graphische Darstellung des Argumentationsverlaufs der Pro-Contra-Debatte an der Gesamtschule nach Toulmin (2003)

6.4 Entweder es ist unendlich, dann kann ich nicht soweit zählen ...

6.4.1 Klassengespräch Grundschule: Herr Bämpfer, Frau Ellestar

Der folgende Transkiptausschnitt stammt aus der Unterrichtsstunde U1 und deren Umsetzung in der Grundschule (Kl. 3). Die Kinder haben sich im Sitzkreis im hinteren Teil des Raumes platziert. Herr Bämpfer, der unterrichtsleitende Lehrer, sitzt eingereiht mit ihnen im Sitzkreis. Frau Ellestar, die Klassenlehrerin, sowie meine Person (als Kameraführung) sitzen außerhalb des Sitzkreises.

523	Herr Bämpfer	was meint ihr denn? (1.5) in der Hinsicht ja, (.) also ich; ich wiederhol das nochmal. (.) entweder kann ich bis dahin zählen; dann ist es; (.) nicht unendlich.
524	S?	└°ja:.°┘
525	S?	└°ja:.°┘
526	Frau Ellestar	ps::t.
527	Herr Bämpfer	o::der es ist unendlich; (.) dann kann ich nicht so weit zählen.
528	S?	°was?°
529	Chor aus Schüler*innen	└hä::? hä::?┘
530	Ben	└ergibt das; ergibt das┘ überhaupt Sinn?
531	Tristan	ja.
532	S?	ja:,
533	S?	Zahlen (unverständlich, etwa 0.5 Sekunden)
534	S?id	hä, nein.
535	Herr Bämpfer	ergibt das Sinn ist └die Frage ja.┘
536	S?id	**└leider nicht.┘ leider nicht.**
537	Ben	hä, das ergibt doch=n Sinn.
538	Herr Bämpfer	«auf den sich meldenden Kevin zeigend> was sagst denn du Kevin?>
539	Kevin	eigentlich gibt es unendlich Zahlen.
540	Rosa	(.) └man könnte immer wieder=ne Zahl┘
541	Bernhard	└ja (unverständlich, etwa 1.5 Sekunden)┘
542	Rosa	dransetzen. (.) es geht bis zur umgekippten Acht.

In Phase U1.D liest Herr Bämpfer den aus dem Zahlenteufel entnommenen Text vor und stellt die dem Text hinzugefügten Gesprächsimpulse an die Kinder (Text siehe Anhang S. 267). Im Sitzkreis ist bisher das Melden vor einem Redebeitrag etabliert, wird aber nicht von allen Kindern oder der Lehrkraft konsequent umgesetzt.

Herr Bämpfer wiederholt das bereits Vorgelesene (Turn 523), nachdem einige Kinder einwerfen, sie hätten es nicht verstanden. Sehr leise antworten zwei Kinder (Turns 524, 525) und werden daraufhin von Frau Ellestar zur Ruhe ermahnt (Turn 526). Diese etabliert mit ihrer Ermahnung zur Ruhe eine hierarchische Beziehung zwischen der Gruppe der Lehrkräfte und der der Kinder. Außerdem wird auch eine

Art Hierarchie von Frau Ellestar zu Herrn Bämpfer deutlich, da sie die Kinder, deren Unterricht nun eigentlich durch ihn geleitet wird, zur Ruhe ermahnt - wobei deren Einwürfe Herrn Bämpfer unter Umständen in seinem Leitungshabitus nicht gestört hätten. Turn 526 sorgt also für ein Transparentmachen der Machtbeziehungen und des Gefüges im Klassenraum. Herr Bämpfer liest, ohne weiter auf Frau Ellestar einzugehen, den Rest des Textes vor (Turn 527). Dies könnte dafür sprechen, dass er die von ihr etablierte Hierarchie unterschwellig auch so wahrnimmt und sie ohne weitere Konflikte zu entfachen in seinen Unterricht eingreifen lässt. Weiterhin könnte Herr Bämpfer auch beide Lehrkräfte auf einer hierarchischen Ebene, aber in einer Art symbiotischen Zusammenarbeit ansehen, sodass Frau Ellestars Ermahnung während seiner Unterrichtsleitung eher als Hilfestellung statt als störender Eingriff angesehen wird.

Zum Beitrag von S? (Turn 528) gibt es zwei Lesarten. Erstere legt nahe, dass S? in ein Parallelgrespräch verwickelt ist und sich das „was“ als Rückfrage innerhalb dieses Gespräches lesen lässt. Zweitere Lesart könnte im Sinne eines Bezuges auf etwas Unbekanntes interpretiert werden, insbesondere auf Herrn Bämpfers Vorlesen in Turn 527. Hier würde S? dann eine Erklärung von der Lehrkraft und/oder der Mitschüler*innen verlangen und drückt sein/ihr Unverständnis der Aussage aus Turn 527 aus. Turn 529 würde die zweite Lesart stützen, aber nicht sichern (somit bleiben beide Lesarten ohne Gewichtung stehen). Im Turn 529 drücken mehrere Schüler*innen ihre Veriwrrung aus, als eine Art saloppes „was“ (Turn 528), man könnte also die „hä[s]“ als eine Art Verstärkung des Turns 528 lesen. Aus den Reaktionen der Schüler*innen lässt sich erkennen, dass sie nicht lediglich als *Bystander* dem Gespräch beiwohnen, sondern in ihrer Rolle der *aufmerksamen Zuhörer*innen* dem Gespräch zumindest insoweit folgen, dass sie ihr Unverständnis ausdrücken und implizit eine Erläuterung einfordern.

Ben formuliert diese implizite Einforderung in Turn 530 explizit aus. Dabei geht er allerdings nicht auf konkrete Inhalte ein, sondern formuliert relativ unspezifisch, aber im Rahmen der Bildungssprache („Sinn ergeben“ statt „Sinn machen“[49]). Die Wiederholung des „ergibt das“ (Turn 530) könnte einerseits für einen Versuch Bens sprechen, den (in Turn 529) entstandenen Lärmpegel zu durchbrechen, andererseits könnte es als eine kognitive Aktivierung und damit verbundene Aufregung gelesen werden.

Tristan antwortet vermutlich Ben auf seine geschlossene Frage mit einer geschlossenen Antwort (Turn 531). Da Ben keine weitere Explikation eingefordert hat, wird von Tristan auch ohne weitere Erläuterung geantwortet. Er fühlt sich auch ohne Meldung berechtigt, zu antworten, was für eine eher flachere Hierarchie innerhalb des Sitzkreises, Herr Bämpfer eingeschlossen, spricht. Die sinkende Intonation spricht für eine gewisse Selbstverständlichkeit, mit der Tristan Bens Frage nach dem „Sinn“ beantwortet. S? schließt sich Tristan an (Turn 532), antwortet allerdings in die Länge gezogen und mit steigender Intonation, sodass von einer gestiegenen Unsicherheit im Kontrast zu Tristans Sicherheit ausgegangen werden kann. Auch S? hält eine Explikation vermutlich für unnötig (erste Lesart), oder fordert sie mit der steigenden Intonation ein (zweite Lesart). Ein*e andere nicht

49 Das „ergeben“ könnte auch aus dem mathematischen Kontext heraus entsprungen sein, da das Wort „Ergebnis“ im Mathematikunterricht oft benutzt wird und Ben unbewusst in seiner Wortwahl beeinflusst haben könnte identifizierbare Schüler*in bringt nun etwas Inhaltliches ein, wobei der zweite Teil des Turns (533) nicht aus dem Audiomaterial heraus gewonnen werden konnte. Vermutlich bezieht sich Turn 533 auf Herrn Bämpfer in Turn 527, es könnte aber auch eine inhaltliche Antwort auf Ben (Turn 530) und somit eventuell eine Reaktion auf die von S? in Turn 532 vermutlich eingeforderte Explikation bedeuten.

Zu Turn 543 gibt es zwei verschiedene Deutungsalternativen: Zum einen könnte Sid sich auf Tristan und S? beziehen (Turns 531,532) und somit rückwirkend auch auf Bens Frage (Turn 530), oder zum anderen auf den Inhalt von Turn 533. Im ersten Fall würde der Eindruck eines gewissen Abstimmungsverhaltens, das durch die kurzen, geschlossenen Antworten der Kinder entsteht, weiter aufrecht erhalten bleiben und der erste inhaltliche Beitrag nicht weiter diskutiert werden. Im zweiten Fall wäre Turn 534 eine Ablehnung des Beitrages aus 533 und somit eine inhaltliche Positionierung, aber nicht zur Frage nach dem Sinn, sondern gegen die Explikation von S? in Turn 533.

Herr Bämpfer holt nun Bens Frage aus Turn 530 offiziell ins Plenum und stellt sie für alle zur Diskussion (Turn 535). An dieser Stelle ist fraglich, ob Herr Bämpfer nun Positionierungen oder auch Erläuterungen zu den schon getätigten Positionierungen anregen möchte. Sein Ziel für das Gespräch wird den Kindern an dieser Stelle nicht transparent gemacht, er stellt keine explizite Frage, sondern wiederholt die von Ben gestellte Frage laut für alle Kinder.

Obwohl im Sitzkreis das Melden vor Redebeiträgen etabliert ist, meldet sich auch S?id nicht (Turn 536) - wie schon die Kinder vor ihm*ihr. Dies könnte dafür sprechen, dass das Thema oder die Art der Gesprächsleitung eine Aufregung und kognitive Aktivierung bei den Kindern herovrrufen, die für Antworten die lange Wartezeit nach einer Meldung unattraktiv macht. Warum S?id das Wort „leider“ (Turn 536) benutzt, kommt aus dem Beitrag nicht deutlich heraus. Einige Interpretationen sind möglich:

- „leider“ geht als Floskel in die Formulierung mit ein, hat aber keine weitere inhaltliche Bedeutung
- „leider“ wird eine inhaltliche Bedeutung zugemessen, in diesem Sinne würde S?id dann ein Bedauern darüber äußern, dass
  - die vorgelesenen Sätze aus den Turns 523, 527 keinen Sinn ergeben
  - die Aussage von S? aus Turn 533 keinen Sinn ergibt
- „leider nicht“ ist, insbesondere in Wiederholung, die ähnliche Reproduktion eines in den Medien vorkommenden Satzes der Kunstfigur *Dennis aus Hürth*

Ben antwortet vermutlich S?id (Turn 534 oder Turn 536) auf die Verneinung des Sinns (Turn 537). Damit beantwortet er seine eigene Frage aus Turn 530. Eventuell hat er die Turns zwischen seiner Frage und Turn 537 genutzt, um selbst über die von ihm aufgeworfene Frage nachzudenken und sich nun entschieden, allerdings bringt auch er hier keine inhaltliche Erläuterung, sondern eine Positionierung ein. Sein „hä“ kann auf ihn selbst oder auf S?id bezogen sein. Anschließend an Ben meldet sich Kevin und wird von Herrn Bämpfer aufgerufen (Turn 538). Kevin ist somit der erste Schüler im hier vorliegenden Transkriptausschnitt, der seinen Turn durch eine Meldung einfordert. Seine Meldung kann so gedeutet werden, dass er der Relevanz seiner kommenden Aussage besonders viel Gehalt zumisst und die

Ruhe der anderen Kinder und die explizite Aufforderung durch die Lehrkraft als Sicherung der Aufmerksamkeit zu seinem Beitrag einschätzt. Herr Bämpfer fordert ihn auf, etwas zu sagen und gibt ihm die (eventuell) durch die Meldung angefragte „Bühne“. Dabei beschränkt sich Herr Bämpfer nicht lediglich auf das Nennen von Kevins Namen, sondern fordert ihn durch „was sagst denn du“ (Turn 538) implizit zu einer Positionierung und/oder Teilhabe an der Diskussion auf. Unklar bleibt, ob Herr Bämpfer Kevin auch zu einem inhaltlichen Beitrag bzw. einer Begründung animieren möchte.

Kevin beginnt mit einer Relativierung („eigentlich“, Turn 539) und bringt nun den zweiten inhaltlichen Beitrag im Ausschnitt. Zum durch ihn gebrauchten Wort „unendlich“ (Turn 539) gibt es zwei Deutungsalternativen:

- **unendlich als Numerale:** Hier würde Kevin „unendlich“ als Zahlwort benutzen, um eine Kardinalität auszudrücken. Damit wäre eine Distanzierung zur durch Herrn Bämpfer etablierten Frage nach dem Zählprozess erfolgt, wie eine Art Abstrahierung vom Zählprozess hin zur Kardinalität derMenge aller natürlichen Zahlen. Man könnte bei dieser Deutungsalternative Kevin eine Vorstellung von aktualer Unendlichkeit zusprechen, da er die Abgeschlossenheit des Zählprozesses im Unendlichen betrachtet und der abgezählten Menge eine Kardinalität zuweist.

- **unendlich als Adverb:** In diesem Fall hätte Kevin das „viele“ weggelassen, welches nötig gewesen wäre, um „Zahlen“ adverbial bestimmen zu können. In diesem Fall wäre Kevins Vorstellung von Unendlichkeit nicht klar aus der Aussage heraus interpretierbar: Unendlich *viele* Zahlen könnten als Reihe im Werden, aber auch als etwas Beständiges im Sein gemeint sein.

Rosa und Bernhard melden sich anschließend nicht, sondern antworten ohne Rückversicherung durch die Lehrkraft gemeinsam (Turns 540, 541). Interessant an Rosas Beitrag (Turns 540, 542) ist, dass sie einerseits Kevin bekräftigt und den dynamischen Prozess unendlich vieler Zahlen stärkt („ └man könnte immer wieder=ne Zahl┘“, Turn 540, „dransetzen“, Turn 542), andererseits aber eine Grenze der unendlich vielen Zahlen benennt („es geht bis zur umgekippten Acht“, Turn 542). Dies könnte dafür sprechen, dass Rosas *concept image* (Tall & Vinner, 1981) des Konzepts *Unendlichkeit* im Endlichen verhaftet ist und sie daher die Benennung einer Grenze, sei sie auch ein Symbol für Unendlichkeit, für ihr mentales Bild benötigt.

543	Ben	└es geht bis;┘
544	Bernhard	└Herr Bämpfer;┘
545	Kevin	weil;
546	S?	keine Ahnung.
547	Bernhard	(unverständlich, etwa eine Sekunde)
548	Herr Bämpfer	(.) das ist ja schon mal richtig ne, es gibt └tatsächlich unendlich Zahlen.┘
549	Kevin	└kann ja zehn Millionen┘ (.) └plus┘
550	Herr Bämpfer	└[zeigt auf die sich meldende Nadja, um ihr die Redeerlaubnis zu erteilen]┘
551	Kevin	└dreitausendfünf Millionen dreitausendzwölf mal keine Ahnung; wir könnten da bis;┘

552	Nadja	└also; (.) man könnte (.) ja sagen dass es┘ └eine Zahl gibt┘
553	Frau Ellestar	└ps::t.┘
554	Nadja	die heißt unendlich und dann ist das unendlich.
555	Chor aus Schüler*innen	hä::?
556	Kommentar	Es folgt ein kurzes Stimmenwirrwarr der Schüler*innen.
557	S?	nein.
558	Herr Bämpfer	gibt es denn eine Zahl die unendlich ist?
559	S?	(.) ja.
560	Kommentar	Es folgt ein erneutes Stimmenwirrwarr der Schüler*innen.
561	Herr Bämpfer	und die Unendlich heißt?
562	Nadja	kann man sowas (erfinden)?
563	Herr Bämpfer	dann müsste man sie erfinden sagst du, das ist schon mal ein guter Einwand; (.) die müsste man erfinden.

Ben greift die von Rosa postulierte Grenze verbal auf („es geht bis“, Turn 543) und verleiht somit ebenfalls der Unendlichkeit eine endliche Konnotation. Währenddessen spricht Bernhard Herrn Bämpfer namentlich an (Turn 544), vermutlich um seinen in Turn 541 durch Rosas Beitrag untergegangenen Einschub wiederholen zu können. Die Rückversicherung über die Lehrkraft spricht an dieser Stelle dafür, dass Bernhard Herrn Bämpfer als Unterstützung im Diskussionsverlauf wahrnimmt und sich hier von Herrn Bämpfers Funktion als Gesprächsleiter eine inhaltliche Einbindung erhofft. Kevin setzt zur Begründung seiner Wortmeldung aus Turn 539 an („weil;“, Turn 545) und wird dabei im schnellen Verlauf der Diskussion von S? (Turn 546) unterbrochen. Diese*r drücke seine*ihre Unkenntnis aus, worüber genau bleibt unklar. Möglicherweise antwortet S? noch auf Bens Frage aus Turn 530, möglicherweise könnte es eine Einschätzung zu den Aussagen von Rosa, Bernhard und Kevin sein - somit könnte der Einschub dann auch als Anhaltspunkt dafür gesehen werden, dass S? sich an diesem Punkt nicht weiter inhaltlich beteiligen möchte.

Bernhard versucht weiter, einen Wortbeitrag in die Diskussion einzubringen, ist aber aufgrund der generellen Lautstärke nicht zu verstehen (Turn 547). Herr Bämpfer steigt nun in das Gespräch mit ein und bewertet Kevins Aussage aus Turn 539 (Turn 548). Die Wertung entsteht durch das „das ist ja schon mal richtig“ (Turn 548) und könnte von Herrn Bämpfer als inhaltliche Lenkung des Gesprächs intendiert sein. Vermutlich wollte er als Lehrkraft eine gemeinsame Argumentationsbasis für die Kinder schaffen, von der aus (als Prämisse/Datum) weiter argumentiert werden kann. Möglicherweise ist es aber auch einfach ein habitualisiertes Ritual, die Antworten der Schüler*innen vor einer inhaltlichen Weiterführung des Gesprächs zunächst zu werten.

Kevin reagieret auf Herrn Bämpfers Wertung mit dem Benennen großer Zahlen (Turns 549 und 551) und wird dabei von der durch Herrn Bämpfer in Turn 550 aufgerufenenen Nadja unterbrochen. Vermutlich möchte Kevin mit seinen Beispielen aufzeigen, dass selbst so große Zahlen noch im Endlichen benennbar sind (dafür spricht das kurz vor der Unterbrechung Gesagte „wir könnten da bis“, Turn 551) – ganz im Gegensatz zum Unendlichen. Andererseits könnte er auch die großen Mengen/Zahlen zur Analogiebildung für Unendliches nennen wollen, ein Phänomen, das nicht selten auch bei Studierenden emergiert (Tsamir & Dreyfus, 2002). Herr Bämpfer ruft Nadja auf und versucht damit, das eigentlich im Sitzkreis etablierte Schema *Meldung-Aufrufen-Wortbeitrag* wiederherzustellen. Nadja hält sich offenbar an dieses Schema und bringt in Turn 552 den Anfang eines inhaltlichen Vorschlags ein. Dabei wird sie wiederum von Frau Ellestar untebrochen (Turn 553), die anscheinend den Rest der Kinder dazu bewegen möchte, Nadja zuzuhören. Hier wird, wie auch zuvor in Turn 526, sowohl die Hierarchie zwischen Frau Ellestar und den Kindern wie auch die Hierarchie zwischen Frau Ellestar und Herrn Bämpfer ausgedrückt. Paradox scheint an dieser Stelle, dass Frau Ellestar zwar die Kinder auffordert/ermahnt, Nadjas Beitrag zu folgen, sie aber im selben Zuge in ihrem Beitrag unterbricht.

Nadja unterbreitet den Vorschlag, eine Zahl als *unendlich* zu benennen (Turns 552, 554). Interessant ist, dass sie sowohl den Namen der Zahl als auch ihre ontologische Konstitution mit unendlich bezeichnet („die heißt unendlich und dann ist das unendlich“, Turn 554). Allerdings kann sie mit dem zweiten „unendlich“ auch etwas anderes meinen, da sie den für *Zahl* falschen Artikel („das“, Turn 554) verwendet. Vielleicht bezieht sie sich mit „das“ auch auf die Kardinalität der von ihr als solche benannten Zahl *unendlich* oder sie hat Bernhards Beitrag in 547 akkustisch verstanden und bezieht sich auf ihn. Nadjas Idee erinnert an transfinite oder hyperrelle Zahlen, die auch im theoretischen Überbau der Mathematik theoretisch *erfunden/entdeckt*[50] wurden.

Nadjas Aussage scheint den restlichen Kindern einen Denkanstoß gegeben zu haben (Turns 555, 556). Die Klasse scheint *aufmerksam zuzuhören* (Krummheuer & Brandt, 2001). S? widerspricht Nadjas Idee (Turn 557), das „nein“ kann sich allerdings auch auf ein eventuell stattfindendes Parallelgespräch beziehen. Herr Bämpfer fragt als Reaktion auf Nadjas Idee nach, ob es eine Zahl gibt, die unendlich ist (Turn 558). Damit durchbricht er ohne explizit auf Hierarchien oder die etablierten Meldungen hinzuweisen die in der Klasse entstandene Unruhe und bleibt inhaltlich am Gesprächsthema, ohne administrativ zu steuern. Auch als er durch eine vorschnelle Antwort von S? („ja.“, Turn 559) und erneute Unruhe (Turn 560) unterbrochen wird, expliziert er seinen Vorrang bei Redebeiträgen nicht, sondern geht weiter inhaltlich in die Diskussion („und die Unendlich heißt“, Turn 561). An dieser Stelle sieht Herr Bämpfer ebenfalls von einer Wertung zu Nadjas Idee ab, sondern paraphrasiert ihre Idee zu einer Frage für den gesamten Sitzkreis um. In seiner Paraphrase bezieht sich der Artikel zur Zahl *unendlich* konkret auf diese, was dafür spricht, dass Herr Bämpfer Nadjas Idee (aus Turn 554) inhaltlich als unendlich große Zahl, die man unendlich nennen kann, verstanden hat. Auch könnte seine Art des Fragens dafür sprechen, dass er die Frage eher rhetorisch formuliert und aufgrund seines Hintergrundwissens die Schüler*innen zu gewissen Antworten bewegen möchte.

---

50 Sicherlich müsste man an dieser Stelle noch wesentlich mehr Verben einfügen, die die philosophisch-mathematischen Positionierungen zur Existenz von Zahlen/ Ontologie der Zahlen widerspiegeln, an dieser Stelle sollen *erfinden* sowie *entdecken* aber Rationalismus und Empirismus als größte Strömungen abdecken - auf den Rest wird hier aus Gründen der Lesbarkeit verzichtet.

Nadja, deren Idee nun für alle als Frage präsentiert wurde, antwortet mit einer Gegenfrage (Turn 562). Die Frage nach der Existenz einer unendlichen Zahl scheint sie als Frage nach der *aktuellen* Existenz einer solchen Frage zu interpretieren und spekuliert, ob man, falls so eine Zahl noch nicht existiert, diese erfinden könne. Ihre Frage richtet sich offenbar an Herrn Bämpfer und beinhaltet auch eine philosophisch interessante Komponente: Nadja fragt hier nicht nur danach, ob man eine solche Zahl *unendlich* erfinden könne, sondern „sowas“ (Turn 562). Man könnte ihre Frage als generelle Frage nach der ontologischen Genese von Zahlen lesen, also ob man Zahlen („sowas“) überhaupt erfinden kann. Herr Bämpfer greift diesen Aspekt der Frage nicht auf, sondern interpretiert Nadjas Frage als weiterführende Idee (Turn 563) und paraphrasiert hier nun eine Frage zu einer Aussage. Obwohl sich Nadja lediglich danach erkundigt, ob man „sowas“ erfinden kann, gestaltet Herr Bämpfer diese Frage zu einer normativen Aufforderung um („Dann müsste man sie erfinden sagst du“, Turn 563) und wertet diese Aufforderung („das ist schon mal ein guter Einwand“, Turn 563). An dieser Stelle scheint es so, als wäre Herr Bämpfer selbst kein komplett *aufmerksamer Zuhörer* oder er formuliert Nadjas Frage bewusst um, um sie als provokativen „Einwand“ zu seiner (vermutlich rhetorisch gemeinten) Frage zur Diskussion zu stellen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass im Rahmen des präsentierten Transkriptausschnittes eine interaktionale Verdichtung sowie auch ein sinnstiftender Interaktionsprozess rekonstruiert werden konnten.

6.4.2 Klassengespräch Gesamtschule: Frau Fichtel

Der folgende Transkriptausschnitt stammt aus der Unterrichtsstunde U1 und deren Umsetzung in der Gesamtschule. Die Kinder sitzen auf ihren gewohnten Sitzplätzen (in U-Form[51]). Frau Fichtel, die unterrichtsleitende Lehrkraft, steht den Kindern frontal gegenüber vor der Tafel bzw. seitlich des Lehrertisches. Zusätzlich anwesend sind Romans Integrationshelferin sowie meine Person (als Kameraführung). Der Ausschnitt beginnt, wie auch in Kap. 6.4.1, mit dem Vorlesen von Roberts Verständnisproblem und schließt an die anderen Impulse der Geschichte (vgl. Anhang S. 267f) an.

69	Frau Fichtel	«die Klasse adressierend> Also nochmal. (.) Er sagt> (3) «vorlesend> Entweder kann ich bis dahin zählen, dann ist es nicht unendlich (.) oder;>
70	Kommentar	Die Lehrkraft scheint etwas an der Tafel zu demonstrieren. Dies ist jedoch aufgrund der Kameraperspektive nicht zu sehen.
71	Frau Fichtel	«vorlesend> Es ist unendlich, (.) dann kann ich nicht bis dahin zählen.>
72	Kommentar	Die Lehrkraft scheint erneut etwas an der Tafel zu demonstrieren. Dies ist jedoch aufgrund der Kameraperspektive nicht zu sehen.

51 vgl. Abb. 6.24 auf S. 163 für die Stellung der Tische - die Kinder stehen in dieser Abbildung anders, als im Sitzplan vorgeschrieben

73	Frau Fichtel	Steht hier, was der Teufel will?
74	Kommentar	Die nächsten fünf Sekunden spricht niemand aus der Klasse.
75	Frau Fichtel	Was meint er denn?
76	Kommentar	Die nächsten vier Sekunden spricht niemand.

Im obigen Ausschnitt ist erkennbar, dass Frau Fichtel versucht, die Kinder zum Beantworten der Frage, „was der Teufel will“ (Turn 73) animieren möchte. Die Kinder beteiligen sich nicht durch Meldungen am Unterrichtsgespräch, sodass Frau Fichtel ihre Frage mehrfach wiederholt (Turns 73, 75). Dass sie dabei zunächst auf *cold calls* verzichtet, kann eventuell als Versuch, eine polyadische Interaktionsstruktur für das Unterrichtsgespräch zu Grunde zu legen, interpretiert werden. Die Stille, die zwischen ihren Wortbeiträgen im Klassenraum herrscht (Turns 74, 76), ist m.E. ungewöhnlich für eine 'typische' fünfte Klasse und kann sowohl auf ein angestrengtes Nachdenken der Kinder als auch auf eine strikte Hierarchieordnung zwischen Lehrkraft und Schüler*innen gelesen werden.

77	Frau Fichtel	«die Klasse adressierend> Was meint der Teufel damit?> (.) «Gerd adressierend> °Gerd.°>
78	Gerd	°Also bei (2) Zahl=n (unverständlich, für etwa eine Sekunde) eins plus zehn kann man (ja bis zur) zehn rechnen (.) und bei └(unendlich kann ja bei der Zehn einfach) (unverständlich, für etwa 2.0 Sekunden) und immer so weiter.°┘
79	Kommentar	Etwas scharrt laut im Hintergrund.
80	Frau Fichtel	//mhm// (.) «Beatrice adressierend> Beatrice.>
81	Beatrice	Beim ersten Mal, also entweder kann ich (unverständlich, für etwa eine Sekunde). Damit meinte er, entweder er kann bis unendlich, weil unendlich is ja eine Zahl, aber unendlich ist wiederum auch so, dass es gar nicht aufhört mit den Zahl=n, quasi. (.) Od:er, also bei der zweiten (.) wen=sn nicht (3) (egal) ja.
82	Kommentar	Die nächsten vier Sekunden spricht niemand.
83	Frau Fichtel	«Klaus adressierend> Klaus guck mal nach vorn.> (.) «Tami adressierend> Tami.>
84	Tami	Er meinte damit, dass er; Entweder gibt es ein Ende und es ist nicht unendlich und dann hört, hört man irgendwann auf zu zählen, weil=s kein Ende gi-; also weil=s ein Ende gibt, oder es ist unendlich und man kann gar nich; also man kann irgendwann aufhör=n, aber das ist dann noch nicht das Ende (unverständlich, für etwa eine Sekunde), weil Zahl=n sind unendlich, weil man kann immer wieder ne Zahl oder ne Null ranhäng und dann is es unendlich.
85	Frau Fichtel	//mhm//
86	Tami	(Und dann kann man nicht zähl=n.)

Gerd meldet sich (aus Filmmaterial überprüfend übernommen, nicht im Transkript vermerkt) und Frau Fichtel ruft ihn auf (Turn 77). Dieser versucht, über sein Verständnis von Endlichkeit („kann man (ja bis zur) zehn rechnen“, Turn 78) als etwas Begrenztes seine Vorstellung zur Aussage, man könne „bis dahin“ (also bis zu einer Grenze) zählen, deutlich zu machen und bringt als Gegenbeispiel „und immer so weiter“ (Turn 78), dem er die Begrenzung scheinbar abspricht. Beatrice (nicht überprüfbar, ob dem eine Meldung voranging) wird von Frau Fichtel aufgerufen, nachdem diese inhaltlich nicht weiter auf Gerds Äußerung eingeht (Turn 80). Somit steuert Frau Fichtel die Antworten der Kinder auf einer vorrangig administrativen Ebene. Beatrice beginnt ihre Ausführungen in der ersten Person und führt sie in der dritten Person weiter, was für eine graduelle Distanzierung von der Aufgabe sprechen könnte (Turn 81). Ihr Turn kann inhaltlich in zwei Teile untergliedert werden: Im ersten Teil (bis „quasi“) versucht sie, den ersten Teil von Roberts Frage zu rekonstruieren. Hierbei bringt sie an, dass *unendlich* tatsächlich als Grenze verstanden werden kann (im Gegensatz zu Gerd in Turn 78): „Er kann bis unendlich, weil unendlich is ja eine Zahl“ (Turn 81). Hier wird unendlich von ihr eventuell als Punkt (bspw. auf einer Zahlengeraden) verstanden, was dem prozesshaften Verständnis des zweiten Teils ihrer Ausführungen entgegensteht: „Unendlich ist wiederum auch so, dass es gar nicht aufhört mit den Zahl=n“ (Turn 81). Bei dieser Aussage greift Beatrice eventuell auf ihr Alltagsverständnis von Unendlichkeit zurück. Im zweiten Teil von Beatrices Turn bricht sie ihre Argumentation ab. Die Formulierung „es ist nicht unendlich“ aus dem zweiten Teil der Aufgabenstellung wird von ihr nicht aufgegriffen.

Nachdem die Kinder auf Beatrices Turn nicht sofort reagieren (Turn 82), steuert Frau Fichtel administrativ und bricht die entstandene Stille, indem sie zunächst Klaus ermahnt und dann die sich (zeitgleich mit Gerd) meldende Tami aufruft (Turn 83). Diese traduziert zunächst die Aufgabenstellung parallel zu dem, was Robert sagt bis auf die Änderung, dass sie das „bis dahin zählen“ bei Robert mit „gibt es ein Ende“ ersetzt (Turn 84). Sie bezieht hier sogar explizierend (im Gegensatz zu Beatrice) die Aufgabenstellung mit ein. Ab dem „also“ versucht sie, mit eigenen Worten eine Begründung zu finden. Das „bis dahin zählen“ bzw. „gibt ein Ende“ wird nun zum „aufhören“; Tami setzt die praktische Umsetzung eines Zählprozesses in Bezug zum abstrakt-mathematische Konstrukt von Unendlichkeit („also man kann irgendwann aufhör=n, aber das ist dann noch nicht das Ende“, Turn 84). Die von ihr aufgemachte Bildungsvorschrift zur Bildung neuer Zahlen („man kann immer wieder ne Zahl oder ne Null ranhäng und dann is es unendlich“, Turn 84) auf symbolischer Ziffernebene ist ohne Vorbildung oder gefestigtes konzeptionelles Wissen erstaunlich.[52] Mit der Bildungsvorschrift begründet Tami, dass Zahlen unendlich sind (Turn 84). Frau Fichtel geht auf Tamis Beitrag inhaltlich nicht weiter ein („//mhm//“, Turn 85), was diese vermutlich als Aufforderung sieht, ihre Ausführungen nochmals zu begründen und auf die Aufgabenstellung zu beziehen („Und dann kann man nicht zähl=n“, Turn 86). In Tamis weiterer Begründung schafft sie durch das „man“ eine Distanzierung zur Aufgabe und unterstreicht so implizit die von ihr aufgemachte Allgemeingültigkeit ihrer Argumentation (Turn 86). Gerd meldet sich weiterhin (nicht im Transkript vermerkt).

52 Eine ähnliche Bildungsvorschrift findet sich auch in Samuels Argumentation aus der nächsten Unterrichtsstunde, U2, siehe Kap. 6.3 auf S. 162.

87	Frau Fichtel	Okay. «Beatrice adressierend> Beatrice.>
88	Beatrice	(.) Bei dem zweiten, wo das ist unendlich, stellt er sich glaub ich so vor, also dass Unendlich eine bestimmte Zahl ist, aber dann kann=s ja wie gesagt nicht unendlich sein.
89	Frau Fichtel	(.) //mhm//
90	Beatrice	Unendlich hat keine richtige (Formelzahl) denk ich.
91	Frau Fichtel	Okay. «Gerd adressierend> Gerd.>
92	Gerd	(Also) Unendlich ist keine natürliche Zahl; Eine natürliche Zahl ist Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun (.) ja. (.) (unverständlich, für etwa 2.0 Sekunden).
93	Frau Fichtel	°//mhm//°
94	Kommentar	Die nächsten zehn Sekunden spricht niemand.

Frau Fichtel geht abermals nicht inhaltlich auf Tamis Beitrag ein (Turn 87). Fraglich ist, ob Frau Fichtel eine inhaltliche Bewertung oder Weiterentwciklung an dieser Stelle aus administrativen Gründen nicht in Erwägung zieht oder ob die Diskrepanz zwischen ihrer Fachlichkeit und der Fachlichkeit der Kinder sie an dieser Stelle an einem inhaltlichen Eingreifen hindert bzw. überfordert. Obwohl Gerd sich meldet, wird nun Beatrice aufgerufen (ob sie sich meldet, ist aufgrund der Kamerastellung nicht überprüfbar). Beatrice führt nun vermutlich den noch ausbleibenden zweiten Teil, bei dem sie in Turn 81 abbricht, in Turn 88 weiter aus. Inhaltlich versucht sie nun, etwas enger zu argumentieren und stellt durch eine *reductio ad absurdum* fest, dass wenn „Unendlich eine bestimmte Zahl" wäre, es „nicht unendlich sein" könnte (Turn 88). Dabei bezieht sie sich nicht auf Tami, sondern führt ihren Gedankengang aus Turn 81 weiter aus. Die Kinder führen an dieser Stelle mehrere d-Interaktionen mit der Lehrkraft, die diese Aussagen inhaltlich nicht zusammenführt und in einen ko-konstruktiven Interaktionsprozess emergieren lässt, sondern durch minimale Beteiligung diese d-Interaktionen weiter unterstützt. Auch in Turn 89 kommt lediglich eine kurze Interjektion durch Frau Fichtel, was wiederum (wie vorab in der Interaktion mit Tami) Beatrice dazu bewegt, ihre Argumentation weiter auszuführen (Turn 90). Hierbei wechselt Beatrice nun auf eine andere Ebene, die nicht mehr so nah an der ursprünglichen Argumentation ist. Sie benutzt nicht mehr lediglich das Wort *Zahl*, sondern „Formelzahl" (Turn 90). Zur Verwendung von „Formelzahl" gibt es mehrere Deutungsalternativen:

- Beatrice denkt, alle Zahlen haben eine „Formelzahl".
- Besondere Zahlen wie beispielsweise π haben „Formelzahlen".
- Beatrice bezieht sich auf die symbolische Darstellung einer Zahl über Ziffern.

In allen Fällen konstatiert sie, dass *unendlich* nicht als Zahl darstellbar ist, eventuell um auszudrücken, dass die Existenz einer solchen Zahl an die Möglichkeit ihrer Darstellung geknüpft ist. Somit stützt sie ihre Argumentation aus Turn 88. Interessant an dieser Stelle ist, dass sie „hat" statt bspw. „ist" verwendet - das könnte dafür sprechen, dass Beatrice allen für sie *bestimmten/ bestimmbaren* Zahlen beimisst, die Eigenschaft *muss eine Formelzahl haben, die die Zahl darstellen kann* zu besitzen.

Auch auf diesen Nachschub von Beatrice geht Frau Fichtel inhaltlich nicht weiter ein und ruft den sich seit Turn 83 meldenden Gerd auf (Turn 91). An dieser

Stelle erfolgt zum ersten Mal seit Anfang des Ausschnitts eine p-Interaktion, denn Gerd wird zwar von Frau Fichtel aufgerufen, interagiert aber implizit mit Beatrice, indem er ihre *reductio ad absurdum* weiter inhaltlich stützt (Turn 92). Er nimmt $\mathbb{N}$ als repräsentatives Beispiel für alles, was zählbar bzw. bezifferbar ist und schließt ∞ aufgrund dieser fehlenden Eigenschaft aus der Menge der natürlichen Zahlen aus. Dabei lässt sich vermuten, dass Gerd eine eher punktuelle Vorstellung von Unendlichkeit hat (also nichts prozesshaftes, sondern wie bei Beatrice in Turn 81 als ein Punkt auf der Zahlengeraden), welche eventuell durch das *soweit zählen* aus der Aufgabenstellung angeregt wurde. Auch auf Gerds Einschub geht Frau Fichtel nicht ein, sondern reagiert mit einer Interjektion (Turn 93). Auf diese erste inhaltliche Verzahnung der Antworten der Kinder folgt zunächst Stille, den Anschein eines interaktionalen Gleichflusses erzeugend (Turn 94). Samuel und Franziskus melden sich.

95	Frau Fichtel	«betont vorlesend> Der Zahl=nteufel sagt, wenn du bei 5 Millionen und so weiter angekommen bist, zählst du einfach weiter. Das geht nämlich immer. (2) Und T Tom sagt; Hast du das schon ausprobiert? (.) Und seine Antwort nein, hab ich nicht. Erstens würde es zu lange dauern und zweitens ist das überflüssig. (.) De:nn (.) entweder kann ich (.) bis dahin, also bis zum Ende zählen, (.) dann ist es nicht unendlich (.) o:der (.) es ist unendlich, denn dann kann ich nicht bis dahin zählen. (.) «Samuel adressierend> Samuel.>
96	Samuel	(unverständlich, für etwa 2.0 Sekunden) erzählt, dass man Unendlichkeit plus rechnen kann. Unendlichkeit plus Unendlichkeit.
97	Kommentar	Es bricht kurz eine Diskussion in der Klasse aus. Es ist jedoch nicht auszumachen, man genau gesprochen wird und wer redet.
98	Frau Fichtel	Was hat er damit gemeint?
99	Samuel	(.) Dass; (.) Da gings glaub ich um hohe Zahl=n.
100	Frau Fichtel	//mhm//
101	Samuel	Und da hat er erzählt, dass man (.) Unendlichkeit (.) Unendlichkeit plus Unendlichkeit auch rechnen kann. Aber, dass (unverständlich, für etwa 1.0 Sekunden).
102	Frau Fichtel	//mhm// Und was ist das dann?
103	Kommentar	Einige Schüler*innen antworten gleichzeitig. Es ist nicht auszumachen, wer spricht und was gesagt wird.
104	Frau Fichtel	Wie bitte?
105	Samuel	Und dann ist es zwei unend-; Zweimal Unendlichkeit (unverständlich, für etwa eine Sekunde).
106	S?	Aber Unendlichkeit
107	Kommentar	Einige Schüler:innen reden durcheinander. Es ist nicht auszumachen, wer spricht und was gesagt wird.

Frau Fichtel bricht die Stille mit einem erneuten Vorlesen des Abschnittes der Geschichte, der für die Aufgabenstellung relevant war (Turn 95). Obwohl Gerds und Beatrices Beiträge der Turns 88, 90 und 92 viel Anlass für interaktionale Verdichtungen geschaffen hätten, verfährt Frau Fichtel hier eventuell nach einem ihr bekannten Muster und stellt dieselbe Frage nochmals. Es ist fraglich, ob sie dies aus rein administrativen Gründen tut (um die Stille zu brechen, neuen Kindern eine „Bühne" bieten zu können) oder ob sie der Meinung ist, dass die Aufgabenstellung noch nicht erfüllt ist - immerhin hat bislang keines der Kinder sich auf den Zahlenteufel bezogen oder expliziert, Robert helfen zu wollen. Auch fraglich ist, warum sie nicht ohne ein weiteres Vorlesen zunächst Samuel oder Franziskus ermöglicht, auf Gerds oder Beatrices Beitrag einzugehen. Samuel wird nach dem Vorlesen von Frau Fichtel aufgerufen.

Samuel verweist auf eine Person, die die anderen Kinder scheinbar kennen (sonst wäre der unverständliche Teil vermutlich länger und würde ausführen, welche Rolle die Person in Samuels Leben spielt - oder er bezieht sich konkret auf ein Familienmitglied, bei dem die Rolle in seinem Leben klar ist) (Turn 96). Es kann vermutet werden, dass Samuel im unverständlichen Teil den Mathematiklehrer der Klasse adressiert. Er bewegt sich nun jedenfalls argumentativ nicht mehr im Bereich eines Zählprozesses, sondern bezieht das Rechnen mit ein. Fraglich ist, welchen Beitrag er damit zum Diskurs liefern möchte. Zweierlei Möglichkeiten bzw. Lesarten bieten sich hier:

- Samuel benutzt das Rechnen als Argument dafür, dass unendlich bzw. Unendlichkeit eine Zahl sein muss (da man mit Zahlen rechnen kann).
- Samuel benutzt die Addition in ihrer Grundvorstellung als Erweiterung und möchte mit seinem Beispiel deutlich machen, dass Unendlichkeit nichts punktuelles auf einer Zahlengeraden ist, sondern prinzipiell auch immer weiter erweiterbar.

Interessant an Samuels Ausführung ist auch, dass er hier nicht mehr von *unendlich* spricht, sondern von *Unendlichkeit* (Turn 96). Somit wird das Prozesshafte, das über das Adjektiv unendlich ausgedrückt werden kann, zu einem Konzept (Unendlichkeit). Aus einer Eigenschaft wird etwas festes, konzeptuelles. Samuels Beitrag scheint in der Klasse eine Interaktion unter Peers ausgelöst zu haben (Turn 97), was zum Einen dafür sprechen könnte, dass die Kinder sich an ihren Mathematikunterricht zurückerinnern und Samuel entweder korrigieren oder zusprechen und zum anderen könnte es einen Übergang der restlichen Kinder aus der eventuell anzunehmenden *Bystander*-Rolle hin zu *aufmerksamen Zuhörer*innen* bedeuten. Frau Fichtel begegnet der aufkommenden Diskussion mit einer inhaltlichen Rückfrage an Samuel, die auch die administrative Wirkung der Rückführung in die d-Interaktion Samuel-Frau Fichtel hat (Turn 98). Des Weiteren ist ihre Frage möglicherweise ein impliziter Appell an Samuel, seinen Einschub aus Turn 96 inhaltlich mit der Aufgabenstellung zu verbinden bzw. weiter auszuführen.

Samuel antwortet mit Bezug auf die eventuelle Mathestunde. Fraglich ist, ob er nun aus Unendlichkeit die Assoziation zu hohen Zahlen selbst konstruiert oder ob er lediglich beschreibt, was aus seiner Erinnerung heraus im Mathematikunterricht passiert ist (Turn 99). Auch fraglich ist, ob Samuel diesen Inhalt richtig rekonstruiert (siehe die ausgebrochene Diskussion in Turn 97). Frau Fichtel reagiert inhaltlich nicht darauf (Turn 100). Ob die Turnabfolge Samuel-Frau Fichtel in den Turns 99 und 100 zum inhaltlichen Vorankommen des Diskurses beiträgt, bleibt offen. Auch bleibt offen, ob Samuel im folgenden Turn 101 seine Ausführungen aus Turn 96 wiederholt oder ob er weiteren Kontext zur erlebten Mathematikstunde darbieten möchte. Frau Fichtel fragt nun inhaltlich nach (102), was denn Unendlichkeit plus Unendlichkeit sei. Die folgende Antwort mehrerer Schüler*innen ist nicht transkribierbar, dass sie aber gleichzeitig antworten spricht für ihren Status als *aufmerksame Zuhörer*innen* und dafür, dass die d-Interaktion zwischen Frau Fichtel und Samuel an dieser Stelle von den Peers eigenständig unterbrochen wird (Turn 103). Eventuell haben die antwortenden Schüler*innen auch Assoziationen zu der erlebten Mathematikstunde, möchten die geteilte Erinnerung beschreiben, haben Klärungsbedarf oder sehen sogar einen Widerspruch des Rechnens mit Unendlichkeit in Bezug zur Nicht-Zählbarkeit.

Frau Fichtel hat, wie auch die Transkribierende, die Aussagen der Kinder akustisch nicht verstanden und fragt nach (Turn 104). Samuel versteht diese Nachfrage als an ihn gerichtet und baut mit seinem Wortbeitrag nun die Struktur der d-Interaktion zwischen ihm und Frau Fichtel wieder auf (Turn 105). Er unterbricht den ersten Teil seiner Ausführungen, möglicherweise wollte er „zwei unend[lich]“ als Ergebnis präsentieren, was nicht zu seinem Einschub aus Turn 96 gepasst hätte. Er bildet in Turn 105 eine Analogie zwischen der Addition der natürlichen Zahlen, die in wiederholter Ausführung die Rechenoperation Multiplikation hervorbringt und präsentiert als Ergebnis „Zweimal Unendlichkeit“ (Turn 105). Seine Assoziation ist also vermutlich doch bei den „hohe[n] Zahl=n“ (Turn 99), oder er gibt das vom Mathelehrer präsentierte Ergebnis aus der Unterrichtsstunde wieder, an die er sich erinnert. Gegen letztere Interpretation könnte sprechen, dass ein*e nicht identifizierbare Schüler*in in Turn 106 direkt anschließend mit „Aber Unendlichkeit“ eventuell markiert, dass, ausgehend von Samuels Sprechweise, das korrekte Ergebnis „Unendlichkeit“ wäre (Turn 106). Die Turns 105 und 106 scheinen abermals einen kleinen Tumult in der Klasse ausgelöst zu haben (Turn 107), eventuell als kollektiver Versuch der Erinnerung an die Erläuterung des Mathematiklehrers und/ oder als Zeichen einer kognitiven Aktivierung.

108	Frau Fichtel	└Okay.┘
109	Beatrice	└(Man müsste eigentlich) erstmal wissen, was Unendlich für ne Zahl ist.┘
110	Frau Fichtel	└So. «Franziskus adressierend> Franziskus.>┘
111	Franziskus	└(Herr Lehrer) hat aber auch gesagt, is daz halt wo man┘ hinzähl=n kann, is eine natürliche Zahl, aber wo man nicht hinzähl=n kann, zum Beispiel Unendlich, is keine natürliche Zahl.
112	Frau Fichtel	└«die Klasse adressierend> p::sch.>┘
113	Frau Fichtel	(2) Aha. (2) °Okay.°
114	Beatrice	Wenn man sich die Sätze mehrmals durchliest merkt man, dass es eigentlich die gleichen sind, bloß in ner anderen Satzform.
115	S?	(2) Was?
116	Frau Fichtel	«Beatrice adressierend> Warum denkst du, das hat den äh is is, ä hat den gleichen Sinn?>

117	Beatrice	«antwortend> Na es steht ja (.) auf beiden (.) Seiten der Tafel, denke ich jetzt zu mindestens, dass man bis Unendlich zähl=n kann, aber dann ist es nicht unendlich oder man kann es nicht bis dahin geh=n.
118	Frau Fichtel	//mhm// //mhm//

Frau Fichtel bricht die entstandene Unruhe mit einer kurzen Wortmeldung, in welcher sie die sich meldende Beatrice aufruft (Turn 108). Gleichzeitig dazu fängt Beatrice mit ihrem Beitrag an (Turn 109). In Turn 90 betonte Beatrice noch, dass unendlich *keine* Zahl sei, nun stellt sie die Frage in den Raum, *was* es für eine Zahl sei. Dabei meint sie mit „unendlich“ eventuell auch Unendlichkeit als Objekt, andererseits benutzt sie ja den prozesshafteren Begriff unendlich, was den Status als Zahl logisch ausschließen könnte. Vielleicht ist Beatrice durch Samuel zurück zur Idee von Unendlichkeit als Zahl gekommen, oder sie greift seine Ausführungen wie eine Art Gedankenspiel auf, um dann ein Widerspruchsargument daraus formulieren zu können (in etwa so: „Müsste man denn für zweimal Unendlich nicht erst einmal wissen, was das für eine Zahl ist?“). Frau Fichtel geht weder auf Beatrices Frage ein, noch gibt sie die Frage weiter ins Plenum für alle (Turn 110). Stattdessen ruft sie nun Franziskus auf.

Franziskus rekapituliert nun auch einen Inhalt des erlebten Mathematikunterrichts (was die Deutung der vorherigen Turns stützt) und führt die Lehrkraft sogar explizit im Sinne einer Wissensautorität an (argumentum ad verecundiam). Er ist nun nicht mehr bei der von Beatrice angeregten Begriffsklärung, sondern geht wieder auf das in der Aufgabenstellung angeregte Zählen ein (Turn 111). Scheinbar hat er damit die Argumentation einen Schritt zurück geführt, der begriffsanalytische Anstoß Beatrices’ wird in seiner Äußerung nicht beachtet. Frau Fichtel ermahnt die Kinder (Turn 112) und geht auch auf Franziskus inhaltlich nicht weiter ein („Aha. (2)°Okay.°“, Turn 113). Beatrice beteiligt sich abermals am Gespräch (Turn 114). Erstaunlich an dieser Stelle ist, dass sie ihre Aufforderung der Begriffsklärung nicht erneut vorträgt, sondern nun eher eine sprachanalytische Aussage trifft (Turn 114). Sie konstatiert, dass der zweite Teil der Aufgabenstellung lediglich eine andere Formulierung des ersten Teils ist und setzt beide Teilaussagen inhaltlich gleich. Die Kinder gehen seit Turn 108 nicht mehr aufeinander ein, ein interaktionaler Gleichfluss ist anhand dieses Ausschnitts klar ersichtlich.

Anschließend an Beatrices Beitrag stellt Frau Fichtel erstmals eine inhaltliche Nachfrage und sorgt damit für die Weiterentwicklung von Beatrices Argumentation (Turn 116). Allerdings paraphrasiert sie Beatrices Aussage so, dass dieser nun unterstellt wird, sie hätte in beiden Aussagen „den gleichen Sinn“ (Turn 116) gefunden. Ihre Nachfrage wirkt überrascht, so als könne sie den von Beatrice formulierten Inhalt zunächst nicht begreifen (dies zeigt sich vor allem durch die Suche nach einer geeigneten Formulierung, „das hat den äh is is, äh hat“, Turn 116). Eventuell durch Frau Fichtels Traduktion oder die von ihr ausgehende Unsicherheit geprägt antwortet Beatrice nun unsicherer („denke ich jetz zu mindestens“, Turn 117). An Beatrices Antwort in Turn 117 kann man ein gutes Verständnis von Logik erkennen, auch reflektiert sie möglicherweise über die Vorläufigkeit ihres Denkens (oder ist unsicher, siehe oben). Die Diskussion ist mit Beatrices Beitrag nun fast wieder am Anfang angekommen, es ist möglich dass sie in Turn 117 den Turn 81 wieder aufnehmen möchte. In ihrer Formulierung in 117 ist wieder eine punktartige

Vorstellung von Unendlichkeit erkennbar („bis Unendlich“, Turn 117). Insgesamt folgt auch hier keine interaktionale Verdichtung, die d-Interaktion zwischen Frau Fichtel und ausgewählten Schüler*innen bleibt bestehen.

7. Argumentationsprozesse im philosophischen Gespräch

Was erwartet Sie in diesem Kapitel?

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse komparativer Analysen des Datenmaterials und/oder der Rekonstruktionen vorgestellt. Zunächst wird eine wiederkehrende Turnabfolge vorgestellt und mit Beispielszenen belegt. Anschließend werden Ermöglichungs- und Erschwerungsgrundlagen für interaktionale Verdichtungen im Lehrkraft-Schüler*innen-Dialog angegeben und ebenso mit Beispielszenen belegt. Es erfolgt eine Trennung zwischen inhaltlichem und administrativem Eingreifen der Lehrkraft. Im Anschluss an diese Betrachtung folgt eine Beschreibung der in den Argumentationen der Kinder aufgetretenen Phänomene sowie eine Vorstellung der in den Argumentationen der Kinder prominenten Charakteristika. Abschließend werden inhaltliche Aspekte des Konzepts Unendlichkeit, kategorisiert nach Wortarten und der Trennung in Objekt und Prozess, vorgestellt.

Und warum ist das wichtig für die Arbeit?

Die Ergebnisdarstellung und auch kurze Interpretation ist zentral für diese Arbeit. Darüber hinaus wird die Relevanz des folgenden Kapitels nicht begründet.

7.1 Interaktionsmuster zwischen Lehrkräften und Schüler*innen

Mit Hilfe komparativer Vergleiche im Datenmaterial konnte eine wiederkehrende Turnabfolge identifiziert werden. Das im Folgenden präsentierte Interaktionsmuster emergierte in verschiedenen Szenen mit verschiedenen Turnabfolgen, die in der schematischen Darstellung (Abb. 7.1) nachvollziehbar sind. Nach Präsentation der Turnabfolgen und der schematischen Darstellung werden Beispielszenen anhand des Musters analysiert und vorgestellt. Dabei wird bei einigen Beispielszenen auf die bereits rekonstruierten Deutungsaushandlungen verwiesen (mit Angabe der entsprechenden Seitenzahl). In Anschluss an die auf das Muster bezogene Analyse erfolgt eine kurze Begründung zum Vorliegen einer interaktionalen Verdichtung bzw. eines interaktionalen Gleichflusses anhand der Dimensionen von Krummheuer (2004, S. 116f, vgl. auch Kap. 5.2.1 auf S. 110). Dabei wird die Dimension der *Emergenz einer musterhaften Interaktionsstruktur* nicht berücksichtigt, weil diese schon durch das im Folgenden vorgestellte Interaktionsmuster als erfüllt angenommen wird.

1. Ein*e Schüler*in beteiligt sich inhaltlich am Unterrichtsgespräch.
2. Die Lehrkraft interpretiert das Gesagte anders, als vom Kind intendiert und expliziert nicht transparent, wie das Gesagte von ihr*ihm verstanden wird, sondern stellt inhaltlich vermeintlich unpassende Anschlussfragen oder steuert das Gespräch administrativ aufgrund der anderen Interpretation.
3. Nun können zwei Schüler*innen-Reaktionen auftreten:
    a) Der*die Schüler*in rephrasiert das von ihm*ihr Gesagte und schafft somit eine Verstehensgrundlage bei der Lehrkraft.
        i. Die Lehrkraft hat durch die Explikation den Gehalt der Aussage aus Schritt 1 verstanden und sorgt für ein inhaltliches Vorankommen mit Hilfe der „richtigen“ Interpretation.
        →interaktionale Verdichtung
        ii. Aufgrund der neuen Explikation kommt es zum Austausch auf Peer-Ebene, die Lehrkraft steuert weder inhaltlich noch administrativ.
        →interaktionale Verdichtung
        iii. Die Lehrkraft besteht auf der Interpretation aus Schritt 2; nun schließt sich entweder wie ein circulus vitiosus Schritt 3.a) an, oder direkt Schritt 3.b).
    b) Der*die Schüler*in beteiligt sich im Folgenden nicht weiter, sondern nimmt die Steuerung durch die Lehrkraft an, der ko-konstruktive Diskussionsprozess exkludiert die Idee des Kindes aus Schritt 1
    →interaktionaler Gleichfluss

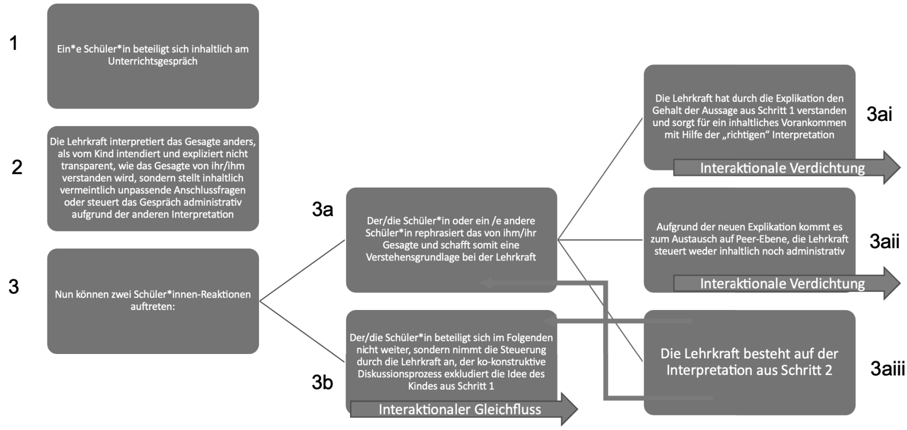


Abbildung 7.1: Graphische Darstellung von Interaktionsmuster 1, erstellt mit Powerpoint

7.1.1 Beispielszene 1: Herr Bämpfer, Rosa und Frau Ellestar

Die im Folgenden anhand des Interaktionsmusters analysierte Szene aus der Pro-Contra-Debatte an der Grundschule kann in ihren Bedeutungsaushandlungen auf S. 160 nachvollzogen werden. In Turn 186 trifft Rosa die Aussage: „Denn man kann kein Punkt setzen [holt Luft] wie zum Beispiel wir Menschen, es sind nur noch- es sind zwei Menschen dann kommt trotzdem nochn Baby und immer so wei::ter?“. Diese Aussage wäre der erste Schritt (1.) im Interaktionsmuster. Herr Bämpfer versteht Rosas genuin zum Thema Unendlichkeit passende Aussage nicht und geht inhaltlich nicht auf sie ein (Turn 187). Dies wäre der zweite Schritt (2.) im Muster. Den dritten Turn bilden zwei zeitlich auseinander liegende Turns Rosas. Zum einen wehrt sie sich explizit gegen das Missverstehen durch Herrn Bämpfer („Also=s ist doch so“, Turn 188). Zum anderen stellt sie die Bedeutung ihrer Aussage aus Turn 186 in Turn 207 richtig (Schritt 3a) und wird daraufhin von Frau Ellestar in Turn 208 auch so verstanden, was sie zu einer weiteren Ausführung ihrer Argumentation und einer interaktionalen Verdichtung führt. Man kann die ersten zwei Schrittabfolgen des Musters auch in Turn 202 (Rosa) und Turn 203 (Herr Bämpfer) lesen.

Warum folgt hier eine interaktionale Verdichtung?

Die in der Beispielszene folgenden Turns erfüllen die Dimensionen einer interaktionalen Verdichtung aus folgenden Gründen: Zum einen folgen *umfangreiche Argumentationen* auf Rosas Turn 207, auch wenn diese von ihr allein vollzogen werden (Dimensionsanteil „kollektiv“ nicht erfüllt). Man kann die Turnabfolge 204ff aber als kollektive Argumentation auffassen, die in 207 und 209 von Rosa aufgegriffen wird - in Turn 209 greift Rosa sogar explizit auf Nadjas Ausführungen zurück. Des Weiteren ist hier fraglich, ob ohne den Abbruch der Debatte durch Herrn Bämpfer (Turn 210, siehe Transkriptionsbuch) eine Beteiligung weiterer Schüler*innen zu einer kollektiven Argumentation geführt hätte. Dass Rosa trotz der Ermahnung durch Herrn Bämpfer in Turn 203 ihr „Thema“ (Herr Bämpfer, Turn 203) wieder aufgreift, spricht für einen *flexiblen Autonomiegrad* bei der ihr eingeräumten *Partizipationsmöglichkeit*. Die Beteiligung Nadjas aus dem Status der *aufmerksamen Zuhörerin* heraus (Turns 204, 206) spricht dafür, dass auch nicht-tätigen Schüler*innen *Partizipationsmöglichkeiten* eingeräumt werden.

7.1.2 Beispielszene 2: Frau Fichtel und Tami

Die folgende Szene wird hier als Transkript aufgeführt, da sie nicht Bestandteil der Rekonstruktionen war.

16	Frau Fichtel	°@(2)@° «Tami adressierend> Tami.>
17	Tami	Wenn man ne Eins hat und die dann nochmal plus Eins rechnet, also Eins plus Eins, dann entsteht ja ne neue Zahl; Zwei und wenn man die dann wieder plus Eins rechnet, dann Drei und immer so weiter und dann hat man ja auch andere Zahl=n.
18	Frau Fichtel	//mhm//
19	Tami	Aus der Eins (entwickelt).
20	Frau Fichtel	Okay. (.) «Klasse adressierend> Noch jemand ne Idee, was man mit der Eins alles mach=n kann?> (3) //mhm//
[...]		
49	Frau Fichtel	«die Klasse adressierend> Mit der Eins kannst du fast alles machen. (.) Wenn dir also große Zahlen Angst machen, sagen wir ma:l die 5.723.812, dann fang es so an. (3) und so, mach so lange weiter, bis du bei 5 Millionen und so weiter angekommen n bist. (.) Was heißt das also?> «Nino adressierend> Nino.>
50	Nino	Dass man erst bei kleinen Zahl=n anfangen soll und bei großen da:nn ankommt?
51	Frau Fichtel	//mhm// (.) Okay.
52	Kommentar	Die nächsten drei Sekunden spricht niemand.
53	Gerd	Ähm der °ähm also ich wollte noch was sagen zu den; Fast alles, ich weiß (unverständlich, für etwa 2.0 Sekunden) mit der Eins und zwar kann man damit nicht richtig mal rechnen. (.) (Weil) man kann nicht ein- (.) ähm ne, (.) zwei mal eins ist zwei und bei zwei mal zwei is es ja vier. (.) Also mit der Eins geht's langsamer.°
54	Frau Fichtel	(2) //mhm// Okay. (.) Ja. (Ist n) guter Gedanke.
55	Kommentar	Die nächsten vier Sekunden spricht weitestgehend niemand. Es ist nur leises, vereinzeltes Getuschel zu hören.
56	Frau Fichtel	«Gina adressierend> Gina überleg mal, was is=n da:mit gemeint?>
57	Gina	(.) //mhm// eigentlich brauch man nur immer weiter höher zähl=n, weil eins plus eins sind ja zwei und dann geht das immer so weiter; Da brauch man ja nur eins, zwei, drei vier.
58	Kommentar	Die nächsten fünf Sekunden spricht niemand.
59	Frau Fichtel	//mhm// (2) «Cody adressierend> Cody.>

60	Cody	Das Ergebnis wird also immer höher. Also umso mehr Einsen umso höher die Zahl=n?
61	Frau Fichtel	Aha, okay. «Tami adressierend> Tami.>
62	Tami	Ähm aus einer Eins kann man zwei Einsen und nochmal mehr halt wer=n, dass man zu der großen Zahl kommt.
63	Frau Fichtel	//mhm// (.) «Beatrice adressierend> Beatrice.>
64	Beatrice	Das is wie ne Rechenpyramide und man, dass eigentlich (n guter Rechenweg), weil da sieht man quasi da oben; Die Eins ist ein mal eins is ja eins, dann kommt zwei Einsen, dann is es zwei mal eins, is halt zwei und immer so weiter.
65	Frau Fichtel	(.) //mhm// okay.
66	Kommentar	Die nächsten vier Sekunden spricht niemand.

Tami bietet in Turn 17 ihre Formulierung für das Bilden von Zahlen über Addition der 1 an. So, wie Turn 17 gedeutet werden kann, spricht sie an, dass über den Nachfolger *alle* natürlichen Zahlen gebildet werden können. Diese Aussage stellt den ersten Schritt im Interaktionsmuster dar (1.). Als zweiten Schritt reagiert Frau Fichtel inhaltlich nicht auf Tami (Turn 18, Schritt 2). Es bleibt hier offen, ob Frau Fichtel Tami nicht versteht, falsch interpretiert oder Turn 18 als Bestätigung gelesen werden kann. Tami versucht weiter zu explizieren (Turn 19, Schritt 3a). Daraufhin geht Frau Fichtel wieder nicht auf Tamis Beitrag ein, sondern markiert die Frage implizit als nicht beantwortet („Noch jemand ne Idee, was man mit der Eins alles mach=n kann?“, Turn 20, Schritt 3aiii). Im Folgenden beteiligt sich Tami zunächst nicht mehr am Unterrichtsgespräch (Schritt 3b), während ein interaktionaler Gleichfluss im Unterrichtsgespräch emergiert (siehe auch Turn 49f). In Turn 49 stellt nun Frau Fichtel die Frage, die Tami zuvor bereits in Turn 17 beantwortet hatte. Tami beteiligt sich nicht sofort (ist weiterhin exkludiert) und in den Turns 51-60 kommt es zu keiner interaktionalen Verdichtung, sondern einzelne Schüler*innen geben, ohne Bezug aufeinander zu nehmen, ihre Antworten auf Frau Fichtels Frage (aus Turn 49). Dass Tami nun nicht darauf hinweist, dass sie eben jene Frage schon vorab beantwortet hatte, könnte aus zweierlei Gründen auftreten. Zum einen könnte sie sich weiterhin exkludiert fühlen, da sowohl ihre Idee als auch ihre weitere Ausführung (in Turn 19) nicht von der Lehrkraft aufgegriffen werden. Zum anderen könnte sie den Eindruck bekommen haben, ihre erste Idee sei nicht die Antwort auf die eben gestellte Frage (Turn 49), mit dem impliziten Gedanken, dass die Lehrkraft wohl auf sie und ihre Idee verwiesen hätte, wenn die Idee bereits richtig gewesen wäre. Somit hält sich Tami bis Turn 62 zurück. In Turn 62 erläutert sie dann ihre Idee nochmals (anders paraphrasiert), was erneut nicht inhaltlich aufgegriffen wird (Schritte 1 (Turn 62) und 2 (Turn 63) des Interaktionsmusters). Wie in Turn 20 ruft Frau Fichtel direkt nach Tamis Aussage ein anderes Kind auf (Turn 63). Diesmal bemüht sich Tami nicht um eine inhaltliche Klärung ihrer Idee, sondern beteiligt sich direkt nicht mehr weiter (Schritt 3b). Nach Beatrice beteiligen sich auch andere Schüler*innen nicht mehr, sodass Frau Fichtel die nächste Frage in den Raum bringt (Turn 67, siehe Transkriptionsbuch) und das Thema somit implizit für abgeschlossen erklärt, obwohl die Antworten der Schüler*innen weder aufeinander bezogen noch inhaltlich ko-konstruktiv für die Beantwortung der vorherigen Frage waren. Es wird ein interaktionaler Gleichfluss erkennbar.

Warum folgt hier ein interaktionaler Gleichfluss?
Tami präsentiert hier *einen (!) Schluss*, der nicht weiter *legitimiert* wird (weder durch die Lehrkraft noch durch andere Schüler*innen, Turn 16ff). Die tätig werdenden Schüler*innen partzipieren fast *ohne Autonomie* aufgrund von *Cold Calls* und auch ihre Schlüsse/ Ideen werden weder legitimiert noch weiter aufgegriffen (siehe oben). Es emergiert das Interaktionsmuster *Lehrkraft - Meldung bzw. Cold Call - Schüler*innenantwort* mit starren Rollenzuweisungen, eine Partzipation ohne vorheriges Aufrufen oder ein Aufeinander-Eingehen bei den Schlüssen ist nicht ersichtlich.

7.1.3 Beispielszene 3: Frau Fichtel und Beatrice

Die im Folgenden auf das Interaktionsmuster bezogene Szene wurde in ihren Bedeutungsaushandlungen bereits ab S. 203 (dieser Arbeit) im Rahmen des Rekonstruktionskapitels 6.16 rekonstruiert.

Frau Fichtel ruft die sich meldende Beatrice auf, diese stellt eine Frage in den Raum (Turn 109), die auch als inhaltliches Statement deutbar ist (Schritt 1 des Interaktionsmusters). Frau Fichtel versteht Beatrices Frage vermutlich nicht als für das inhaltliche Vorankommen intendiert und ruft direkt den nächsten Schüler, Franziskus, auf (Turn 110, Schritt 2 des Interaktionsmusters). Daraufhin beteiligt sich Beatrice vorerst nicht (Schritt 3b, Turns 111-113) und anschließend weist sie nicht nochmals auf ihre Frage hin, sondern macht eine sprachanalytische Aussage zur Aufgabenstellung (Turn 114), bei welcher sie weder auf Franziskus (Turn 111) noch auf ihre Frage in Turn 109 Bezug nimmt. Auch hier scheint die Gruppe voneinander losgelöst und auf die (sich inhaltlich nicht beteiligende) Lehrkraft fixiert zu sein. Auf die Interaktion von Frau Fichtel und Beatrice (Turns 109, 110) folgt ein interaktionaler Gleichfluss.
Warum folgt hier ein interaktionaler Gleichfluss?
Auch hier besteht, wie in Beispielszene 2, Beatrices Argumentation aus *einem* Schluss (Turn 109), der weder von der Lehrkraft legitimiert noch von anderen Schüler*innen argumentativ aufgegriffen wird (obwohl Beatrice vermutlich auf Samuel zurückgreift). Anhand der unzusammenhängenden Wortbeiträge der in den folgenden Turns partizipierenden Kinder kann darauf geschlossen werden, dass die nicht-tätigen Schüler*innen während Beatrices Beitrag zu diesem eher einen *diffusen bzw. geringen Aufmerksamkeitsgrad* hatten. Dass Beatrice ihre Frage bzw. ihren Einwand aus Turn 109 nicht verteidigt oder nochmals zur Klärung in den Raum stellt, spricht für einen *geringen Autonomiegrad der tätig werdenden Schüler*innen* innerhalb der Interaktion.

7.1.4 Beispielszene 4: Herr Bämpfer und Rosa

Die hier beschriebene Interaktion zwischen Rosa, Herrn Bämpfer und anderen Kindern (Nadja, Karl) stammt aus der Pro-Contra-Debatte in der Grundschule (Kap. 6.2) und kann ab S. 139 nachvollzogen werden (vgl. auch Abb. 6.15 auf S. 140 für die Rekonstruktion von Rosas Argument als Toulmin-Schema).

Rosa beteiligt sich in Turn 55 (Schritt 1) insofern inhaltlich an der Debatte, dass sie mit einem skeptizistischen Argument die Loslösung von der Realität auf eine andere Abstraktionsebene anstoßen möchte. Herr Bämpfer versteht Rosas Argument eher als destruktiv für den kollektiven Erkenntnisgewinn und kontert mit historischen Fakten (Turns 62, 65, 67, Schritt 2). Rosa stellt richtig, dass es ihr um eine Lösung von der Realität ging („es jetzt nicht aus Wirklichkeit", Turn 75). Sie führt anschließend aus, was sie unter der Voraannahme, nicht an die Realität gebunden zu sein, weiterentwickeln könnte (Turns 81, 91, Schritt 3a). Aufgrund von Rosas Anstoß kommt es zu einem Austausch auf Peer-Ebene, auch Nadine (Turn 107) und Nadja (Turn 119) greifen nun auf von der Realität losgelöste Vorstellungen (insbesondere die einer anderen Zukunft) zurück („Aber halt zur Zukunft, könnte es halt noch sone Zahl geben die heißt @unendlich@ [...]", Nadine, Turn 107 und „Es wirds- (.) ja auch n::noch me::hr Zah::hln gebn?[...]", Nadja, Turn 119). Auch Karl steigt in diese Interaktion mit ein (Turns 131, 133) und es entwickelt sich eine Interaktion auf Peer-Ebene, bei der sich die Kinder intensiv mit den gegenseitig vorgebrachten Argumenten auseinandersetzen (vgl. hierzu auch Abb. 6.19 auf S. 148). Somit schließt sich an Schritt 3a (Turns 81, 91 von Rosa) an dieser Stelle Schritt 3aii und eine interaktionale Verdichtung an.

Warum folgt hier eine interaktionale Verdichtung?

Rosas Richtigstellung in den Turns 73 und 75 ist eine inhaltliche Korrektur zur Aussage der Lehrkraft und spricht somit für einen *erhöhten Autonomiegrad* Rosas in der Interaktion. Das Aufgreifen, Abwandeln und Weiterführen ihres skeptizistischen Arguments durch andere Kinder spricht zum einen für eine *Hervorbringung kollektiver Argumentationen* und zum anderen dafür, dass Nadine, Nadja und Karl als *aufmerksame Zuhörer*innen* Partizipationsmöglichkeiten mit einem *klar konturierten Rezipientenstatus* wahrnehmen.

7.2 Ermöglichungs- und Erschwerungsgrundlagen für Verdichtungen

Die folgenden Betrachtungen zu Ermöglichungs- und Erschwerungsgrundlagen erfolgen lediglich auf der Ebene des zur Analyse herangezogenen Datenkorpus und geben keinen Aufschluss über allgemein gültige unterrichtspraktische Verhaltensweisen.

Die Begriffe Ermöglichungs- und Erschwerungsgrundlagen werden auch punktuell in dieser Arbeit verwendet und sind abgeleitet vom Begriff der **Ermöglichungsbedingung** (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 56). Bei Krummheuer & Brandt (2001) werden Ermöglichungsbedingungen als Bedingungen für eine interaktionale Verdichtung formuliert (S. 56f). Sie beschreiben fünf „spezifische Ausprägungen [eines] Bedingungsgefüges" (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 56), welche in interaktionalen Verdichtungen ein optimiertes fachliches Lernen ermöglichen können. In dieser Arbeit soll der Begriff „Bedingung" nicht verwendet werden, wenn auch hier Situationen optimierten fachlichen Lernens im Datenmaterial analysiert wurden.

Bei Klaus & Buhr (1971a) wird eine Bedingung folgendermaßen definiert:

> **Bedingung-** objektiver Sachverhalt bzw. gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts in Form einer Aussage, von dessen Existenz bzw. von deren Gültigkeit die Existenz eines anderen Sachverhalts abhängt oder dessen Existenz bzw. deren Gültigkeit die Existenz eines anderen

> Sachverhalts bzw. die Gültigkeit einer anderen Aussage nach sich zieht. (Klaus & Buhr, 1971a, S. 174)

In meinen Analysen ist es weder der Fall, dass gewisse Turns bzw. gewisse musterhafte Turnabfolgen von der Existenz anderer Turns/ Turnabfolgen abhängen, noch dass gewisse Turnabfolgen die Existenz anderer Abfolgen nach sich ziehen. Für solch geartete Erkenntnisse hätte das Datenkorpus im Wesentlichen erweitert und umfassender analysiert werden müssen. Aus diesen Gründen möchte ich mich in diesem Kapitel von *Bedingungen* distanzieren und stattdessen das kausal schwächere Wort *Grundlage* benutzen. Des Weiteren wurden für diese Arbeit zwar auch interaktionale Verdichtungen untersucht (Stichwort: Ermöglichungsgrundlagen), ebenso wurden aber auch musterhafte Abfolgen im interaktionalen Gleichfluss analysiert, insbesondere, welche Turns in meinem Datenmaterial dem interaktionalen Gleichfluss grundlegend vorangingen (Stichwort: Erschwerungsgrundlagen).

Es wurden Interaktionen zwischen Lehrkräften und Kindern untersucht. Eine Untersuchung auf Peer-Ebene wie bspw. bei Höck (2015) wäre sicher im Rahmen der erhobenen Daten (insbesondere der Gruppenarbeiten) auch möglich gewesen und wird in Ansätzen auch im Rekonstruktionskapitel 6.1 realisiert, jedoch war die Analyse der Interaktionen zwischen Lehrkräften und Schüler*innen so umfangreich, dass in dieser Arbeit darauf verzichtet wurde, die Peer-Ebene zusätzlich zu inkludieren. Bei der Interaktion zwischen Lehrkräften und Schüler*innen wird zwischen einer administrativen Steuerung und einer inhaltlichen Steuerung durch die Lehrkräfte unterschieden. So konnten die im Folgenden präsentierten Tabellen mit Verweisen auf das Datenmaterial erarbeitet werden.

7.2.1 Erschwerungsgrundlagen

Zunächst sollen Erschwerungsgrundlagen bei administrativer Steuerung präsentiert werden (Tabelle 7.2). Eine administrative Steuerung ist genau dann im Datenmaterial erkennbar, wenn sich die Lehrkraft nicht inhaltlich beteiligt, aber sich dennoch in die Interaktion einbringt und die Kinder in ihren Interaktionen (bspw. bezogen auf Beteiligung, auf Nicht-Beteiligung etc.) steuert. Es wird in der Tabelle lediglich an die jeweilige Beispielszene im Datenmaterial verwiesen, da die Rekonstruktion in Kapitel 6 nachvollzogen[53] werden kann.

53 Der aufmerksamen Leserin wird auffallen, dass eine Stelle aus dem Datenmaterial lediglich im Datenmaterial, nicht aber in der Rekonstruktion auffindbar ist. Da hier das *Trichtermuster*, ein nicht im Rahmen dieser Arbeit erarbeitetes Muster, angesprochen wird, kann man auch ohne Rekonstruktion anhand des verwiesenen Transkriptausschnitts gut nachverfolgen, warum dieses Muster zu einem interaktionalen Gleichfluss führt.

Erschwerungsgrundlage (administrativ)	**Beispiel im Datenmaterial**
Lehrkraft in *Bystander*-Rolle	Frau Fichtel und Tami, vgl. Kap. 7.1.2 auf S. 209
SuS fordern implizit eine inhaltliche Beteiligung durch die Lehrkraft (heraus), diese agiert weiterhin auf der administrativen Ebene	Herr Bämpfer und Rosa, Pro-Contra-Debatte Grundschule, Turns 187, 188
Cold calls bei starkem Hierarchiegefälle und Lehrkraft in *Bystander*-Rolle	Frau Fichtel und die „Mädels", Pro-Contra-Debatte Gesamtschule, Turns 128f
Immanent inhaltliche Steuerung bei äußerlich administrativer Steuerung mit geschlossenen Fragen	Frau Fichtel, Pro-Contra-Debatte Gesamtschule, Turns 1 und 5

Tabelle 7.2: Erschwerungsgrundlagen bei administrativer Steuerung

In Tabelle 7.3 können nun die Erschwerungsgrundlagen bei einer *inhaltlichen* Steuerung durch die Lehrkraft nachvollzogen werden. Auch hier können entsprechende Beispielszenen in Kap. 6 nachvollzogen werden, daher wird sich auf eine Angabe der Verweise beschränkt. Eine inhaltliche Steuerung der Lehrkraft liegt genau dann vor, wenn sie sich inhaltlich aktiv (wertend oder nicht wertend) an der Debatte beteiligt und die entsprechenden Turns nicht ohne (inhaltliche) Reaktion der Kinder offen bleiben.

Erschwerungsgrundlage (inhaltlich)	**Beispiel im Datenmaterial**
Paraphrasen und/oder Unterstellungen bei hohem Hierarchiegefälle ohne durch LK explizit gemachten Wunsch nach Klärung	Pro-Contra-Debatte Grundschule: Frau Ellestar und Quentin, Turns 29-44; Herr Bämpfer und Rosa, Turns 203f
Inhaltliche Intervention mit inhaltlicher Evaluation des Beitrags/ der Beiträge (inhaltliche Entkräftung der SuS-Argumente)	Herr Bämpfer und Rosa, Pro-Contra-Debatte Grundschule, Turns 62-67
Trichtermuster bei mangelnder Fachlichkeit der Lehrkraft	Frau Fichtel und Maxi, 01.06.2022, Plenum mit Gesprächsimpulsen, Turns 138ff (siehe Transkriptionsbuch)

Tabelle 7.3: Erschwerungsgrundlagen bei inhaltlicher Steuerung

7.2.2 Ermöglichungsgrundlagen

In diesem Unterkapitel werden Eigenschaften von Turnabfolgen vorgestellt, welche als Grundlage für interaktionale Verdichtungen im Datenmaterial herausgearbeitet wurden. Auch hier erfolgt eine Trennung zwischen administrativer und inhaltlicher Steuerung. In Tabelle 7.5 können Ermöglichungsgrundlagen bei einer administrativen Steuerung der Lehrkraft eingesehen werden. In Tabelle 7.4 können Ermöglichungsgrundlagen bei einer inhaltlichen Steuerung durch die Lehrkraft eingesehen werden.

Ermöglichungsgrundlage (inhaltlich)	**Beispiel im Datenmaterial**
Wiederholen von Nachfragen der Kinder ohne Paraphrase, inhaltliche Weitergabe der Frage ans Plenum	Herr Bämpfer im Klassengespräch zu „entweder ist es unendlich..“, Turn 535
inhaltliche Evaluation von Prämissen/ Data, von denen aus als Argumentationsbasis die Argumentation ko-konstruktiv weitergeführt werden kann	Herr Bämpfer, Klassengespräch zu „entweder ist es unendlich..“, Turn 548

Tabelle 7.4: Ermöglichungsgrundlagen bei administrativer Steuerung

Es fällt im Vergleich auf, dass eine inhaltliche Steuerung weniger Ermöglichungsgrundlagen liefert als eine administrative Steuerung. Verallgemeinernd kann hier, auch in Rückblick auf die Rekonstruktionen, die Hypothese aufgestellt werden, dass eine inhaltliche Beteiligung der Lehrkraft an philosophischen Gesprächen über Mathematik nicht so zielführend ist wie eine Steuerung auf administrativer Ebene. Dies deckt sich auch mit den für das Programm P4C aufgestellten Grundsätzen, die Lehrkraft solle lediglich moderierend an den philosophischen Gesprächen partizipieren und sich inhaltlich weitestgehend nicht beteiligen (Lipman, 2010).

Ermöglichungsgrundlage (administrativ)	**Beispiel im Datenmaterial**
Brechen dyadischer Strukturen durch gezieltes administratives Einbinden anderer SuS	Samuel, Klaus und Frau Fichtel, Pro-Contra-Debatte Gesamtschule, Turns 52-73
Apelle zur Einhaltung vorab transparent besprochener Regeln	Herr Bämpfer und Rosa, Pro-Contra-Debatte Grundschule, Turns 183,184; Frau Fichtel, Pro-Contra-Debatte Gesamtschule, Turn 106
Cold call unter inhaltlicher Würdigung der vorab erlebten Argumente	Herr Bämpfer, Pro-Contra-Debatte Grundschule, Turn 162
Öffnen etablierter Gesprächsstrukturen	Frau Fichtel, Pro-Contra-Debatte Gesamtschule, Turn 7

Tabelle 7.5: Ermöglichungsgrundlagen bei administrativer Steuerung

7.3 Wie argumentieren die Kinder in den philosophisch-mathematischen Gesprächen?

Im folgenden Kapitel werden im Datenmaterial aufgetretene Phänomene der Argumentationsprozesse herausgearbeitet sowie anhand von Beispielen expliziert. Des Weiteren werden anhand der von Fetzer (2011) beschriebenen Charakteristika für Argumentationen im Mathematikunterricht bei Grundschüler*innen überprüft, inwiefern diese Charakteristika auch auf den vorliegenden Datensatz zutreffen. Aus dieser Betrachtung heraus werden Charakteristika der philosophisch-mathematischen Argumentationen der für diese Arbeit untersuchten Grund- und Gesamtschüler*innen präsentiert.

7.3.1 Das Phänomen der *reductio ad absurdum* innerhalb der Pro-Contra-Debatten

Eine *reductio ad absurdum* ist ein eher philosophisch geprägter Begriff für eine über einen erzeugten Widerspruch geführte Argumentation. Innerhalb einer formal-symbolischen Mathematik spricht man mitunter auch von einem indirekten Beweis oder Widerspruchsbeweis. Dabei wird zunächst von der Wahrheit einer gewissen Prämisse (oder deren Negation) ausgegangen, welche zwingend zu einem Widerspruch (einer 'Absurdität') führen muss (Rescher, 2017). Wenn dieser Widerspruch auftritt, ist bewiesen (oder dafür argumentiert worden), dass die Wahrheit der Prämisse (oder deren Negation) abzulehnen ist. Bekannte Beispiele aus der Geschichte der Mathematik sind die Inkommensurabilität der Diagonale im Einheitsquadrat (vgl. auch Kap. 2.1.1 auf S. 25) oder die Irrationalität von $\sqrt{2}$.

Besonders bei der Beschäftigung mit dem Unendlichen, einem Konzept ohne greifbare Entsprechung in der Lebenswelt der Kinder, ist die *reductio ad absurdum* schon dem Wortlaut her passend, denn die Absurditäten, also das Abstrahieren in praktisch nicht Realisierbares, können hier argumentativ besonders gut umgesetzt werden:

> Reductio ad absurdum arguments have many remarkable features. One of them is the productive use made of impossibility/absurdity; rather than representing the end of the road, as it were, in a reductio argument an impossibility allows for the establishment of the truth of a given statement. Reductio arguments reveal the decisive role that the impossible can play in reasoning, and thus once again highlight the need for a satisfactory, fine-grained account of what impossibility is and how to represent it. (Dutilh Novaes, 2016, S. 2606f)

Im Datenmaterial konnten sogar bereits in der Grundschule Argumentationen mit der Struktur einer *reductio ad absurdum* herausgearbeitet werden. So argumentiert beispielsweise Karl (3. Klasse, Grundschule, vgl. Abb. 6.19, S. 148), dass es die Zahl *unendlich* nicht geben kann. In seiner Argumentation geht er zunächst vom Gegenteil aus und formuliert, dass, wenn es die Zahl *unendlich* gäbe, „noch mehr unendlisch zu::u“ (Karl, Turn 133, Pro-Contra-Debatte Grundschule) kommen würden. Somit geht er von der Negation seiner These aus und führt diese zu einem Widerspruch - viele Schritte seiner Argumentation bleiben hierbei aber implizit, ein Phänomen, das an der Grundschule auch bei Fetzer (2011) beobachtet werden konnte. So bleibt beispielsweise offen, ob der Widerspruch durch die nicht mögliche Addition von Unendlichkeiten oder durch die Unmöglichkeit zweier *Zahlen Unendlich* hergeleitet wird.

Auch Nadja (3. Klasse, Grundschule) benutzt eine *reductio ad absurdum*, um die von Rosa aufgestellte These, die Existenz von Zahlen sei an die Existenz von Menschen gebunden, zu entkräften (Turn 206, Pro-Contra-Debatte Grundschule). Dabei geht sie zunächst von der Wahrheit dieser These aus und führt sie zu einem Widerspruch, indem sie die Endlichkeit der menschlichen Existenz der *Un*endlichkeit der Zahlen gegenüberstellt. Nadja expliziert diese Art der Argumentation nicht, sie wurde beim Interpretieren der Bedeutungsaushandlungen herausgearbeitet.

Im Vergleich zu den zwei Grundschüler*innen werden die Argumentationen über Widersprüche in der Gesamtschule deutlicher expliziert. So argumentiert Georg (Turns 10, 12, Pro-Contra-Debatte Gesamtschule) auf Franziskus' Idee, alle Zahlen in eine Zahl zu implementieren (Turn 8), dass unter der Annahme dieser Prämisse ein Ende entstehen würde, welches im Kontrast zur Unendlichkeit der Menge aller Zahlen steht. Unter Verwendung der Formulierungen „da wäre" (Turn 10) und „dann wäre" (Turn 12) expliziert er, dass er Franziskus' Argument zunächst als richtig annimmt und im Anschluss Ableitungen trifft, die dann zur Ablehnung des Arguments führen.

Eine weitere Explizierungsmöglichkeit ist bei Klaus (Turn 20, Pro-Contra-Debatte Gesamtschule) in der von ihm verwendeten Formulierung „Und selbst (.) und selbst (.) und dann (.) wenn man immer weiter zählt? " erkennbar. Mit dem „und selbst" meldet er an, dass er im Folgenden von der Wahrheit von Samuels Aussage(Turn 14), dass der Weg der Zahlen im Unendlichen bekannt ist und man immer weiter zählen kann, ausgeht. Implizit liest er damit in Samuels Aussage aber auch eine (durch die Stellung Samuels im Raum auch explizit gemachte) Positionierung für die Cantor-Gruppe, die *für* eine mögliche Kennzeichnung *aller* Zahlen stimmt. Von dieser impliziten Aussage (Es ist möglich, alle Zahlen zu kennzeichnen) ausgehend führt er den Widerspruch mit Hilfe von Romans Einspruch, dass ja nicht jede Zahl benannt werden kann (Turn 16) herbei (steht im Kontrast zur Möglichkeit des *Zählens*, bei der eine Benennung der Zahlen Voraussetzung ist). Damit liefert er über die *reductio ad absurdum* eine Schlussregel bzw. einen Garanten dafür, dass Franziskus' These aus Turn 8 (alle Zahlen in eine Zahl (bzw. Menge) schreiben) abzulehnen ist und kommt zur genau entgegengesetzten Konklusion.

Nino (Turn 126, Pro-Contra-Debatte Gesamtschule, vgl. auch Abb. 6.29 auf S. 190) expliziert seine *reductio ad absurdum* in einem Turn vollständig. In seiner Formulierung wird klar die deduktive Ableitung des Widerspruchs markiert („Äh wenn [...] äh dann", Turn 126). Er geht von der Wahrheit der Prämisse aus, man könne alle Zahlen in eine neue Zahl zusammenfassen (Samuel, Turn 101, Pro-Contra-Debatte Gesamtschule). Wenn dies wirklich der Wahrheit entspräche, müsste diese Zahl unendlich (groß) sein. Eine solche Zahl kann keine „richtige" Zahl sein (Turn 126). Bezogen auf die naive Mengenlehre ist dies auch der häufigste Einwand gegen die Existenz *transfiniter* Zahlen in der Geschichte der Mathematik (vgl. Kap. 2.1.4 ab S. 35). An dieser Stelle ist anzumerken, dass sowohl die von Nino explizierte Argumentationsstruktur als auch der Inhalt, den er anbringt, besonders hervorzuheben ist und eine besondere gedankliche Beschäftigung mit dem Thema Unendlichkeit erkennen lässt.

Der bisherige Forschungsstand in der mathematikdidaktischen Community lässt keine Rückschlüsse darauf zu, dass bereits Rekonstruktionen von Argumentationen über konstruierte Widersprüche in der Grundschule oder frühen weiterführenden Schule existieren. Nach Ambrus (1992) ist es zwar möglich, „mit Begründungsübungen [insbesondere Begründungen von Lösungen und Lösungswegen mit Hilfe der Kontraposition] bereits in der Unterstufe zu beginnen“ (S. 78), allerdings wird hier die Primarstufe und die Betrachtung, dass solche indirekten Argumentationen auch ohne Vorübungen auftreten können, außer Acht gelassen. Die Emergenz solcher Argumentationen im präsentierten Datenmaterial und deren Rekonstruktion stellt daher im Rahmen des aktuellen Kenntnisstands eine Besonderheit dar. Besonders die Explizierung der *reductio ad absurdum* durch Nino kann als alleinstehendes Phänomen der bisherigen Argumentationsrekonstruktionen gesehen werden.

7.3.2 Das Phänomen der kollektiven Akzeptanz eines Datums trotz diametral entwickelter Konklusionen

Dieses Phänomen taucht im Datenmaterial nur anhand zweier Data in der Gesamtschule auf, ist aber dennoch an dieser Stelle erwähnenswert.

In manchen Interaktionen können sich nämlich gegenüberstehend positionierte Schüler*innen beipflichten, dass man potentiell immer weiter zählen kann (vgl. Abb. 6.25 auf S. 165). Jedoch werden aufgrund unterschiedlicher Garanten zwei völlig diametrale Konklusionen aus diesem Datum entwickelt. Außerdem wird das Datum im Laufe der Pro-Contra-Debatte zum Teil zur Rückversicherung der kollektiven Akzeptanz wiederholt (bspw. Samuel, Turn 173) und mehrfach bestätigt (Neville, Turn 2; Klaus, Turn 20; Samuel, Turn 101). Dennoch wird es sowohl zur Argumentation, man könne nicht alle Zahlen in eine Menge zusammenfassen, als auch zur Argumentation, man könne eben dies tun, herangezogen.

Weiterhin einigen sich beide Seiten darauf, dass man Zahlen durch Erweiterung der Stellen (mit Nullen oder zufällig ausgewählten Ziffern) ergänzen kann (Gerd und Samuel, Turns 104 und 82).

Der Grund, warum sich aus demselben Datum unterschiedliche Konklusionen entwickeln können, liegt m.E. in den unterschiedlichen Schlussregeln (Garanten), die zu den Konklusionen führen. Auch wenn diese z.T. nicht (vgl. Abb. 6.25) oder erst in späteren Ausführungen expliziert werden, sind Unterschiede erkennbar. So argumentiert bspw. Samuel auf einer Ebene der theoretischen Möglichkeit (Turns 6, 23, 175), während Neville und andere Schüler*innen sich auf die Ebene der praktischen Realisation konzentrieren (Neville, Turn 2; Georg, Turn 10; Gerd, Turns 80, 176; Maya, Turn 146). Weil diese verschiedenen inhaltlichen Ebenen weder von den Kindern noch über eine Steuerung durch die Lehrkraft expliziert werden, können dieselben Data mit den auf unterschiedlichen Ebenen verwendeten Garanten zu diametralen Konklusionen geführt werden.

Argumentationstheoretisch ist das Phänomen besonders deshalb interessant, weil bei Wahrheit einer Prämisse die Implikation auch immer die Wahrheit der Konklusion gewährleisten muss (*Modus Ponens*). Die „Schwachstelle“ wäre an dieser Stelle die Implikation selbst, also die Schlussregel. Auch können verschiedene

Ebenen der Argumentation (praktisch-realisierbar vs. theoretisch-möglich) zur unterschiedlichen Gültigkeit der Schlussregel führen.

7.3.3 Das Phänomen des Hinterfragens der Gültigkeit von Argumenten

An ausgewählten Stellen im Datenmaterial ist erkennbar, dass die Kinder die Argumente Anderer entweder inhaltlich oder formal-logisch infrage stellen. In der Grundschule (Pro-Contra-Debatte) stellt beispielsweise Ole (Turn 176) die (*inhaltliche*) Absolutheit der Aussage seines Mitschülers Berat (Turn 174) infrage, indem er ihn explizit nach seinem aktuellen Kenntnisstand fragt. Weiterhin argumentiert Samuel in der Gesamtschule („Es geht jetz nich um das Papier“, Turn 54, Pro-Contra-Debatte), sein Mitschüler Gerd wäre inhaltlich-thematisch abgewichen und stellt somit auch die inhaltliche Gültigkeit von Gerds Argumentationsführung infrage.

Auf einer formal-logischen Ebene gibt es zwei Beispiele des Hinterfragens, die in der Pro-Contra-Debatte an der Gesamtschule auftreten. Erstens hinterfragt Ringo (Turn 35) die logische Gültigkeit eines Vergleichs zwischen dem Alphabet und den Zahlen, da gewisse Vergleichshorizonte für ihn fehlen (Alphabet als übergeordneter „Sammelbegriff“ vs. Zahlen als Elemente, die sich aus Ziffern konstituieren wie *Worte* aus Buchstaben). Zweitens stellt Klaus in Turn 20 mit seiner *reductio ad absurdum* auch die Schließweise Samuels infrage, indem er dessen Garanten für die Konklusion angreift und somit die Wahrheit der eigenen Konklusion und des eigenen Garantens stärkt.

7.3.4 Weitere Phänomene in den Argumentationen

Die weiteren Phänomene werden im Folgenden tabellarisch mit Verweisen auf die entsprechenden Stellen im Datenmaterial festgehalten. Die Rekonstruktion/ Analyse der entsprechenden Stellen kann in den Unterkapiteln von Kapitel 6 nachvollzogen werden.

Phänomen	**Beispiel(e) im Datenmaterial**
Weiterentwicklung eines eigenen Arguments an späterer Stelle	Pro-Contra-Debatte Grundschule: Rosa, Turn 201 Pro-Contra-Debatte Gesamtschule: Samuel, Turns 37-40; Klaus, Turn 44; Samuel, Turn 46; Samuel, Turn 82; Maya, Turn 150; Samuel, Turn 164
Weiterentwicklung einer Kritik an einem anderen Argument	Pro-Contra-Debatte Grundschule: Rosa (baut Kritik an Nadjas Argument aus), Turn 81 Pro-Contra-Debatte Gesamtschule: Samuel (baut Kritik an Nevilles Argument aus), Turn 14; Roman (kritisiert praktische Realisierbarkeit unendlichen Weiterzählens), Turn 16

Phänomen	Beispiel(e) im Datenmaterial
Explizite Forderung einer anderen Denkweise	Gruppenarbeit Nadja, Nadine, Berat und Kilian: Nadja, Turn 314 Pro-Contra-Debatte Grundschule: Rosa, Turn 55
Synthese diametraler Positionen	Gruppenarbeit Nadja, Nadine, Berat und Kilian: Nadine, Turns 46, 49; Nadja, Turn 304 Pro-Contra-Debatte Grundschule: Rosa, Turn 154 Pro-Contra-Debatte Gesamtschule: Roman, Turn 152
Vorherige Argumentation wurde falsch verstanden/ anders interpretiert	Pro-Contra-Debatte Grundschule: Rosa (versteht Nadja falsch), Turn 12; Karl (versteht Nadja falsch), Turn 144; Berat (versteht Nadja falsch), Turn 149

Tabelle 7.6: Weitere Phänomene in den Argumentationen der Kinder

7.3.5 Charakteristika der Argumentationen

Im Folgenden soll, angelehnt an die von Fetzer (2011) formulierten Charakteristika der Argumentationen von Grundschüler*innen, das Datenmaterial auf eben jene Charakteristika hin untersucht werden. Da die Ergebnisse jedoch keineswegs vergleichbar sind, weil mein Datenkorpus im Gegensatz zu dem von Fetzer (2011) nicht die Ergebnisse einer Langzeitstudie repräsentiert und zudem nicht umfangreich genug ist, werden vergleichsweise lediglich Hypothesen aufgestellt, die den Anspruch der Allgemeingültigkeit nicht erfüllen können. Es sollen dennoch Unterschiede, die möglicherweise in dem philosophisch-mathematischen Setting oder dem Unterrichtsgegenstand Unendlichkeit begründet sind, hypothetisch formuliert werden. Die Struktur der folgenden Unterkapitel orientiert sich an den von Fetzer (2011, S. 33) vorgestellten Charakteristika der Argumentationen von Grundschüler*innen im Mathematikunterricht.

7.3.5.1 Kollektiv vertiefte Argumentationen

Besteht eine Argumentation lediglich aus Datum und Konklusion, so spricht man von einem *einfachen Schluss*, wird ein Garant mit einbezogen, wird die Argumentation komplexer und man spricht von einer *vertieften Argumentation* (Krummheuer & Fetzer, 2005). Nach Miller (1986, S.22) können gemeinsam hervorgebrachte Argumentationen als *kollektive Argumentationen* bezeichnet werden.

Die im Gegensatz zu den von Fetzer (2011, S. 33) und auch Jablonski & Ludwig (2019)beschriebenen, für Grundschulkinder charakteristischen einfachen Schlüsse zeigen sich im Datenmaterial dieser Arbeit nicht „in großer Zahl" (Fetzer, 2011, S. 34). Eher ist es so, dass die Kinder auch selbst Garanten und Stützungen formulieren (in der Grundschule etwas *weniger* als in der Gesamtschule, diese Quantifizierung ist allerdings nicht aussagekräftig).

Beispielsweise formuliert Rosa in Turn 55 (Pro-Contra-Debatte Grundschule) im Rahmen ihres Turns nicht nur Datum und Konklusion, sondern auch den Garanten explizit (vgl. Abb. 6.15 auf S. 140). Somit kann ihre Argumentation als *vertieft* bezeichnet werden. Auch werden Bedingungen von einigen Kindern nicht nur implizit, sondern auch explizit angegeben (z.B. von Nadja, vgl. Abb. 6.9 auf S. 133 oder Quentin, vgl. Abb. 6.11 sowie 6.12 auf S. 134f). Bei den hier angeführten Beispielen bleiben allerdings die Garanten implizit.

Ein besonderes Phänomen der beiden Pro-Contra-Debatten zeigt sich darin, dass sich die Kinder die Schlussregeln für Argumentationen anderer Kinder im Verlauf der Debatten gegenseitig explizieren. So stützen zum Beispiel in der Pro-Contra-Debatte der Grundschule sowohl der Garant Nadjas (Turn 119) als auch der Garant Rosas (Turn 126) die Konklusion Nadines (Turn 107), welche sich aus einem Datum Rosas (Turn 126) ableiten lässt (vgl. Abb. 6.19 auf S. 148). Diese Garanten bleiben nicht implizit und werden kollektiv im Laufe der Debatte formuliert. Ich bezeichne eine solche Zusammenstellung einer Argumentation über mehrere Kinder mit Explizierung, warum der Schluss gültig ist, als *kollektiv vertiefte Argumentation* in Abgrenzung zum einfachen Schluss oder der vertieften Argumentation.

An der Gesamtschule (5. Klasse) wurde fast die gesamte Pro-Contra-Debatte als kollektiv vertiefte Argumentation geführt, sehr wenig Schlüsse bleiben implizit begründet (vgl. Abb. 6.29 auf S. 190). Auch wenn die Kinder hier nicht mehr an einer Grundschule dem Unterricht folgen, so sind sie in Kl. 5 m.E. nicht *wesentlich* älter als die untersuchten Kinder in der Grundschule und liefern trotz ihres jungen Alters auf expliziter Ebene Schlussregeln für ihre Argumentationen.

Es kann, insbesondere vergleichend mit den Befunden von Fetzer (2011), somit die Hypothese aufgestellt werden, dass ein philosophisch-mathematisches Unterrichtsdesign zur Unendlichkeit möglicherweise kollektiv vertiefte Argumentationen fördert. Weiter auszuschärfen wäre, welchen Anteil der Unterrichtsgegenstand *Unendlichkeit* und welchen Anteil das Philosophieren im Mathematikunterricht an dieser Förderung hat.

7.3.5.2 Kollektiv-sukzessiv analytische Argumentationen

Wie in Kap. 5.3 (→ S. 111) beschrieben, können Argumentationen nach Toulmin (2003) in substanziell und analytisch unterschieden werden. Laut Fetzer (2011) sind die Argumentationen von Grundschüler*innen weitestgehend substanzieller Natur, während „analytische Schülerargumentationen im alltäglichen Mathematikunterricht der Grundschule nicht die Regel sind und eher selten vorkommen" (S. 35).

In den Rekonstruktionen der Argumentationen der Pro-Contra-Debatten lassen sich sowohl analytische Argumentationen einzelner Schüler*innen als auch sukzessiv gemeinsam in den Debatten entwickelte analytische Argumentationen herauslesen.

Karl (Pro-Contra-Debatte Grundschule, Turn 133) formuliert durch seine *reductio ad absurdum* beispielsweise eine formal gültige Argumentation. Generell können die in Kap. 7.3.1 beschriebenen Argumentationen über die Herbeiführung eines Widerspruchs als formal gültig, deduktiv geführt und somit *analytisch* bezeichnet werden. Insbesondere Ninos Ausführungen (Pro-Contra-Debatte Gesamtschule, Turn 126) können als „deduktive[r] Argumentationsprozess[...]“ (Brandt, 2004, S. 18) hervorgehoben werden.

Neben den größtenteils deduktiven Argumentationsprozessen in Einzeläußerungen der Schüler*innen sind auch sich sukzessiv im Kollektiv ausschärfende Argumentationsprozesse im Datenmaterial (insbesondere der Gesamtschule) erkennbar, welche im Verlauf der Debatten von substanziellen Argumentationen durch das Hinzufügen oder Abändern von Data bzw. Garanten sukzessiv den rhetorischen Charakter verlieren, verzeichenbar. So wird zum Beispiel der Garant, dass die Bedeutung des Gesamten trotz einer feststehenden Bildungsvorschrift weiterhin unbekannt bleibt, im Verlauf von mehreren Kindern verschiedenartig ausgeführt und soweit ausgeschärft, dass er als Schlussregel für die Aussage, die Bildung einer Menge mit unendlich vielen Zahlen sei nicht möglich, eine höhere deduktive Gültigkeit hervorbringt (Klaus, Turns 20, 33, 111, 113; Gerd, Turn 22; vgl. Abb. 6.29 auf S. 190). Des Weiteren führt Gerd in Turn 78 ein Datum an, dass Georgs Konklusion aus Turn 10, ein Zählprozess hätte in seiner praktischen Realisation ein Ende, *nachträglich* formal gültig macht.

Aus bereits durch ein Datum deduzierten Konklusionen wird eine neue Konklusion kollektiv weitergeführt oder nachträglich als Datum zur Stärkung der Konklusion angeführt (Bsp. Samuel, Turn 14 als Datum für die Konklusion von Franziskus, Turn 8 und Ringo, Turn 182). Daher, dass die Argumentationsprozesse im sukzessiven Verlauf durch die Zusammenarbeit der Kinder in ihrer deduktiven Gültigkeit zunehmen, werden sie von mir als *kollektiv-sukzessive Argumentationen* bezeichnet.

7.3.5.3 Erhöhte Explizität bei flachen Hierarchien

Auf Grundlage des Materials von Fetzer (2011, S. 37) wurden zwei Ausprägungen der Charakteristik *geringe Explizität* identifiziert: „(1) Teilweise verbleiben einzelne Elemente der Argumentation implizit und (2) Manchmal ist die Funktionszuschreibung diffus und somit unklar“. In den vorliegenden Daten zeigt sich, dass bei einem flachhierarchischen Austausch unter Peers eine sukzessiv erhöhte Explizität von Garanten auftritt und auch die Funktionszuschreibung klarer möglich ist. Je mehr ein Austausch durch stärkere Hierarchiegefüge geprägt wird, desto eher treten die von Fetzer (2011) beschriebenen Ausprägungen auch in den vorliegenden Daten auf.

So expliziert beispielsweise Ole in der Interaktion mit Herrn Bämpfer zwar auf Nachfrage sein Datum (Pro-Contra-Debatte Grundschule, Turn 172), nicht aber die zur Konklusion führenden, implizit bleibenden Garanten. Rosa, die eine geringere Hierarchiediskrepanz zwischen ihr und Herrn Bämpfer annimmt, expliziert hingegen ihren Garanten in Turn 55 (Pro-Contra-Debatte Grundschule) und verteidigt ihn Herrn Bämpfer gegenüber sogar erneut in Turn 75. In der Gesamtschule bleiben die Garanten von Neville (Turn 2) und Samuel (Turn 6) in der stark durch Frau Fichtel gelenkten Anfangsszene der Pro-Contra-Debatte noch implizit, werden aber im Laufe der Debatte, welche dann vorrangig unter Peers geführt wird, von ihnen (Samuel für Samuel, Turn 23) oder anderen Kindern (Feline für Neville, Turn 24) expliziert.

Außerdem fällt anhand der Rekonstruktionen auf, dass die Kinder, je mehr sie versuchen, die jeweilige Gegenseite von ihren Argumenten zu überzeugen, ihre Garanten und Stützungen stärker explizieren. Ein besonderes Beispiel dafür ist der Verlauf der Pro-Contra-Debatte in der Gesamtschule, bei dem die Kinder während der Debatte Schlussregeln und Stützungen sozusagen „nachliefern", um die Positionierung ihrer Gruppe nachträglich zu stärken.

7.3.5.4 Verbales Argumentieren

Bis auf einige gestische Untermalungen wurde im Rahmen der Pro-Contra-Debatten ausschließlich verbal kommuniziert und die non-verbale Ebene nicht verwendet. Dies liegt m.E. zum einen am schlecht ikonisch oder enaktiv verdeutlichbaren Thema Unendlichkeit, zum anderen auch am Format der Pro-Contra-Debatte, die verbale Explikationen fördert.

7.3.5.5 Kurzzusammenfassung: Charakteristika

Im Folgenden sollen die prägnantesten Charakteristika des untersuchten Datenmaterials tabellarisch anhand des durch Fetzer (2011) präsentierten Vergleichshorizonts zusammengefasst werden.

Charakteristikum nach Fetzer (2011)	**Charakteristikum der hier untersuchten Daten**
Einfache Schlüsse Kein Einbezug von Garanten und/oder Stützungen	Kollektiv vertiefte Argumentationen Kollektives Explizieren der gemeinsam entwickelten Argumentationen, Hinzufügen von Garanten und/ oder Stützungen für Argumentationen anderer Kinder
Substanzielle Argumentationen Gültigkeit des Schlusses anzweifelbar, strittige Garanten	Kollektiv-sukzessiv analytische Argumentationen sukzessive Erhöhung der Gültigkeit von Schlüssen durch kollektive Ergänzung von Informationen im Verlauf der Argumentation
Geringe Explizität Einzelne Elemente der Argumentation bleiben implizit und Funktionszuschreibungen diffus	Erhöhte Explizität bei flachen Hierarchien Erhöhte Explizität bei Peer-Austausch oder geringer Hierarchiediskrepanz zwischen Lehrkraft und Schüler*innen
Verbales und non-verbales Argumentieren	Verbales Argumentieren

Tabelle 7.7: Kurzzusammenfassung der herausgearbeiteten Charakteristika der Argumentationen der Kinder

7.4 Inhaltliche Aspekte des Konzepts Unendlichkeit im Argumentationsprozess der Kinder

Die im Folgenden präsentierten Daten wurden mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse erschlossen. Diese diente vor allem zur Kategorienbildung und keinesfalls zum (quantitativen) Vergleichen der Daten. Im ersten Schritt wurde das ausgewählte Datenkorpus deduktiv nach den in Kap. 7.4.1 und Kap. 7.4.2 angegebenen Kategorien gesichtet und kodiert. Dabei wurde das gesamte Korpus, wie im Transkriptionsbuch aufgeführt, einbezogen. Ziel war eine Strukturierung des Datenmaterials hinsichtlich der Inhalte bezüglich Unendlichkeit.

7.4.1 Nomen – Adjektiv – Adverb

Luis et al. (1991) nehmen mit Blick auf die Antike eine Trennung der Wortarten beim Beschreiben von Unendlichkeit vor. Für das vorliegende Datenkorpus wurde ausgehend von dieser Unterscheidung eine deduktive qualitative Inhaltsanalyse durchgeführt, um auszuschärfen, in welchen Kontexten die Kinder vorrangig welche Wortarten verwenden. Dabei trat die Schwierigkeit auf, dass die Trennung aus der englischsprachigen Literatur stammt (Jirotková & Littler, 2004; Luis et al., 1991) und es keine eineindeutige Entsprechung des Adverbs *infinitely* im Deutschen gibt. Hierfür wurde für die deutschen Ausführungen der Kinder festgelegt, dass Adjektive, die kein Nomen direkt beschreiben, sondern ein anderes Adjektiv, ein Adverb oder ein Verb, mit dem Code *Adverb* belegt werden. So kann bspw. das unendlich in „unendlich viele Zahlen“ als Adverb gedeutet werden, da es sich auf „viele“ und nicht direkt auf „Zahlen“ bezieht.

Zunächst wurden die Wortarten im Datenmaterial deduktiv codiert. Anschließend wurden innerhalb jeder Wortart induktiv Subkategorien gebildet. Das System der Ober- und Subkategorien kann mit Beispielen aus dem Datenmaterial in Tabelle 7.8 eingesehen werden.

Für die Kategorisierung beim Nomen wurde eine zweite Ebene der Subkategorien aufgemacht. Entweder benutzen die Kinder Unendlichkeit als Objekt, dann benutzen sie es entweder als Referenzobjekt oder mit unklarer Bestimmung. Weiterhin benutzen sie das Nomen zur Benennung von Zahlen, wobei man hier zwischen Unendlichkeit als Platzhalter bzw. Name für eine unendlich große Zahl oder Unendlich als Name für eine unendlich große Zahl trennen kann.

Als Adjektiv wird unendlich entweder zur Kennzeichnung von Zahlen oder des Raumes benutzt (was nicht heißen soll, dass die Kinder nicht auch über die Unendlichkeit der Zeit sprechen, nur hier benutzen sie das Adjektiv nicht auf ein Zeit betreffendes Nomen referierend).

Das Adverb wird entweder in Verbindung mit Zahlen oder im kosmologischen Kontext genutzt. Hier kommt wieder die zweite Ebene der Subkategorien zum Tragen. So wird das Adverb in Verbindung mit Zahlen entweder zur Kennzeichnung des Adjektivs *lang* benutzt oder für *viele*. Kosmologisch wird zwischen einer Kennzeichnung von *groß* (Raum) und *lang* (Zeit) unterschieden.

Wortart	**Subkategorien 1. Ebene**	**Subkategorien 2. Ebene**	**Beispiel aus dem Datenmaterial**
Nomen	Unendlichkeit als Objekt	Als Referenzobjekt	Dass (.) die Unendlichkeit größer is als das Universum (Karl, Turn 32, Pro-Contra-Debatte Grundschule 26.04.2021)
		Unklar	und die Unendlichkeit und vi::el weiter (Rosa, Turn 876, Grundschule 22.04.2021 - Kamera 1 - Sitzkreis mit Impulsen)
	Zur Benennung von Zahlen	*Unendlichkeit* als Name für eine Zahl	Und da hat er erzählt, dass man (.) Unendlichkeit (.) Unendlichkeit plus Unendlichkeit auch rechnen kann. Aber, dass (unverständlich, für etwa 1.0 Sekunden) (Samuel, Turn 101, Gesamtschule 01.06.2022: Plenum mit Gesprächsimpulsen)
		Unendlich als Name für eine Zahl	entweder er kann bis Unendlich, weil Unendlich is ja eine Zahl (Beatrice, Turn 81, Gesamtschule 01.06.2022: Plenum mit Gesprächsimpulsen)
Adjektiv	Unendliche Zahlen		aber es gibt noch; [räuspert sich] also äh; (vielleicht gibt so); gibt es unendliche Zahlen (Bernhard, Turn 583, Grundschule 22.04.2021 - Kamera 1 - Sitzkreis mit Impulsen)
	Unendlicher Raum		«die Hand herunter nehmend> nee> (.) ich::h möchte auch ahm gerne sagen was ich aufgeschrieben hab ich bin für Cantor weil das (.) Universum auch=unendlich is und die Zahlen auch unendlich sind (Franziska, Turn 46, Grundschule 26.04.2021 Pro-Contra-Debatte)
Adverb	Zahlen	Unendlich lange Zahlen	Ja aber man kann ja auch ne unendlich lange Zah:l einbau:n (Samuel, Turn 39, Gesamtschule 21.06.2022 Pro-Contra Debatte)
		Unendlich viele Zahlen	aber es gibt; aber es gibt unendlich @viele Zahlen.@ (Kevin, Turn 635, Grundschule 22.04.2021 - Kamera 1 - Sitzkreis mit Impulsen)
	Kosmologie	Unendlich lange Zeit	Das würde (.) unendlich lang dauern. (Niklas, Turn 153, Gesamtschule 01.06.2022: Plenum mit Gesprächsimpulsen)
		Unendlich großer Raum	°das Universum is doch unendlich groß° (Nadine, Turn 36, Grundschule 26.04.2021 Pro-Contra-Debatte)

Tabelle 7.8: Überblick über Ober- und Subkategorien zur Trennung Nomen – Adjektiv – Adverb

7.4.2 Objekt – Prozess

Für diese Kategorisierung der Inhalte wurde nach Monaghan (2001), welcher von Sfard (1991) beeinflusst wurde, das Datenmaterial deduktiv nach Vorstellungen von Unendlichkeit als *Prozess* oder *Objekt* kodiert. Im Anschluss wurden, wie auch für das vorhergehende Kapitel, induktiv Subkategorien gebildet. Wie Monaghan (2001, S. 245) selbst schreibt, ist so eine Teilung insbesondere bei Aussagen von Kindern nicht immer trennscharf möglich, da verschiedene Deutungsalternativen zu Aussagen der Kinder existieren.

Für die Oberkategorie Prozess konnte auf der ersten Ebene der Subkategorien zwischen unendlich fortgehenden Zahlen, dem Hinzukommen neuer natürlicher Zahlen bzw. Objekte und Aussagen, in denen einem Prozess das Ende abgesprochen wurde, unterschieden werden (vgl. Tabelle 7.9). Dabei wurden hier auf zweiter Ebene auch wiederum Subkategorien gebildet. So kann man bei der unendlich fortgehenden Zahl zwischen einem Ergänzen von Zahlen und einem fortgehenden Schreibprozess zu einer unendlich fortgehenden Zahl unterscheiden. Das Hinzukommen neuer Zahlen bzw. Objekte kann entweder kosmologisch mit einem Raum- bzw. Zeitaspekt getrennt werden oder tritt ohne kosmologischen Kontext auf. Die Unterscheidung, es gibt kein Ende der Zahlenreihe oder es gibt kein Ende des Zählprozesses teilt die Subkategorie „Kein Ende“ in zwei weitere Subkategorien auf.

Subkategorien 1. Ebene	**Subkategorien 2. Ebene**	**Beispiel aus dem Datenmaterial**
unendlich fortgehende Zahl	Ergänzen	(.) (So) eigentlich schon, weil man kann ja immer wieder neue Zahl=n hinten dranhäng. (Klaus, Turn 157, Gesamtschule 01.06.2022: Plenum mit Gesprächsimpulsen)
	Schreibprozess	(man kann halt) nicht irgendeine Zahl (aufhört) zum Beispiel (könn=wir/ Papier) schreibn weil dann brauchste ja=auch unendlich Papier weil die (obere ja durchschreiben) (Gerd, Turn 53, Gesamtschule 21.06.2022 Pro-Contra Debatte)
Hinzukommen neuer nat. Zahlen/ Objekte	Ohne räuml./zeitl. Aspekt	Weil es kommt ja immer eine Zah:l dazu:: (Ole, Turn 172, Grundschule 26.04.2021 Pro-Contra-Debatte)
	Raumaspekt des Hinzukommens	ähm und später könnten die ja noch größer sein (Rosa, Turn 93, Grundschule 26.04.2021 Pro-Contra-Debatte)
	Zeitaspekt des Hinzukommens	«beide Hände auf Schulterhöhe hebend> Joa> (da könnte man=ja) theoretisch schon Jahre schreibn da hat man immer noch nich=des Ende (Gerd, Turn 78, Gesamtschule 21.06.2022 Pro-Contra Debatte)
kein Ende	kein Ende der Zahlen	aba es gibt=ja unendlich Zah:ln (.) es gibt ja kein Ende, (Georg, Turn 29, Gesamtschule 21.06.2022 Pro-Contra Debatte)

Subkategorien 1. Ebene	Subkategorien 2. Ebene	Beispiel aus dem Datenmaterial
	Kein Ende des Zählprozesses	Aber man kann doch gar nicht bis zum Ende zähl=n, weil viele Zahl=n wurden noch gar nich erfor- (Samuel, Turn 175, Gesamtschule 01.06.2022: Plenum mit Gesprächsimpulsen)

Tabelle 7.9: Subkategorien für die Oberkategorie Prozess

Für die Oberkategorie Objekt wurden vier Subkategorien gebildet, die sich bis auf die Subkategorie „Unendlichkeit mit ontologischem Objektstatus“ auf zweiter Ebene wiederum in Subkategorien unterteilen lassen (vgl. Tabelle 7.10).

So kann eine Benutzung der Zahl *unendlich* auf eine Erfindung zurückgeführt werden, sie kann stellvertretend für ein Ergebnis oder eine Zahl stehen oder explizit als Zahl *unendlich* benannt werden. Wenn die Kinder die Existenz einer solchen Zahl abstreiten, tun sie das entweder ohne Begründung oder sie begründen die Nicht-Existenz entweder darin, dass *unendlich* keine natürliche Zahl ist oder nicht benannt werden kann. Als Kardinalität und/oder Größe kann *unendlich* anstelle einer Kardinalzahl genannt werden, oder um auszudrücken, dass die Kardinalität aller Zahlen nicht bekannt ist oder um ein Vergleichsobjekt in seiner Größe zu kennzeichnen.

Subkategorien 1. Ebene	Subkategorien 2. Ebene	Beispiel aus dem Datenmaterial
Unendlichkeit mit ontologischem Objektstatus		Dass (.) die Unendlichkeit größer is als das Universum (Karl, Turn 32, Pro-Contra-Debatte Grundschule 26.04.2021)
Zahl *unendlich* wird benutzt	Erfindung	Ich denke wegen halt es wurde gar keine neue halt Zahl äh Wort erfunden, zum Beispiel Million oder sowas in der Art, weil erstens würde=s auch wegen den (Satz) etwas durcheinander bring und stattdessen wurde halt einfach unendlich erfunden. (Beatrice, Turn 189, Gesamtschule 01.06.2022: Plenum mit Gesprächsimpulsen)
	Als Ergebnis/ stellvertretend für eine Zahl	man könnte viele kleine Säcke haben, └und die alle ergeben┘ gleich unendlich. (Nadja, Turn 136, Gruppenarbeit Nadja, Nadine, Berat, Kilian 26.04.2021)
	Wird als Zahl *unendlich* benannt	└also; (.) man könnte (.) ja sagen dass es┘ └eine Zahl gibt┘ [...] die heißt unendlich und dann ist das unendlich. (Nadja, Turns 552, 554, Grundschule 22.04.2021 - Kamera 1 - Sitzkreis mit Impulsen)
Zahl *unendlich* existiert nicht	ohne Begründung	mehrere Schüler*innen antworten auf Herrn Bämpfers Frage, ob es eine Unendlichzahl gäbe, mit nein (Turns 43-45, Grundschule 03.05.2021: Pro-Contra-Debatte)

Subkategorien 1. Ebene	**Subkategorien 2. Ebene**	**Beispiel aus dem Datenmaterial**
	keine natürliche Zahl	(Also) Unendlich ist keine natürliche Zahl; Eine natürliche Zahl ist Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun (Gerd, Turn 92, Gesamtschule 01.06.2022: Plenum mit Gesprächsimpulsen)
	kann nicht benannt werden	(.) und ä:hm also; (.) di:e; (.) die Zahl Unendlich ä:hm also:; (.) der Name Unendlich gibt=s nicht zu einer Zahl. (Tristan, Turn 576, Grundschule 22.04.2021 - Kamera 1 - Sitzkreis mit Impulsen)
Kardinalität/ Größe	Unendlich als Kardinalzahl	Es sind nur unendlich Besucher aber vielleicht zwei unendlich Zimmer. (Rosa, Turn 34, Grundschule Gruppenarbeit Nadja, Rosa, Fatma, Nazan 13.07.2021)
	Kardinalität aller Zahlen nicht bekannt	(1.5) ich; (.) bin für Leibniz; (.) weil man weiß nicht wie viele Zahlen es gibt. (Martin, Turn 23, Grundschule 03.05.2021: Pro-Contra-Debatte)
	Kardinales/ messbares Vergleichsobjekt	(.) also es könnte sein wenn ein Zaubererbeutel wäre; (.) der mü:sste so groß sein wie das Universum. (Nadja, Turn 1299, Grundschule 26.04.2021: Sitzkreis und Einführung)

Tabelle 7.10: Subkategorien für die Oberkategorie Objekt

7.4.3 Interpretation der Ergebnisse

Auch wenn auf Basis der durchgeführten qualitativen Inhaltsanalyse jegliche Quantifizierung der Kategorien nicht möglich ist, so fallen einige Tendenzen ins Auge, die ich im Folgenden kurz beschreiben möchte. Zum einen fällt auf, dass die Relevanz hinzukommender natürlicher Zahlen (Tabelle 7.9) in der Gesamtschule kaum noch ins Gewicht fällt und stattdessen unendlich fortgehende Zahlen fokussiert werden. Dies könnte eine in den untersuchten Klassen singuläre Erscheinung sein, aber auch dafür sprechen, dass die Kinder Inhalte, in denen ihnen im bereits erlebten Mathematikunterricht implizit Unendlichkeit begegnet ist, in den Stunden, in denen nun explizit über Unendlichkeit gesprochen wird, mit in die Diskussionen einfließen lassen. Man könnte die Hypothese aufstellen, dass die implizit in den Unterrichtsinhalten enthaltene Unendlichkeit von den Kindern auch immanent als solche aufgefasst wird, was dann im Moment einer Explikation zum Auftreten dieser Verknüpfungen führt. Beispielsweise nehmen die natürlichen Zahlen für die Grundschulkinder eine wesentlich größere Rolle ein als für die Kinder der Gesamtschule. Schüler*innen der fünften Klasse haben bereits mit Brüchen und unendlichen, periodischen Dezimalzahlen Kontakt gehabt und können das Konzept einer unendlich fortgehenden Zahl besser greifen als die Kinder der Grundschule. Allein die Emergenz der Kategorien könnte dafür sprechen, dass die Kinder im Mathematikunterricht die implizite Unendlichkeit *mitdenken*, was wiederum einen Appell für ihre explizite Behandlung im Unterricht rechtfertigen würde. Auch Holton &

Symons (2021) berichten von diesem Phänomen und appellieren für eine explizite Behandlung von Unendlichkeit, die für sie zu *infinity-based-thinking* führen kann:

> This is the thinking that occurs in any mathematical content area where an individual's understanding of the mathematical concept will be deepened through linking to, and synthesising their understanding of, the infinite. (Holton & Symons, 2021, S.436f)

Weiterhin interessant ist, dass das Adjektiv *unendlich* in Verbindung mit Zeit nicht explizit im Datenkorpus auftaucht, sondern in impliziten Formulierungen umschrieben wird. Als Adverb wird es in der Verbindung mit „lang" in Bezug auf Zeit verwendet.

Weiterhin ist erkennbar, dass sowohl die Kinder der Grund- als auch der Gesamtschule Unendlich zur Kennzeichnung/Benennung von Zahlen verwenden. Auch wenn manche Kinder die Existenz einer solchen Zahl bestreiten, verwenden sie Unendlich, um das, dessen Existenz sie negieren möchten, zu kennzeichnen. Wie in Kap. 2.1.3 beschrieben, könnte dies für eine sprachliche Grenze der Kinder sprechen, die aufgrund der noch nicht vollständig erschlossenen Kunstsprache der Mathematik ein Hindernis des Darlegens ihrer Gedanken darstellt: „Die Grenzen meiner Sprache sind die Grenzen meiner Welt" (Wittgenstein, 1953, S. 5.6).

Oft wird Unendlichkeit auch wie eine ontologisch fundierte Entität benutzt, beispielsweise als Referenzobjekt zum Universum. Dies könnte dafür sprechen, dass die Kinder das Konzept nicht komplett in einer rein theoretischen Mathematik verorten, sondern auch mit dem Bereich *Größen und Messen* verknüpfen und ihm somit einen Lebensweltbezug zuweisen. Hierfür würde auch die Verwendung von Unendlich im kosmologischen Kontext, bezogen auf das Universum oder die Unendlichkeit von Raum und Zeit, sprechen. Meiner Meinung nach ist dieser Kontext der einzige, der für die Kinder in ihrer Lebenswelt zum Thema Unendlichkeit noch einigermaßen greifbar und über Medien und andere Unterrichtsfächer mittelbar erfahrbar ist. So konstruieren die Kinder ohne eine solch kosmologische Vorgabe in den Instruktionen den Lebensweltkontext selbst in die Aufgaben und ko-konstruktiven Argumentationsprozesse hinein (→ Stichwort Sinnstiftung, vgl. auch Kap. 4.1 auf S. 68).

Anhand der vorliegenden Kategorisierung ist zum Stichwort Sinnstiftung weiterhin anzuerkennen, dass die Schüler*innen unterschiedliche Perspektiven zur Unendlichkeit eingenommen haben.

8. Zusammenfassung der Ergebnisse

In den folgenden Unterkapiteln wird zunächst die übergeordnete Forschungsfrage beantwortet, ob es möglich ist, sinnstiftende Interaktionsprozesse zur Unendlichkeit bereits in der Grund- und frühen Gesamtschule anzuregen. Anschließend werden die untergeordneten Forschungsfragen beantwortet, nämlich welche Interaktionsmuster zwischen Lehrkräften und Schüler*innen emergieren, welche Argumentationsprozesse der Kinder rekonstruiert werden können und welche inhaltlichen Aspekte des Konzepts Unendlichkeit die Kinder in ihre Argumentationen mit einfließen lassen.

8.1 Übergeordnete Forschungsfrage: Sinnhaftigkeit, Sinnstiftung

In Kapitel 4.1 wurden Kriterien formuliert, anhand derer sich sinnstiftende Interaktionen im Datenmaterial erkennen lassen. Diesen Kriterien folgend soll nun beantwortet werden, ob es auf Basis der präsentierten Unterrichtsdesigns möglich war, sinnstiftende Interaktionen zur Unendlichkeit bereits in der Grund- und frühen Gesamtschule anzuregen. Auch hier wird auf die Rekonstruktionen in Kapitel 6 verwiesen, um Redundanzen zu vermeiden.

Die Schüler*innen tauschen sich über intersubjektive Sichtweisen zum *Sinn* des Unterrichtsinhalts bzw. der Aufgabe aus
Eine prägnante Szene, in der sich die Kinder zur Lösung einer Mitschülerin äußern und somit implizit auch ihre kognitive Aktivierung durch die Aufgabe ausdrücken, findet in der Gruppenarbeit von Nadja, Berat, Nadine und Kilian statt (vgl. Kap. 6.1). In Turn 304 bringt Nadja ihre Idee zur Zusammenführung der diametralen Aussagen von Cantor und Leibniz vor, woraufhin Nadine und Berat mit dem Wort „Kopfexplosion" antworten (Turns 305, 306). Auch im Anschluss drückt Nadja gegenüber ihren Mitschüler*innen eine kognitive Dissonanz aus („Diese Welt (spinnt) mit mir", Turn 311). Danach fordert sie Kilian direkt auf, abstrakter zu denken (Turn 314). Somit scheint Nadja den *Sinn* der Aufgabe als eine abstrakte, experimentelle Beschäftigung mit Unendlichkeit anzusehen und formuliert dies auch den anderen Kindern gegenüber aus.

Ein anderes Beispiel, in welchem der *Sinn* der Aufgabe explizit in Frage gestellt wird, ist in der Pro-Contra-Debatte der Grundschule zu finden. Hier spricht

Rosa darüber, welche Intention der*die Ersteller*in der Aufgabe wohl beim Erstellen hatte: „Ich hab eben das Gefühl die Geschichte wurde dafür geschrieben dass man die Kinder durcheinander bringt und zu überlegen was ist richtig“ (Turn 55). Auch hier lässt sich eine kognitive Dissonanz Rosas erkennen (vgl. auch S. 141), außerdem formuliert sie normative Ansprüche zur Sinnhaftigkeit der Aufgabe.

Auch im Klassengespräch mit Herrn Bämpfer (Kap. 6.4.1) gibt es Schüler*innen, die sich zum Sinn des Gesprächsimpulses austauschen. So stellt als erstes Ben die Frage in den Raum, ob die von Herrn Bämpfer vorgelesene Frage überhaupt Sinn ergibt (Turn 530). Es folgt eine Verneinung zu Bens Frage durch andere Schüler*innen (Turns 534, 536), woraufhin Ben den Sinn doch wiederum bestätigt (Turn 537).

Beatrice analysiert den Sinn derselben Aufgabenstellung in der Gesamtschule und kommt zum Schluss, dass beide Sätze denselben Inhalt haben und nur grammatikalisch anders aufgebaut sind (Kap. 6.4.2, Turn 117). Damit stellt sie den Sinn der Aufgabenstellung innerhalb der Klasse zur Frage, wobei sich ihre Aussage zunächst an die Lehrkraft Frau Fichtel richtet. Dennoch teilt sie hier ihre subjektive Ansicht zum Sinn der Aufgabenstellung mit.

Insgesamt finden sich im Datenkorpus einige Beispiele, bei denen die Kinder sich mit dem Sinn der Aufgabenstellungen auseinandersetzen. Einige Beispiele sind oben aufgeführt, weitere finden sich im nicht rekonstruierten Teil des Datenmaterials. Insgesamt lässt sich aber festhalten, dass die Kinder sich kaum mit dem Sinn des Unterrichtsinhaltes auseinandergesetzt haben. Eventuell wäre eine Transparenz dahingehend für nächste unterrichtspraktische Versuche mit einzubinden, des Weiteren könnte man eine Diskussion über die Relevanz von Unendlichkeit implementieren.

Die Schüler*innen nehmen die Geschichte von Robert und dem Zahlenteufel in ihre Betrachtungen mit auf (*Sinnerleben*)

Es traten mehrere Beispiele auf, in denen die Geschichte von Robert und dem Zahlenteufel mit in Argumentationen bzw. Aussagen der Kinder einflossen. Vorrangig geschah dies an der Grundschule, was eventuell auf die bildlichere Ausgestaltung der Geschichte zurückzuführen ist. Im Folgenden werden einige Beispiele solcher Einbezüge vorgestellt.

Insbesondere in der Stunde zu Hilberts Hotel wurden die Figuren Zahlenteufel und Robert in die Lösungen der Kinder mit einbezogen (vgl. Kap. 4.5.3 auf S. 88). Auch werden die Illustrationskarten der Bilder mit einbezogen, beispielsweise in der Gruppenarbeit von Nadine, Nadja, Kilian und Berat (Kap. 6.1), in der Nadja immer wieder das vor ihr liegende Bild einer Heuschrecke in die Argumentationen mit einbringt (bspw. Turn 151). In der Gesamtschule wird die Ziege aus der Geschichte zu Paradoxien und Antinomien (Stunde U4) bei einem Plakat zusammen mit dem Zahlenteufel einbezogen (vgl. Abb. 8.1, „Zahli könnte sagen dass die Ziege selber die Rätsel lösen soll, und nicht die Mathematiker“).

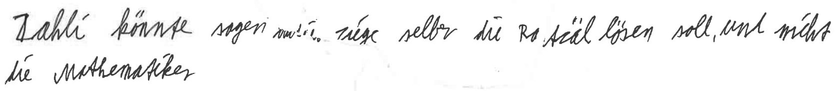


Abbildung 8.1: Auszug aus dem Plakat von Niklas, Samuel und Nino zur Paradoxie von *Achilles und der Schildkröte*

Die Schüler*innen nehmen unterschiedliche Perspektiven zur Unendlichkeit ein (intra- oder intersubjektiv)

Allein durch die verschiedenen Unterrichtsdesigns konnten verschiedene Perspektivwechsel zur Unendlichkeit angeregt werden. Dass dies auch durch die Kinder umgesetzt wird, kann im folgenden an Beispielen verdeutlicht werden.

Samuel macht eine intrasubjektive Entwicklung bezüglich seiner Auffassung zur Unendlichkeit bemerkbar. Im Plenumsgespräch der Stunde U1 äußert er sich noch folgendermaßen (vgl. Transkriptionsbuch, Gesamtschule, 01.06.2022: Plenum mit Gesprächsimpulsen):

175	Samuel	Aber man kann doch gar nicht bis zum Ende zähl=n, weil viele Zahl=n wurden noch gar nich erfor- also (.) ne aber, bis da wurde noch nie gezählt, das heißt man weiß nicht richtig, wie=s weitergeht.

In der Pro-Contra-Debatte der Gesamtschule (vgl. Kap. 6.3 auf S. 162) äußert er sich konträr dazu und gibt sogar Bildungsvorschriften an, wie es weitergehen kann. Es könnte die Vermutung aufgestellt werden, dass durch die explizite Beschäftigung mit Unendlichkeit am Ende der U1 und am Anfang der U2 bei Samuel ein so weitreichende kognitive Dissonanz ausgelöst wurde, dass er seine Meinung bezüglich Unendlichkeit und auch seine Vorstellung *aktualer* Unendlichkeit um 180° gewendet hat.

Intrasubjektiven Austausch kann man besonders in den Plenumsgesprächen (bspw. Kap. 6.4.1 und 6.4.2) nachvollziehen, ganz besonders ist dieser aber in den Pro-Contra-Debatten und deren graphischer Rekonstruktion zu bermerken (bspw. Abb. 6.29, Abb. 6.19 und generell die Inhalte der Kap. 6.2 und 6.3). Weiterhin bezeugen auch die vielen verschiedenen inhaltlichen Aspekte der Kinder zur Unendlichkeit (vgl. Kap. 7.4) einen stattgefundenen intersubjektiven Austausch. Dieses Kriterium kann also als vollkommen erfüllt angenommen werden.

Resumeé:

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass insbesondere die vielen interaktionalen Verdichtungen (vgl. Kap. 7.1) und deren musterhafte Emergenz für eine Sinnhaftigkeit der Unterrichtsstunden und der Beschäftigung mit Unendlichkeit sprechen. Meiner Meinung nach ist auch die philosophische Offenheit, die durch Methoden wie die Pro-Contra-Debatte forciert wird, sowie die ständigen Versuche der Begriffsarbeit zur Unendlichkeit für diese Verdichtungen mit verantwortlich. Das Kriterium des Austauschs über den Sinn der Unterrichtsinhalte ist nicht vollständig erfüllt, dennoch kann man anhand der anderen beiden Kriterien festhalten, dass es in dieser Studie explorativ gelungen ist, sinnstiftende Interaktionsprozesse über Unendlichkeit anzuregen.

Weiterhin ist festzuhalten, dass die Kinder, wie in Kap. 7.4.3 angemerkt wurde, den Lebensweltkontext in die Inhalte selbst mit einbringen und versuchen, ihre mathematischen Vorstellungen des Konzepts mit dem Lebensweltbezug in Einklang zu bringen. Dies wurde zwar in Kap. 4.1 nicht als Kriterium aufgestellt, spricht aber nach Leuders et al. (2011, S. 4) dafür, dass ein sinnstiftender Kontext vorliegt.

8.2 Untergeordnete Forschungsfragen

Untegerodnet zur Frage, ob es überhaupt *möglich* ist, bereits in der Grundschule bzw. frühen Gesamtschule stinnstiftende Interaktionen zum Thema Unendlichkeit anzuregen, wurden für diese Arbeit drei weitere Forschungsfragen formuliert. Diese sollen nun zusammenfassend in Kürze beantwortet werden.

Welche Argumentationsprozesse können in meta-mathematisch-philosophischen Gesprächen rekonstruiert werden?
Kapitel 7.3 und die dazugehörigen Unterkapitel geben Aufschluss zur obigen Frage. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass in den meta-mathematisch-philosophischen Gesprächen besondere Phänomene in den Argumentationen auftreten, die nach meinem derzeitigen Kenntnisstand noch nicht aus mathematischen Gesprächen herausgearbeitet werden konnten. Insbesondere, dass manche Kinder bereits Argumentationen über die Herleitung eines Widerspruchs zur Negation des Gegenteils ihrer Aussage führen, halte ich für ein Alleinstellungsmerkmal der Ergebnisse dieser Arbeit (vgl. Kapitel 7.3.1). Bredow (2023, S. 36) erwähnt in ihrer Arbeit, dass Argumente mit Gegenbeispielen oder Widerlegungen nicht per se einer speziellen Repräsentationsform oder bezüglich ihrer Generalität einzuordnen sind. Allerdings sind die in dieser Arbeit angeführten Argumente keine mit Gegen*beispielen*, sondern tatsächlich, wie beispielsweise bei Nino (vgl. Abb. 6.29), formal-deduktiv gültige *reductiones ad absurdum*. In den bislang bekannten Arbeiten zu Widerlegungen gab es meist vorab Instruktionen der Lehrkraft zu diesen (Bieda, 2010; Grundey, 2015) oder die untersuchten Proband*innen sind in einer höheren Klassenstufe bzw. an der Universität (Buchbinder & Zaslavsky, 2013; Zazkis et al., 2007). Dies war in den vorliegenden Daten nicht der Fall, weshalb eventuell auf eine besondere Rolle des Philosophierens oder der Unendlichkeit als Unterrichtsgegenstand geschlossen werden könnte.

Weiterhin kann festgehalten werden, dass weitere Phänomene wie die kollektive Akzeptanz eines gemeinsamen Datums trotz diametral entwickelter Konklusionen, das Hinterfragen der Gültigkeit von Argumenten der Kinder untereinander, die explizite Forderung anderer Denkweisen sowie Synthesen diametraler Positionierungen in den Argumentationen der Kinder emergierten.

Charakteristika der meta-mathematisch-philosophischen Argumentationsprozesse der Kinder unterscheiden sich im Datenkorpus wesentlich von denen für Grundschulkinder als typisch angenommenen. Folgende Charakteristika konnten aus dem Datenmaterial herausgearbeitet werden: Kollektiv vertiefte Argumentationen statt einfacher Schlüsse, kollektiv-sukzessiv analytische Argumentationen statt substanzieller Argumentationen, eine erhöhte Explizität bei flachen Hierarchien statt einer geringen Explizität und ein rein verbales Argumentieren statt des Einbezugs non-verbaler Kommunikationsmittel.

Die Bezeichnung der Argumentationen als kollektiv-sukzessiv analytisch erweitert m.E. den von Krummheuer & Brandt (2001) als *Argumentationszyklus* bezeichneten Interaktionsprozess um eine nicht-zyklische Variante der stetigen Erweiterung und Verfeinerung der Argumentationsstränge.

Auch wenn aufgrund des relativ kleinen Samplings definitiv keine allgemeingültigen Aussagen getroffen werden können, so legen diese Ergebnisse doch die Hypothese nahe, dass entweder das Philosophieren im Mathematikunterricht oder die Beschäftigung mit Unendlichkeit oder genau die Verbindung des Philosophierens über Unendlichkeit im mathematischen Kontext besondere Argumentationsstrukturen bei Kindern emergieren lässt.

Welche Interaktionsmuster bilden sich zwischen den Lehrkräften und Schüler*innen im meta-mathematisch-philosophischen Gespräch?
In Kapitel 7.1 wurde ein emergierendes Interaktionsmuster, welches aus dem Datenmaterial hervorgeht, vorgestellt. In diesem Interaktionsmuster ist insbesondere die Rolle der Lehrkraft bei der Entwicklung interaktionaler Verdichtungen im Mathematikunterricht hervorzuheben. Es wurden zwei Richtungen des Musters an Beispielen aufgezeigt, in denen interaktionale Verdichtungen auf die musterhafte Abfolge von Turns folgen. Ausdrücklich ist hierbei der Schritt 3ai herauszustellen, in welchem deutlich wird, dass die Lehrkraft mit flachen Hierarchien und einem Ernstnehmen der Bedeutungsaushandlungen der Kinder interaktionale Verdichtungen fördern kann. Dies wird auch im Rahmen der herausgearbeiteten *Ermöglichungsgrundlagen* deutlich, bei denen eine inhaltliche Neutralität der Lehrkraft als förderlich gewertet werden kann. Entgegen der Befunde von Bredow (2023, S. 455) ist eine inhaltliche Unterstützung der Kinder beim Argumentieren in den von mir untersuchten Gesprächen nicht explizit förderlich, insbesondere weil die Gespräche inhaltlich so offen und weitreichend in ihrer Bedeutungsvielfalt sind, dass eher ein Peer-Austausch zur inhaltlichen Weiterentwicklung der Diskussionen führt. Eventuell liegt dies darin begründet, dass die Peers sich über intersubjektive Vorstellungen besser austauschen können, als die Lehrkräfte es mit ihrer durch fachliche Vorprägung eingeschränkten Sicht auf die aufgemachten Bedeutungsmannigfaltigkeiten könnten.

Welche inhaltlichen Aspekte des Konzepts *Unendlichkeit* können aus den Rekonstruktionen herausgearbeitet werden?
Diese Frage wurde in den Kapiteln 7.4.3 sowie 7.4.1 und 7.4.2 versucht, zu beantworten. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Kinder oftmals Unendlich als eine fiktive Grenze (*bis unendlich*) oder eine Zahl auffassen. Weiterhin lassen sie ihre kosmologischen Vorstellungen von Unendlichkeit in die Diskussionen mit einfließen, was eventuell eine Art der Herstellung eines Lebensweltbezuges durch die Kinder bedeuten könnte. Sie benutzen die explizite Adressierung von Unendlichkeit (als Nomen, Adjektiv, *Adverb*) nicht immer, wenn sie über unendliche Objekte oder Prozesse sprechen.

Oft binden die Kinder die in der Schule erlernten Konzepte, in denen Unendlichkeit implizit enthalten ist, in ihre Argumentationen mit ein und verknüpfen und vertiefen somit sowohl das bereits Gelernte als auch ihre Vorstellung von Unendlichkeit.

9. Limitationen und Diskussion

Im folgenden Kapitel sollen zunächst Einschränkungen der Arbeit aufgeführt und diskutiert werden. Anschließend sollen die Ergebnisse im Kontext des aktuellen Forschungsstand eingeordnet und weiterführend ebenfalls diskutiert werden.

Die m.E. größte Einschränkung der Arbeit ist ihr **explorativer Charakter**. In der Studie wurde, polemisch gesprochen, irgendwie alles aber auch irgendwie nichts untersucht. Das bedeutet ohne Polemik: Ein erster Versuch, mit jüngeren Kindern, eingebettet in den Mathematik-Unterricht, über Unendlichkeit zu sprechen, wurde unternommen. Dabei konnte sich nicht auf bestehende Versuche oder bereits bewährte Konzepte berufen werden, sodass die Unterrichtsdesigns U1-U4 als Experimente, nicht aber als bewährte Praxis anzusehen sind. Daher ist auch die Wahl der Methodik unter Umständen strittig: Interaktionsanalysen sollen Unterrichtspraxis rekonstruieren – eine Unterrichtspraxis, die in den vorliegenden Designs erst neu geschaffen wurde. Dennoch sind emergierende Muster sowie Argumentationen beobachtbar, die durchaus tradierte Praxis zum einen widerspiegeln, zum anderen können sie aber auch das Neuartige in der philosophischen Befassung mit mathematisch nicht eindeutigen Sachverhalten verdeutlichen. Weiter zu „alles“: In dieser Arbeit laufen viele gedankliche Stränge zusammen: Philosophieren mit Kindern im Mathematikunterricht, Unendlichkeit in der Grundschule, Argumentationsprozesse, und vieles mehr. Man könnte der Arbeit nun eine zu oberflächliche Abarbeitung all dieser Stränge ohne Zusammenführung vorwerfen, was hoffentlich durch die saubere Begriffsarbeit, mathematikdidaktische Verortung und Methodik nicht ohne weiteres möglich ist. Zum „nichts“: Diese explorative Studie kann natürlich, vor allem auch wegen der qualitativen Auswertung, nicht mit generalisierbaren Ergebnissen oder sofort in die Praxis umsetzbaren Erkenntnissen dienen. Allerdings wurden auf Basis des Datenmaterials einige Hypothesen aufgestellt, von denen manche weitere Forschung (siehe Kap. 10.3) oder auch unterrichtspraktische Ideen (siehe Kap. 10.2) anregen können. Aus dem explorativen Charakter der Arbeit folgt zwangsläufig auch eine exemplarische Betrachtung des Philosophierens im Mathematikunterricht. Somit ist der explorative Charakter nicht lediglich als Limitation, sondern auch als Stärke der Arbeit anzusehen.

Der **Einfluss der Unterrichtsdesigns** auf die untersuchten Muster und Argumentationsprozesse floss nur marginal in die Betrachtung und Analyse des Datenmaterials ein. Dies ist eine weitere Einschränkung, mit der die Ergebnisse dieser Arbeit betrachtet werden müssen. Beispielsweise sind die Effekte der räumlich begrenzenden Metapher des Beutels (U2, Grundschule) zwar aufgegriffen, aber nicht systematisch untersucht worden. Dies wäre aber m.E. eher eine Untersuchung auf inhaltlicher Ebene, die in dieser Arbeit lediglich in Kap. 7.4 eine Rolle spielt und zur gesamten Ergebnisschau der Arbeit nur wenig beiträgt. Weiterhin ist der den Unterrichtsdesigns zugrunde liegende Unendlichkeitsbegriff aus meiner subjektiven Färbung heraus eher ein mathematischer als ein philosophischer. Wie in Kap. 2.1.5 beschrieben wurde, wird in dieser Arbeit Unendlichkeit eher im Sinne des Transfinitums verstanden. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass die mathematische Vorstellung von Unendlichkeit bzw. Transfinitem die lebenswirkliche und philosophische Vorstellung des Begriffs anstößt und nicht vice versa. Somit ist mit der antizipierten Begriffsbestimmung der mathematische Einfluss vor dem philosophischen zu sehen. Den Anstößen durch die mathematisch geprägten Unterrichtsdesigns folgten aber durchaus philosophische Auseinandersetzungen auf einer meta-mathematischen Ebene durch die Kinder (vgl. das Rekonstruktionskapitel 6).

Eine weitere Limitation kann in der **Subjektivität** der Forscherin gesehen werden, auf die im Folgenden eingegangen werden soll. Sowohl die Argumentationsanalyse als auch die Beschäftigung mit Unendlichkeit wurde, beeinflusst durch meine berufsbiographische Färbung, nicht rein von einem mathematikdidaktischen Standpunkt aus betrachtet, sondern ist beeinflusst durch die (Vor-)Kenntnisse zu Toulmin (2003) und die wissenschaftstheoretische, mathematikhistorische und logizistische Beschäftigung mit Unendlichkeit, auch im Bereich der Non-Standard-Analysis. Dies kann einerseits als Limitation, andererseits auch als Vorteil bei der Durchführung der Analysen angesehen werden: „Mit einer abduktiven Haltung verzichten Forschende, Detektiv/innen oder Mediziner/innen bei der Konstruktion einer neuen Überzeugung nicht auf ihr bisheriges Wissen - im Gegenteil: Sie weiten es systematisch aus, um es dann zur Disposition zu stellen“ (Reichertz, 2016, S. 138). Insbesondere manche Interpretationen, die ohne diese Vorkenntnisse eventuell nicht in dem Maße interpretativ ausgelegt worden wären, könnten im intuitiv-naiven Begriffsverständnis tatsächlich so gemeint gewesen sein (viele Interpretationen haben sich ja auch in Sitzungen mit Peers oder durch Rückschlüsse aus folgenden Turns bestätigt), was ein*er Forscher*in ohne den philosophisch-mathematischen Background eventuell nicht in demselben Maße aufgefallen wäre. Des Weiteren enthält nach Krummheuer & Brandt (2001, S. 81) „jede lokale Methode der Entdeckung neuer Theorieelemente [...] prinzipiell ein Stück spekulativen Ausgriffs“. Komparative Vergleiche im Datenmaterial ermöglichen allerdings „*empirisch kontrollierte* und *theoretisch orientierte* Bedingungen für solche abduktiv erschlossene[n] Ausgriffe“ (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 81, Herv. i. O.). Durch die komparative Sichtung der verdichteten und rekonstruierten Szenen erhöht sich die Theorieorientierung dieser Arbeit und macht sie weniger abhängig von der Forschenden als Subjekt. Des Weiteren ist durch das abduktive Schließen auf neue Theorien und/oder Hypothesen nie eine vollständige Erfüllung der Gütekriterien quantitativer Forschung wie *Reliabilität, Validität* und *Objektivität* erreichbar, was aber auch keinen expliziter Anspruch an qualitative Forschung darstellt. Gerade in diesem explorativen Setting schien eine qualitativ-subjektive Beschäftigung mit den Inhalten im Rahmen des abduktiven Paradigmas zur Gewinnung neuer Erkenntnisse unabwendbar: „Abduktionen resultieren also aus Prozessen, die nicht rational begründ- und kritisierbar sind. Aber auf dem Weg zu neuen Erkenntnissen gibt es zur Abduktion keine Alternative“ (Reichertz, 2016, S. 132).

Unmittelbar mit der Subjektivität verbunden ist auch der **eingeschränkt mathematische Blick auf den Unterrichtsinhalt Unendlichkeit** zu betrachten. Insbesondere kosmologische Aspekte wurden in der historisch-epistemologischen

Vorbetrachtung zum Begriff nur marginal behandelt. So könnte man das Datenmaterial auch mit dem theoretischen Fundament von bspw. Euklids Schriften betrachten, der sich ausgiebig mit der Unendlichkeit des Universums beschäftigt hat. Dies wurde aber durch die Setzung der Arbeitsdefinition zur Unendlichkeit und durch die Fokussierung auf den Mathematikunterricht nicht realisiert.

Weiterhin ist die **mangelnde Schulung der Lehrkräfte hinsichtlich der Führung philosophischer Gespräche** sowohl als Limitation, aber auch als Gewinn für die Arbeit zu betrachten. Die Lehrkräfte wurden vor der Durchführung der Unterrichtsdesigns nicht zum Philosophieren mit Kindern oder zum Führen philosophischer bzw. neo-sokratischer Gespräche unterrichtet. Aus diesem Grund könnten in den Unterrichtsdesigns unter Leitung geschulter Lehrkräfte andere Interaktionsmuster und Argumentationsprozesse auftreten. Dass aber *trotz* dieser mangelnden Schulung sowohl gehaltvolle Argumentationen als auch philosophische Gespräche sowohl unter Peers als auch in Interaktion mit den Lehrkräften herausgearbeitet werden konnten, spricht m.E. für die Gestaltung der Unterrichtsdesigns und den Unterrichtsinhalt Unendlichkeit.

Zur Unendlichkeit in der Grundschule gibt es, wie in Kap. 2.4.3 ausgeführt, keinen aktuellen Forschungsstand, in welchen die Ergebnisse dieser Arbeit eingeordnet werden können. Es bleibt hier festzuhalten, dass die von Holton & Symons (2021) vorgebrachte Forderung nach didaktischer Forschung zum Thema Unendlichkeit in der Grundschule mit dieser Arbeit zumindest einen Vorstoß erhält. Die in den Unterrichtsdesigns enthaltenen Themen sind allerdings eher dem Gebiet der Arithmetik bzw. Philosophie der Mathematik zuzuordnen und erfüllen die Forderung nach einem ganzheitlichen Blick, der auch geometrische oder stochastische Phänomene in der Unterrichtspraxis untersucht, nicht. Dies wäre ein Anlass für weitere Studien (siehe Kap. 10.3) oder für eine Anknüpfung an die Designs von Dominguez et al. (2023). Mit Blick auf die von den Kindern angebrachten inhaltlichen Aspekte zur Unendlichkeit (vgl. Kap. 7.4) erklären sich m.E. hypothetisch einige der in Kap. 2.4.2 erläuterten Schwierigkeiten mit den Grenzwerten. Eine Intuition des Endlichen und der Übertragbarkeit mathematischer Sachverhalte auf die Realität bei einer Beschäftigung mit Grenzwerten ist nicht immer förderlich (Fischbein et al., 1979) und eben diese Intuitionen lassen sich bei den untersuchten Proband*innen mit Konzepten wie der Zahl *unendlich* oder des Anbringens eines nicht unendlich lang möglichen Schreibprozesses bereits in der Grund- und frühen Gesamtschule finden.

Zum Philosophieren mit Kindern im Mathematikunterricht existiert im deutschsprachigen Raum kein systematische Forschung, während es aus dem kanadischen Kollektiv rund um Marie-France Daniel eine Vielzahl quantitativ ausgewerteter Interventionsstudien gibt (vgl. Kap. 3.2.1). Qualitative Arbeiten mit Betrachtung der Argumentationsprozesse gibt es nach meinem aktuellen Kenntnisstand zum Philosophieren im Mathematikunterricht nicht, allerdings emergiert im Zuge der empirischen Wende der Philosophiedidaktik (Michalik, 2018) eine Beschäftigung mit dem *joint meaning making* (De Boer, 2018), einer interpretativen Beschäftigung mit Interaktionsprozessen im Philosophie- und Ethikunterricht bzw. beim Philosophieren mit Kindern. Diese Arbeit könnte man in diesen Tendenzen einordnen, als interaktionistische Perspektiveinnahme auf das Philosophieren mit Kindern im Mathematikunterricht. Argumentationsprozesse in der Grundschule wurden bisher in tradierter Praxis und nicht in so hochgradig explorativen Settings wie in dieser Arbeit untersucht. Die Charakteristika der Argumentationen beim Philosophieren über Unendlichkeit unterscheiden sich maßgeblich zu denen, die bereits für die Grundschule von Fetzer (2011) festgehalten wurden. Exemplarisch lassen sich am Datenmaterial in den Argumentationen der Kinder, auch mit Blick auf die Charakteristika, die positiven Nebeneffekte des Philosophierens mit Kindern wie eine Förderung logisch-kritischen Denkens (Barrow, 2010) oder das Hinterfragen (Mcguinness, 2005) erkennen. Dies zeigt sich insbesondere in den auftretenden Phänomenen wie die Nutzung der reductio ad absurdum (logisch-kritisches Denken) oder das Hinterfragen der Gültigkeit von Argumenten.

10. Ausblick

10.1 Beitrag zur Mathematikdidaktik

Nach Prediger (2007) traten bereits in den 1970er Jahren Wissenschaftler*innen mit der Forderung nach Philosophieren im Mathematikunterricht auf. Sie stellt diese Frage im Jahr 2007 ebenso erneut:

> It was nearly thirty years ago that several well-known German researchers in philosophy of mathematics and mathematics education posed the question of whether philosophy should be integrated into mathematics classrooms and how (cf. Otte 1977). [...] Nearly thirty years after these discussions, the question must still (or again) be posed in the same sense. (Prediger, 2007, S. 43f)

Im Jahr 2024 hat sich an der Situation auch 17 Jahre später nicht viel im deutschsprachigen und internationalen Raum geändert (vgl. Kap. 3.2.1). Diese Arbeit leistet einen Beitrag dazu, die Rolle des Philosophierens im Mathematikunterricht explorativ zu erkunden. Hervorzuheben ist auch, dass das Philosophieren im Mathematikunterricht der *Grundschule* bislang weder international noch im deutschsprachigen Raum aus einer empirischen Erhebung mit qualitativen Auswertungsmethoden betrachtet wurde.

Einen weiteren Beitrag leistet die Arbeit in der Betrachtung der Gespräche über Unendlichkeit und deren Rekonstruktion aus philosophisch-mathematischer Sicht. Nach Holton & Symons (2021) gibt es bislang auch hierzu keine systematischen Erprobungen oder empirischen Untersuchungen.

Aus den obigen zwei Absätzen geht hervor, dass mit dieser Dissertation sowohl ein Exempel für das Philosophieren mit Kindern im Mathematikunterricht als auch für die Behandlung von Unendlichkeit in der Grundschule statuiert wird. Damit fügt sich die Arbeit nicht in eine bestehende mathematikdidaktische Diskussion ein, zu der sie etwas beitragen könnte, sondern eröffnet auf dieser explorativ-exemplarischen Ebene zwei neue Diskussionsfelder. Somit wird eine Grundlage für eine weitere Beschäftigung mit dem Philosophieren im Mathematikunterricht der Grundschule einerseits und andererseits der Implementierung von Unendlichkeit als Unterrichtsgegenstand in der Grundschule geschaffen. Außerdem kann der exemplarische Charakter der Unterrichtsdesigns eine weitere Untersuchung von deren Umsetzung im Sinne des Design-Based-Researchs anstoßen.

Abschließend bleibt festzuhalten: Die *Möglichkeit* von sinnstiftenden Interaktionen im Rahmen philosophisch-mathematischer Gespräche über Unendlichkeit wurde in dieser Arbeit aus mehreren Perspektiven aufgezeigt. Aus dieser Möglichkeit ergeben sich allerdings einige Folgerungen, die in den anschließenden Kapiteln entfaltet werden sollen.

10.2 Unterrichtspraktische Schlussfolgerungen

Für die Unterrichtspraxis gehen aus den Ergebnissen der Arbeit einige Hypothesen hervor, die im Rahmen dieser Arbeit natürlich mit einem eingeschränkten Geltungsbereich zu betrachten sind, aber durch weitere empirische Erkundungen bestätigt werden könnten (vgl. auch Kap. 10.3). Im Folgenden werden diese Hypothesen stichpunktartig aufgeführt:

- Durch ein minimales inhaltliches Eingreifen während philosophischer Gespräche können Lehrkräfte einen intersubjektiven Austausch der Kinder fördern.
- *Cold calls* können zwar zur Einbindung mehrerer Schüler*innen und somit zum Öffnen dyadischer Strukturen führen, sind allerdings mitunter als Erschwerungsgrundlage für interaktionale Verdichtungen (Lehrkraft als *Bystander*) herausgearbeitet worden, sodass die Lehrkraft nur bei einer adäquaten fachlichen Verortung im Gespräch *cold calls* einsetzen sollte.
- Paraphrasen der Beiträge der Kinder durch die Lehrkraft sind für Verdichtungen nachteilig.
- Eine inhaltlich-fachliche Vorbildung der Lehrkräfte zum (vertieften!) Unterrichtsgegenstand ist unabdingbar, damit diese in den Gesprächen nicht die *Bystander*-Rolle einnimmt.[54]
- Philosophisch-mathematische Gespräche über Unendlichkeit fördern unter Umständen kollektiv vertiefte sowie analytische Argumentationen im Mathematikunterricht, bei denen auch von einer erhöhten Explizität ausgegangen werden kann.
- Intuitive Vorstellungen der Kinder zur Unendlichkeit sind stark von endlichen Konzepten geprägt.
- Die Übertragbarkeit in die Realität spielt bei manchen Kindern eine große Rolle in ihrem Verständnis von Unendlichkeit.

Aus diesen Hypothesen ergeben sich einige unterrichtspraktische Schlussfolgerungen. Zunächst ergibt sich aus den Vorstellungen der Kinder zum Konzept Unendlichkeit die Notwendigkeit der curricularen Implementierung und eine explizite Behandlung der mathematisch-theoretischen Verhaftung des Themas. Die in Kap. 2.1.5 angeführte Begriffsbestimmung und die Auseinandersetzung mit dem Endlichen im Unendlichen könnte m.E. dabei helfen, begrenzte Vorstellungen aufzubrechen. Die Unterscheidung zwischen potentieller und aktualer Unendlichkeit sollte

54 Dies wird besonders in der Rekonstruktion von den Unterrichtsstunden bei Frau Fichtel deutlich, in welchen es nicht immer ganz klar ist, ob sie als Lehrkraft den Gesprächsinhalten der Kinder ausreichend folgen kann hier unterrichtspraktisch mit bedacht werden. Vorschläge für curriculare Anknüpfungspunkte werden in Tabelle 11.11 unterbreitet.

Weiterhin folgt aus der Hypothese, dass philosophisch-mathematische Gespräche über Unendlichkeit die Charakteristika von Argumentationen im Mathematikunterricht beeinflussen können, dass das Philosophieren mit Kindern im Mathematikunterricht als Unterrichtsprinzip sowohl in die akademische Lehre als auch in den Schulen eingebracht werden sollte. Die in dieser Arbeit angebrachten Unterrichtsdesigns können als Anstoß und Beispiel dienen, wobei zukünftig auch Themen wie das Wesen der Mathematik, die Beschaffenheit von Zahlen usw. mit philosophischen Gesprächen aufgegriffen werden könnten. Die weiter aufgestellten Hypothesen zum förderlichen Agieren der Lehrkräfte könnten dabei helfen, das Philosophieren mit Kindern im Mathematikunterricht auch mathematikdidaktisch auszuschärfen.

Abschließend ist mit rahmendem Blick auf die Einleitung hier nochmals die Notwendigkeit eines Propädeutikums zur Unendlichkeit mit Hilfe philosophischer Gespräche zum Thema festzuhalten. Es bleibt zu hoffen, dass diese Arbeit eine Legitimation und einen Anstoß für ein solches Propädeutikum geben kann.

10.3 Anknüpfende Forschungsdesiderata

Eng mit den unterrichtspraktischen Folgerungen hängen auch einige Desiderata für eine weitere empirische Beschäftigung mit den Ergebnissen der Arbeit zusammen. So wäre zum Beispiel die langfristige Etablierung eines Propädeutikums zur Unendlichkeit in der Grund- und frühen Gesamtschule mit explorativen Längsschnittstudien zu erkunden, bei denen vor allem die späteren Kompetenzen der Schüler*innen in der Analysis der Sekundarstufe II im Umgang mit Grenzwerten evaluiert werden sollten. Hierzu bedürfte es vorab einiger Design-Based-Research-Experimente, um klar umrissene, sinnbildende und curricular angelehnte Unterrichtsdesigns zu entwickeln, welche die unterrichtspraktischen Forderungen aus Kap. 10.2 implementieren. Weiterhin sollte auf dieser Basis eine Untersuchung zum Begriffsverständnis der Schüler*innen ermöglicht werden, welche sich an die Stufen des Begriffsverständnisses zur Unendlichkeit nach Dötschel (2011) anlehnt. Weitere Gebiete der Mathematik wie bspw. Geometrie, in welchen die Unendlichkeit auch eine signifikante Rolle spielt, könnten im Rahmen einer solchen Längsschnittstudie in Designs implementiert werden und somit zu einem umfassenderen Bild der Vorstellungen der Kinder zum Thema führen.

Auch könnten und sollten Längsschnittstudien zu den Effekten des Philosophierens im Mathematikunterricht, unabhängig vom Thema Unendlichkeit, angestoßen werden. Hierbei wäre ein Mixed-Methods-Ansatz empfehlenswert, bei welchem sowohl bisher quantitativ nachgewiesene Effekte des Philosophierens mit Kindern auf den Mathematikunterricht übertragen und überprüft werden, aber auch qualitativ hypothesengenerierend weiterhin die Argumentationsprozesse der Kinder untersucht werden können.

Für diese Arbeit wäre eine erneute Untersuchung des Datenmaterials in Hinblick auf ko-konstruktive Problemlöseprozesse auf Peer-Ebene weiterhin erstrebenswert. Auch könnte es von Interesse sein, die erarbeiteten Toulmin-Schemata mit den Erschwerungs- und Ermöglichungsgrundlagen sowie dem Interaktionsmuster abzugleichen und durch komparative Vergleiche mit neuen Versuchsgruppen Bezüge zwischen den Argumentationen und dem Agieren der Lehrkräfte herstellen zu können. Hierzu würde auch eine qualitative Erhebung des Vorwissens der Lehrkräfte zum Thema Unendlichkeit in Einzelinterviews beitragen, um deren inhaltliche Eingriffe besser einordnen zu können.

Als größte Möglichkeit der Anknüpfung erachte ich aber die herausgestellten Charakteristika der Argumentationen, zu welchen man nun anschließend prüfen müsste, ob sie durch die Verbindung des Themas Unendlichkeit mit philosophischen Gesprächen oder durch entweder das Philosophieren mit Kindern oder die Beschäftigung mit Unendlichkeit im Einzelnen auftreten. Dies könnte man in den oben beschriebenen Längsschnittstudien mit einem zusätzlichen qualitativen Zugang m.E. konstruktiv umsetzen.

Literatur

Ahbel-Rappe, S. (2009). Platonisms: Ancient, Modern, and Postmodern (review). *Journal of the History of Philosophy*, *48*(1), 93–94. https://doi.org/10.1353/hph.0.0181

Ambrus, A. (1992). *Indirektes Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht*. Hildesheim, Franzbecker.

Applis, S. (2017). Die empirische Wende in der Fachdidaktik und die (Sonder-)Stellung der Philosophiedidaktik. In J. Nida-Rümelin & I. Spiegel & M. Tiedemann (Hrsg.), *Handbuch Philosophie und Ethik* (S. 144–152). Paderborn, utb.

Aristoteles. (1829). *Physik*. Leipzig, übersetzt von Christian Herrmann Weiße.CreateSpace Independent Publishing Platform.

Aristoteles. (1907). *Metaphysik*. Jena, übersetzt von Adolf Lasson. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Barrow, W. (2010). Dialogic, participation and the potential for Philosophy for Children. *Thinking Skills and Creativity*, *5*(2), 61–69. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2010.01.002

Baruk, S. (1995). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires: Pédagogie, langue, méthode, exemples, étymologie, histoire, curiosités* (Nouv.éd enrichie de 3 index). Paris, Ed. du Seuil.

Bauer, L. (2011). Mathematik, Intuition, Formalisierung: Eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *32*(1), 79–102. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s13138-010-0024-9

Bauer, L. & Rolka, K. & Törner, G. (2005). Mentale Repräsentationen von Irrationalzahlen – eine Analyse von Schülerinnenaufsätzen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *26*(1), 3–27.

Baumann, P. & Kirski, T. (2017). Analysis ohne Grenzwert! *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *43*(102).

Baumann, P. & Steinig, B. & Wunderling, H. (1995). Differentialrechnung mit hyperrellen Zahlen. *Praxis der Mathematik*, (2), 65–74.

Bedürftig, T. (2018). Die mathematische Spur der Schildkröte. In K. Engel (Hrsg.), *Von Schildkröten und Lügnern: Paradoxien und Antinomien in den Wissenschaften* (S. 121–147). Münster, mentis.

Bedürftig, T. & Kuhlemann, K. (2020). *Grenzwerte oder infinitesimale Zahlen?: Über Einstiege in die Analysis und ihren Hintergrund*. Wiesbaden, Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-31908-3

Bedürftig, T. & Murawski, R. (2015). *Philosophie der Mathematik* (3. erw. und überab. Aufl.). Berlin, de Gruyter.

Benthaus, B. (2018). *Dialektisches Denken Von Kindern*. Ergon Verlag.

Benz, C. & Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2014). *Frühe mathematische Bildung*. Wiesbaden, Springer.

Betts, P. (2017). Infinity as a Mathematics Education Playground. In M. Shelley & M. Pehlivan (Hrsg.), *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2017*. ISRES.

Bieda, K. N. (2010). Enacting Proof-Related Tasks in Middle School Mathematics: Challenges and Opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(4), 351–382.

Brandt, B. (2004). *Kinder als Lernende. Partizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer*. Frankfurt am Main, Peter Lang.

Brandt, B. & Schreiber, C. & Schütte, M. & Gerlach, K. (2023). Qualitative mathematikdidaktische Forschung: Das Wechselspiel zwischen Theorieentwicklung und der Adaption von Untersuchungsmethoden. In R. Bruder & A. Büchter & H. Gasteiger & B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 747–773). Berlin, Heidelberg, Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_27

Bredow, F. (2023). *Mathematisches Argumentieren im Übergang von der Arithmetik zur Algebra: Eine qualitative Studie von Lehrkrafthandlungen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden, Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-42462-6

Brendel, E. (2010). Antinomie. In H. J. Sandkühler (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie* (S. 6). Hamburg, Felix Meiner Verlag.

Brendel, E. (2015). *Die Wahrheit über den Lügner - Eine philosophisch-logische Analyse der Antinomie des Lügners*. Berlin, de Gruyter.

Brieger, J. (2018). Paradoxien aus der Spieltheorie. In K. Engel (Hrsg.), *Von Schildkröten und Lügnern: Paradoxien und Antinomien in den Wissenschaften* (S. 225–241). Münster, mentis.

Brieger, J. (2022a). „Denk doch mal an die Un-Realität! Philosophische Diskussionen über Unendlichkeit im Mathematikunterricht der Grundschule. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematische Bildung heute und morgen: Herausforderungen und Perspektiven: Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2022* (S. 81–84). Bamberg, University of Bamberg Press.

Brieger, J. (2022b). „You are thinking too much about reality. Just think about un-reality“ – Implementing philosophical debates about infinity in mathematics lessons in primary school. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *39*.

Brieger, J. (2023). „Dann sind wir voller Zahlen“ – philosophische Gespräche über Unendlichkeit im Mathematikunterricht in der Primarstufe. *Zeitschrift für Didaktik der Philosophie und Ethik*, *4*, 32–39.

Bruner, J. (1973). *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin, Berlin Verlag.

Brüning, B. (2005). Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen im Kontext von Ethikunterricht. In C. Hössle & K. Michalik (Hrsg.), *Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen* (S. 60–67). Baltmannsweiler, Schneider Hohengehren.

Brüning, B. (2017). Philosophieren mit Kindern. In J. Nida-Rümelin & I. Spiegel & M. Tiedemann (Hrsg.), *Handbuch Philosophie und Ethik* (S. 131–136). Paderborn, Brill, Schöningh (utb).

Buchbinder, O. & Zaslavsky, O. (2013). A holistic approach for designing tasks that capture and enhance mathematical understanding of a particular topic: The case of the interplay between examples and proof. In C. Margolina (Hrsg.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (S. 27–35). Oxford, Oxford Press.

Cantor, G. (1895). Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, *46*(4), 481–512.

Chiba, K. (2018). Ist der Raum aktual-unendlich? In *Natur und Freiheit* (S. 1461–1468). Berlin, Boston, De Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110467888-126

Chu, J. & Cheung, P. & Schneider, R. M. & Sullivan, J. & Barner, D. (2020). Counting to Infinity: Does Learning the Syntax of the Count List Predict Knowledge That Numbers Are Infinite? *Cognitive Science*, *44*(8). https://doi.org/10.1111/cogs.12875

Cohen, L. & Manion, L. (1980). *Research methods in education.* London, Croom Helm.

Corbin, J. M. & Strauss, A. L. (2015). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (Fourth edition). Los Angeles, London, New Delhi, Singapore, Washington DC, Boston, SAGE.

Courant, R. & Robbins, H. (2000). *Was Ist Mathematik?* (5. Aufl.). Berlin, Springer.

Cramer, J. (2018). *Mathematisches Argumentieren als Diskurs.* Wiesbaden, Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22908-5

Dallimore, E. J. & Hertenstein, J. H. & Platt, M. B. (2019). Leveling the Playing Field: How Cold-Calling Affects Class Discussion Gender Equity. *Journal of Education and Learning*, *8*(2), 14–24. https://doi.org/10.5539/jel.v8n2p14

Daniel, M.-F. (2008). Learning to Philosophize: Positive Impacts and Conditions for Implementation. *Thinking: The Journal of Philosophy for Children*, *18*(4), 36–48. https://doi.org/10.5840/thinking200818415

Daniel, M.-F. & Lafortune, L. & Pallascio, R. & Schleifer, M. (1999). Philosophical Reflection and Cooperative Practices in an Elementary School Mathematics Classroom. *Canadian Journal of Education/Revue canadienne de l'éducation*, *24*(4), 426–440. https://doi.org/10.2307/1585896

Daniel, M.-F. & Lafortune, L. & Pallascio, R. & Sykes, P. (1994). A Primary School Curriculum to Foster Thinking About Mathematics. *Analytic Teaching*, *15*(01), 29–40.

Date-Huxtable, E. & Cavanagh, M. & Coady, C. & Easey, M. (2018). Conceptualisations of infinity by primary pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(4), 545–567. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0243-9

Davis, A. (2012). HEGEL'S IDEALISM: THE INFINITE AS SELF-RELATION. *History of Philosophy Quarterly*, *29*(2), 177–194.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 281–303.

De Bianchi, S. (2015). When series go in indefinitum, ad infinitum and in infinitum concepts of infinity in Kant's antinomy of pure reason. *Synthese*, *192*(8), 2395–2412. https://doi.org/10.1007/s11229-015-0813-2

De Boer, H. (2018). *Joint meaning making* im Forschungsdiskurs zu philosophischen Gesprächen mit Kindern. In H. De Boer & K. Michalik (Hrsg.), *Phi-*

losophieren mit Kindern - Forschungszugänge und -perspektiven (S. 33–45). Opladen/Berlin/Toronto, Verlag Barbara Budrich.

Deakin Crick, R. & Joldersma, C. W. (2007). Habermas, lifelong learning and citizenship education. *Studies in Philosophy and Education*, *26*(2), 77–95.

Deiser, O. (2010). *Einführung in die Mengenlehre*. Berlin, Heidelberg, Springer.

Descartes, R. (1979). *Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft* (Nachdr., Bd. 262b). Hamburg, Meiner.

Di Sia, P. (2019). A Cultural overview on the concept of infinity. *Journal of Education Culture and Society*, *10*(1), 17–38. https://doi.org/10.15503/jecs20191.17.38

Diels, H. (1963). *Die Fragmente der Vorsokratiker*. Reinbek bei Hamburg, Rowohlt.

Dominguez, H. & Abreu, S. & Peralta, M. (2023). Young philosophers: fifth-grade students animating the concept of space. *ZDM – Mathematics Education*, *55*(6), 1151–1171. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01483-6

Dötsch, J. (2023). 'Doing gender' in der kollektiven Bedeutungsaushandlung im philosophischen Gespräch. In B. Kümin & C. Mathis & U. Schellenberg (Hrsg.), *Philosophieren und Ethik: aktuelle Perspektiven zum Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen* (S. 169–182). München, kopaed.

Dötschel, D. (2011). Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 207–210). Münster, WTM.

Drozdek, A. (2008). *In the beginning was the apeiron*. Wiesbaden, Franz Steiner Verlag.

Duncker, L. (2023). Bildung und Diskursivität. Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen aus schultheoretischer Sicht. In B. Kümin & C. Mathis & U. Schellenberg (Hrsg.), *Philosophieren und Ethik: aktuelle Perspektiven zum Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen* (S. 17–36). München, kopaed.

Dutilh Novaes, C. (2016). Reductio ad absurdum from a dialogical perspective. *Philosophical Studies*, *173*(10), 2605–2628. https://doi.org/10.1007/s11098-016-0667-6

Easwaran, K. & Hájek, A. & Mancosu, P. & Oppy, G. (2021). Infinity. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2021). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Ely, R. (2010). Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, *41*(2), 117–146. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0117

Engel, K. (Hrsg.). (2018). *Von Schildkröten und Lügnern: Paradoxien und Antinomien in den Wissenschaften*. Münster, mentis.

Engels, H. (2017). Gedankenexperimente. In J. Nida-Rümelin & I. Spiegel & M. Tiedemann (Hrsg.), *Handbuch Philosophie und Ethik* (S. 187–196). Paderborn, Brill, Schöningh (utb).

English, L. (1992). Philosophy for Children and Mathematics Education. *Thinking: The Journal of Philosophy for Children*, *10*(1), 15–16. https://doi.org/10.5840/thinking199210118

Enzensberger, H. M. & Berner, R. S. (2011). *Der Zahlenteufel: Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben* (11. Aufl.). München, Dt. Taschenbuch-Verl.

Ernest, P. (1992). The nature of mathematics: Towards a social constructivist account. *Science and Education*, *1* (1), 89–100. https://doi.org/10.1007/bf00430212

Esterbauer, R. (2008). „Draußen bei den anderen Welten“. Unendlichkeit zwischen physikalischer Kosmologie und christlicher Schöpfungstheorie. In J. Brachtendorf & T. Möllenbeck & G. Nickel & S. Schaede (Hrsg.), *Unendlichkeit: interdisziplinäre Perspektiven* (S. 141–155). Tübingen, Mohr Siebeck.

Evers, D. (2008). Unendlichkeit und Kontinuum bei Leibniz und Peirce. In J. Brachtendorf & T. Möllenbeck & G. Nickel & S. Schaede (Hrsg.), *Unendlichkeit: interdisziplinäre Perspektiven* (S. 249–267). Tübingen, Mohr Siebeck.

Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathemathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *32* (1), 27–51. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0021-z

Finkelberg, A. (1993). Anaximanders Conception of the Apeiron. *Phronesis*, *38* (3), 229–256.

Fischbein, E. & Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10* (1), 3–40.

Fischbein, E. (2001). *Educational Studies in Mathematics*, *48* (2), 309–329.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule.* Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag.

Frege, G. (1892). über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, *100* (1), 25–50.

Frege, G. (1987). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Philipp Reclam jun.

Gesellschaft für deutsche Sprache e.V. (2022). Ronna und Quetta, Ronto und Quekto. Verfügbar 12. April 2023 unter https://gfds.de/ronna-und-quetta-ronto-und-quekto/

Goodman, N. D. (1990). Mathematics as natural science. *Journal of Symbolic Logic*, *55* (1), 182–193. https://doi.org/10.2307/2274961

Gravemeijer, K. & Prediger, S. (2019). Topic-Specific Design Research: An Introduction. In *ICME-13 Monographs* (S. 33–57). Hamburg, Springer International Publishing.

Greefrath, G. & Oldenburg, R. & Siller, H.-S. & Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis.* Berlin, Heidelberg, Springer Spektrum.

Grundey, S. (2015). *Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen: Entwicklung und vergleichend empirische Untersuchung eines Unterrichtskonzepts am Ende der Sekundarstufe.* Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-08937-5

Hannula, M. S. & Pehkonen, E. & Maijala, H. & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4* (2), 317–337. https://doi.org/10.5485/tmcs.2006.0129

Harnik, V. (1986). Infinitesimals from Leibniz to Robinson time to bring them back to school. *The Mathematical Intelligencer*, *8* (2), 41–47.

Hatfield, G. (2023). René Descartes. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2023). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Hefendehl-Hebeker, L. (2019). Auf rationale Weise zur Irrationalität. In A. Büchter & M. Glade & R. Herold-Blasius & M. Klinger & F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht: Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 33–45). Wiesbaden, Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3_3

Hegel, G. W. F. (1979). *Werke.* Frankfurt a.M., Suhrkamp.

Heuser, H. (2008). *Unendlichkeiten.* Wiesbaden, Vieweg + Teubner Verlag.

Hilbert, D. (1926). über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, *95*, 161–190. http://eudml.org/doc/159124

Hilbert, D. (2009). *über das Unendliche* (W. B. Ewald & W. Seig, Hrsg.). Berlin, Springer.

Höck, G. (2015). *Ko-Konstruktive Problemlösegespräche im Mathematikunterricht.* Münster, Waxmann.

Holton, D. & Symons, D. (2021). 'Infinity-based thinking' in the primary classroom: a case for its inclusion in the curriculum, *33*(3), 435–450. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00311-4

Hörburger, A. (2023). Empathieförderung durch Philosophieren mit Kindern. In B. Kümin & C. Mathis & U. Schellenberg (Hrsg.), *Philosophieren und Ethik: aktuelle Perspektiven zum Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen* (S. 169–182). München, kopaed.

Horsten, L. (2016). Philosophy of Mathematics. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Huggett, N. (2019). Zeno's Paradoxes. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2019). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67.

Hussmann, S. & Thiele, J. & Hinz, R. & Prediger, S. & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen - Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign: Zur Begründung und Umsetzung genuin fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 25–42). Münster, Waxmann.

Irvine, A. D. & Deutsch, H. (2016). Russell's Paradox. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.*

Iversen, S. M. (2006). Modeling interdisciplinary activities involving mathematics and philosophy. *The Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 85–98. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1037

Jablonski, S. & Ludwig, M. (2019). Mathematical Arguments in the Context of Mathematical Giftedness - Analysis of Oral Argumentations with Toulmin. In U. T. Jankvist & M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Utrecht. https://hal.science/hal-02398107

Jankvist, U. T. (2014). A historical teaching module on 'the unreasonable effectiveness of mathematics': Boolean algebra and Shannon circuits. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, *29*(2), 120–133. https://doi.org/10.1080/17498430.2014.874869

Jankvist, U. T. & Iversen, S. M. (2014). 'Whys' and 'Hows' of Using Philosophy in Mathematics Education. *Science & Education*, *23*(1), 205–222. https://doi.org/10.1007/s11191-013-9616-3

Jaschke, T. (2017). Welchen Beitrag können fachwissenschaftliche Veranstaltungen zur unterrichtlichen Rekonstruktion fachlicher Inhalte leisten? *Mathematik im Unterricht*, *8*(1), 59–70.

Jech, T. (2007). *Set Theory - The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Berlin Heidelberg, Springer Science und Business Media.

Jirotková, D. & Littler, G. (2004). Insight into Pupils' Understanding of Infinity in a Geometrical Context. *International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Johnson, J. R. (2019). Will Mathematics Ultimately Describe Nature? *Philosophy and Cosmology*, *23*. https://doi.org/10.29202/phil-cosm/23/3

Jung, C. (2016). *Psychological Types*. London, Routledge.

Juter, K. (2006). Limits of Functions as They Developed Through Time and as Students Learn Them Today. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 407–431. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0804_3

Kahn, K. & Sendova, E. & Sacristán, A. I. & Noss, R. (2011). Young Students Exploring Cardinality by Constructing Infinite Processes. *Technology, Knowledge and Learning*, *16*(1), 3–34. https://doi.org/10.1007/s10758-011-9175-0

Kannetzky, F. (2000). *Paradoxes Denken. Theoretische und praktische Irritationen des Denkens*. Paderborn, mentis.

Kannetzky, F. (2010). Paradox/Paradoxie. In J. Mittelstraß (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie*. Wiesbaden, Springer.

Kant, I. (1977). *Kritik der reinen Vernunft*. Holzinger.

Katz, K. U. & Katz, M. G. (2010). Zooming in on infinitesimal 1–.9.. in a post-triumvirate era. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(3), 259–273. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9239-4

Kidron, I. & Tall, D. (2014). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 183–199. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9567-x

Klaus, G. & Buhr, M. (1971a). *Philosophisches Wörterbuch 1* (8. Aufl.). Leipzig, VEB Verlag Enzyklopädie.

Klaus, G. & Buhr, M. (1971b). *Philosophisches Wörterbuch 2* (8. Aufl.). Leipzig, VEB Verlag Enzyklopädie.

Knipping, C. & Reid, D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. *Compendium for early career researchers in mathematics education*, 3–31. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_1

Knobloch, E. (2012). Leibniz and the infinite. In *Optimization Stories* (S. 19–23). EMS Press. https://doi.org/10.4171/dms/6/6

Kondratieva, M. (2017). Capturing Infinity: Formal Techniques, Personal Convictions, and Rigorous Justifications. In B. Gold & C. E. Behrens & R. A. Simons (Hrsg.), *Using the Philosophy of Mathematics in Teaching Undergraduate Mathematics*. Washington D.C., The Mathematical Association of America.

Krátká, M. & Eisenmann, P. & Cihlář, J. (2021). Four conceptions of infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(10), 2661–2685. https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1897894

Kreis, G. (2015). *Negative Dialektik des Unendlichen - Kant, Hegel, Cantor.* Frankfurt am Main, Berlin, Suhrkamp Verlag.

Krummheuer, G. (2004). Wie kann man Mathematikunterricht verändern? Innovation von Unterricht aus Sicht eines Ansatzes der Interpretativen Unterrichtsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *25*(2), 112–129. https://doi.org/10.1007/bf03338997

Krummheuer, G. (2012). Interaktionsanalyse. In F. Heinzel (Hrsg.), *Methoden der Kindheitsforschung: ein Überblick über Forschungszugänge zur kindlichen Perspektive* (2., überarb. Aufl., S. 234–247). Weinheim, Beltz-Juventa.

Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion: partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule.* Weinheim, Beltz.

Krummheuer, G. & Fetzer, M. (2005). *Der Alltag im Mathematikunterricht.* Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag.

Kuckartz, U. (2009). *Einführung in die computergestützte Analyse qualitativer Daten* (3. Aufl.). Wiesbaden, VS Verlag fur Sozialwissenschaften.

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (4. Aufl.). Weinheim, Juventa Verlag.

Kuhlemann, K. (2023). *Nonstandard-Analysis.* Berlin, De Gruyter.

Kultusministerkonferenz. (2004). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15. 10. 2004. Verfügbar 31. Mai 2017 unter http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

Kümin, B. & Mathis, C. & Schellenberg, U. (2023). Ethikunterricht aus Sicht der Lehrpersonen. Empirische Erkenntnisse zur Einführung eines neuen Faches in der Volksschule. In B. Kümin & C. Mathis & U. Schellenberg (Hrsg.), *Philosophieren und Ethik: aktuelle Perspektiven zum Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen* (S. 169–182). München, kopaed.

Lafortune, L. & Daniel, M.-F. & Mongeau, P. & Pallascio, R. (2003). Philosophy for Children Adapted to Mathematics: A Study of its Impact on the Evolution of Affective. *Analytic Teaching*, *23*(01), 10–25.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being.* New York, Basic Books.

Lamnek, S. & Krell, C. (2016). *Qualitative Sozialforschung* (6. Aufl.). Weinheim, Julius Beltz.

Lappan, G. & Wheeler, M. M. (1987). Childern's Understanding of Zero and Infinity. *The Arithmetic Teacher*, *35*(3), 42–44.

Leibniz, G. W. (1904). *Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand.* Leipzig, F. Meiner.

Lengnink, K. (2019). Sinnstiftende Lehr-/Lernprozesse initiieren – Ansprüche an den Mathematikunterricht und ihre Realisierungen. Eine kritische Debatte. In B. Ralle & J. Thiele (Hrsg.), *Sinnstiftende Lehr-Lernprozesse initiieren: Zur Rolle von Kontexten in der Fachdidaktik.* Münster, Waxmann.

Leuders, T. & Hußmann, S. & Barzel, B. & Prediger, S. (2011). „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *PM : Praxis der Mathematik in der Schule*, *53*(37), 2–9.

Lipman, M. (2003). *Thinking in education* (2. Aufl.). Cambridge, Cambridge Univ. Press.

Lipman, M. (2010). *Philosophy in the Classroom*. Philadelphia, Temple University Press.

Liu, P.-H. & Niess, M. L. (2006). An Exploratory Study of College Students' Views of Mathematical Thinking in a Historical Approach Calculus Course. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 373–406. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0804_2

Look, B. C. (2020). Gottfried Wilhelm Leibniz. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2020). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Lorenzen, P. (1994). Konstruktivismus. *Journal for General Philosophy of Science*, *25*(1), 125–133. https://doi.org/10.1007/bf00769281

Luis, E. & Moreno, A. & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 211–231. https://doi.org/10.1007/bf00368339

Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, *10*(2), 167–182.

Mangoldt, H. v. & Knopp, K. (1966). *Einführung in die höhere Mathematik*. Leipzig, S. Hirzel Verlag.

Martens, E. (2003). *Methodik des Ethik- und Philosophieunterrichts. Philosophieren als elementare Kulturtechnik*. Hannover, Siebert.

Martens, E. (2017). Philosophie als Kulturtechnik humaner Lebensgestaltung. In J. Nida-Rümelin & I. Spiegel & M. Tiedemann (Hrsg.), *Handbuch Philosophie und Ethik* (S. 41–48). Paderborn, Brill, Schöningh (utb).

Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen - Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *34*(1), 73–97. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0047-5

Matthews, G. B. (1980). *Philosophy and the young child*. Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press.

Mayring, P. (2008a). Neuere Entwicklungen in der qualitativen Forschung und der Qualitativen Inhaltsanalyse. In P. Mayring & M. Gläser-Zikuda (Hrsg.), *Die Praxis der Qualitativen Inhaltsanalyse* (2. Aufl., S. 7–19). Weinheim, Julius Beltz.

Mayring, P. (2008b). *Qualitative Inhaltsanalyse* (10. Aufl.). Weinheim, Julius Beltz.

Mcguinness, C. (2005). Teaching thinking: Theory and practice. *British Journal of Educational Psychology*, *2*(3), 107–126. https://doi.org/10.1348/000709905X61003

McKenney, S. & Reeves, T. C. (2018). *Conducting Educational Design Research*. New York, Routledge.

Meerwaldt, D. (2011). Philosophieren als Unterrichtsprinzip im Mathematikunterricht. In M. Helmerich & K. Lengnink & G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik verstehen* (S. 117–129). Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag.

Meschkowski, H. (1979). *Mathematik und Realität: Vorträge u. Aufsätze.* Mannheim, Wien, Zürich, Bibliographisches Institut.

Meyer, M. (2021). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: Von der Abduktion zum Argument.* Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32391-2

Michalik, K. (2005). Philosophieren über Mensch und Natur im Sachunterricht. In C. Hössle & K. Michalik (Hrsg.), *Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen* (S. 13–23). Baltmannsweiler, Schneider Hohengehren.

Michalik, K. (2018). Empirische Forschung zu Wirkungen des Philosophierens mit Kindern auf die Entwicklung von Kindern, Lehrkräften und Unterricht. In H. De Boer & K. Michalik (Hrsg.), *Philosophieren mit Kindern - Forschungszugänge und -perspektiven* (S. 13–32). Opladen/Berlin/Toronto, Verlag Barbara Budrich.

Michalik, K. (2023). Philosophieren mit Kindern und Inklusion. In B. Kümin & C. Mathis & U. Schellenberg (Hrsg.), *Philosophieren und Ethik: aktuelle Perspektiven zum Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen* (S. 37–52). München, kopaed.

Michalik, K. & Schreier, H. (2006). *Wie wäre es, einen Frosch zu küssen? Philosophieren mit Kindern im Grundschulunterricht.* Braunschweig, Westermann.

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse.* Berlin, Suhrkamp.

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport Land Brandenburg. (2017). Teil C Mathematik. Jahrgangsstufen 1-10. Verfügbar 2. Dezember 2020 unter https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/Teil_C_Mathematik_2015_11_10_WEB.pdf

Ministerium für Bildung Sachsen-Anhalt. (2017). Fachlehrplan Grundschule Mathematik. Verfügbar 2. Dezember 2020 unter https://lisa.sachsen-anhalt.de/fileadmin/Bibliothek/Politik_und_Verwaltung/MK/LISA/Unterricht/Lehrplaene/GS/Anpassung/lp_gs_mathe_01_08_2019.pdf

Ministerium für Bildung Sachsen-Anhalt. (2019). Fachlehrplan Gymnasium/ Berufliches Gymnasium Mathematik. Verfügbar 2. Dezember 2020 unter https://lisa.sachsen-anhalt.de/fileadmin/Bibliothek/Politik_und_Verwaltung/MK/LISA/Unterricht/Lehrplaene/Gym/Anpassung/Mathematik_FLP_Gym_01_07_2019.pdf

Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2), 239–257. https://doi.org/0.1023/A:1016090925967

Montag, B. (2017). Debatten im Ethik- und Philosophieunterricht. In J. Nida-Rümelin & I. Spiegel & M. Tiedemann (Hrsg.), *Handbuch Philosophie und Ethik* (S. 196–205). Paderborn, (utb).

Moore, A. (2019). *The Infinite.* London, Routledge.

Movshovitz-Hadar, N. & Hadass, R. (1990). Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(3), 265–287.

Mückenheim, W. (2006). *Die Mathematik des Unendlichen.* Aachen, Shaker.

Nadler, S. (2023). Baruch Spinoza. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2023). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Neumann, J. v. (1925). Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

Nevers, P. (2005). Wozu ist Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen im Biologieunterricht gut? In C. Hössle & K. Michalik (Hrsg.), *Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen* (S. 24–35). Baltmannsweiler, Schneider Hohengehren.

Nickel, G. (2008). Intentionalität und Unendlichkeit. Herrmann Weyl und Edmund Husserl. In J. Brachtendorf & T. Möllenbeck & G. Nickel & S. Schaede (Hrsg.), *Unendlichkeit: interdisziplinäre Perspektiven* (S. 199–216). Tübingen, Mohr Siebeck.

Nielsen, M. (2010). *Hvad er tal?* Verfügbar 15. Januar 2024 unter https://uvmat.dk/matviden/filer/02_hvad_er_tal.pdf

OpenAI. (2023). *ChatGPT*. Verfügbar 9. Mai 2023 unter https://chat.openai.com/

Palmer, J. (2021). Zeno of Elea. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Pannenberg, W. (2001). Unendlichkeit. In J. Ritter & K. Gründer & G. Gabriel (Hrsg.), *Historisches Wörterbuch der Philosophie.* Basel, Schwabe & Co AG.

Pantsar, M. (2015). In search of $aleph_0$: how infinity can be created. *Synthese*, *192*(8), 2489–2511. https://doi.org/10.1007/s11229-015-0775-4

Paul, T. (2020). Mathematical Entities without Objects. On Realism in Mathematics and a Possible Mathematization of (Non)Platonism: Does Platonism Dissolve in Mathematics? *European Review*, *29*(2), 253–273. https://doi.org/10.1017/s1062798720000393

Peck, F. (2018). Rejecting Platonism: Recovering Humanity in Mathematics Education. *Education Sciences*, *8*(2), 43. https://doi.org/10.3390/educsci8020043

Pehkonen, E. & Maijala, H. & Soro, R. & Hannula, M. (2006). Infinity of numbers: how students understand it. In *Mathematics in the centre* (S. 345–352). Prag, International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Petersen, M. (2019). *Effekte schulischen Philosophierens auf das Selbstkonzept untersuchen - warum und wie?. Educational Design Studie zur Operationalisierung und Implementierung philosophischer Gespräche zu Forschungszwecken.* Hamburg, Universitätsbibliothek Hamburg.

Pfeifer, V. (2003). *Didaktik des Ethikunterrichts.* Stuttgart, Kohlhammer.

Popper, K. R. (1996). *Alles Leben ist Problemlösen - über Erkenntnis, Geschichte und Politik.* München, Piper.

Pörschke, T. (2017). Das Bonbonmodell verbessern. Tim Pörschke entwickelt Sistermanns Stundenmodell weiter. *Information Philosophie*, *4*, 110–112.

Prediger, S. (2007). Philosophical Reflections in Mathematics Classrooms. In K. François & J. P. Van Bendegem (Hrsg.), *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (S. 43–58). Boston, MA, Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71575-9_3

Pritchard, M. (2017). Philosophy for Children. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2017). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Promethean. (2022). *Explain Everything* [Mobile App] [https://explaineverything.com].

Przenioslo, M. (2006). Cognitive structures connected with the calculus notions held by representatives of various intellect types. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *27*(2), 113–139. https://doi.org/10.1007/BF03339032

Quine, W. (1976). *The Ways of Paradox, and Other Essays.* Harvard University Press.

Raupach-Strey, G. (1998). Zum Berliner Schulversuch Ethik/Philosophie. *Deutsche Zeitschrift für Philosophie*, *46*(4), 651–668. https://doi.org/doi:10.1524/dzph.1998.46.4.651

Raupach-Strey, G. (2002). *Sokratische Didaktik: die didaktische Bedeutung der Sokratischen Methode in der Tradition von Leonard Nelson und Gustav Heckmann* (Diss.). Zugl.: Marburg, Univ., Diss., 2002. Münster, Lit.

Redfield, D. L. & Rousseau, E. W. (1981). A Meta-Analysis of Experimental Research on Teacher Questioning Behavior. *Review of Educational Research*, *51*(2), 237–245. https://doi.org/10.3102/00346543051002237

Reichertz, J. (2016). *Qualitative und Interpretative Sozialforschung.* Wiesbaden, Springer VS.

Reinhold, S. & Poltersdorf, K. (2015). Mathematisch-philosophische Gedankenreisen mit Archimedes und Leibniz. *Sache Wort Zahl*, (154), 43–51.

Rescher, N. (2017). *Reductio ad absurdum.* Schwabe Verlag. https://doi.org/10.24894/hwph.3487

Rothhaar, M. (2018). Die Antinomie der Unendlichkeit bei Kant und Hegel. In R. Dausner (Hrsg.), *Unendlichkeit: transdisziplinäre Annäherungen.* Würzburg, Königshausen und Neumann.

Ruf, U. & Gallin, P. (2014). *Austausch unter Ungleichen: Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik* (5. Aufl.). Seelze, Klett Kallmeyer Friedrich Verlag.

Ruf, U. & Gallin, P. & Berger-Kündig, P. (2014). *Spuren legen - Spuren lesen: Unterricht mit Kernideen und Reisetagebüchern* (5. Aufl.). Seelze, Klett Kallmeyer Friedrich Verlag.

Russell, B. (1985). The Philosophy of Logical Atomism. In D. F. Pears (Hrsg.), *The Philosophy of Logical Atomism: The Collected Papers of Bertrand Russell* (S. 1–125). Routledge Classics.

Sächsisches Staatsministerium für Kultus und Sport. (2009). *Lehrplan Grundschule. Mathematik.* Verfügbar 31. Mai 2017 unter https://www.schule.sachsen.de/lpdb/web/downloads/lp_gs_mathematik_2009.pdf?v2

Sächsisches Staatsministerium für Kultus und Sport. (2019). *Lehrplan Gymnasium. Mathematik.* Verfügbar 5. Dezember 2020 unter http://www.schule.sachsen.de/lpdb/web/downloads/1530_lp_gy_mathematik_2013.pdf

Sainsbury, R. M. (2010). *Paradoxien* (3. Aufl.). Stuttgart, Philipp Reclam Jun.

Samson, G. K. & Strykowski, B. & Weinstein, T. & Walberg, H. J. (2015). The Effects of Teacher Questioning Levels on Student Achievement. *The Journal of Educational Research*, *80*(5), 290–295. https://doi.org/10.1080/00220671.1987.10885769

Schaffalitzky de Muckadell, C. (2013). Why Philosophy? Aims of Philosophy with Children and Aims of Academic Philosophy. *SATS*, *14*, 176–186. https://doi.org/10.1515/sats-2013-0010

Schimmöller, T. (2011). Wie verstehen Schülerinnen und Schüler den Begriff der Unendlichkeit? In M. Helmerich & K. Lengnink & G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik Verstehen* (S. 179–188). Vieweg + Teubner.

Scholz, E. (n. d.). *G.W. Leibniz als Mathematiker.* https://www2.math.uni-wuppertal.de/~scholz/preprints/Leibniz.pdf

Schreier, H. (1993). *Über das Philosophieren mit Geschichten für Kinder und Jugendliche. Fragen, Antworten und noch mehr Fragen auf der Suche nach Zeichen im Labyrinth der Existenz.* Heinsberg, Agentur Dieck.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien.* Hildesheim, Berlin, Verlag Franzbecker.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/bf00302715

Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics.* Oxford, Oxford Univ. Press.

Singer, F. M. & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(3), 188–205. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.06.001

Sinhart-Pallin, D. & Ralla, M. (2015). *Handbuch zum Philosophieren mit Kindern: Kindergarten, Grundschule, freie Einrichtungen* (2. Aufl.). Baltmannsweiler, Schneider-Verl. Hohengehren.

Sistermann, R. (2016). Das Bonbonmodell im problemorientierten Philosophieunterricht. *Information Philosophie*, *4*, 102–107.

Sistermann, R. (2017). Literarische Texte. In J. Nida-Rümelin & I. Spiegel & M. Tiedemann (Hrsg.), *Handbuch Philosophie und Ethik* (S. 271–277). Paderborn, (utb).

Smith, G. (1995). Critical thinking, a philosophical community of inquiry and the science/maths teacher. *Analytic Teaching*, *15*(2).

Spengler, O. (1922). *Der Untergang des Abendlandes.* Beck.

Stegmüller, W. (2013). *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik - Eine Einführung in die Theorien von A. Tarski und R. Carnap.* Berlin Heidelberg New York.

Steinig, B. & Baumann, P. & Wunderling, H. (1995a). Differentialrechnung mit hyperrellen Zahlen Teil 2. *Praxis der Mathematik*, (3), 115–119.

Steinig, B. & Baumann, P. & Wunderling, H. (1995b). Hyperreelle Zahlen. *Mathematik betrifft uns*, (2).

Steinig, B. & Baumann, P. & Wunderling, H. (1995c). Hyperreelle Zahlen. *Mathematik betrifft uns*, (4).

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Tall, D. O. (2001). A child thinking about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 7–19.

Tapp, C. (2008). Unendlichkeit in Mengenlehre und Theologie. In J. Brachtendorf & T. Möllenbeck & G. Nickel & S. Schaede (Hrsg.), *Unendlichkeit: interdisziplinäre Perspektiven* (S. 233–248). Tübingen, Mohr Siebeck.

Tarski, A. (2013). *Einführung in die Mathematische Logik - Und in die Methodologie der Mathematik*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer Book Archives.

Thiel, C. (2018). Die Zermelo-Russellsche Antinomie. In K. Engel (Hrsg.), *Von Schildkröten und Lügnern: Paradoxien und Antinomien in den Wissenschaften* (S. 149–157). Münster, mentis.

Tiedemann, M. (2011). *Philosophiedidaktik und empirische Bildungsforschung - Möglichkeiten und Grenzen*. Münster, LIT Verlag.

Tirosh, D. & Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 33–40. https://doi.org/10.1080/0020739960270105

Todd, L. (2007). *Partnerships for inclusive education: A critical approach to collaborative working*. London, RoutledgeFalmer.

Topping, K. J. & Trickey, S. (2007). Collaborative philosophical enquiry for school children: Cognitive effects at 10–12 years. *British Journal of Educational Psychology*, *77*(2), 271–288. https://doi.org/10.1348/000709906x105328

Topping, K. J. & Trickey, S. (2014). The role of dialog in philosophy for children. *International Journal of Educational Research*, *63*, 69–78. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.01.002

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument*. Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, Cambridge University Press.

Trzęsicki, K. (2015). How are Concepts of Infinity Acquired? *Stud. Log. Gramm. Rhetor.*, *40*(1), 179–217.

Tsamir, P. & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets - a process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 1–23. https://doi.org/{10.1016/S0732-3123(02)00100-1}

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1999). Consistency and Representations: The Case of Actual Infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 213.

Vansieleghem, N. (2005). Philosophy for Children as the Wind of Thinking. *Journal of Philosophy of Education*, *39*(1), 19–35. https://doi.org/10.1111/j.0309-8249.2005.t01-1-00417.x

Vlastos, G. & Graham, D. W. (1995). *Studies in Greek philosophy*. Princeton, N.J., Princeton University Press.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart, Klett.

vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert - Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19*(4), 257–291.

Wagenschein, M. (2010). *Verstehen lehren: Genetisch, sokratisch, exemplarisch* (5. Aufl., Bd. 22). Weinheim u.a., Beltz.

Waldenfels, B. (2008). Aporien des Unendlichen. In J. Brachtendorf & T. Möllenbeck & G. Nickel & S. Schaede (Hrsg.), *Unendlichkeit: interdisziplinäre Perspektiven* (S. 3–22). Tübingen, Mohr Siebeck.

Wegerif, R. (2007). *Dialogic Education and Technology: Expanding the Space of Learning* (Bd. 7). Boston, MA, Springer Science+Business Media LLC.

Weigand, H.-G. (2016). Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte*, (63), 135–154. https://doi.org/10.1007/s00591-016-0161-4

Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, *13*(1), 1–14. https://doi.org/https://doi.org/10.1002/cpa.3160130102

Williams, S. R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219.

Winter, H. W. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik* (3., aktualisierte Auflage). Wiesbaden, Springer Spektrum.

Wittgenstein, L. (1953). *Tractatus Logico-Philosophicus*. Berlin, Suhrkamp.

Wolf, S. (1994). *Das potentiell Unendliche. Die aristotelische Konzeption und ihre modernen Derivate*. Frankfurt am Main, Peter D. Lang.

Wörner, D. (2013). Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht - eine empirische Untersuchung. In G. Greefrath & F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1110–1113). Freiburg, WTM.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. & Chernoff, E. J. (2007). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM*, *40*(1), 131–141. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0065-9

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, *65*, 261–281.

11. Anhang

11.1 Daten einer explorativen Studie an der Universität Leipzig

Kürzel der befragten Person	**Begründung**	**Codierung**
MÜG02SA	$0,\overline{9}$ reicht sehr weit an die 1 heran, wird sie aber nie erreichen	dynamisch
BRH02RA	weil $0,\overline{9}$ nicht 1 ist und auch nicht größer als 1	statisch
MAP08GE	der Strich heißt das unendlich viele Neunen nach dem Komma kommen und das bedeutet das 1 nie erreicht werden kann	dynamisch
KKK09GO	Selbst wenn die Zahl unendlich, fehlt trotzdem ein ganz kleiner Teil bis zur 1	statisch
FIB05HA	Die Zahl $0,\overline{9}$ nähert sich der eins immer weiter an, erreicht sie jedoch nie	dynamisch
ELL06SE	$0,\overline{9}$ nähert sich der 1, erreicht diese aber nicht	dynamisch
PÖP12	$0,\overline{9}$ wird immer kleiner sein als 1, da sie sich durch die Periode (-) zwar immer an die 1 annähert, aber nie erreicht	dynamisch
BÖB06	$0,\overline{9}$ muss kleiner als 1 sein, da die 0 vor der 1 kommt. Auch wenn es Periode $\overline{9}$ ist, wird die Zahl nie an die 1 heran kommen. Vorne bleibt die 0 stehen	statisch
DOP06	Die Zahl $0,\overline{9}$ wird stets kleiner als 1 sein, da nach dem Komma unendlich viele Neunen stehen $(0,9999...)$	?
FIP10	weil 1 größer ist als 0	statisch
LAD12	weil 1 größer ist	?
BOS11	0,99.. ist kleiner als 1	statisch (?)
RVG09	bedeutet Periode 0,9999... ist trotzdem kleiner als 1	statisch (?)
BRS01	Es nähert sich nur der 1 an, ist aber niemals gleich oder größer	dynamisch

Kürzel der befragten Person	**Begründung**	**Codierung**
bh	0,9 scheint kleiner als 1 zu sein	?
EBFU07	Der Strich über der 9 bedeutet, dass nach dem Komma immer wieder eine 9 kommt (0,9999...) und dadurch dass es 0, irgendwas ist, ist es kleiner (wenn auch nur gering) als 1	statisch
MÜH09	da das bedeutet 0,9999... und es nach diesem Schema unendlich hinzugefügt wird. Dabei bleibt die Zahl immer kleiner als eins	statisch
ASA02	0,99999.. wird immer kleiner bleiben als 1, weil ein Mü zur 1 fehlt, welches das Periode Zeichen ausdrücken soll	statisch
KLW04	da selbst wenn es unendlich weitergeführt wird (0,9999...) kommt es nie komplett an die 1 dran $\rightarrow$ grafisch nachgedacht (würde sich annähern, aber nie änkommen"	dynamisch
PRP07	wegen des „<“-Zeichens	?
SAE08	Auch wenn sich $0,\overline{9}$ sehr nahe an die 1 annähert und d. Relationale Zahlaspekt hier gegen 0 geht, wird die 1 nicht "vollständigërreicht u. somit bleibt $0,\overline{9}$ immer ein "klein wenig"kleiner als 1	statisch
BAC08LI	keine Begründung angegeben	-
MAD04BO	0,999 Periode wird die 1 nie erreichen, deshalb wird sie immer kleiner als 1 bleiben	dynamisch
WAB06RE	$0,\overline{9} = 0,999...$ und somit niedriger als 1	statisch
MIDO12	Es fehlt immer eine kleine Menge (geht gegen Null), weshalb $0,\overline{9}$ kleiner als 1 ist	statisch/-dynamisch
KRP03	$0,\overline{9}$ bedeutet 0,99999..... damit ist es kleiner als 1	statisch
HERO01	$0,\overline{9}$ ist kleiner als 1 auch wenn es nur ein bisschen kleiner ist	statisch
HAFR01ZW	der - ist als Zeichen für Periode . Es ist zwar nah an der 1, erreicht sie aber nie	dynamisch
DRL10SC	0,999999.... entspricht noch nicht der 1 $\hookrightarrow$ gerundet wäre es $0,\overline{9} = 1$	statisch
GRK10LE	$0,\overline{9} = 0,99999...$ ist immernoch kleiner als 1	statisch
DAD08SCHW	$0,\overline{9}$ Periode wird sich der 1 immer nähern, sie aber nie erreichen	dynamisch
FIK03ZW	Auch wenn es aufgerundet 1 ist, lautet die Zahl dennoch $0,\overline{9}$ und ist somit kleiner und noch nicht 1	statisch
SCL05ER	es sind unendlich viele 9, werden aber nie die 1 erreichen	dynamisch
KST08ME	weil es kleiner ist (die Zahl vor dem Komma)	statisch

Kürzel der befragten Person	**Begründung**	**Codierung**
KÖN12KÖ	0 Komma ist immer kleiner als 1	statisch
KAJ01WA	$0,\overline{9}$ ist gerundet 1, aber genau betrachtet nicht 1	statisch
KRH09DR	$0,\overline{9}$ nähert sich sehr an 1 an, erreicht sie aber nie	dynamisch
ULK03HO	$0,\overline{9}$ nähert sich an 1 an, ist deshalb kleiner als eins	dynamisch
WEL10	keine Begründung	-
RER07	$0,\overline{9}$ ist kleiner als 1	?
LAS11	$0,\overline{9}$ nähert sich der Zahl 1 zwar sehr nah an ist aber trotzdem kleiner	dynamisch
LEK01	$0,\overline{9}$ nähert sich unendlich an 1 an, erreicht diese jedoch nicht, ist um $0,\overline{1}$ kleiner als 1	dynamisch und statisch
KUS04	$0,\overline{9}$ wäre ausgeschrieben 0,9999.. und da vor dem Komma eine Null steht ist die Zahl kleiner als 1	statisch
BAK08	keine Begründung	-
ANH04HO	0,9 ist kleiner als 1, da ich den Strich über der 9 leider nicht mehr weiß	?
BAP03SC	Periode 9 heißt, dass es unendlich viel Nachkommastellen 9 sind	?
KRF05EI	Die 1 wird mit egal wie vielen neunen nicht voll	statisch
LAC12GE	egal wie viele Stellen nach 0,9 folgen, es wird nicht 1	statisch
WEB12WI	egal wie viele 9 nach dem Komma kommen, ist es nicht 1	statisch
AND12	weil 0,9999999... nie 1 ist, sondern kleiner	statisch
MDL07	1 ist immer größer als $0,\overline{9}$, dabei spielt es keine Rolle wie viele Stellen noch hinter der 9 kommen	statisch
HEH06	Egal wie viele Stellen die Periode hat, 1 ist die nächstfolgende größere Zahl	statisch
KAS09	Denn $0,\overline{9} = 0,999.. \rightarrow$ geht bis ins unendliche und wird nie die 1 erreichen	dynamisch
PLF03	eine Dezimalzahl mit 0 vor dem Komma ist immer kleiner als eine ganze Zahl, die nicht =0 ist	statisch
SIS09LE	$0,\overline{9} \neq$ deshalb kann es auch nicht größer 1 sein	statisch
SCL01LE	$0,\overline{9}$ füllt nicht die ganze Menge der 1-er Stelle aus, die 1 füllt die Menge aus	statisch
HEB01LE	$0,\overline{9} \rightarrow$ Periode, d.h. 0,99999.... $\curvearrowright$ immer kleiner als 1	statisch
JES06ES	Erreicht niemals zu 100% den Wert 1	statisch
SPS08HA	$0,\overline{9}$ nähert sich der 1 stark an, ist aber nie so groß wie die 1. Würde man es auf einem Zahlenstrahl anschauen. somit ist $0,\overline{9}$ <1	statisch
KLM04WI	Die Dezimalzahl $0,\overline{9}$ ist kleiner als 1,0	statisch

Kürzel der befragten Person	**Begründung**	**Codierung**
SYW12LE	$0,\overline{9}$ nähert sich an die 1 an, wird aber nie die 1,0 erreichen $0,\overline{9} < 1$	dynamisch
ANA10PL	Der Strich bedeutet „Periode", deswegen nähert sich die Dezimal unendlich an 1 an, bleibt aber immer kleiner	statisch
NIK11WE	Trotz des Striches ist die 1 größer	statisch
KIB04AD	Da die Stelle vor dem Komma kleiner ist	statisch
HEHE5WU	$0,\overline{9}$ ist kleiner als 1. Der Zahl fehlt immer ein kleienr Teil bis zur 1	statisch
DIK08LE	$0,\overline{9}$ ist kleiner als eins, da es ganz knapp unter der 1 liegt	statisch
LAK06AN	1 ist größer als $0,\overline{9}$	statisch
ENC04DE	Periode in der $0,\overline{9}$ zeigt an, dass sich Zahl an 1 annähert, ohne sie zu erreichen	dynamisch
HAK01MA	Es sind unendlich viele Neunen, aber es kommt nie an die 1 heran	dynamisch
EP04	Da Periode 9 ist niemals 1	statisch

Tabelle 11.1: Begründungen zur ersten Frage der explorativen Erhebung (2019) von Befragten mit der Antwort $0,\overline{9} < 1$

11.2 Tabellarische Verlaufspläne der Unterrichtsentwürfe

Auf den nächsten Seiten sind die tabellarischen Verlaufspläne der Stunden U1–U4 zu sehen.

Bezug	**Min**	**didaktische Phase**	**SuS-Lehrer*in-Interaktion**	**Sozialform, Methode**	**Medien/ Hilfsmittel**
A	15	Einstieg/ *Hinführung und Problemstellung*	Erläuterung, dass und warum gefilmt wird; Geschichte vom Zahlenteufel szenisch interpretieren (Geschichte wird vorgelesen, Kinder halten illustrierte Karten hoch, sobald ihr Begriff an der Reihe ist); Geschichte endet mit Äber Mathematik, mein lieber Schwan! Das ist was ganz anderes!"; *So, jetzt haben wir ganz viele Bilder gesehen, aber gar keine zu Mathematik - dafür bräuchten wir ja noch welche!*	Sitzkreis	Laminierte Illustrationskarten; Sitzkissen
B	20/*35*	Erarbeitungsphase I/ *Selbstgesteuert intuitive Problemlösung*	SuS zeichnen in Kleingruppen Bilder dazu, was Mathematiker*innen vielleicht außer Rechnen noch können bzw. was Mathematik außer Rechnen noch sein kann	Gruppenarbeit	ein weißes A3-Blatt pro Gruppe
C	10/*45*	Ergebnissicherung I */Selbstgesteuert intuitive Problemlösung*	Bilder aufhängen, kurz mit den Kindern davorstellen und besprechen, Fragen/ Bedenken/Hinweise stellen lassen *"Was habt ihr denn gefunden? Was könnte Mathematik denn außer Rechnen noch sein?"*	Sitzkreis, SuS-L-Interaktion	Magnete, Bilder, Tafel
D	20/*65*	Überleitung/ *Angeleitet kontrollierte Problemlösung*	Geschichte mit Gesprächsimpulsen	Sitzkreis, Plenum (Einschübe)	Sitzkissen, Achtung: hier besser keine Illustrationskarten
E	10-15/ *80-85*	Erarbeitungsphase II/ *Selbstgesteuert intuitive Problemlösung*	SuS bereiten in Kleingruppen "Rezepteßu ihrer Positionierung vor	Gruppenarbeit	Vorbereitete Rezeptkarten
F	5-10/ *85*	Ergebnissicherung II	Rezepte an Tafel, alle SuS können sich diese kurz anschauen	Frontalunterricht und Museumsrundgang	Tafel, Magnete
G	5/ *90*	Abschluss, Verabschiedung	Verabschiedung, Einsammeln der noch fehlenden Bilder und Rezepte	Frontalunterricht	
H		Puffer	Reflektieren über Stundenverlauf - was war besonders/ anders/ normal, war das noch eine Mathestunde für euch?	Plenum	

Tabelle 11.3: U1: Stundenverlaufsplanung der ersten Unterrichtsstunde

Bezug	**Min**	**didaktische Phase**	**SuS-Lehrer*in-Interaktion**	**Sozialform, Methode**	**Medien/ Hilfsmittel**
A	10	Einstieg	Kurze Abfrage: Wiederholung der Geschichte der letzten Stunde durch 1-3 ausgewählte Freiwillige	Frontalunterricht, Plenum	Tafel, Magnete, Produkte der Kinder aus U1 sowie Illustrationskarten
B	15/*25*	Erarbeitungs-phase I/ *Selbstgesteuert intuitive Problemlösung*	Geschichte vom Zahlenteufel U2 mit Gesprächsimpulsen und Illustrationskarten	Sitzkreis, Plenum	Illustrationen
C	20/*50*	Erarbeitungsphase I.1	Darf man alle Zahlen, die es gibt, in einen Beutel packen? Kinder sammeln Argumente für die Positionen Cantors und Leibniz' und entscheiden sich anschließend für eine Position	Gruppenarbeit	Aufgabenstellung an Tafel, Moderationskarten, Magnete
D	20/*70*	Ergebnissicherung I	Pro-Contra-Debatte - Kinder positionieren sich je nach Stellungnahme vor Tafel bzw. im Raum, tragen Argumente vor (zuvor Einführung und Etablierung der Regeln für die Debatte)	Pro-Contra-Debatte, Plenum	Tafel, Magnete
E	5/*75*	Impuls	Was soll Robert mit dem Zahlenteufel als nächstes erleben? Was würdet ihr ihn oder den Zahlenteufel gerne fragen? - Kinder sollen Brief an Robert und den Zahlenteufel verfassen, in welchem sie ihre Wünsche ausdrücken.	Frontal	Briefpapier
F	10/*85*	Erarbeitungsphase II	Kinder verfassen Briefe an Robert und den Zahlenteufel	Einzelarbeit	
G	5/*90*	Verabschiedung	Wenn ein Zeitpuffer vorhanden ist, können einzelne Kinder ihre Briefe vorlesen. Ansonsten: normale Verabschiedung, Hinweis, dass Briefe eingesammelt werden (Name aufschreiben)		
H		Puffer	Reflektieren der besonderen Mathestunde: was war besonders, war das noch Matheunterricht?		

Tabelle 11.5: U2: Stundenverlaufsplanung der Unterrichtsstunde

Bezug	**Min**	**didaktische Phase**	**SuS-Lehrer*in-Interaktion**	**Sozialform, Methode**	**Medien/ Hilfsmittel**
A	20	Einstieg/ *Hinführung und Problemstellung*	Geschichte Zahlenteufel - szenisch interpretieren; mit Gesprächsimpulsen	Sitzkreis	Illustrationskarten, Geschichte
B	15/*35*	Erarbeitungsphase I/ *Selbstgesteuert intuitive Problemlösung*	Arbeit am Arbeitsblatt, SuS sollen sich stichpunktartig Gedanken machen, wo der neue Gast unterkommen könnte, im Hintergrund läuft auf dem Fernseher der Film mit den unendlich vielen Zimmern	Einzelarbeit	Fernseher, Arbeitsblätter
C	20/*55*	Erarbeitungsphase II/*Selbstgesteuert intuitive Problemlösung*	Aufteilen der Funktionen (siehe AB), Besprechen der Ideen aus der Einzelarbeit in der Gruppe, Einigung auf einen Vorschlag	Gruppenarbeit	AB Funktionen, Fernseher
D	15/*70*	Ergebnissicherung I	Gruppen stellen ihre Vorschläge vor, nach jeder Vorstellung kurze Diskussion bzw. Evaluation, LK hält Ideen in Form einer Mindmap fest	Plenum	Tafel, Kreide, Fernseher
E	5/*75*	Ergebnissicherung 2	Kinder einigen sich gemeinsam mit Lehrkraft auf den besten Vorschlag	Plenum	Tafel, Mindmap
F	15/*90*	Erarbeitung III, Abschluss	Film zur Lösung wird präsentiert, Rückfragen und Diskussionen sind möglich, Verabschiedung	Plenum	Fernseher

Tabelle 11.7: U3: Stundenverlaufsplanung der Unterrichtsstunde

Bezug	Min	didaktische Phase	SuS-Lehrer*in-Interaktion	Sozialform, Methode	Medien/ Hilfsmittel
A	15	Einstieg/ *Hinführung und Problemstellung*	Geschichte Zahlenteufel für U4, Berichte der Kinder über die Stunden zuvor	Sitzkreis	Illustrationskarten, Geschichte
B	35/*50*	Erarbeitungsphase I/ *Selbstgesteuert intuitive Problemlösung*	SuS besprechen in Kleingruppen ausgewählte Paradoxien/Antinomien, diese werden ihnen via iPad bzw. BookCreator dargestellt; SuS sollen Plakat zur Erklärung und eventuellen Auflösung ihrer Paradoxie/Antinomie entwerfen	Gruppenarbeit	iPads
C	25/*75*	Ergebnissicherung/ *Festigung/Transfer*	Vorstellung der Plakate, Diskussion der Lösungen	Plenum	Tafel, Magnete
D	15/*90*	Abschluss	Abschließende Reflexion zu den Unterrichtsstunden (insgesamt)	Plenum	

Tabelle 11.9: U4: Stundenverlaufsplanung der Unterrichtsstunde

11.3 Eingesetzte Texte und Bilder

Die in den folgenden Texten fett gesetzten Passagen stammen aus Enzensberger & Berner (2011, S. 9ff), die nicht fett gesetzten Passagen wurden für die Unterrichtsstunden eigenständig konzipiert. Kürzungen im Original werden über eckige Klammern und Punkte angegeben ([...]).

11.3.1 U1: erster Text

Dieser Text stammt komplett aus Enzensberger & Berner, 2011, daher wird an dieser Stelle auf eine Markierung in fetter Schrift verzichtet.

Robert hatte es schon lange satt, zu träumen. Er sagte sich: Dabei bin ich doch immer nur der Dumme.
Zum Beispiel wurde er im Traum öfter von einem riesigen, unappetitlichen Fisch verschluckt, und wenn es wieder einmal soweit war, stieg ihm auch noch ein furchtbarer Geruch in die Nase. [...]
Mit der Zeit fand Robert heraus, wie man sich gegen solche Gemeinheiten wehren konnte. Sobald ihm ein solcher Traum kam, dachte er blitzschnell, ohne aufzuwachen: Da ist schon wieder dieser ekelhafte alte Fisch. Der will mich verschlucken. Aber es ist völlig klar, daß es sich um einen geträumten Fisch handelt, und der kann mich natürlich nur im Traum verschlucken und sonst gar nicht. [...]
Aber so schlau er es auch anfing, ärgerlich war das Ganze trotzdem, und deshalb war er ziemlich schlecht auf seine Träume zu sprechen.
Bis eines Tages der Zahlenteufel erschien.
Robert war ja schon froh, dass es diesmal kein hungriger Fisch war, von dem er träumte. [...]Statt dessen träumte er von einer Wiese. Komisch war nur, daß die Gräser weit in den Himmel hochragten, so hoch, daß sie Robert über Kopf und Schulter reichten. Er sah sich um und erblickte direkt vor sich einen ziemlich alten, ziemlich kleinen Herrn, ungefähr so groß wie eine Heuschrecke, der auf einem Sauerampferblatt wippte und ihn aus seinen glimmrigen Augen ansah.
- Wer bist denn du? Fragte Robert.
Der Mann schrie ihn überraschend laut an:
- Ich bin der Zahlenteufel!
Aber Robert hatte keine Lust, sich von einem solchen Zwerg etwas gefallen zu lassen.
- Erstens, sagte er, gibt es gar keinen Zahlenteufel.
- So? Warum redest du dann mit mir, wenn es mich überhaupt nicht gibt?
- Und zweitens hasse ich alles, was mit Mathematik zu tun hat.
- Warum denn das?
- >Wenn zwei Bäcker in sechs Stunden 444 Brezeln backen, wie lange brauchen dann fünf Bäcker, um 88 Brezeln zu backen?<
- So ein Blödsinn, schimpfte Robert weiter. Eine idiotische Art, die Zeit totzuschlagen. Also verschwinde! Hau ab! [...]
- Woher hast du denn diese Brezelgeschichte? Wahrscheinlich aus der Schule.
- Woher denn sonst, sagte Robert. [...]
- Naja, sagte der Zahlenteufel und grinste. Ich will ja nichts gegen deinen Lehrer

sagen, aber mit Mathematik hat das wirklich nichts zu tun. Weißt du was? Die meisten richtigen Mathematikerinnen und Mathematiker können überhaupt nicht rechnen. Außerdem ist ihnen dafür die Zeit zu schade. Für so was gibt es doch Taschenrechner. Hast du keinen?
- Doch, aber den dürfen wir in der Schule nicht benutzen.
- Aha, sagte der Zahlenteufel. Macht nichts. Ein bisschen Einmaleins, ein bisschen Dreiecke, dagegen ist ja nichts einzuwenden. Kann ganz nützlich sein, wenn einem die Batterie ausgeht. Aber Mathematik, mein lieber Schwan! Das ist ganz was anderes!

11.3.2 U1: zweiter Text

Mathematik, mein lieber Schwan! Das ist was ganz anderes!
Du willst mich bloß rumkriegen, sagte Robert. Ich traue dir nicht. Wenn du mich jetzt auch noch im Traum mit Hausaufgaben plagst, dann schreie ich. Das ist Kindesmißhandlung.
Wenn ich gewusst hätte, sagte der Zahlenteufel, dass du ein solcher Angsthase bist, wäre ich gar nicht erst gekommen. Schließlich will ich mich bloß ein bisschen mit dir unterhalten. Plaudern schadet ja nicht.
Wenn man sich über Mathematik so einfach unterhalten kann wie über Filme oder Fahrräder, wozu braucht es dann einen Teufel?
Das ist es ja gerade, mein Lieber“ erwiderte der Alte. Das Teuflische an den Zahlen ist, dass sie so einfach sind. Im Grunde brauchst du nicht mal einen Taschenrechner dazu. Du brauchst, um damit anzufangen, nur eins: die Eins. Mit der kannst du fast alles machen.

Gesprächsimpuls: Was kann man denn mit der 1 alles machen?

Mit der 1 kannst du fast alles machen, schmunzelte der Zahlenteufel. **Wenn dir also große Zahlen Angst machen, sagen wir mal, Fünfmillionensiebenhundertdreiundzwanzigtausendachthundertzwölf, dann fang es einfach so an:** *(Bild mit den Einsen hochhalten)* **Und so weiter, so lange, bis du bei Fünfmillionenundsoweiter angekommen bist. Sag bloß, dass dir das zu kompliziert ist! Das kapiert doch der letzte Idiot. Oder?**

Gesprächsimpuls:Wie würdet ihr Robert mit euren eigenen Worten weiterhelfen?

„Okay, jetzt habe ich das gut verstanden“, sagte Robert. **Und das ist noch nicht alles, fuhr der Zahlenteufel fort. Er hielt jetzt einen Spazierstock mit silbernem Knauf in der Hand und wirbelte damit vor Roberts Nase herum.**
Wenn du bei Fünfmillionenundsoweiter angekommen bist, zählst du einfach weiter. Das geht nämlich immer!
Robert wusste nicht, ob er das glauben sollte. Woher willst du das denn wissen, fragte er. Hast du es ausprobiert?
Nein, hab ich nicht. Erstens würde das zu lange dauern, und zweitens ist es überflüssig.

Das leuchtete Robert nicht ein.
Entweder kann ich bis dahin zählen, dann ist es nicht unendlich, wandte er ein, oder es ist unendlich, dann kann ich nicht so weit zählen.
Hinweis für die Lehrkraft: Beide Positionen visualisieren! An Innenseiten der Tafel schreiben, Mitte frei (oder mit Beispielzahlen – kleine und ganz große, dann 3 Punkte und ein Fragezeichen); Kinder drehen sich kurz zur Tafel um

Gesprächsimpuls: Was meint ihr? (Antworten abwarten ...)

Falsch! schrie der Zahlenteufel. Sein Schnurrbart zitterte, er wurde rot im Gesicht, dein Kopf schwoll an vor lauter Wut und wurde immer größer.
Falsch, wieso falsch? fragte Robert.
Dummkopf! Was glaubst du, wie viele Kaugummi bis heute auf der Welt gekaut worden sind?
Weiß ich nicht
Schätzungsweise

Gesprächs- bzw. Arbeitsimpuls: Schätzt ihr doch mal! Schreibt eure Vermutung auf die Moderationskarte.

Entsetzlich viele, sagte Robert. Allein Albert und Bettina und Charlie, die in meiner Klasse, und die in unserer Stadt, und die in ganz Deutschland, und die in Amerika ... das geht in die Milliarden.
Mindestens, meinte der Zahlenteufel. Also, nehmen wir an, wir wären beim allerletzten Kaugummi angekommen. Was mache ich dann? Ich ziehe einen neuen Kaugummi aus der Tasche, und schon haben wir die Zahl aller bisher gekauten Kaugummis plus eins – die nächsthöhere. Hast du kapiert? Ich brauche die Kaugummis gar nicht zu zählen. Ich gebe dir einfach ein Rezept an, wie es weitergeht. Mehr braucht es nicht.
Robert überlegte einen Moment lang. Dann musste er zugeben, der Mann hatte recht.

Gesprächs- bzw. Arbeitsimpuls: Wie sieht das Rezept vom Zahlenteufel aus? Geht das nur mit Kaugummis? Könntet ihr auch solche Rezepte für etwas anderes schreiben? Besprecht eure Ideen in den Gruppen und schreibt ein „Rezept“ auf die Rezeptkarten!

11.3.3 U2: Text

Als Robert am nächsten Tag ins Bett ging, freute er sich tatsächlich auf seine Träume. Er dachte an die Nacht zuvor, in der er mit dem Zahlenteufel über Kaugummis, Mathematik und ganz viele verrückte Dinge geredet hatte.
Gemütlich in die Decke gekuschelt machte sich Robert auf den Weg ins Traumland. **Robert rutschte. Es war immer noch dasselbe: kaum war er eingeschlafen, ging es los. Immer ging es runter mit ihm. Diesmal war es eine Art Kletterstange. Nicht in die Tiefe gucken, dachte Robert,**

hielt sich fest und rutschte mit heißen Händen ab, ab, ab... Als er mit einem Ruck auf dem weichen Moosboden landete, hörte er ein Kichern. Vor ihm saß auf einem lederbraunen samtweichen Pilz der Zahlenteufel, kleiner, als er ihn in Erinnerung hatte, und sah ihn aus seinen glimmrigen Augen an.
„Na, wie war die Schule?“ Fragte er mit einem breiten Grinsen. „Naja, könnte besser sein. Heute mussten wir ausrechnen, was 3 Bäcker in 5 Stunden backen, wenn sie in 2 Stunden 678 Brötchen backen.“, sagte Robert niedergeschlagen. „Da fand ich die Unterhaltung über Kaugummis gestern viel spannender.“
„Hahahahaha!“ rief der Zahlenteufel laut. „Kaugummis! Lecker und schmackhaft, aber durchaus auch lehrreich.“ Seine Augen glimmten. „Da siehst du mal, dass Mathematik auch was ganz anderes sein kann, als dieses dumme Rechnen mit Brezeln. Überhaupt ist Mathematik was ganz anderes als Rechnen, für Vieles braucht man nicht mal den Taschenrechner.“
„Mathematik ist was ganz anderes? Ich kenne nur deine Kaugummis und Geometrie, wo man keinen Taschenrechner braucht“, sagte Robert erstaunt.

Gesprächsimpuls: Habt ihr in der Stunde gestern noch was ganz anderes gefunden? (Auftrag: Bilder nach anderen Sachen „durchforsten“) – na dann hören wir jetzt mal den Zahlenteufel dazu an.

„Geometrie, Zeichnen, Rechnen, alles schön und gut“ grinste der Zahlenteufel. „Mathematik, das ist aber so viel mehr. Mathematik ist die Kunst des Lernens, Mathematik heißt Muster erkennen, Muster bauen – Logik! Ja, Logik!“ er machte eine kurze Denkpause und wippte aufgeregt auf dem Sauerampferblatt hin und her. „Mathematik, das ist Sprache.“
„Aber sprechen lernen wir doch in Deutsch?“ – Robert konnte sich mit den Antworten des Zahlenteufels nicht zufrieden geben.
„So, wie ihr in Deutsch bestimmte Regeln lernt, um vernünftige Sätze bilden zu können, so geht das auch in der Mathematik.

Gesprächsimpuls: Kennt ihr denn schon Regeln in der Mathematik?

Und so wie ihr in Englisch Vokabeln lernt, damit ihr die neue Sprache könnt, so machen das auch die Mathematiker*innen.

Gesprächsimpuls: Kennt ihr denn schon Vokabeln in Mathe?

Und auch so, wie ihr in Deutsch Buchstaben gelernt habt, gibt es in Mathematik dann Zahlen und auch bestimmte Zeichen, die man erstmal lernen muss. Und wenn es kein passendes Zeichen gibt, dann erfinden sie halt eins.“

Gesprächsimpuls: Kennt ihr schon Zeichen in der Mathematik?

„Mathematiker*innen erfinden Sachen“? fragte Robert überrascht.
„Na, ja, manche etwas mehr, manche etwas weniger. Manchmal erfinden sie sogar unterschiedliche Dinge zu derselben Sache, und dann... ja dann...“ der Zahlenteufel grinste. Plötzlich schrie er begeistert los: „Dann gibt es Streit!“

„Was, Mathematiker können streiten?“ Nun hatte Robert endgültig den Faden verloren. „Entweder rechne ich etwas richtig oder ich rechne es falsch, was kann man denn da streiten?“
Der Zahlenteufel schaute Robert mit seinen glimmrigen Augen eindringlich an. Plötzlich sprang er von seinem Sauerampferblatt herunter. „Komm, wir beide gehen jetzt mal so einen Streit anschauen.“
Robert war plötzlich neugierig, was ihm der Zahlenteufel wohl zeigen wollte. Er hastete ihm in großer Erwartung schnell hinterher. Das hohe Gras störte ihn nicht. Nach einem kurzen Marsch erreichten die beiden eine Lichtung, auf der zwei ältere Männer saßen.
Bilder von Leibniz und Cantor in die Mitte legen
„Guck, da sind Cantor und Leibniz!“ flüsterte der Zahlenteufel aufgeregt, „lass uns leise sein, dann können wir ihnen beim Streiten zuhören.“
Cantor: „Manno! Ich sag es nochmal: Nein!“
Leibniz: „In manchen Dingen sind wir uns doch auch einig. Soll ich es nochmal zusammenfassen?“ (Cantor nickte) „Wir denken beide, dass man, egal wie groß eine Zahl schon ist, immer weiter zählen kann. Zum Beispiel kann ich von Hundert zu Hundert und eins zählen. Und dann noch eins dazu ist Hundert und zwei. Und dann Hundert und Drei und immer so weiter.“
Cantor: „Ja, genau! Aber du willst mich einfach nicht verstehen. Ich erklär es dir nochmal: Wenn ich im Supermarkt Äpfel kaufen gehe, dann packe ich die in einen Beutel. Und meine tolle Idee ist jetzt, dass ich in meinem Kopf auch Zahlen in einen Beutel packen kann und dann schreibe ich außen drauf, was da so drin ist.“ Leibniz überlegte kurz. „Also, wenn du quasi einen Beutel hast, wo draufsteht: „Hier sind alle Zahlen von 1-10 drin“, dann sind da folgende Zahlen drin: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Oder ich nehme alle geraden Zahlen bis 20. Das steht dann außen auf dem Beutel. Und drin sind dann 2,4,6,8,10,12,14,16,18 und 20.“
„Ja“, sagte Cantor. „oder ich mache einen Beutel, wo alle Zahlen drin sind, die kleiner als 10 und durch 3 teilbar sind.“

Gesprächsimpuls: Welche Zahlen sind dann in Cantors Beutel drin?

„oder ich habe einen Beutel, wo die 5, 10, 15 und 20 drin sind. Nur hier fehlt irgendwie das Schild. . . “

Gesprächsimpuls: Könnt ihr ihm helfen, was muss auf dem Schild stehen?

Leibniz grummelte kurz. „Ja, klar, man kann Zahlen in Beutel packen, da widerspreche ich dir doch auch nicht. Aber du meintest ja vorhin, dass du einen Beutel machen kannst, wo alle Zahlen drin sind.“ Er wirkte auf einmal ziemlich beleidigt.

Gesprächsimpuls: Wie könnte so ein Netz aussehen, was meint ihr? Was würde außen drauf stehen?

Robert drehte sich zum Zahlenteufel um. „Hä, das verstehe ich nicht. Der will einen Beutel für alle Zahlen machen? Wie groß soll das denn werden?“ – Der Zahlenteufel grinste nur. Gerade wollte er ansetzen, um Robert zu antworten, da

ertönte ein lauter Schrei.
Die beiden sahen zur Lichtung: Cantor hatte Leibniz in den Schwitzkasten genommen und sie rauften sich.
„Ich mache mir hier einen Beutel, ob du das willst oder nicht, du alter Hammel!“ schrie Cantor erbost auf. Leibniz wimmerte: „Aber alle Zahlen passen da doch gar nicht rein! Das Prinzip, da manche Zahlen reinmachen zu können, das verstehe ich ja, aber doch nicht ALLE!“
Robert wunderte sich. Wie konnte man sich denn über so etwas streiten? Und dann auch noch so heftig?
Der Zahlenteufel wandte sich Robert zu. „Schau, die streiten sich ganz schön dolle, oder?“ Robert nickte. „Ich dachte, man kann in Mathe nicht streiten.“ Da musste der Zahlenteufel lachen. Er lachte so laut, dass rings um ihn die Blätter bebten, dass die Heuschrecken davon hüpften und dass die beiden Männer beim Streiten unterbrochen wurden.
„Ja, Robert, klar kann man in Mathe streiten“, sagte er vergnügt. „Wüsstest du auf Anhieb, wem von den beiden du zustimmen sollst?“
Robert dachte nach. Er konnte gut verstehen, dass Cantor gern mal alle Zahlen in einen Beutel packen würde. Das ist praktisch, da kann man außen dran schreiben, was drin ist und man kann den Beutel irgendwo hin mitnehmen und etwas nützliches mit den Zahlen anfangen. Allerdings teilte Robert auch die Bedenken, die Leibniz hatte: kann es so einen großen Beutel überhaupt geben?
Gesprächsimpuls: Was meint ihr, kann man einen Beutel finden, in das man ALLE Zahlen packen kann?
Findet in der Gruppe Argumente für Cantor und für Leibniz und entscheidet euch dann für eine Position.

11.3.4 U3: Text

Robert hatte einen erfüllten Tag – er war in der Schule, fuhr danach mit seiner Mutter ein Eis essen und abends hatte Papa einen leckeren Kartoffelbrei mit Fischstäbchen gekocht. Als Robert also nach einem so tollen Tag ins Bett fiel, dachte er gar nicht groß daran, dass ihn in der Nacht vielleicht noch ein Abenteuer erwarten könnte. Dabei hatte er doch schon so viel in seinen Träumen erlebt.
Gesprächsimpuls:Kann mir vielleicht jemand erzählen, was Robert bisher so erlebt hat?
Als er einschlief, fing er wieder an zu träumen. Dieses Mal saß er auf einem Sauerampferblatt, der Himmel über ihm strahlte im schönsten Kaugummi-Eis-Blau und die Gräser wippten im Takt des Windes. Robert sah sich um. Weit und breit war keine Menschenseele zu sehen, nicht einmal der große Fisch, der ihn sonst in seinen Träumen plagte. Was sollte er nun tun? Er sah sich nochmal um und schrie: Hallooooooo? Ist da jemaand?
Plötzlich hörte er ein Räuspern. Hinter ihm stand, rot, alt und so klein wie eine Heuschrecke, der Zahlenteufel. Na, Robert, möchtest du wieder etwas Zeit totschlagen während du schläfst? sagte er abenteuerlustig. Na, ja, eigentlich nicht, aber was für eine Wahl habe ich denn? brummelte Robert, Du willst ja sicher nur wieder Mathe mit mir machen und so ganz überzeugt hast du mich noch nicht, der Streit zwischen Cantor und Leibniz war ja vielleicht ganz lustig anzusehen, aber

den Matheunterricht in der Schule mit den Bäckern und Brezeln kann ich immer noch nicht ausstehen!
Der Zahlenteufel grinste von einem Schnurrhaar zum anderen. Robert, Mannometer, Matheunterricht und Mathe sind ja auch wirklich zwei verschiedene Dinge, hast du das denn immer noch nicht verstanden?
Gesprächsimpuls: Was kennt ihr denn an mathematischen Dingen, die ihr nicht direkt aus dem Unterricht kennt? Sollen wir den Robert mal überzeugen?
Okay, nagut, wenn du mir das so erklärst, habe ich schon ein bisschen mehr Lust. Robert sah trotzdem nicht wirklich begeistert aus. Okay, Robert, vielleicht bist du ja auch ein hoffnungsloser Fall. Ich muss jetzt auf jeden Fall ein Nickerchen machen, erwiderte der Zahlenteufel. Robert sah sich um. Rings um ihn war nur Wiese, Gräser und eben dieses eine Sauerampferblatt, auf dem er sich niedergelassen hatte. Ein paar Heuschrecken zirpten, aber ringsum war kein Bett zu sehen. Der Zahlenteufel ging schnurstracks durch die Gräser, so weit, dass Robert ihn bald nicht mehr sehen konnte. Er hastete hinterher. Lass mich nicht alleine hier, ich kenne mich doch nicht aus!, schrie er den Alten an. Und vor allem: Wo willst du denn schlafen? Hast du ein Haus oder ein Zelt oder sonst irgendwas, wo du dich hinlegen kannst?
Nein, das habe ich hier alles nicht. Aber gleich um die Ecke, hinter dem Haus von Ada Lovelace und rechts am Palast von Sophie Germain vorbei und dann noch fünfmal links abbiegen und über die Ländereien von Georg Cantor spaziert, da steht ein Hotel.
Und so schnell, wie er vorhin verschwunden war, lief er einfach weiter. Robert beeilte sich. Er wollte keinesfalls in diesem seltsamen Land der Mathematikerinnen und Mathematiker alleine sein und so seltsam der Zahlenteufel auch war, er war eben der einzige, den Robert hier gut kannte. Die beiden liefen und liefen durch das Land der Mathematik. Dabei kamen Sie an vielen wundersamen Dingen vorbei, Dinge die Robert staunen ließen. *Gesprächsimpuls: Was könnten das für Dinge gewesen sein? Was würdet ihr von einem Land der Mathematik erwarten?*
Super, dachte sich Robert, ein Land der Mathematik also. Er lief dem vor sich hin wackelnden Zahlenteufel immer weiter hinterher.
Plötzlich stoppte dieser an einem großen Haus, ein Haus das so lang war, dass Robert das Ende des Hauses gar nicht sehen konnte. Er versuchte sich zu konzentrieren – eigentlich waren seine Augen gut – aber das Haus war sogar am Horizont noch zu sehen.
Illustration von Hilberts Hotel zeigen (Abb. 11.4 auf S. 277)
Vor dem Haus im hohen Gras stand ein Mann mit einem Schnurr- und einem Spitzbart. Er hatte einen großen Filzhut auf dem Kopf und schaute sehr streng. Als er den Zahlenteufel erblickte, heiterte sich seine Miene jedoch auf. Der Zahlenteufel selbst sprang in die Luft und schlug seine Beine aufgeregt zusammen. David, mein alter Freund, Mensch, dass du das Hotel hier noch betreibst, toll!. Der Filzhütige lächelte. Zahli, schön dich zu sehen. Na klar betreibe ich das Hotel noch, es wurde ja auch nach mir benannt und in alle Ewigkeit von mir geleitet.
Da sah Robert erst das Schild, was in bunten Buchstaben am Hotel prangte: HILBERTS HOTEL. Er räusperte sich laut. Der Zahlenteufel erschrak sich: Wo bleiben nur meine Manieren? Lieber David, das ist mein Bekannter – äh – Freund – äh – Schüler – äh – sonstewas halt – Robert. Lieber Robert, das ist mein alter Freund David Hilbert. Ihm gehört dieses ewig lange, riesengroße Hotel. Der Zahlenteufel

holte auf einmal eine Reisetasche hervor. David, alter Freund, hast du vielleicht noch ein Zimmer für mich frei?
Hilbert sah betrübt aus. Ich habe zwar UNENDLICH viele Zimmer in meinem Hotel, aber momentan sind alle Zimmer ausgebucht. Ich habe nämlich auch UNENDLICH viele Gäste da....
Der Zahlenteufel sagte: Na, bei unendlich vielen Zimmern wird doch noch ein Platz für mich übrig sein, oder?" – Die Zimmer sind alle ausgebucht, es tut mir so unendlich leid, Zahli!
Robert überlegte kurz und zog den Zahlenteufel an der Krawatte zu sich heran: Du, Zahlenteufel, flüsterte er, vielleicht könnte uns ja die Klasse 3b aus Bitterfeld (*5 aus Oranienbaum*) helfen. Du bist müde, das merke ich. Vielleicht gibt es ja trotzdem eine Möglichkeit, dich bei unendlich vielen ausgebuchten Zimmern irgendwie im Hotel unterzubringen, immerhin sind es ja UNENDLICH viele Zimmer.
Gesprächsimpuls: Was meint ihr, können und sollen wir Robert helfen? Vielleicht könnt ihr das ja erst alleine und dann in Kleingruppen angehen. Wenn ihr mal zum Fernseher schaut, starten wir euch jetzt ein Bild vom unendlich ausgebuchten Hotel. Ihr bekommt euren Auftrag auch nochmal auf Papier zugeteilt.

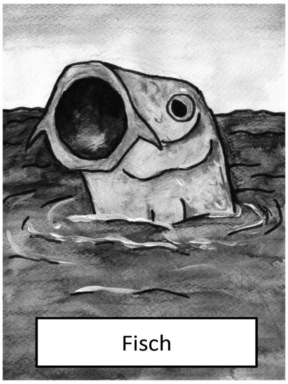
11.3.5 U4: Text

Robert hatte es wirklich nicht leicht. Nun, da er in der Nacht oft mit dem Zahlenteufel unterwegs gewesen war, machte ihm der Mathematikunterricht in der Schule fast gar keinen Spaß mehr - da stritt sich niemand und da gab es auch keine alten Filzhüte, denen er helfen musste.
Gesprächsimpuls: Weiß denn noch jemand, wer gestritten hatte und was oder wer hier mit Filzhut gemeint sein könnte?
Robert freute sich mittlerweile schon sehr auf die Nächte, denn auch wenn der Zahlenteufel ihn nicht jede Nacht auf eine Reise durch das Land der Mathematik mitnahm, so kam es doch ab und an vor und meistens waren das dann ziemlich spannende Träume. Nicht so eklige Träume wie die von dem großen Fisch, der ihn mit seinen glubschigen Augen einfach nur ansah und gern mit seinem großen Mund verspeisen wollte. Alles in allem war also auch an jenem Abend, von dem hier erzählt werden soll, Roberts Neugier und Freude so groß, dass er fast zu aufgeregt war, um einzuschlafen. Irgendwann klappte es aber doch.
Er öffnete die Augen. Natürlich war da wieder ein Sauerampferblatt, aber diesmal wirkte es winzig im Vergleich zu der dahinter stehenden Säule. Robert sah sich um. Überall ragten riesige Säulen in den Himmel, allesamt mit wunderschönen Schnitzereien verziert. Und so weiß, dass es ihn fast blendete. Er bekam ein wenig Angst, dass er nicht im Land der Mathematik, sondern vielleicht doch wieder bei dem ekelhaften Fisch gelandet war. Da hörte er ein leises Räuspern. Mähhh, ertönte es hinter einer Säule und hervor trat eine ältere Ziege. Robert wunderte sich wieder – wo war er nur? Da hörte er einen lauten Schrei: Oh nein, oh nein, die Ziege ist wieder da, rief es mit bekannter Stimme aus dem Gras heraus. Da war er ja endlich, der Zahlenteufel! Wie immer klein, rot, alt und mit dem niedlichen Schnurrbart, den Robert mittlerweile sehr lieb gewonnen hatte.
Was ist denn so schlimm an einer Ziege?, fragte er verdutzt. Der Zahlenteufel erwiderte: Diese Ziege taucht hier andauernd auf und macht alle Leute im Land der

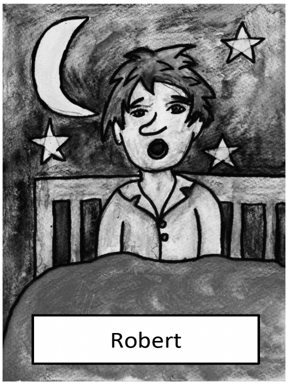
Mathematik verrückt. Die drehen immer alle durch, sobald sie das Gemecker hören.

Sein Gesichtsausdruck wurde plötzlich finster und Robert fragte sich: Ach herrjemine, was könnte denn die Leute im Land der Mathematik so aus der Fassung bringen? Mathematik ist doch eigentlich was Eindeutiges, was Festes..?
Gesprächsimpuls: Was meint ihr, was könnte die Ziege denn schlimmes mit der Mathematik machen, so schlimm, dass alle Angst vor ihr haben?
Der Zahlenteufel runzelte die Stirn: Robert, diese Ziege bringt uns hier ständig Paradoxien und Antinomien vorbei. Sie läuft einfach zu den Leuten und erzählt ihnen Dinge über Mathematik, die total verwirrend sind.
In dem Moment, als der Zahlenteufel seinen Satz beendet hatte, kam die Ziege auch schon angelaufen. Zahli sprang mit Robert hinter eine der riesigen weißen Säulen.
Was ist denn eine Paradoxie? Oder Antinomie? Oder wie hieß das jetzt nochmal?, fragte Robert ganz aufgeregt.
Eine Paradoxie ist eine Art Satz oder Aussage, die gegen deine oder eine wissenschaftliche Meinung geht. Das ist total verwirrend. Zum Beispiel..ähh – er erstarrte. Hinter ihnen stand die Ziege. Sie schaute mit ihren großen Augen ganz rätselhaft drein. Schließlich öffnete sie ihren Mund: Mäh. Kann ein allmächtiges Wesen etwas erschaffen, worüber es keine Macht hat?
Der Zahlenteufel schlug die Hände über seinem Kopf zusammen. Siehst du, sagte er, es geht schon wieder los mit dieser alten Ziege. Robert sah das Problem nicht ganz – warum war der Zahlenteufel denn so verwirrt?
Gesprächsimpuls: Versteht ihr das Problem mit der Frage der Ziege? Könnt ihr dem Robert mal helfen?
Der Zahlenteufel hatte sich wieder beruhigt: Okay, das war ja noch harmlos. Und mit Mathe hatte es nicht so viel zu tun, da bin ich beruhigt. Aber es gibt auch viele Paradoxien in der Mathematik. Und wenn's ganz schlimm kommt, dann gibt dir die Ziege eine Antinomie. Das ist dann nicht nur ein SCHEINBARER Widerspruch, sondern ein echter.
Zahli sah arg betrübt aus. Robert fragte: Gibt es sowas denn im Land der Mathematik? – Ja, klar, erwiderte der Zahlenteufel - Und am besten ist es dann, wenn man sich schon bevor die Ziege kommt darüber Gedanken macht. Weißt du was, Robert? Vielleicht könnten uns ja die Kinder wieder helfen.
Robert freute sich sehr, denn er erinnerte sich an die tolle Hilfe der Schülerinnen und Schüler bei der Suche nach einem Hotelzimmer.
Okay, Zahli!, sagte er, dann such doch mal ein paar Fragen der alten Ziege zusammen und erklär sie den Kindern. Vielleicht können Sie ja versuchen, diese Para – äh – Para-dingsdas zu lösen. *Gesprächsimpuls: Gesagt, getan! Der Zahlenteufel hat euch ein paar Videos mitgebracht. Die könnt ihr euch jetzt in Gruppen nacheinander anschauen und dann gemeinsam versuchen, nach einer Lösung zu suchen.*

11.3.6 Bilder

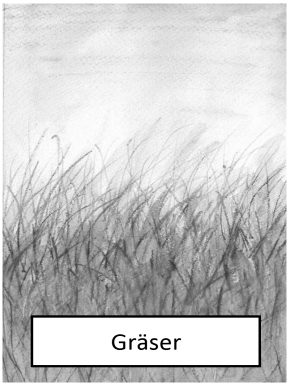


(a) Fisch



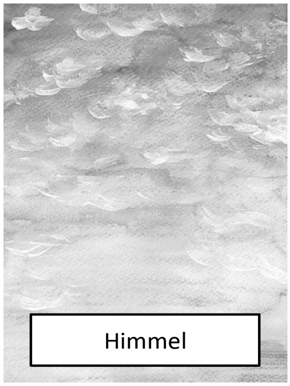
(b) Robert

(c) Zahlenteufel

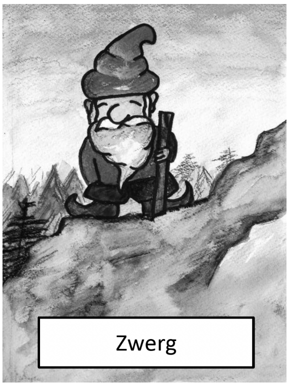


(d) Gräser

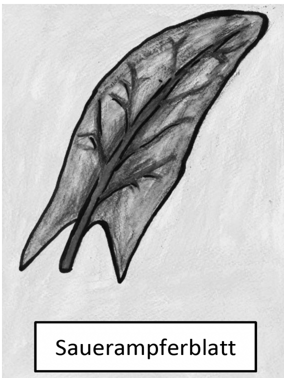
(e) Heuschrecke



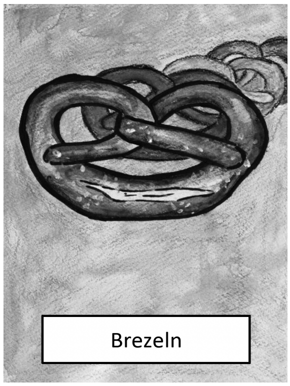
(f) Himmel



(g) Zwerg



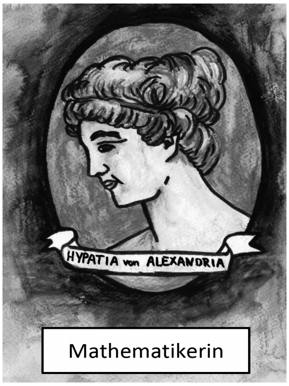
(h) Sauerampferblatt



(i) Brezeln

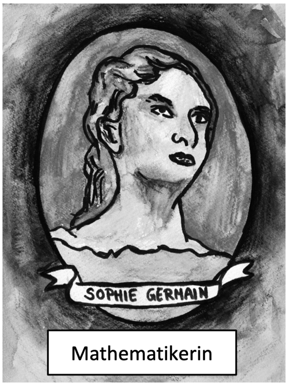
Abbildung 11.1: Illustrationen der in den Unterrichtsentwürfen verwendeten laminierten Bildkarten

(a) Bäcker

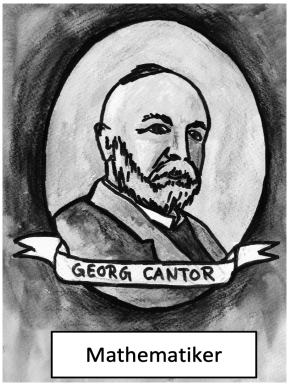


(b) Hypatia von Alexandria

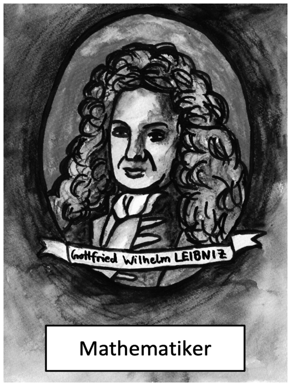
(c) Ada Lovelace



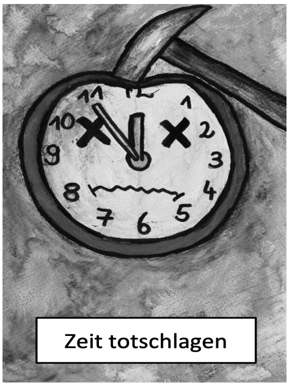
(d) Sophie Germain



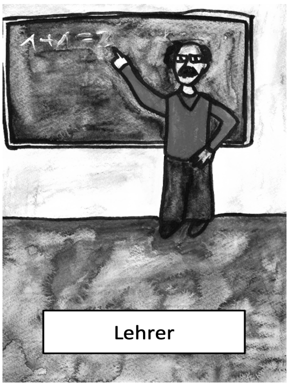
(e) Georg Cantor



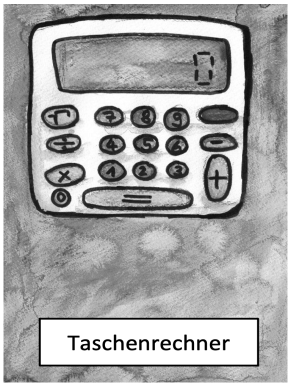
(f) Gottfried Wilhelm Leibniz



(g) Zeit totschlagen



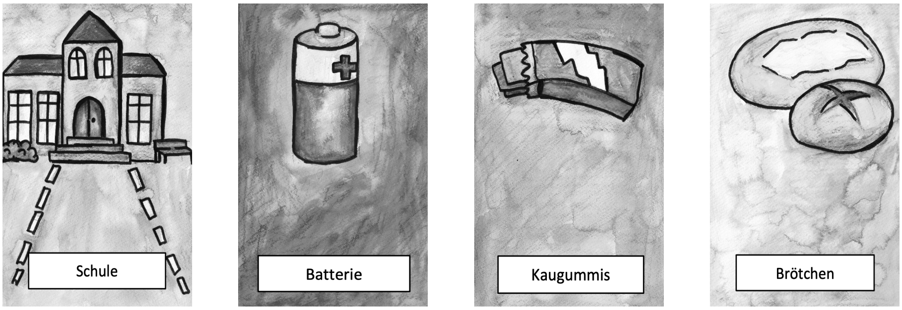
(h) Lehrer



(i) Taschenrechner

Abbildung 11.2: Illustrationen der in den Unterrichtsentwürfen verwendeten laminierten Bildkarten

Abbildung 11.4: Illustration von Hilberts Hotel mit Zahlenteufel



(a) Schule (b) Batterie (c) Kaugummis (d) Brötchen

Abbildung 11.3: Illustrationen der in den Unterrichtsentwürfen verwendeten laminierten Bildkarten

11.4 Vorschläge für Anknüpfungspunkte in den Lehrplänen

Im Folgenden kann ein tabellarischer Vergleich der Lehrpläne der Bundesländer Brandenburg, Sachsen-Anhalt und Sachsen in Bezug auf Anknüpfungspunkte zum Begriff der Unendlichkeit eingesehen werden. An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass der Lehrplan im Land Brandenburg die Inhalte und Kompetenzen nicht in Klassen- oder Jahrgangsstufen teilt, sondern in Niveaustufen. Diese Niveaustufen werden auch für Vorschläge bei Schüler*innen mit sonderpädagogischem Förderbedarf unterbreitet, was im Folgenden allerdings nicht weiter betrachtet werden soll. Die Niveaustufen werden mit den Buchstaben von A bis H gekennzeichnet und ermöglichen eine „Durchlässigkeit des Schulsystems“ (Ministerium für Bildung, Jugend und Sport Land Brandenburg, 2017, S. 13). Die in Tabelle 11.10 veranschaulichte Zusammenfassung bezieht sich auf eine gymnasiale Schullaufbahn bis Klasse 10 (mit Grundschulphase bis Klasse 6).

Schulanfangsphase	A, B, in Teilen C
Jahrgangsstufen 3-4	C, in Teilen D
Jahrgangsstufe 5	C-D
Jahrgangsstufe 6	D, in Teilen E
Jahrgangsstufe 7	E
Jahrgangsstufe 8	F
Jahrgangsstufe 9	G
Jahrgangsstufe 10	H

Tabelle 11.10: Zuordnung der Niveaustufen zu den jeweiligen Jahrgangsstufen nach Lehrplan Land Brandenburg

In Tabelle 11.11 werden die Niveaustufen und nicht die zugehörigen Klassen - bzw. Jahrgangsstufen eingearbeitet, um den Gedanken der Durchlässigkeit weiterzuführen. Die Lehrpläne der Länder Sachsen-Anhalt und Sachsen wurden, in Anlehnung an den Lehrplan des Landes Brandenburg, auch ab Klasse 10 nicht weiter eingebunden/ betrachtet.

fachlicher Aspekt zum Unendlichkeitsbegriff	**Anknüpfungspunkte Sachsen**	**Anknüpfungspunkte Sachsen-Anhalt**	**Anknüpfungspunkte Brandenburg**
Unendliches Weiterzählen	Vorgänger und Nachfolger, Untersuchen, Beschreiben und Fortsetzen von Zahlenfolgen (Kl. 3, S. 18 Grundschule)	Vorgänger, Nachfolger (Kl. 2, S.8 Grundschule), natürliche Zahlen über 1 000 000, Zahlenstrahl, Vorgänger und Nachfolger (Kl. 5/6, S. 27 Gymnasium)	Musterfolgen fortsetzen (B, S. 29), Angeben von Vorgänger, Nachfolger und Nachbarzehnern (B, S. 34), Angeben der Nachbarzahlen (C, S. 34)

fachlicher Aspekt zum Unendlichkeitsbegriff	**Anknüpfungspunkte Sachsen**	**Anknüpfungspunkte Sachsen-Anhalt**	**Anknüpfungspunkte Brandenburg**
Existenz unendlich großer Zahlbereich	Kennen des Operierens mit Zahlen bis 1 000 000 und darüber hinaus (Kl. 4, S. 29 Grundschule), Ausblick auf Versuche zum Finden von Primzahlformeln und auf den Beweis, dass es keine größte Primzahl gibt (Kl. 6, Wahlbereich 3, S. 15 Gymnasium)	Wahrheit von Existenzaussagen durch Angabe eines Beispiels begründen (Kl. 5/6, S. 12 Gymnasium)	Erklären der Dichtheit der gebrochenen Zahlen auch am Zahlenstrahl (D, S. 36), Erklären der Dichtheit der rationalen Zahlen auch an der Zahlengeraden (E, S. 36)
Unterscheiden endlicher und unendlicher Mengen	Strecken und Geraden (Kl. 4, S. 27 Grundschule)		
1-zu1-Zuordnungen vornehmen (Bijektion)	Darstellung der Beziehungen zwischen natürlichen, gebrochenen, ganzen und rationalen Zahlen im Mengendiagramm (Kl. 7, S. 17)	natürliche, gebrochene, ganze und rationale Zahlen unterscheiden und Beziehungen zwischen den Zahlbereichen veranschaulichen (Kl. 7/8, S.39 Gymnasium)	Zahlbereiche zueinander in Beziehung setzen (auch reelle Zahlen) (E,F,G, S. 22), Beschreiben der Beziehungen zwischen der Menge der ganzen Zahlen und der Menge der natürlichen Zahlen (E, S. 36)
Periodische Zahlen		periodischer Dezimalbruch (Kl. 5/6, S. 30 Gymnasium)	Darstellen des Ergebnisses einer Division als gebrochene Zahl und als Dezimalzahl (auch periodische Dezimalzahlen) (E, S. 36)
Phänomenologie/ Paradoxa			Zählen und Rechnen in historischer Entwicklung (Themenfeld 4, Wahlpflichtfach ab Jahrgangsstufe 7, S. 62)
Mächtigkeit von $\mathbb{N}$			Beweistechniken und Vollständige Induktion (Themenfeld 15, Wahlpflichtfach ab Jahrgangsstufe 9, S. 62)
potentielle vs. aktuale Unendlichkeit	Strecken und Geraden (Kl. 4, S. 27 Grundschule)		Beschreiben und Reflektieren eines Verfahrens zur Einschachtelung von Quadratwurzeln oder Pi (*besonders Reflektieren*, G, S. 38)
Beweis Überabzählbarkeit $\mathbb{R}$	Ausblick auf reelle Zahlen (Kl. 9, S. 24 Gymnasium)		

fachlicher Aspekt zum Unendlichkeitsbegriff	**Anknüpfungspunkte Sachsen**	**Anknüpfungspunkte Sachsen-Anhalt**	**Anknüpfungspunkte Brandenburg**
Phänomene in $\mathbb{R}$			Zahlen ordnen (auch reelle Zahlen) (G, S. 22)
Verständnis zur Existenz unendlich vieler Unendlichkeiten			Mathematische Logik (Themenfeld 16, Wahlpflichtfach ab Jahrgangsstufe 9, S. 62)

Tabelle 11.11: Tabellarische Darstellung der Anknüpfunspunkte für curriculare Inhalte bezüglich des Unendlichkeitsbegriffs in den Lehrplänen der Länder Sachsen, Sachsen-Anhalt sowie Brandenburg